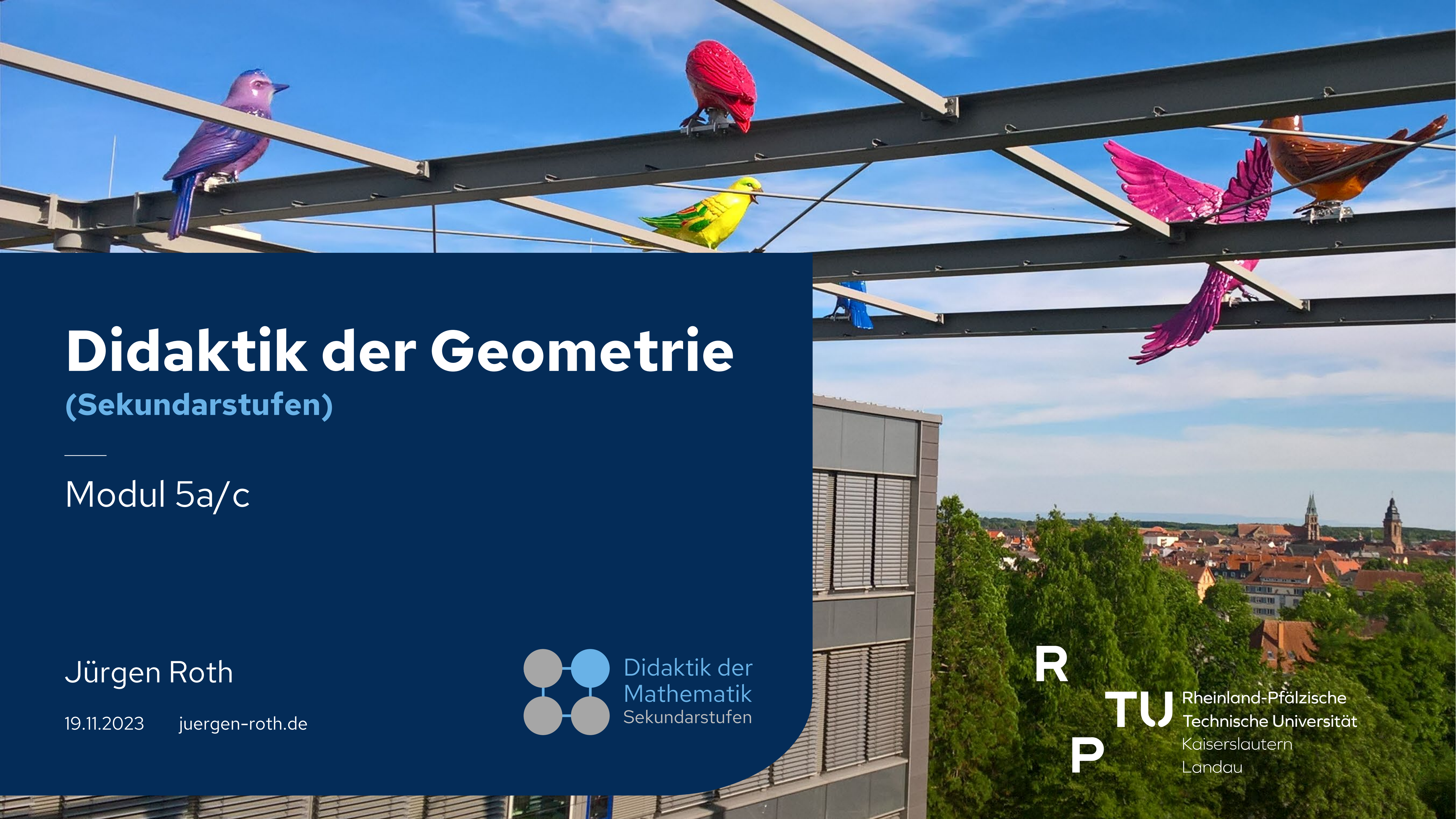


Didaktik der Geometrie

(Sekundarstufen)

Modul 5a/c

Jürgen Roth

19.11.2023 juergen-roth.de

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Didaktik der Geometrie
(Sekundarstufen)

1. Ziele und Inhalte
2. Begriffsbildung
3. Konstruieren
4. Argumentieren und Beweisen
5. Problemlösen
6. Entdeckendes Lernen

juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-geometrie/

RPTU

2

Didaktik der Geometrie (Sekundarstufe)

Begriffsbildung

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 2: Begriffsbildung

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

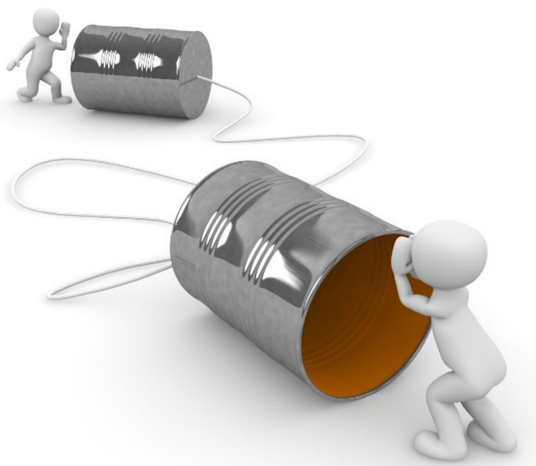
Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Kapitel 2: Begriffsbildung

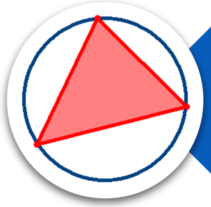
Was ist ein Begriff?

Begriffe …

- sind die Bausteine des Wissens,
- charakterisieren eine ganze Klasse von Objekten,
- werden gewonnen durch
  - Konstruktion (genetische Definition),
  - Spezifikation aus einem Oberbegriff (charakterisierende Definition),
- verdichten Informationen,
- organisieren das Verhalten,
- sind die Grundlage der sprachlichen Kommunikation,
- beeinflussen die Leistungen des Gedächtnisses und das Problemlösen.

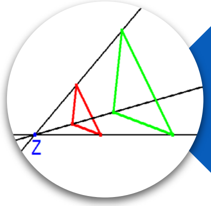


Begriffe und Problemlösen
Begriffe als ...



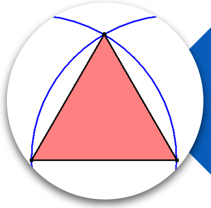
Quelle von Problemstellungen

Begriff: Umkreis
Welche Polygone besitzen einen Umkreis?



Mittel zum Präzisieren von Problemstellungen

Wann sind Figuren ähnlich?
Begriff: Ähnlichkeitsabbildung

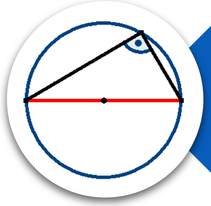


Lösungshilfen für Probleme

Dreieckskonstruktion
Begriff: Ortslinie

Lösungen von Problemen

Schnittfläche beim Schneiden einer Wurst
Begriff: Ellipse

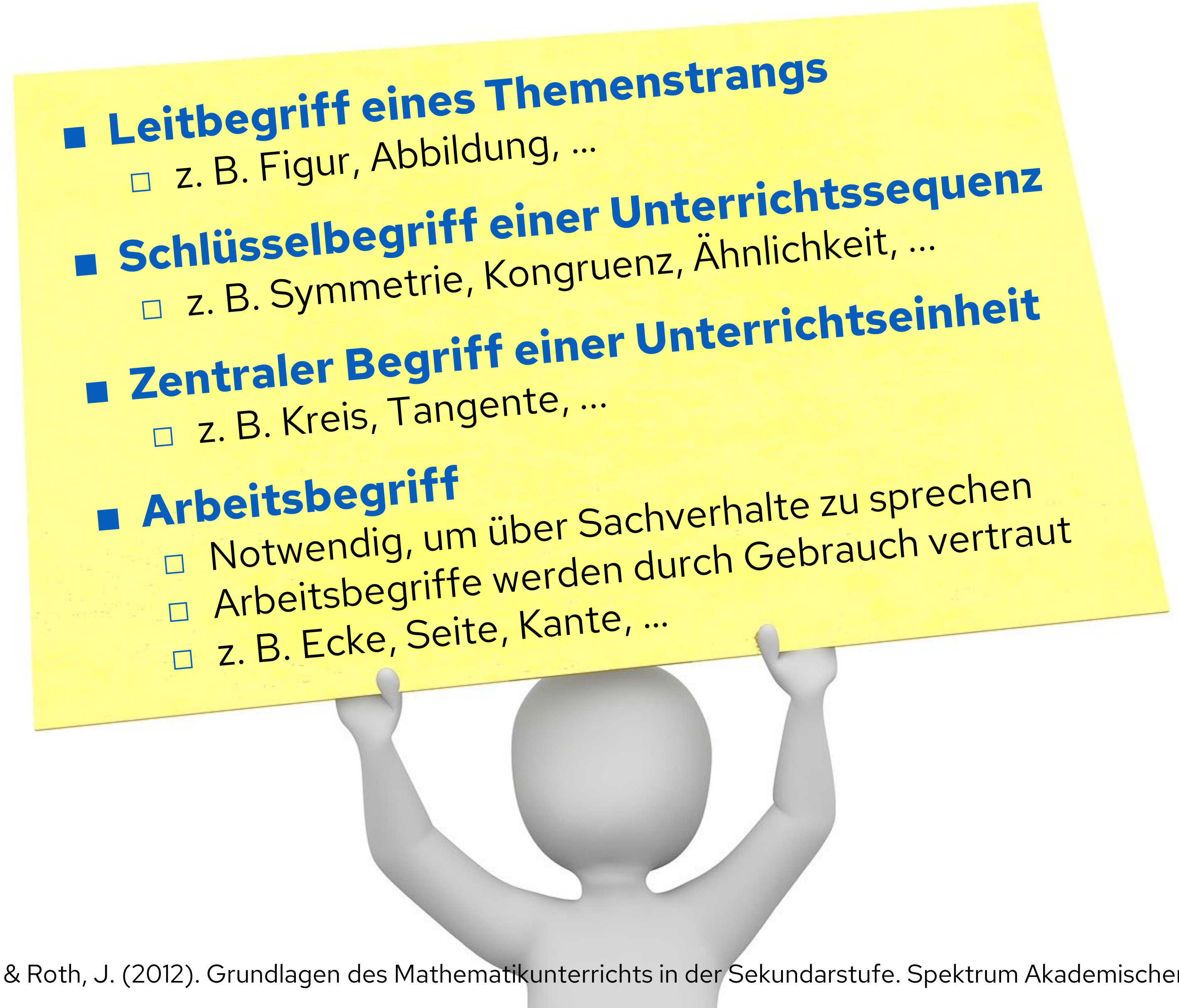


Mittel zur Sicherung von Problemlösungen

Wo liegen die Orte, von denen aus man eine Strecke unter einem rechten Winkel sieht?
Begriff: Thaleskreis

Vollrath, H.-J. & Roth, J. (2012). Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Spektrum Akademischer Verlag, 229-231

Rolle von Begriffen



Vollrath, H.-J. & Roth, J. (2012). Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Spektrum Akademischer Verlag, 227f

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

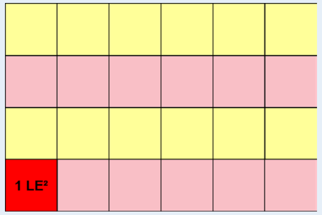
Kapitel 2: Begriffsbildung

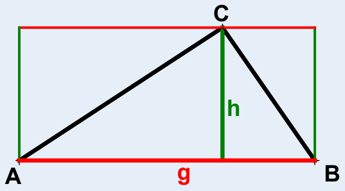
Modelle langfristigen Begriffslernens

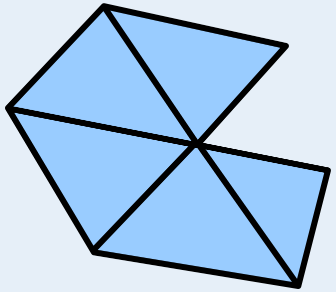
Lernen durch Erweiterung

- Neue Objekte beseitigen Grenzen, auf die man beim Operieren mit bisherigen Objekten stößt.
  → Vertrautes erscheint in neuem Licht.

- **Beispiel**
  Erarbeitung des Flächeninhaltsbegriffs



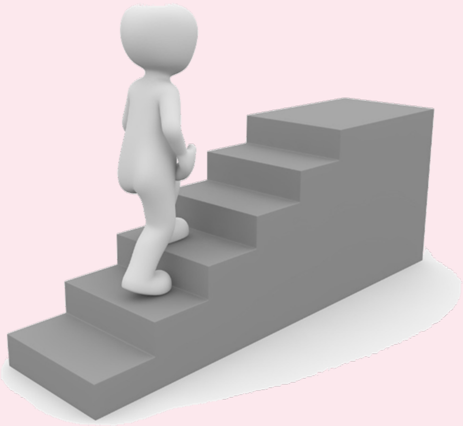




Lernen als Ersteigen von Stufen

- Reflexion und Analyse bereits erworbenen Wissens führt zu Wissen höherer Qualität.
  → Höhere Stufe

- Vgl. Stufen des Begriffsverständnisses



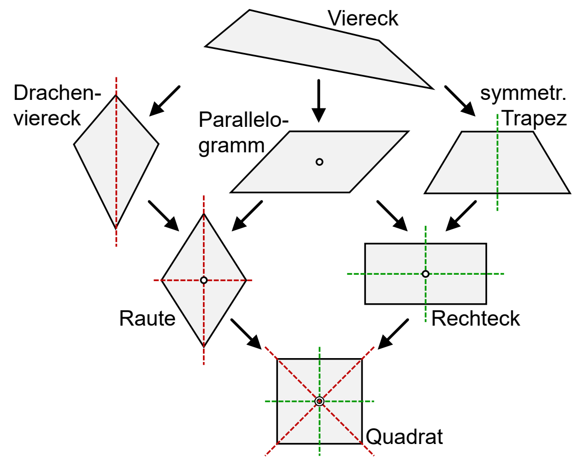
 Weigand et al. (2018). Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Berlin: Springer Spektrum, 104ff

Stufen des Begriffsverständnisses

Stufe 4: Formales Begriffsverständnis
- Einbettung des Begriffs in einen axiomatischen Aufbau der Geometrie

Beispiele: (1) Gesetzmäßigkeiten beweisen.
(2) Gleichwertigkeit von Definitionen erkennen.

Stufe 3: Integriertes Begriffsverständnis
- Der Begriff als Teil eines Begriffsnetzes
- Beziehungen von Eigenschaften untereinander und Beziehungen zu anderen Begriffen kennen.



Stufe 2: Inhaltliches Begriffsverständnis
- Der Begriff als Träger von Eigenschaften.
- Eigenschaften kennen.

Diagonalen
Winkel
Seiten

Stufe 1: Intuitives Begriffsverständnis
- Der Begriff als Phänomen.
- Beispiele (er)kennen.

Rechteck

 Weigand et al. (2018). Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Berlin: Springer Spektrum, 104ff

Lernen geometrischer Begriffe

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Aufbau angemessener Vorstellungen (mentale Modelle)

- Handlungen an konkreten Objekten
- Wahrnehmungen an Gegenständen und Bildern
- Verbalisierungen zu geometrischen Objekten (z.B. Kopfgeometrie)

Erwerb von Kenntnissen

- Eigenschaften von Begriffen
- Beziehungen zwischen Eigenschaften
- Beziehungen zu anderen Begriffen

Aneignung von Fähigkeiten

- Konstruieren von Figuren
- Berechnen von Längen, Flächen- & Rauminhalten
- Probleme lösen

Weigand et al. (2018). Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Berlin: Springer Spektrum, 91-96
https://www.geogebra.org/m/DUXXFEC4 https://www.geogebra.org/m/tr3tgana

Verstehen eines Begriffs

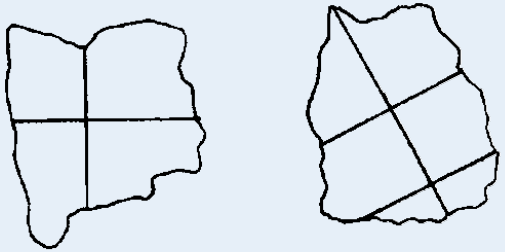
Lernende haben einen Begriff verstanden, wenn sie

- Bezeichnung des Begriffs kennen,
- Beispiele angeben und jeweils begründen können, warum es sich um ein Beispiel handelt,
- Gegenbeispiele angeben und begründen können, weshalb etwas nicht unter den Begriff fällt,
- charakteristische Eigenschaften des Begriffs kennen (Dies umfasst die Fähigkeit zur Angabe von Definitionen.),
- Ober-, Unter- und Nachbarbegriffe kennen,
- mit dem Begriff arbeiten können (z. B. beim Konstruieren und beim Problemlösen).

Erarbeiten eines Begriffs

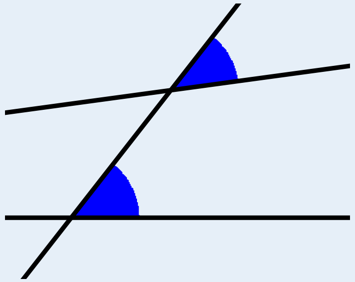
Erfahrungen zum Begriff sammeln

- Handlungen (enaktive Repräsentation)



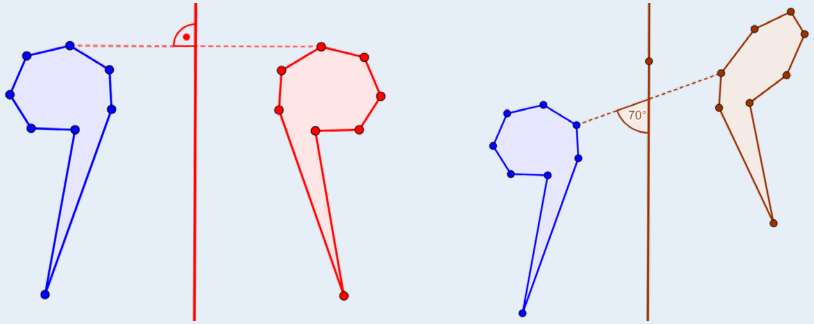
Objekte darbieten

- Beispiele für Begriffe (ikonische Repräsentation)



Merkmale entdecken

- Prinzip der Variation
- Prinzip des Kontrasts
- Sprache (benennen, beschreiben)

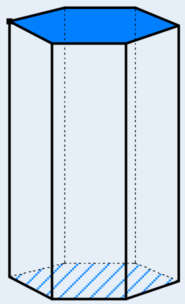


https://www.geogebra.org/m/gtxk9jdk https://www.geogebra.org/m/xmpjvc6m

Erarbeiten eines Begriffs

Definition erarbeiten

- Genetische Definition
  - Gibt an, wie das Objekt entsteht
- Charakterisierende Definition
  - Oberbegriff und
  - definierende (charakterisierende) Eigenschaft
    $\Leftrightarrow$ notwendige & hinreichende Bedingung



Charakterisierende Definition: Gerades Prisma

Ein Körper heißt gerades Prisma, wenn er von zwei zueinander kongruenten und parallelen n-Ecken sowie n Rechtecken begrenzt ist.

Kritisch Reflektieren

- Definition durch möglichst „schwache" Forderung
- Bezeichnung
  - Herkunft
  - evtl. Abgrenzung gegen Umgangssprache

Präsenzübung:

Geben Sie mehrere verschiedene genetische und charakterisierende Definitionen für den Begriff Parallelogramm an.

Weigand et al. (2018). Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Berlin: Springer Spektrum, 97-100
https://www.geogebra.org/m/dewvjspg https://www.geogebra.org/m/tr3tgana

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 2: Begriffsbildung

Unterrichtsphasen beim Erarbeiten zentraler Begriffe

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Einstieg
- An einem geeigneten Problemkontext werden ersten Vorstellungen vom Begriff entwickelt.

Erarbeitung
- Inhalt des Begriffs herausarbeiten.
- Umfang des Begriffs klären.

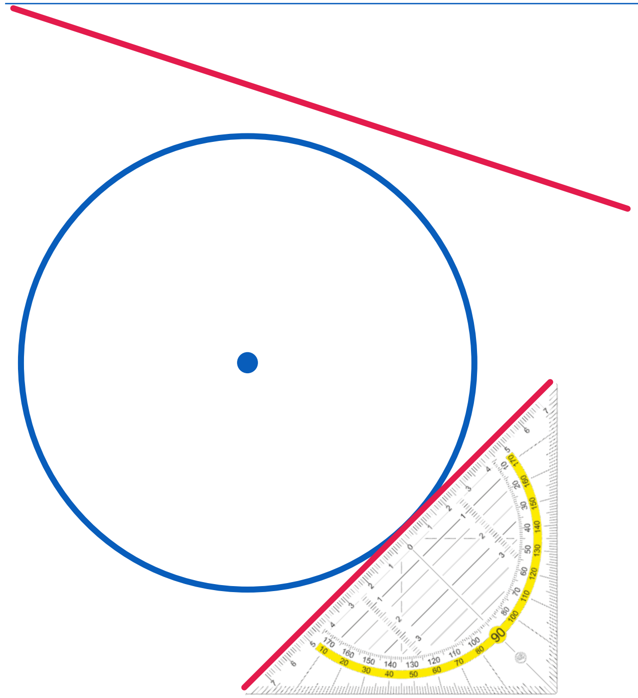
Sicherung
- Ergebnisse festhalten.
- Mit Hilfe geeigneter Aufgaben überprüfen, ob der Begriff erfasst ist & gegen andere Begriffe abgegrenzt werden kann (z. B. Frage nach Beispielen & Gegenbeispielen).

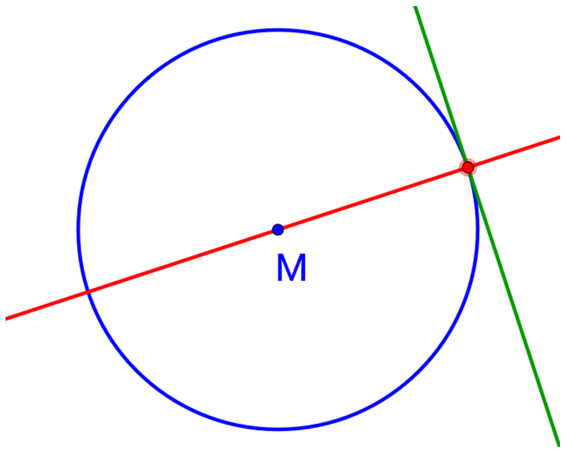
Vertiefung (Transfer)
- Querverbindungen zu anderen Begriffen herstellen.
- Spezialfälle (insbesondere Grenzfälle) betrachten (z. B. Variation definierender Eigenschaften).
- Anwendungen, ...

Verankerung in der kognitiven Struktur

Weigand et al. (2018). Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Berlin: Springer Spektrum, 104ff

Beispiel: Tangente an einen Kreis





Einstieg
Wie viele Punkte können ein Kreis & eine Gerade gemeinsam haben?

Erarbeitung (Vgl. Abb. & GeoGebra-Datei)

Sicherung
1. **Ergebnisse festhalten**
   Tangente → 1 Berührpunkt
   Sekante → 2 Schnittpunkte
   Passante → keine gem. Punkte
2. **Verständnis mit Aufgaben prüfen** → Tangente zeichnen!

Vertiefung
- Besitzt die Figur aus Kreis und Tangente eine Symmetrieachse?
- Ja! ⇒ Tangente senkrecht zum Berührpunktradius.
- Wie kann man die Tangente konstruieren?

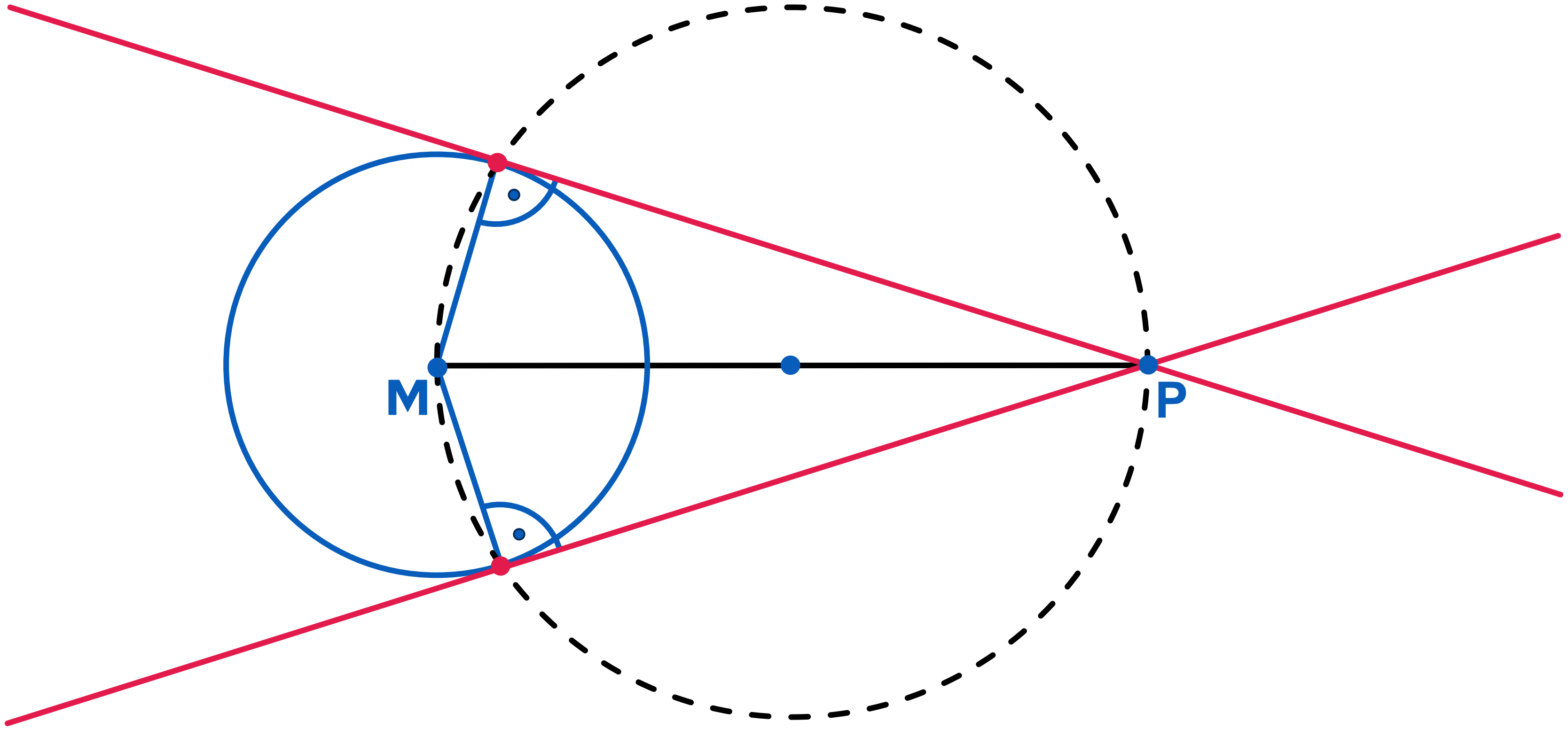
https://www.geogebra.org/m/WWf7MvD3

Beispiel: Tangente an einen Kreis

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Vertiefung:

- Wie viele Tangenten an den Kreis verlaufen durch den Punkt P?
- Skizziere Sie!
- Wie kann man die Tangenten konstruieren?



Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 2: Begriffsbildung

Welche Arten geom. Begriffe gibt es?

Inhaltliche Einteilung

- Figurenbegriffe
- Abbildungsbegriffe
- Maßbegriffe

Strukturelle Einteilung

Ein geometrischer Objekt- oder Abbildungsbegriff heißt invariant gegenüber einer Abbildungsgruppe G, falls jede Abbildung aus G den Umfang des Begriffs auf sich abbildet.

Logische Einteilung

- Objekt- bzw. Eigenschaftsbegriffe
- Relationsbegriffe
- Funktionsbegriffe

Axiomatische Einteilung

- Grundbegriffe
  Kein Grundbegriff sollte mit Hilfe anderer Grundbegriffe definiert werden können!
- definierte Begriffe

Bemerkung

Im Geometrieunterricht werden auch manche definierbaren Begriffe als Grundbegriffe behandelt.

Beispiel: Dreieck

Inhaltliche Einteilung geom. Begriffe

	Figurenbegriffe	Abbildungsbegriffe	Maßbegriffe
Ebene Begriffe	Gerade Strecke Vieleck Kreis parallel kongruent achsensymmetrisch	Geradenspiegelung Drehung (Punkt) Kongruenzabbildung zentrische Streckung	Länge Winkelgröße Flächeninhalt
Räumliche Begriffe	Ebene Kugel parallel kongruent ebenensymmetrisch	Ebenenspiegelung Drehung (Achse) Kongruenzabbildung zentrische Streckung	Volumen

Logische Einteilung geom. Begriffe

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Objektbegriffe	Relationsbegriffe	Funktionsbegriffe
Objekte einer Grundmenge $\boldsymbol{G}$ (z. B. ebene Figuren, räumliche Figuren, bijektive Abbildungen, die gemeinsame Eigenschaften besitzen, lassen sich zu einer Untermenge zusammenfassen, die den Umfang eines Objektbegriffs in $\boldsymbol{G}$ bildet.	beschreiben Beziehungen zwischen geometrischen Figuren. Relation in einer Figurenmenge Relation zwischen zwei Figurenmengen	Die wichtigsten Funktions-begriffe in der Geometrie sind die Maßbegriffe. (Länge, Winkelmaß, Flächeninhalt & Volumen) Sie sind Funktionen, deren Definitionsbereich eine spezielle Figurenmenge und deren Zielmenge eine Menge von Größen ist.

Relationsbegriffe in einer Figurenmenge

Relation	Figurenmenge
ist kongruent zu	Figuren der Ebene oder des Raumes
ist ähnlich zu	Figuren der Ebene oder des Raumes
ist zerlegungsgleich zu	Vielecke oder Körper
ist parallel zu	Geraden der Ebene oder des Raumes; Ebenen des Raumes
ist orthogonal zu	Geraden der Ebene oder des Raumes; Ebenen des Raumes
ist Wechselwinkel zu	Winkel der Ebene

Relationsbegriffe zwischen zwei Figurenmengen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Relation	Vorbereich	Nachbereich
ist orthogonal zu	Geraden im Raum	Ebenen
ist Tangente zu	Geraden	Kreise
hat als Tangente	Kreise	Geraden
ist Mittelsenkrechte von	Geraden	Strecken
hat als Mittelsenkrechte	Strecken	Geraden
ist Umkreis von	Kreise	Dreiecke
hat als Umkreis	Dreiecke	Kreise

Funktions-begriff?

Funktions-begriff?

Funktionsbegriffe

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Funktion	Definitionsmenge	Zielmenge
hat als Mittelsenkrechte	Menge der Strecken	Menge der Geraden
hat als Umkreis	Menge der Dreiecke	Menge der Kreise
Längenmaßfunktion	Menge der Strecken	Menge der Längen
Winkelmaßfunktion	Menge der Winkel	Menge der Winkelmaße
Flächeninhaltsfunktion	Menge der Vielecke	Menge der Flächeninhalte
Volumenmaßfunktion	Menge der Polyeder	Menge der Volumina

Für diese Maßfunktionen ist in den jeweiligen Mengen eine Addition „+“ und eine Kleinerrelation „<“ definiert.
Diese Struktur ist zur Struktur der nichtnegativen reellen Zahlen bzgl. Addition und Kleinerrelation isomorph.
⇒ Zahlnamen können zur Bezeichnung der Größen benutzt werden.

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 2: Begriffsbildung

R
TU Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
P Kaiserslautern
Landau

Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen

Kapitel 2: Begriffsbildung

2.5 Relationsbegriffe: Ähnlichkeit

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

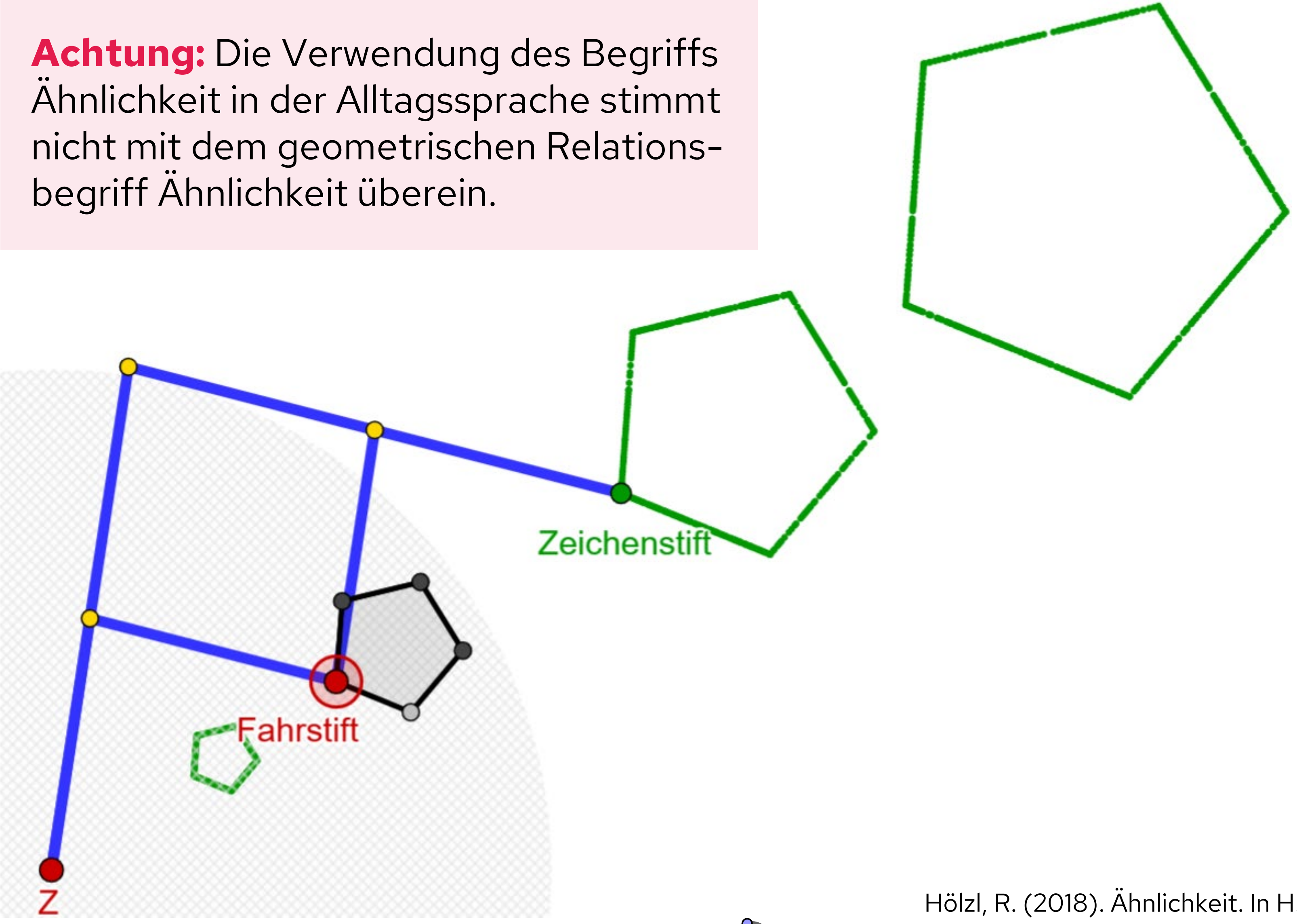
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 2: Begriffsbildung

2.5 Relationsbegriffe: Ähnlichkeit

Pantograf:
Grundvorstellung zur Ähnlichkeit

Achtung: Die Verwendung des Begriffs Ähnlichkeit in der Alltagssprache stimmt nicht mit dem geometrischen Relationsbegriff Ähnlichkeit überein.



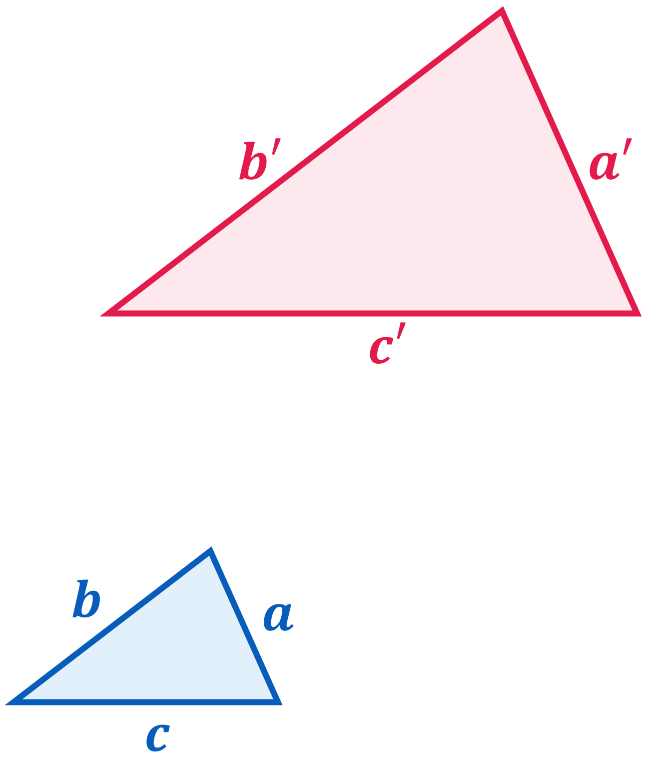
Grundvorstellung zur Ähnlichkeit:

Figuren sind ähnlich zueinander, wenn eine Figur durch **maßstäbliche Vergrößerung** oder **Verkleinerung** aus der anderen Figur hervorgeht.

https://www.geogebra.org/m/ujqjmwnv

Hölzl, R. (2018). Ähnlichkeit. In H.-G. Weigand et al. (Hrsg.). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 205f). Berlin: Springer Spektrum.

Aus der Grundvorstellung abgeleitete Einsichten



Formalisierung der Grundvorstellung zur Ähnlichkeit mit Hilfe des Vergrößerungsfaktors k:

$$a' = k \cdot a \ \wedge \ b' = k \cdot b \ \wedge \ c' = k \cdot c$$

Einsicht 1: Längen entsprechender Seiten zueinander ähnlicher Figuren, stehen im selben Verhältnis:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$$

Umformen liefert:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \ \wedge \ \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \ \wedge \ \frac{a'}{a} = \frac{c'}{c}$$

Weitere Umformungen zeigen:

Einsicht 2: Zueinander ähnliche Figuren, stimmen in entsprechenden Seitenverhältnissen überein.

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} \ \wedge \ \frac{b'}{c'} = \frac{b}{c} \ \wedge \ \frac{a'}{c'} = \frac{a}{c}$$

Hölzl, R. (2018). Ähnlichkeit. In H.-G. Weigand et al. (Hrsg.). Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I (S. 205f). Berlin: Springer Spektrum.

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Kapitel 2: Begriffsbildung

2.5 Relationsbegriffe: Ähnlichkeit

Fachliche Zugänge zur Ähnlichkeit

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Figurenbezogener Zugang (nach Euklid)

- Zwei Vielecke sind ähnlich, wenn sie gleiche Innenwinkel und entsprechende Seitenverhältnisse besitzen.
- Kern dieses Zugangs sind die Strahlensätze, mit denen Aussagen über ähnliche (Teil-)Figuren gefolgert werden.

Abbildungsgeometrischer Zugang

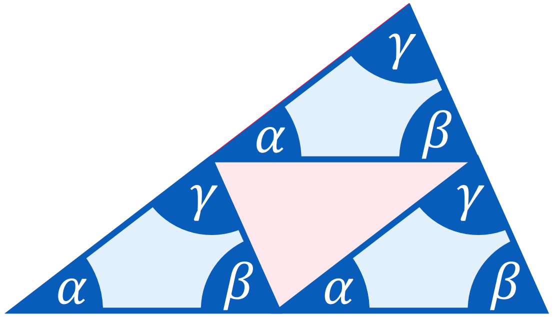
- Zwei Figuren sind ähnlich, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung gibt, die eine Figur auf die andere abbildet.
- Ähnlichkeitsabbildung: Verkettung (mindestens) einer zentrischen Streckung mit beliebig vielen Kongruenzabbildungen

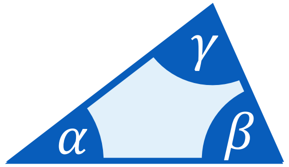
Anmerkungen für den Unterricht:

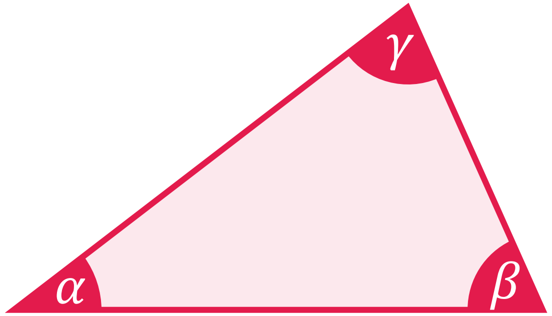
- Für den Unterricht sollten beide Aspekte adressiert werden.
- Der Einstieg sollte über die Grundvorstellung der Erzeugung von Ähnlichkeit durch maßstäbliche Vergrößerung bzw. Verkleinerung erfolgen.
- Auch die Beziehung zwischen Ähnlichkeit und Kongruenz, nämlich Kongruenz als Spezialfall der Ähnlichkeit bei Vergrößerungsfaktor 1, sollte thematisiert bzw. von den Lernenden über entsprechende Aufgaben entdeckt werden.

Hölzl, R. (2018). Ähnlichkeit. In H.-G. Weigand et al. (Hrsg.). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 203). Berlin: Springer Spektrum.

Eigenschaften ähnlicher Figuren

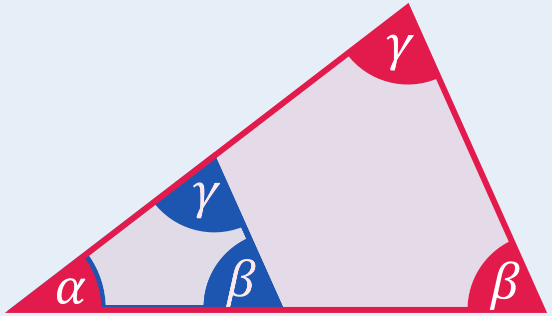






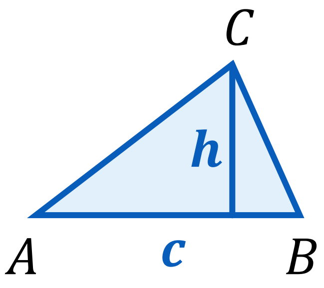
Entdeckungen

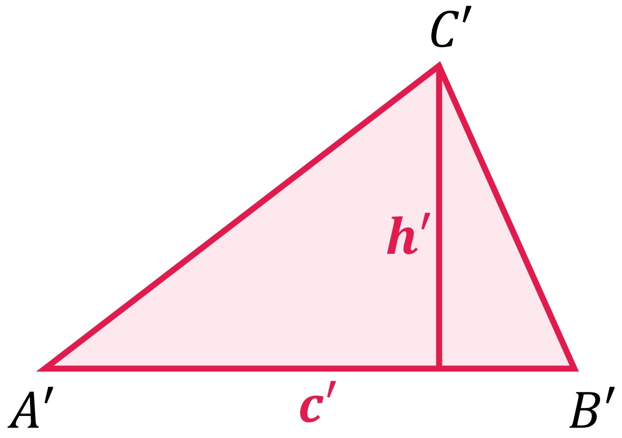
- Entsprechende Winkel in ähnlichen Figuren sind gleich groß.



- Wird eine Figur mit einem Vergrößerungsfaktor $\boldsymbol{k}$ $\left(\frac{1}{2}, 2, 3, \ldots\right)$ maßstäblich vergrößert bzw. verkleinert (halbiert, verdoppelt, verdreifacht, …), dann werden
  - alle Streckenlängen in der Figur ver–$\boldsymbol{k}$–facht (halbiert, verdoppelt, verdreifacht, …) und
  - der Flächeninhalt der Figur ver–$\boldsymbol{k}^2$–facht (geviertelt, vervierfacht, verneunfacht, …).

Eigenschaften ähnlicher Figuren





Bemerkung:
Für Figuren F‘ und F, die durch den Vergrößerungsfaktor k auseinander hervorgehen, kann man sich den Zusammenhang zwischen den Flächeninhalten $A_{F'} = k^2 \cdot A_F$ anhand der Flächeninhaltsformel $A_\Delta = \frac{1}{2} gh$ für Dreiecke klarmachen:

(1) $c' = k \cdot c$

(2) $h' = k \cdot h$

$$\Rightarrow A_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot c' \cdot h'$$

$$\overset{(1),(2)}{\triangleq} \frac{1}{2} \cdot (k \cdot c) \cdot (k \cdot h)$$

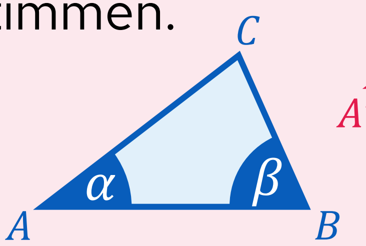
$$\overset{AG,KG}{\triangleq} k^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot c \cdot h\right)$$

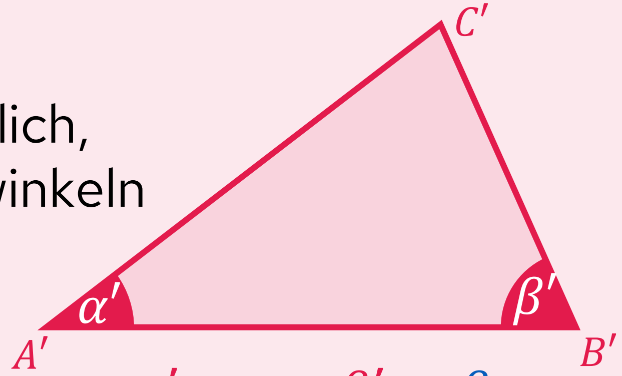
$$= k^2 \cdot A_{\Delta ABC}$$

Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

Ähnlichkeitssatz 1

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Innenwinkeln übereinstimmen.

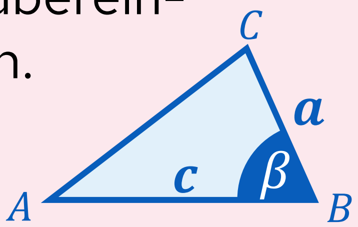


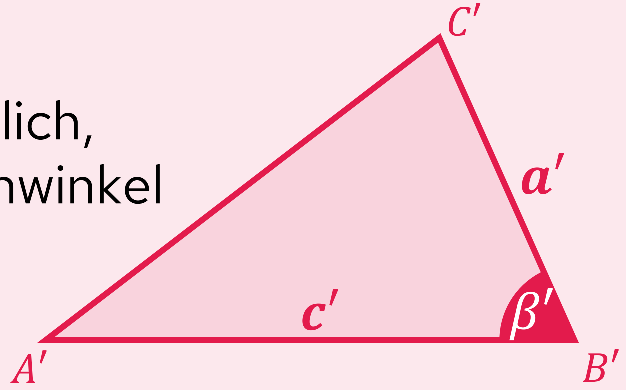


$$\alpha' = \alpha \wedge \beta' = \beta$$
$$\Rightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

Ähnlichkeitssatz 2

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in einem Innenwinkel und dem Verhältnis der anliegenden Seiten übereinstimmen.

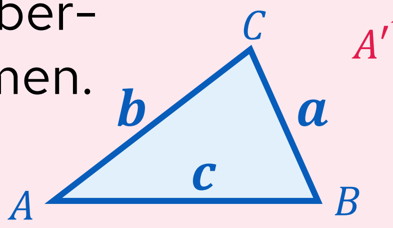


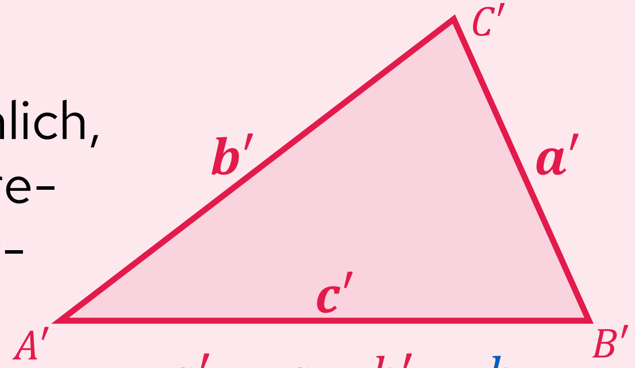


$$\beta' = \beta \wedge \frac{a'}{c'} = \frac{a}{c}$$
$$\Rightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

Ähnlichkeitssatz 3

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei entsprechenden Seitenverhältnissen übereinstimmen.

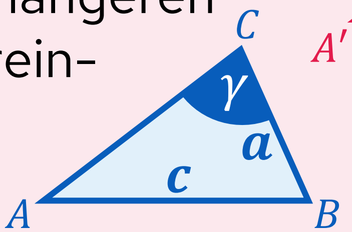


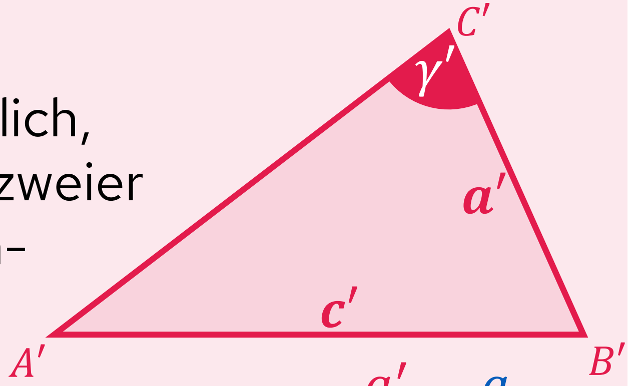


$$\frac{a'}{c'} = \frac{a}{c} \wedge \frac{b'}{c'} = \frac{b}{c}$$
$$\Rightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

Ähnlichkeitssatz 4

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der längeren Seite übereinstimmen.





$$\gamma' = \gamma \wedge \frac{a'}{c'} = \frac{a}{c}$$
$$\Rightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

Hölzl, R. (2018). Ähnlichkeit. In H.-G. Weigand et al. (Hrsg.). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 215f). Berlin: Springer Spektrum.

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

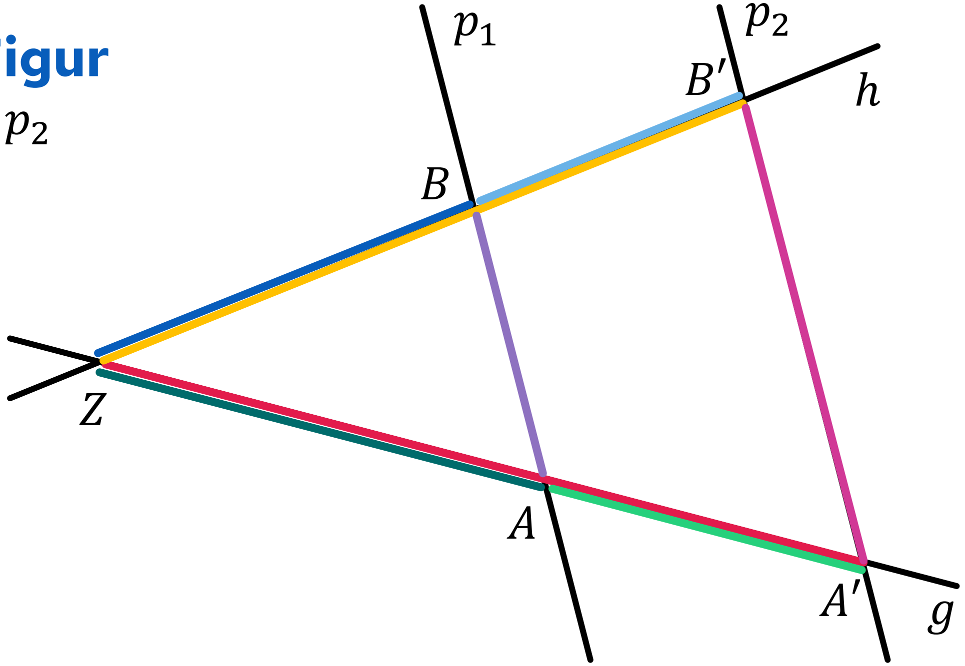
Kapitel 2: Begriffsbildung

2.5 Relationsbegriffe: Ähnlichkeit

Strahlensätze - Verhältnisgleichungen

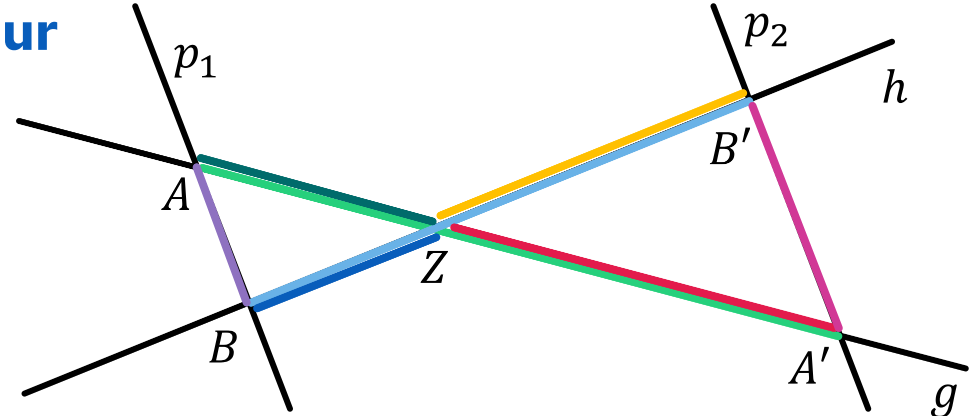
V-Figur

$p_1 \parallel p_2$



X-Figur

$p_1 \parallel p_2$



Strahlensatzkonfiguration

Zwei Geraden g und h, die sich in einem Punkt Z schneiden, werden von zwei zueinander parallelen Geraden p_1 und p_2 geschnitten.

1. Strahlensatz

Bei einer Strahlensatzkonfiguration verhalten sich die Längen der Streckenabschnitte auf der Gerade h wie die Längen der entsprechenden Streckenabschnitte auf der Gerade g.

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}}$$

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{BB'}}$$

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{ZB'}}$$

2. Strahlensatz

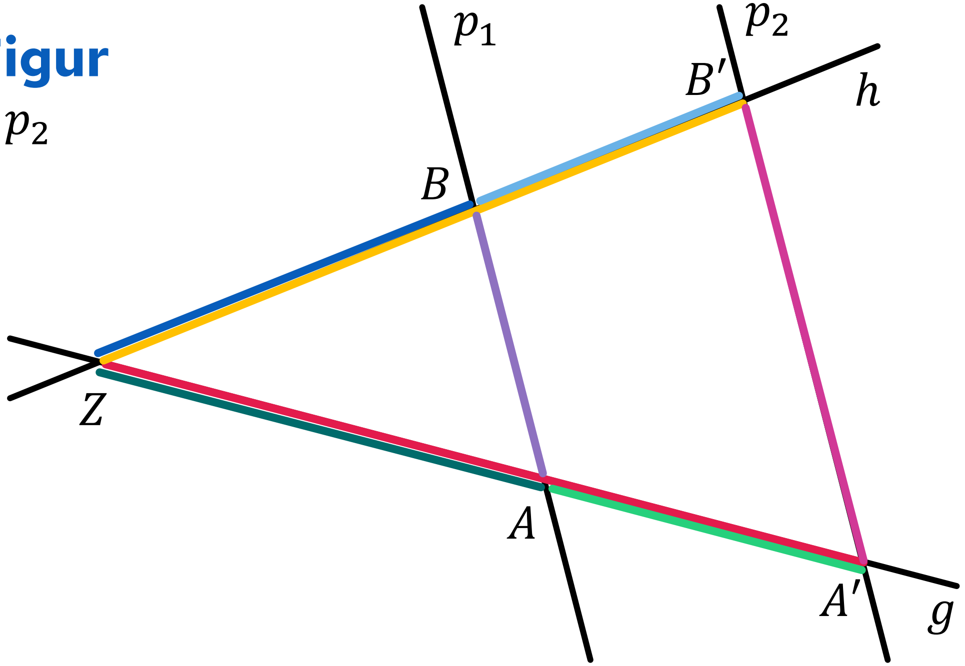
Bei einer Strahlensatzkonfiguration verhalten sich die Längen der Streckenabschnitte auf der Geraden g (bzw. h) wie die Längen der entsprechenden Parallelenabschnitte.

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}}$$

Strahlensätze - Verhältnisgleichungen

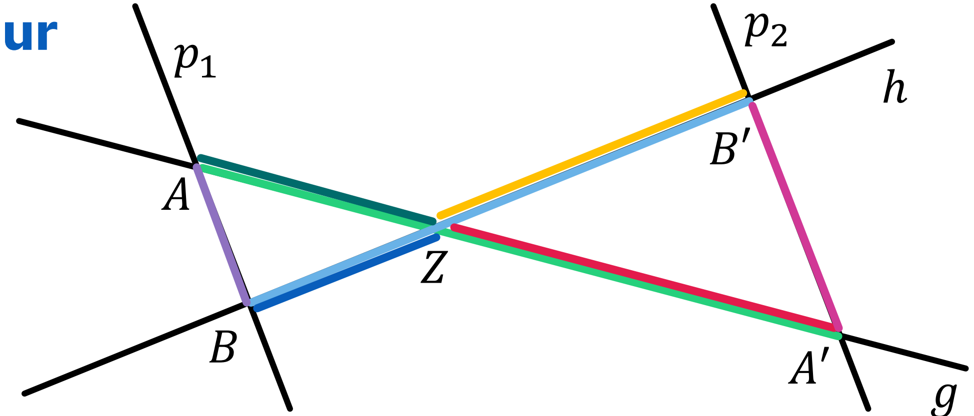
V-Figur

$p_1 \parallel p_2$



X-Figur

$p_1 \parallel p_2$



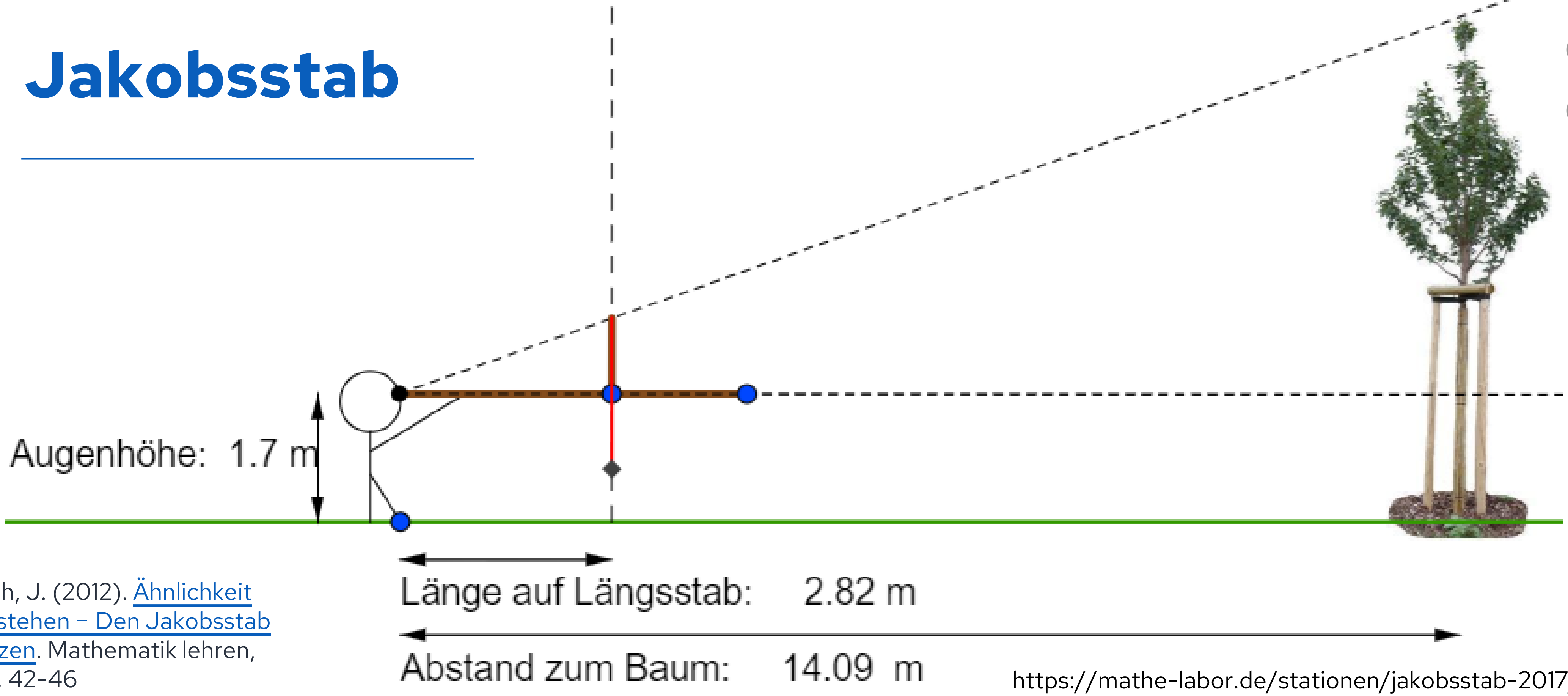
Bemerkungen

- Die Strahlensätze lassen sich über die Ähnlichkeit der Dreiecke ΔZAB und $\Delta ZA'B'$ oder die zentr. Streckung $Z_{Z,k}$ mit Streckungszentrum Z und Streckungsfaktor $k = \pm\frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}}$ beweisen.
- In den Strahlensätzen werden aus der Parallelität $p_1 \parallel p_2$ der Geraden p_1 und p_2 Aussagen zu Streckenverhältnissen gefolgert.
- Umgekehrt lässt sich aus der Gleichheit bestimmter Streckenverhältnisse auf die Parallelität der Geraden p_1 und p_2 schließen:

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}} \quad \Rightarrow \quad p_1 \parallel p_2$$

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{BB'}} \quad \Rightarrow \quad p_1 \parallel p_2$$

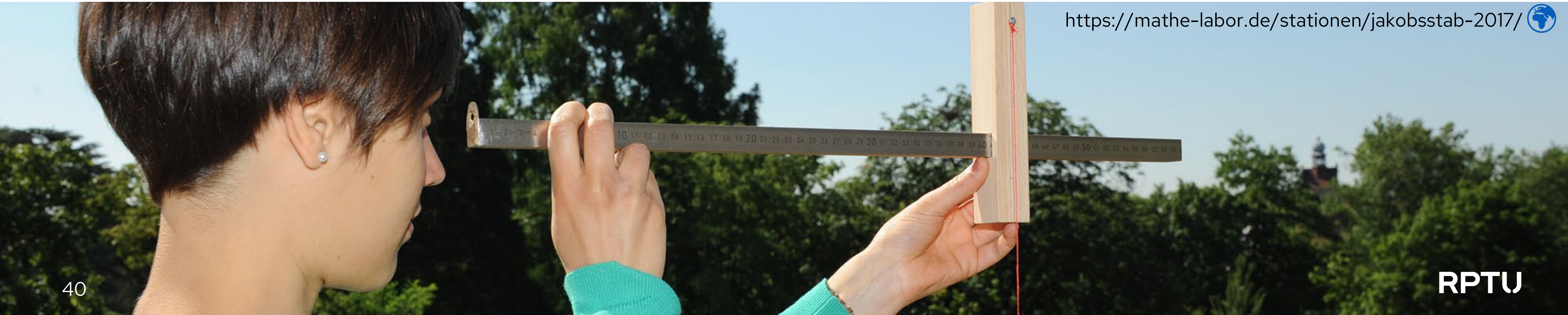
Jakobsstab



Roth, J. (2012). Ähnlichkeit verstehen – Den Jakobsstab nutzen. Mathematik lehren, 172, 42-46

https://mathe-labor.de/stationen/jakobsstab-2017/a/teil2/ → Simulation 5

https://mathe-labor.de/stationen/jakobsstab-2017/



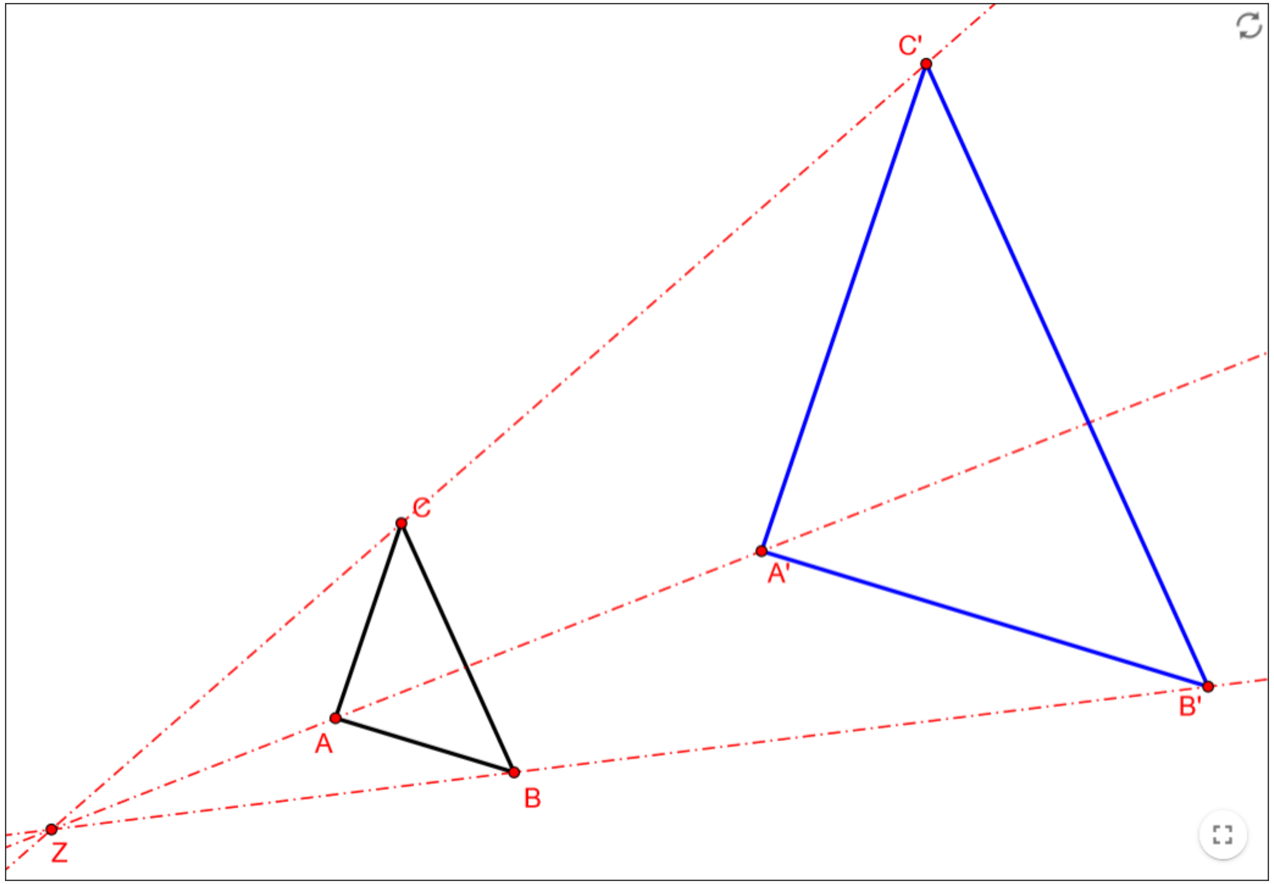
Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 2: Begriffsbildung

2.5 Relationsbegriffe: Ähnlichkeit

Zentrische Streckung



Eine **zentrische Streckung $Z_{Z,k}$** wird durch einen Punkt, das Streckungszentrum Z, und eine reelle Zahl, den Streckungsfaktor k, eindeutig festgelegt.

Bemerkungen

Die Gerade AA' durch einen Punkt A und seinen Bildpunkt $A' = Z_{Z,k}(A)$ wird durch Z in zwei Halbgeraden zerlegt.

$k > 0$: A und A' liegen auf derselben Halbgerade bzgl. Z.

$k = 1$: $Z_{Z,1} = id$ (identische Abbildung)

$k = 0$: Für alle Punkte P der Ebene gilt: $P' = Z_{Z,0}(P) = Z$

$k < 0$: A und A' liegen auf verschiedenen Halbgeraden bzgl. Z.

$k = -1$: $Z_{Z,-1} = P_z$ (Punktspiegelung)

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen

Kapitel 2: Begriffsbildung

2.5 Relationsbegriffe: Ähnlichkeit

Typische Probleme von Lernenden

Aufstellen von Verhältnisgleichungen

- Identifizieren von Strecken, die geeignet ins Verhältnis gesetzt werden können.
- Schwierigkeit Längen entsprechender Seiten flexibel ins Verhältnis zu setzen.
- Versuch „Merkregeln" oder bereits bearbeitete Aufgaben strukturgleich zu nutzen.

  Beispiel: Eine Aufgabenbearbeitung, bei der jeweils eine längere zu einer kürzeren Seite ins Verhältnis gesetzt wurde, wird zu einer Merkregel „lang zu kurz" verallgemeinert. Dies führt dazu, dass nur noch solche Verhältnisse gesucht und gebildet werden.

Geom. Verständnis des Ähnlichkeitsbegriffs

- Fehlende Grundvorstellung zur Ähnlichkeit von Figuren
- Unfähigkeit zueinander ähnliche Dreiecke zu erkennen

Verständnis des Verhältnisbegriffs

- Bruchzahlen, Prozente und Proportionen werden nicht als unterschiedliche Perspektiven, auf denselben Sachverhalt wahrgenommen sondern als unabhängige Aspekte abgespeichert.
- Da Verhältnisse einheitsfrei sind, können Zusammenhänge zu Einheiten in realen Situationen beliebig hergestellt werden. Dies fällt Lernenden schwer.
- Probleme bei der Unterscheidung zwischen absoluten Verhältnissen (Bei Fußballspielen macht es einen Unterschied ob sie 3:1 oder 6:2 ausgehen.) und relativen Verhältnissen, also Proportionalitätskonstanten.

Barzel, B. & Kleine, M. (2013). Verhältnisse erkennen und nutzen. *Mathematik lehren, 179*, 2–8.

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 2: Begriffsbildung

2.5 Relationsbegriffe: Ähnlichkeit

Diagnostische Kompetenz

Diagnostische Kompetenz hilft Lernprozesse zu gestalten

Diagnostische Kompetenz ist „ein Bündel von Fähigkeiten, um

- den Kenntnisstand,
- die Lernfortschritte und
- die Leistungsprobleme

einzelner Schüler, — **Schülerdiagnose**

sowie die Schwierigkeiten verschiedener Lernaufgaben — **Aufgabendiagnose**

im Unterricht fortlaufend beurteilen zu können,

sodass das didaktische Handeln auf diagnostischen Einsichten aufgebaut werden kann." — **Unterrichtshandeln**

Weinert , F. E. (2000). Lehren und Lernen für die Zukunft - Ansprüche für das Lernen in der Schule, Päd. Institut Bad Kreuznach, 16

Prozess des Diagnostizierens

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

- Geeignete Daten sichten / selbst erheben
- Förderrelevante Beobachtungen beschreiben
- Beobachtungen differenziert deuten
- Ursachen ergründen
- Konsequenzen für Förderung ableiten

Bartel, M.-E., Beretz, A.-K., Lengnink, K. & Roth, J. (2018). Prozessbegleitende Diagnose beim Mathematiklernen – Kompetenzentwicklung von Lehramtsstudierenden im Rahmen von Lehr-Lern-Laboren. *MNU, 71*(6), 375-382

Videovignetten zur Analyse von Unterrichtsprozessen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Material

Lernumgebung –

Thema und Ziele

Schülerebene –

Arbeitsauftrag

Material

Schülerdokumente

Metaebene –

Schülerprofile

S2 S3

S1 S4

Zeitliche Einordnung

ViviAn

Video

Vignette beenden

Diagnoseauftrag

1.) Bearbeiten sie die Aufgabe zunächst selbst, bevor sie das Video starten.

2.) S2 macht direkt zu Beginn einen Lösungsvorschlag. Beschreiben sie diesen.

2a) Stellen sie eine Vermutung auf, worauf dieser Lösungsvorschlag basiert.

https://vivian.projects.rptu.de

Roth, J. (2020). Theorie-Praxis-Verzahnung durch Lehr-Lern-Labore – Das Landauer Konzept der mathematikdidaktischen Lehramtsausbildung. In B. Priemer & J. Roth (Hrsg.), Lehr-Lern-Labore – Konzepte und deren Wirksamkeit in der MINT-Lehrpersonenbildung (S. 59-83). Heidelberg: Springer Spektrum.

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 2: Begriffsbildung

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Kapitel 2: Begriffsbildung

2.6 Maßbegriffe: Flächen- und Rauminhalt

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 2: Begriffsbildung

2.6 Maßbegriffe: Flächen- und Rauminhalt

2.6.1 Grundvorstellungen als Basis und Bezugsnorm

2.6.2 Kernideen des Messens

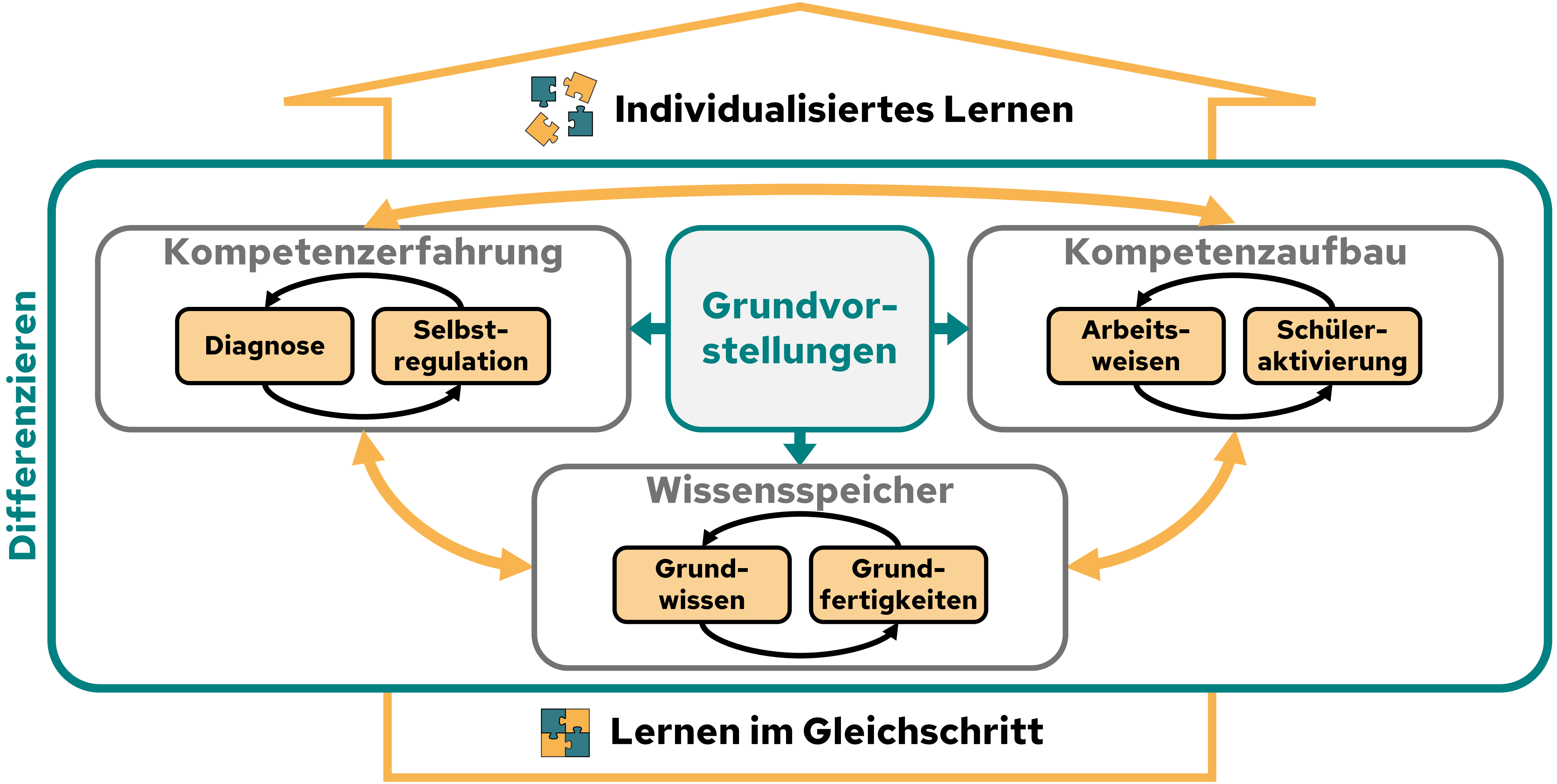
2.6.3 Grundlegende Strategien zur Flächen- und Rauminhaltsmessung

2.6.4 Themenkreis Flächeninhalt

2.6.5 Rauminhaltsbegriff

HeMaS -Konzept

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



Siller, H.-S. & Roth, J. (2016). Herausforderung Heterogenität: Grundvorstellungen als Basis und Bezugsnorm – das Beispiel Terme. *PM 70*, S.2-8

Definition der Begriffe

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Grundvor-stellungen

- Tragfähige mentale Modelle für einen Begriff oder ein Verfahren

Grund-wissen

- Für einen Inhaltsbereich grundlegende Fakten (Begriffsdefinitionen, Formeln, Sätze, …)
- Sollten auswendig gewusst werden

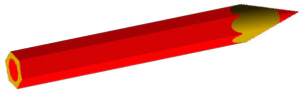
Grund-fertig-keiten

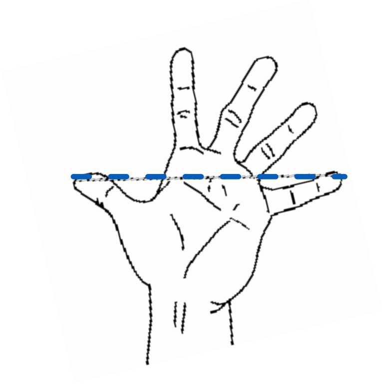
- Anwendung von Routinekalkülen
- Anwendung des Grundwissens in einer typischen Situation (geforderte Operation vorgeben)

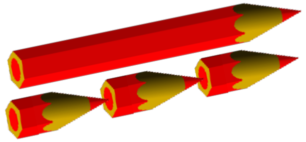
Grundfertigkeiten

Beispiel: Grundfertigkeiten zu den Kernideen des Messens (vgl. Folie 42)

- Maßeinheit festlegen bzw. nutzen können
  - Einheitsquadrat, Handspanne, Bleistift, Meter, …
- Zu messende Größe mit der Maßeinheit auslegen können
- Die zum Auslegen benötigte Anzahl der gewählten Maßeinheit (strukturiert) zählen können
- Die Maßeinheit bei Bedarf sinnvoll verfeinern können

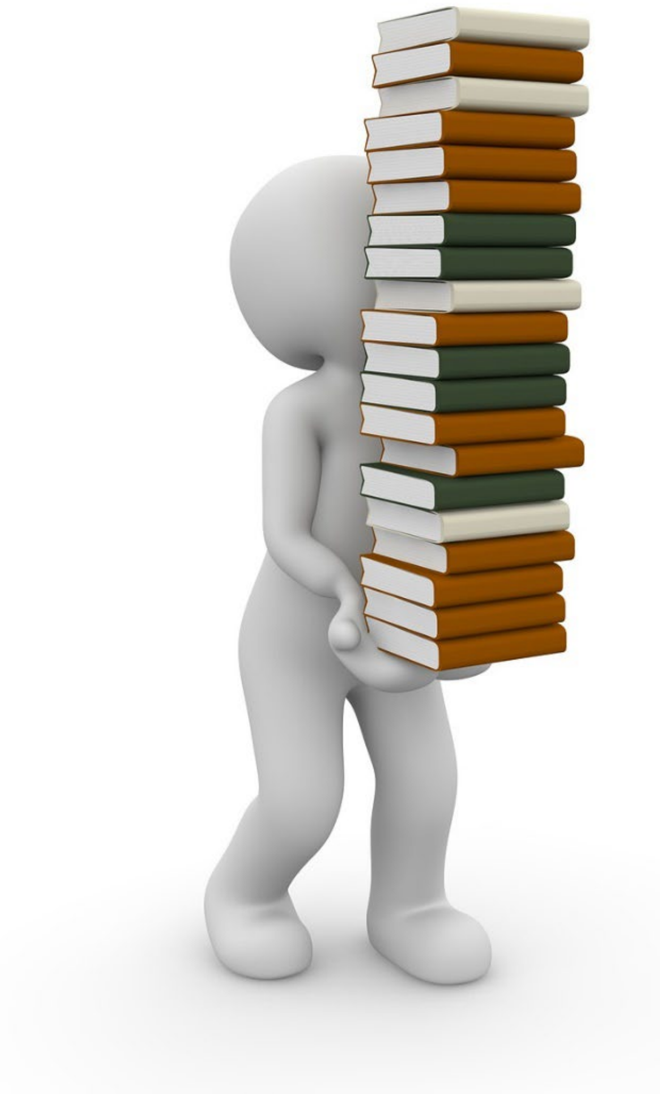






Wissensspeicher

RPTU | Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



Was soll in den Wissensspeicher aufgenommen werden?

- Grundvorstellungen organisieren Grundwissen & Grundfertigkeiten

Häufig auftretende Probleme

- Zu viel → Nicht alles ist Grundwissen!
- Zu schwer → Basiswissen: Weiteres kann erarbeitet werden.
- Zu unstrukturiert → Wichtigkeit von Grundvorstellungen

Diese Fragen könne die Auswahl erleichtern:

- Was wird in (fast) jeder Mathematikstunde benötigt?
- Was braucht man, um den Alltag zu bestehen?
- Was halten alle Kolleg/inn/en der Fachschaft für Grundwissen? (Schnittmenge bilden!)

Grundvorstellungen

Grundvorstellungen

- repräsentieren abstrakte Begriffe anschaulich
- ermöglichen eine Verbindung zwischen abstrakter Mathematik und außer- sowie innermathematischen Anwendungszusammenhängen
- unterstützen / ermöglichen Repräsentationswechsel

Zwei Typen von Grundvorstellungen

- **Primäre Grundvorstellungen**
  haben ihre Wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen
- **Sekundäre Grundvorstellungen**
  werden mit mathematischen Darstellungsmitteln (Zahlenstrahl, Graph, …) repräsentiert

Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren, 199*, 2-9

Primäre Grundvorstellungen

Primäre Grundvorstellungen wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen

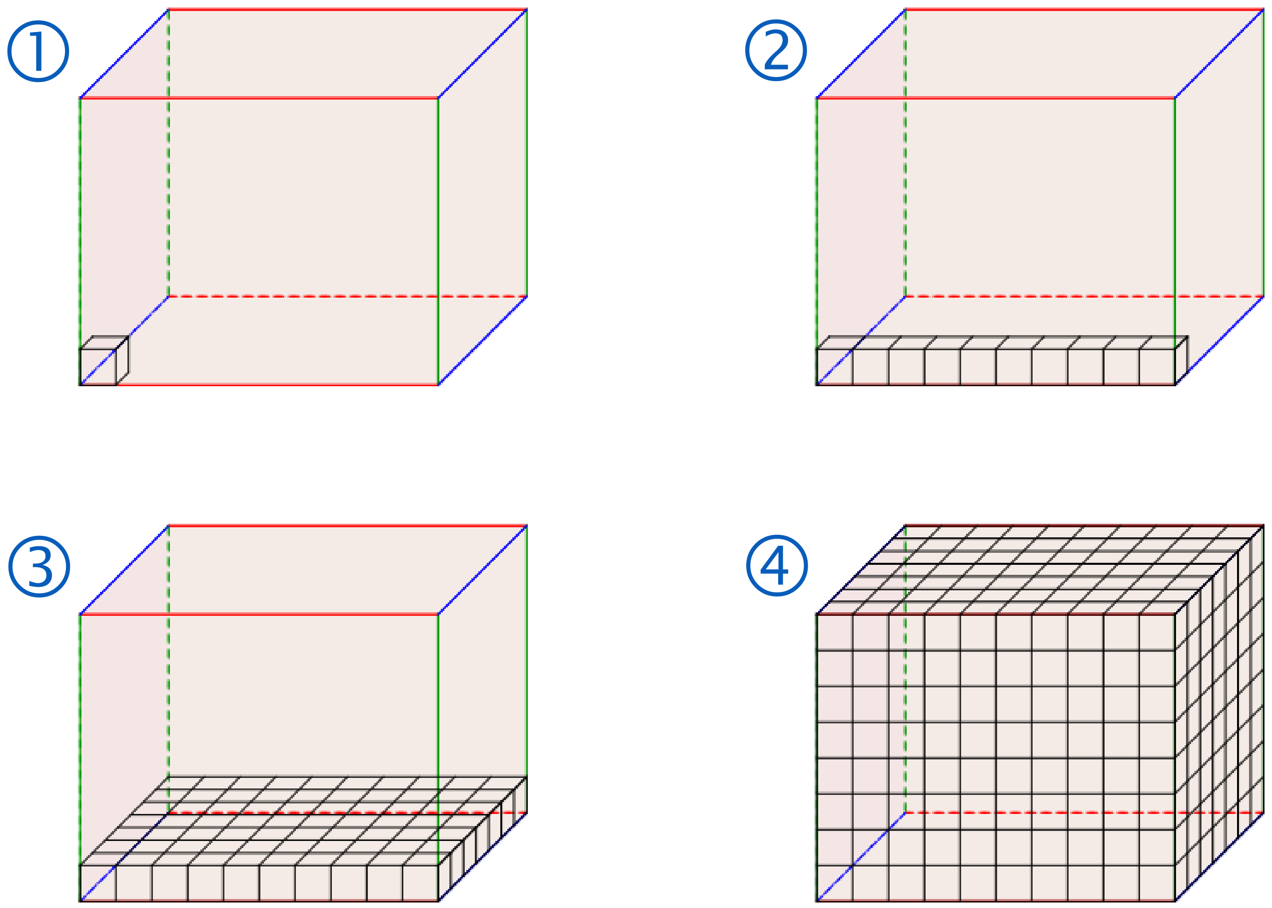
 vom Hofe, R.; Hattermann, M. (2014). Zugänge zu negativen Zahlen. *Mathematik lehren, 183*, 2-7

Sekundäre Grundvorstellungen

Sekundäre Grundvorstellungen werden in der Regel mit mathematischen Repräsentationen dargestellt.

Beispiel

Zuordnung bei Maßfunktionen (Nutzung der Kernideen des Messens; vgl. Folie 61)



vom Hofe, R. & Hattermann, M. (2014). Zugänge zu negativen Zahlen. *Mathematik lehren, 183*, 2-7
https://www.geogebra.org/m/GxfP39GY

Ausbilden von Grundvorstellungen: Ziele

Sinnzusammenhänge herstellen

- An bekannte Situationen / Handlungsvorstellungen anknüpfen

Prototypisches Beispiel als Verständnisanker

Mentale Repräsentationen aufbauen

- Mentales operatives Handeln ermöglichen

Struktur in neuen Situationen anwenden

- Erkennen der Struktur in Sachzusammenhängen
- Modellieren von Phänomenen mit Hilfe der mathematischen Struktur

Vgl. vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Mathematik lehren, 118*, 4-8

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Kapitel 2: Begriffsbildung

2.6 Maßbegriffe: Flächen- und Rauminhalt

2.6.1 Grundvorstellungen als Basis und Bezugsnorm

2.6.2 Kernideen des Messens

2.6.3 Grundlegende Strategien zur Flächen- und Rauminhaltsmessung

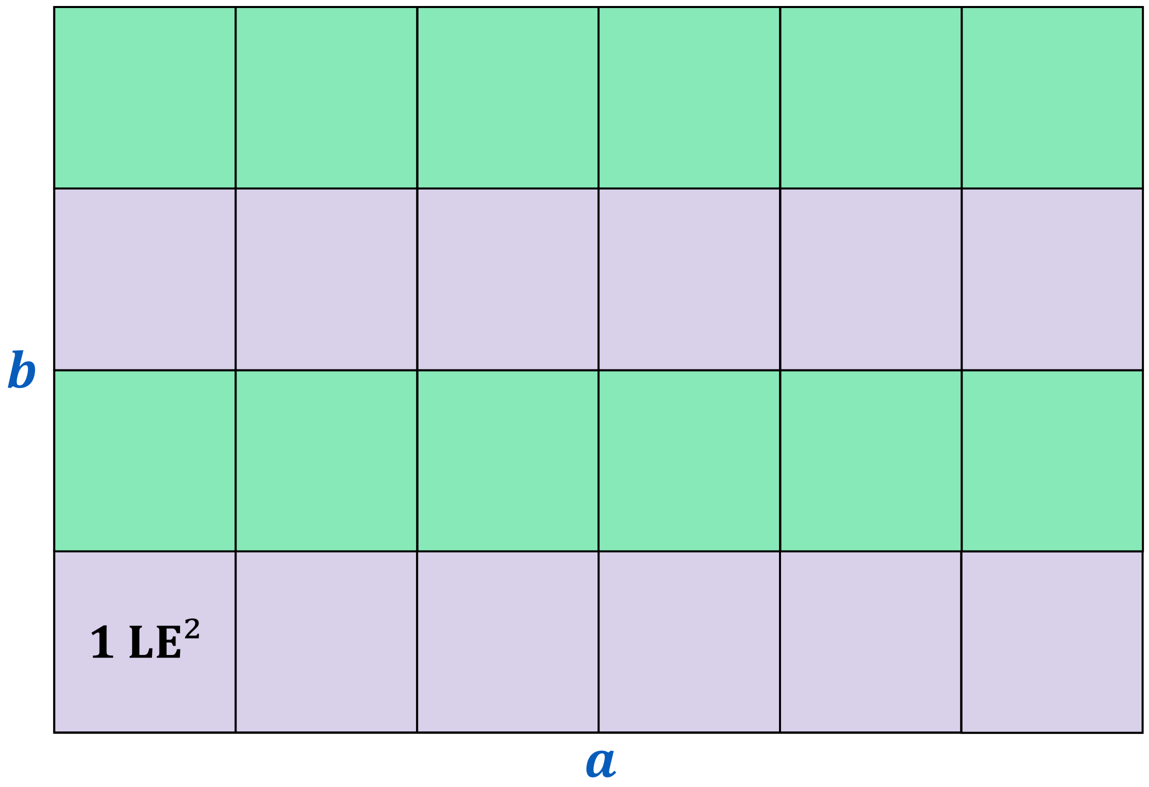
2.6.4 Themenkreis Flächeninhalt

2.6.5 Rauminhaltsbegriff

Kernideen des Messens

Flächenmessung

- Auslegen mit Einheitsquadraten
- b Reihen, zu je a Einheitsquadraten $\Rightarrow \boldsymbol{A = a \cdot b}$



Kernideen des Messens

(1) Maßeinheit finden bzw. nutzen

(2) Mit der Maßeinheit auslegen

(3) Maßeinheiten zählen

(4) Maßeinheit ggf. verfeinern

Vgl. Benz, Peter-Koop, Grüßing (2015). *Frühe mathematische Bildung*. Berlin: Springer Spektrum. 234f

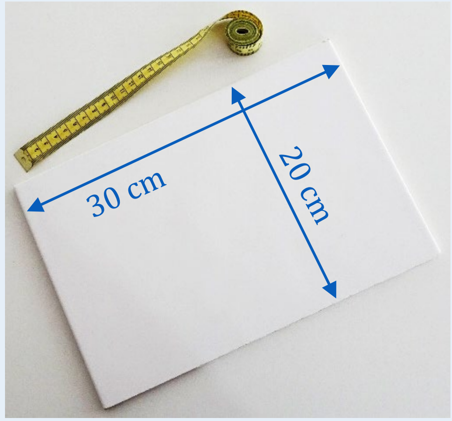
Schülerschwierigkeiten bei der Flächen- und Volumenmessung

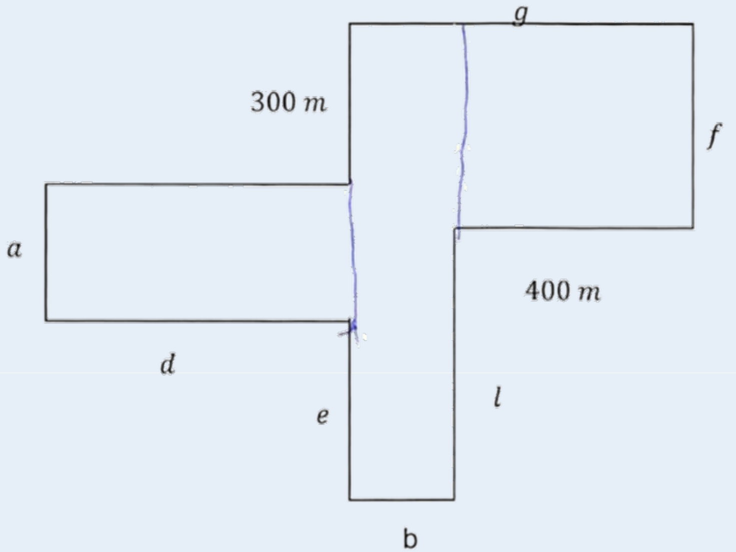
Begriffsverständnis

- Maßbegriffe
  - Umfang (Länge) ↔ Flächeninhalt
  - Flächeninhalt ↔ Oberflächeninhalt
  - Volumen ↔ Oberflächeninhalt
- Figurenbegriffe
  - Oberfläche ↔ Fläche
  - Würfel ↔ Quadrat
  - Würfel ↔ Rechteck
  - Würfel ↔ Quader

Einheiten und Umrechnungsfaktoren

- $A = 600\ \mathrm{cm}$
  $= 6\ \mathrm{m}^2$





Formeln aufstellen und nutzen

- $A = [2 \cdot (400\,m + f)] + 2 \cdot (f + l + b)$

 Kadunz & Sträßer (2007). *Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe I*. Hildesheim: Franzbecker, 205

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 2: Begriffsbildung

2.6 Maßbegriffe: Flächen- und Rauminhalt

2.6.1 Grundvorstellungen als Basis und Bezugsnorm

2.6.2 Kernideen des Messens

2.6.3 Grundlegende Strategien zur Flächen- und Rauminhaltsmessung

2.6.4 Themenkreis Flächeninhalt

2.6.5 Rauminhaltsbegriff

Strategien
zur Flächen- und Rauminhaltsbestimmung

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Vergleichen

Direkter Vergleich

Vergleich durch **Zerlegen** bzw. **Ergänzen**

Indirekter Vergleich mit einem Objekt als Vermittler

Messen

Messen durch auslegen mit **selbst-gewählter** Maßeinheit

Messen durch auslegen mit **vorgegebener** Maßeinheit

Kernideen des Messens

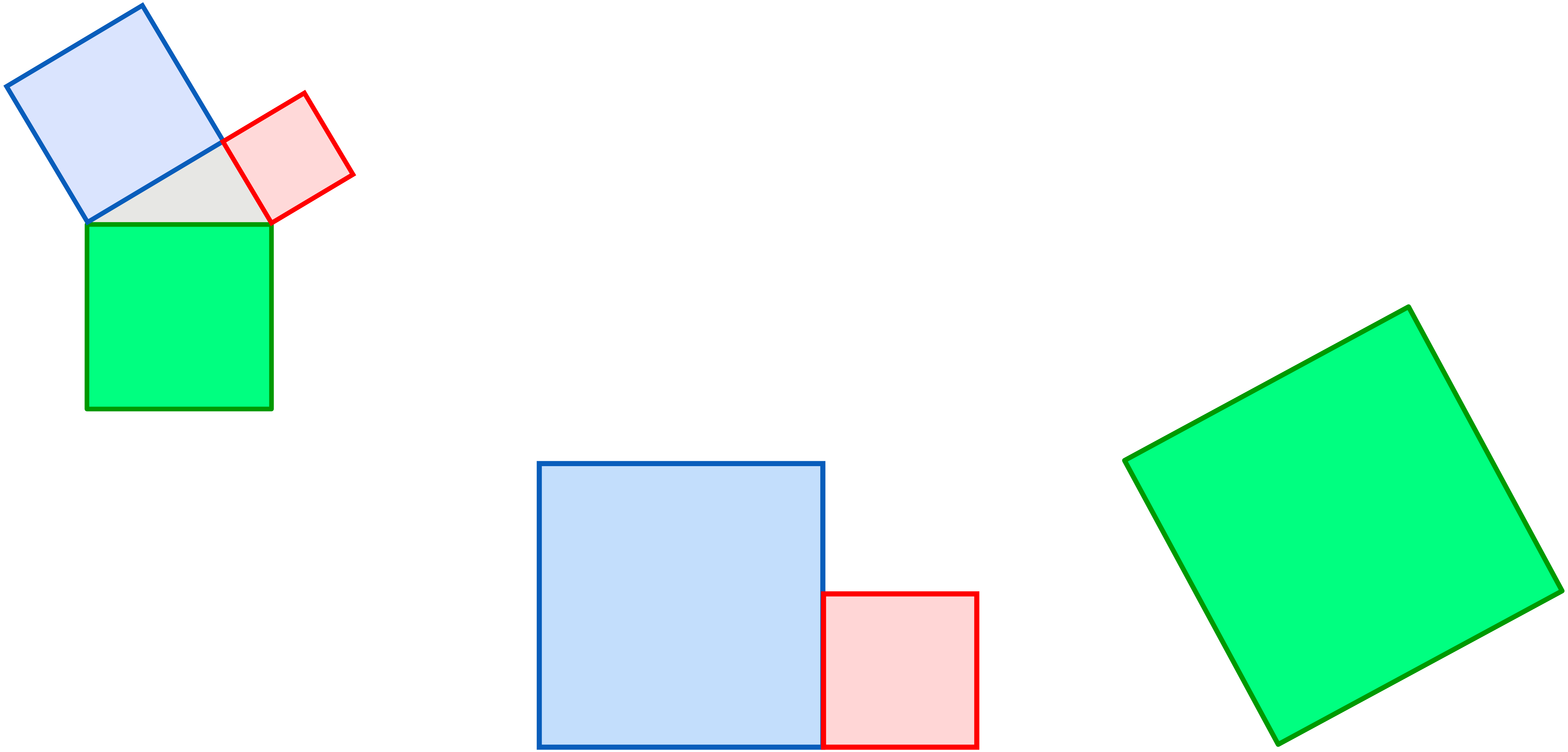
(1) Maßeinheit finden/nutzen
(2) Mit Maßeinheit auslegen
(3) Maßeinheiten zählen
(4) Maßeinheit ggf. verfeinern

Berechnen

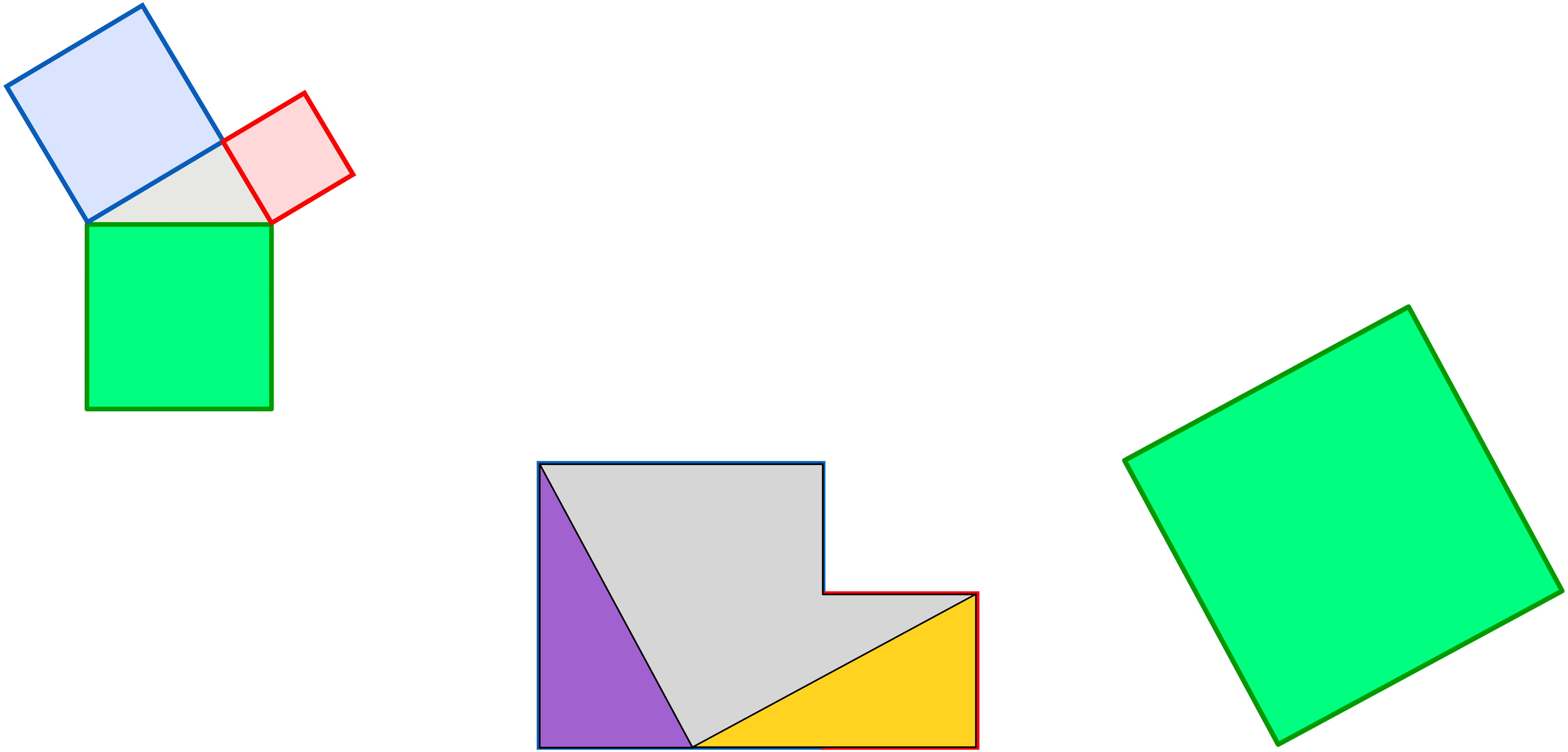
Berechnen durch Anwenden von Formeln

Vergleichen: Direkter Vergleich

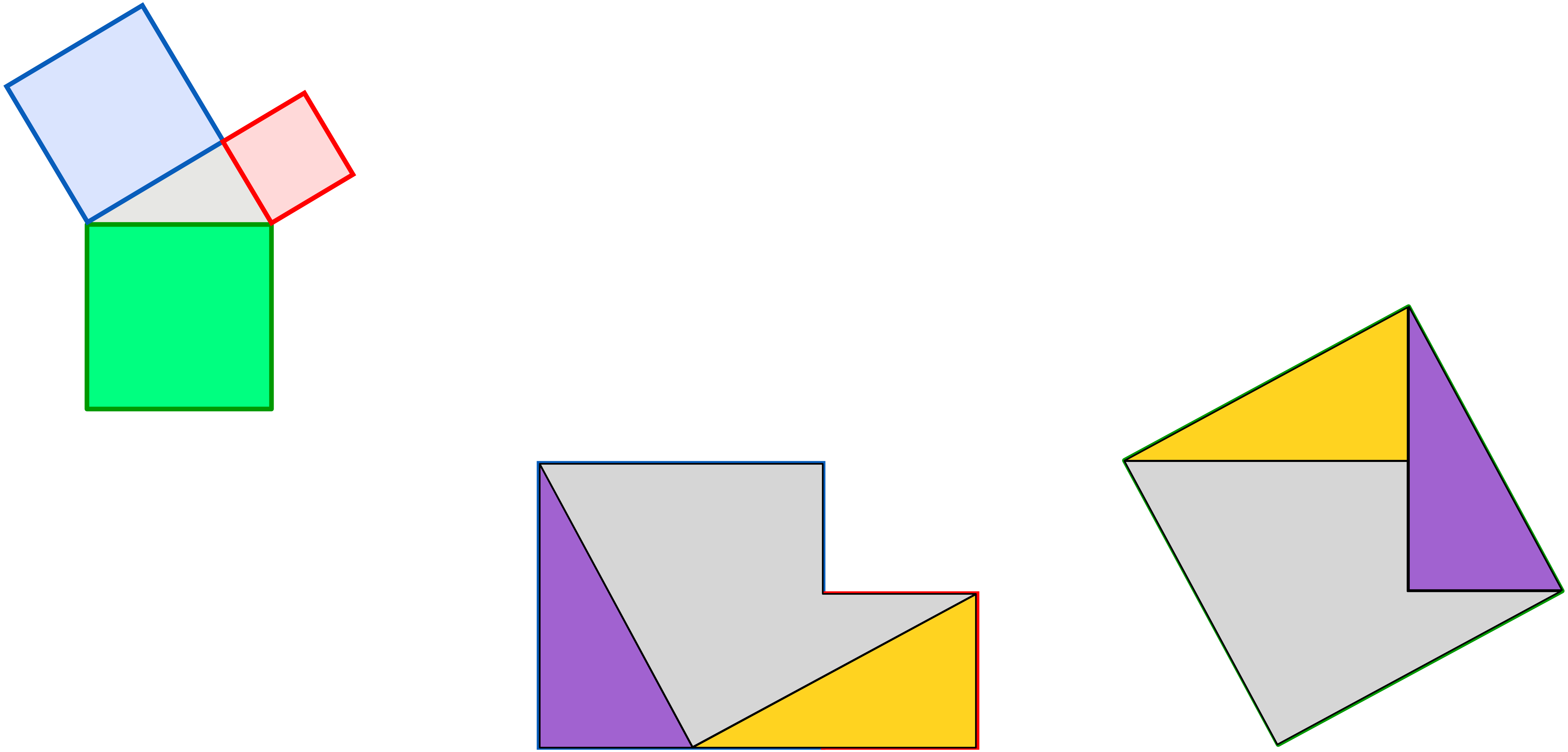
Vergleichen: Zerlegen



Vergleichen: Zerlegen

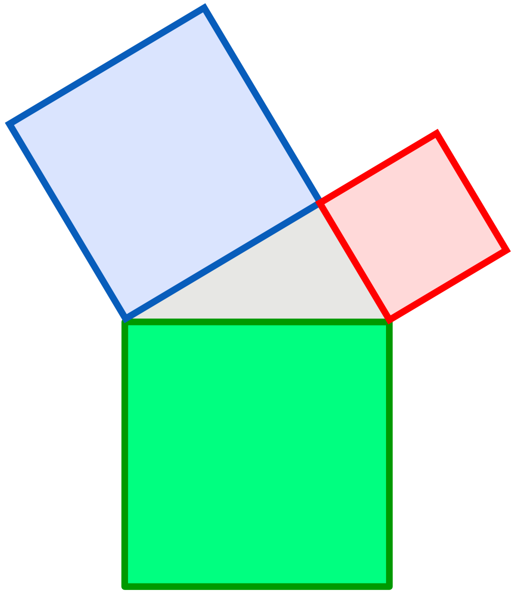


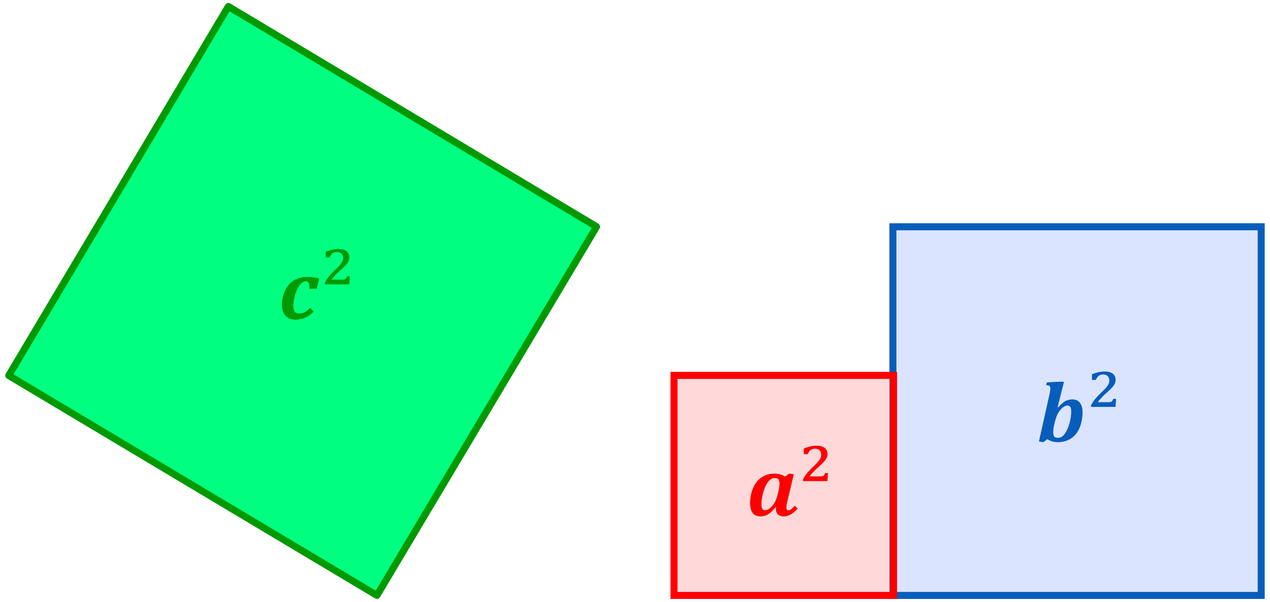
Vergleichen: Zerlegen



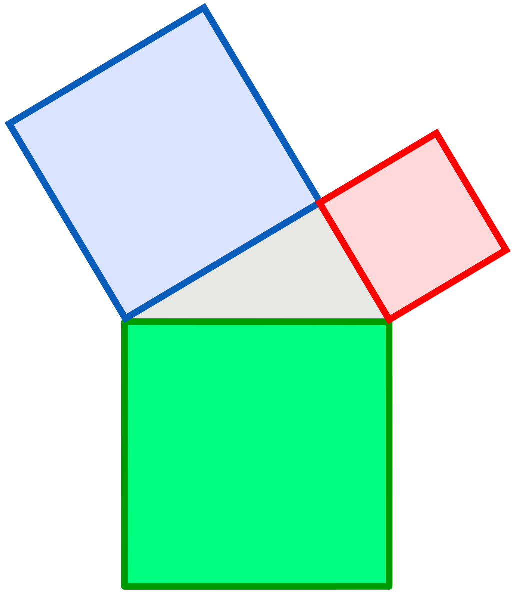
RPTU

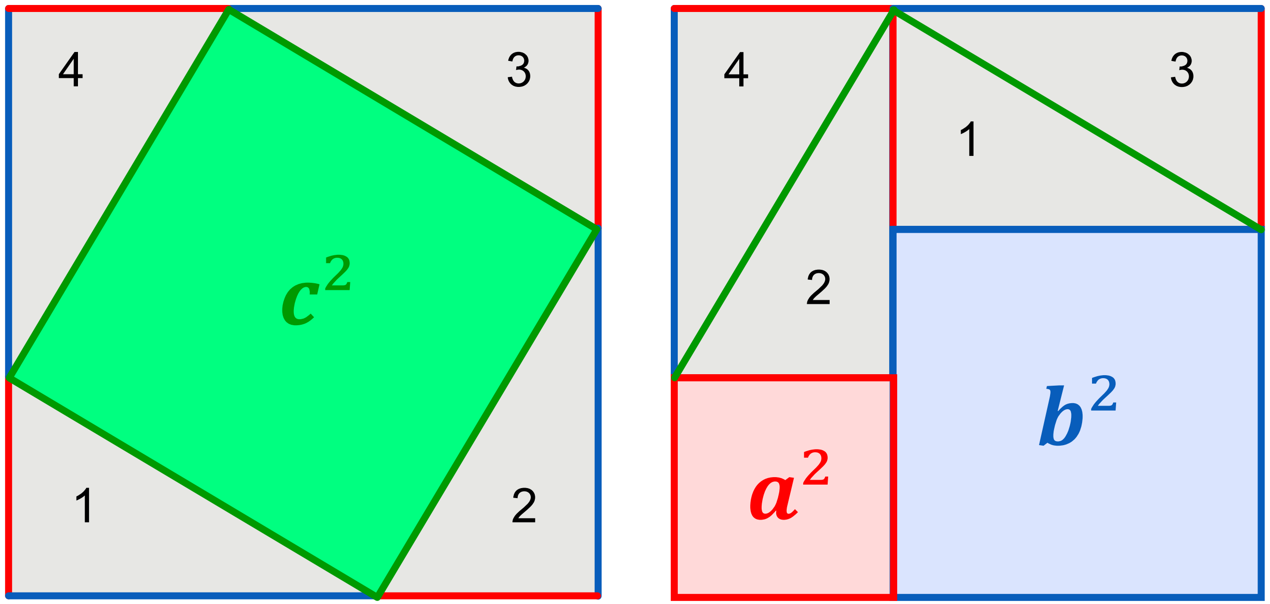
Vergleichen: Ergänzen



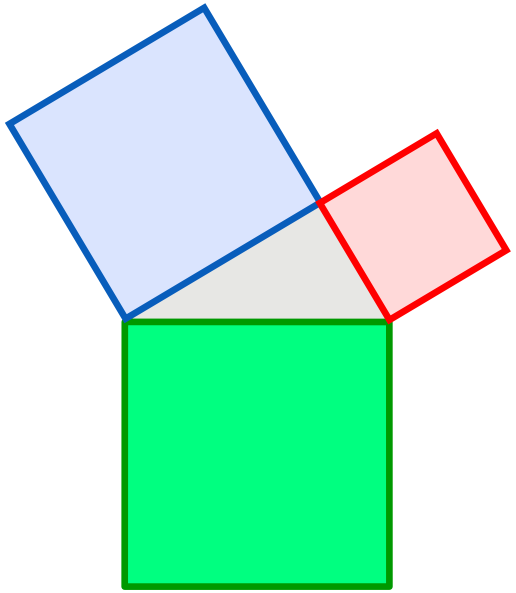


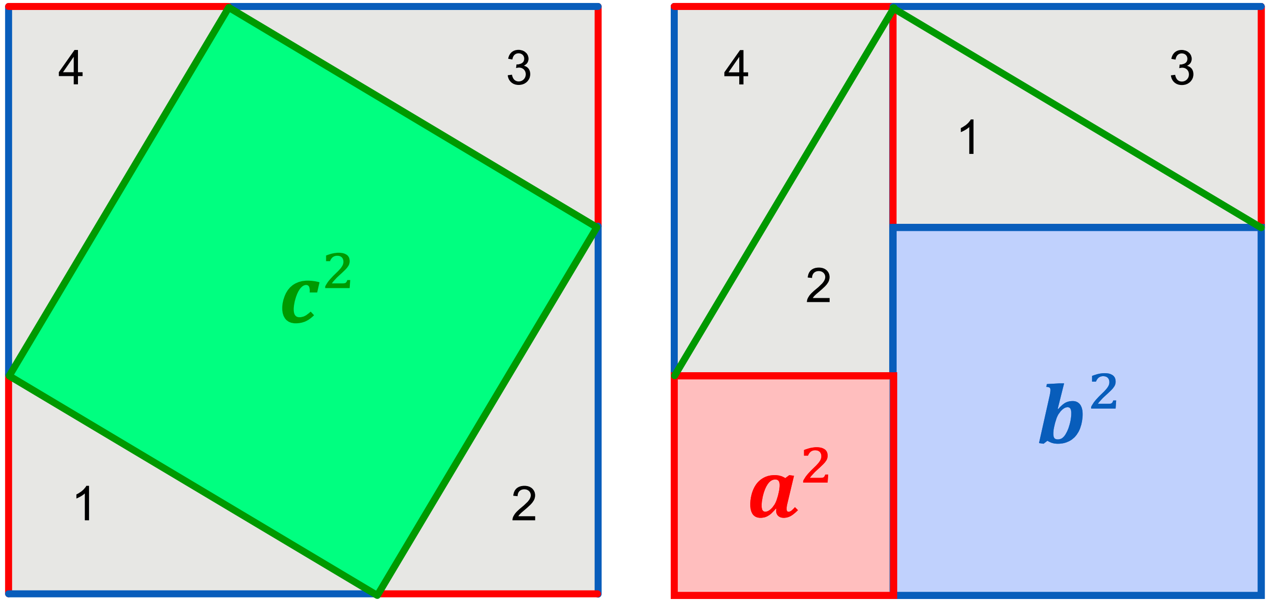
Vergleichen: Ergänzen



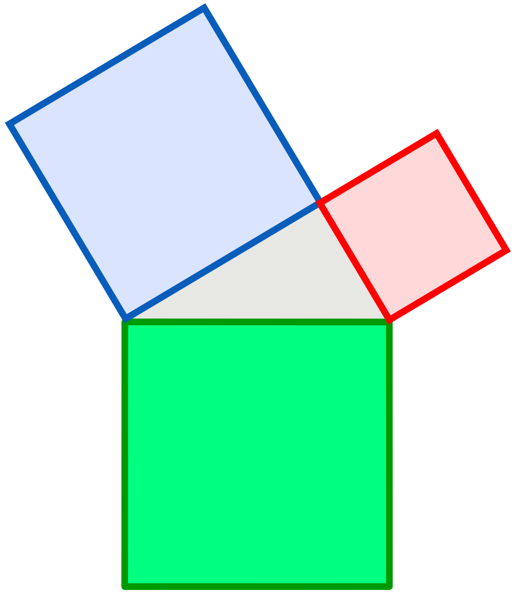


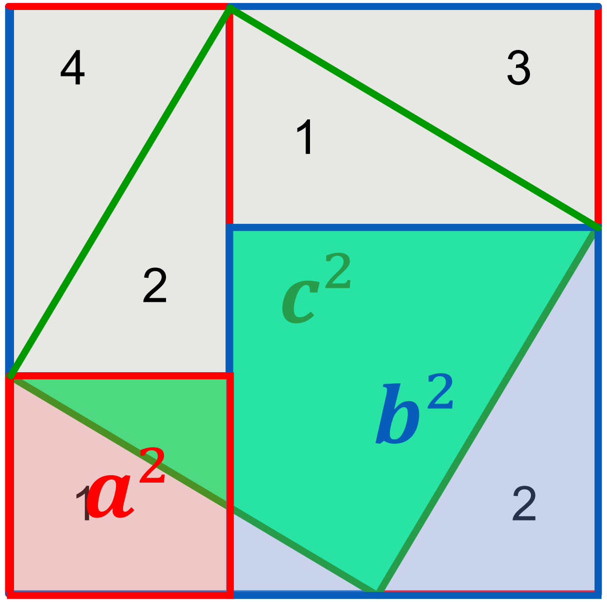
Vergleichen: Ergänzen

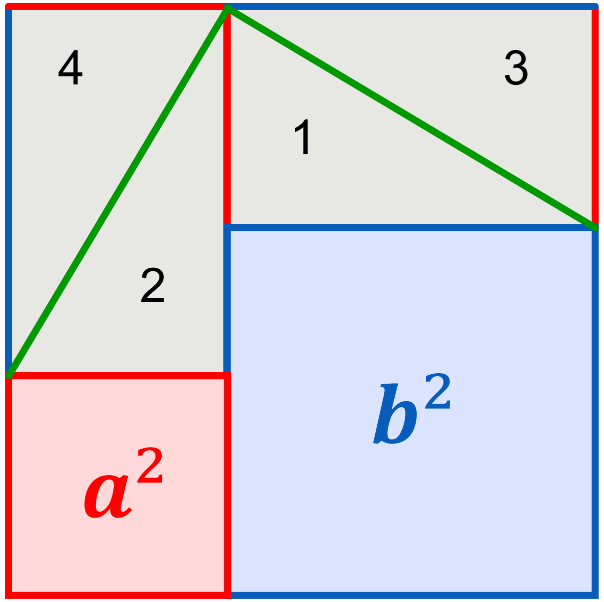




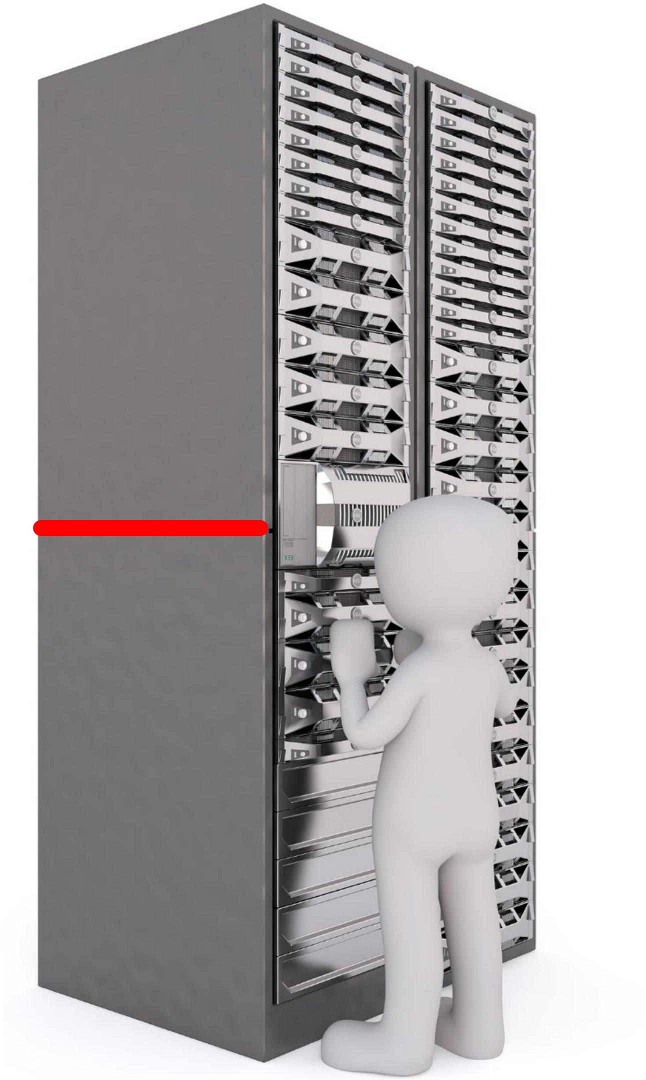
Vergleichen: Ergänzen



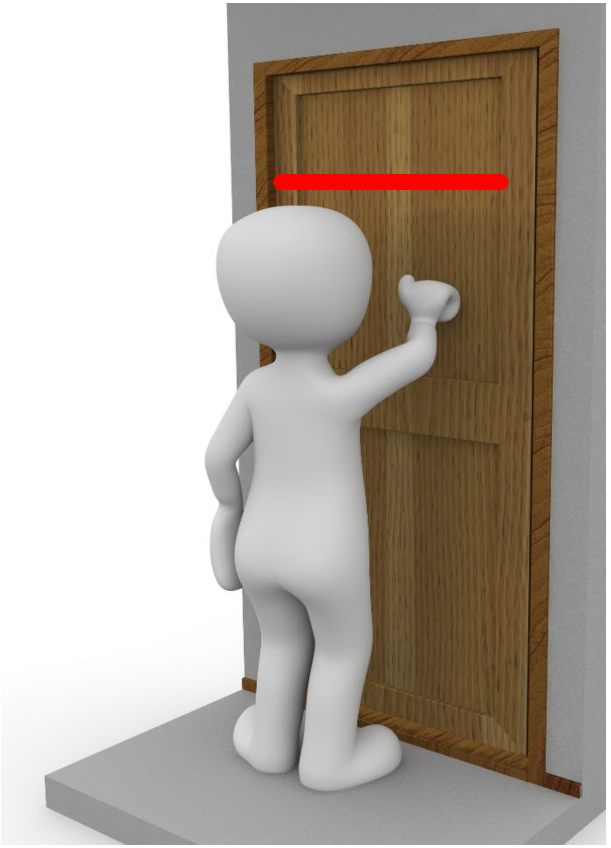




Vergleichen: Indirekter Vergleich



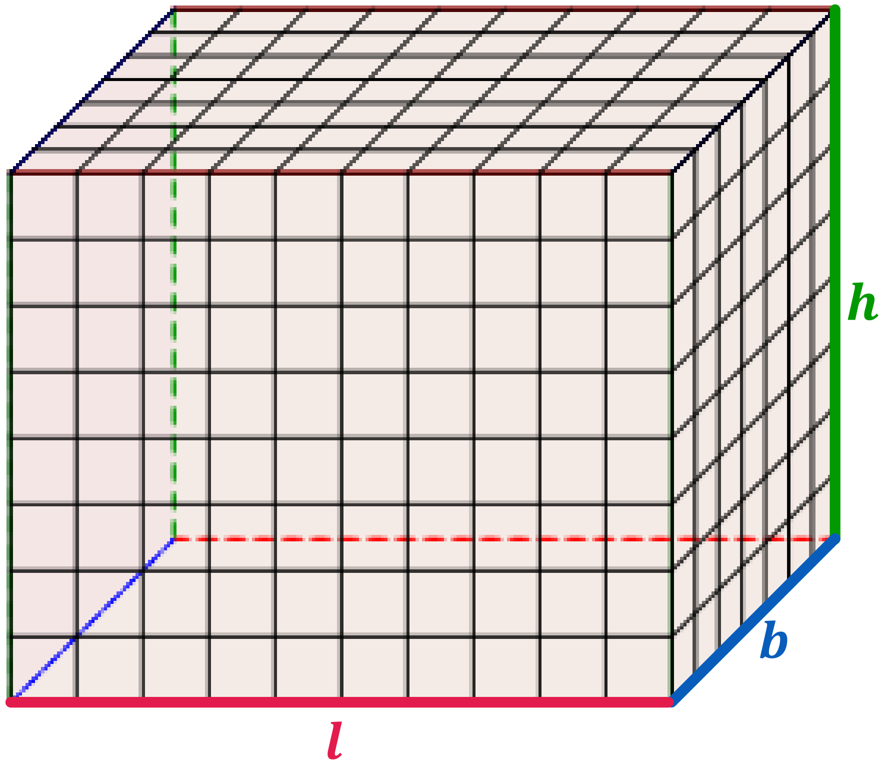
Vergleichen: Indirekter Vergleich



Messen:
Auslegen mit selbstgewählter Maßeinheit

Messen:
Auslegen mit vorgegebener Maßeinheit

Berechnen: Anwenden einer Formel



$$V_{Quader} = \text{Länge} \cdot \text{Breite} \cdot \text{Höhe}$$
$$= l \cdot b \cdot h$$

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

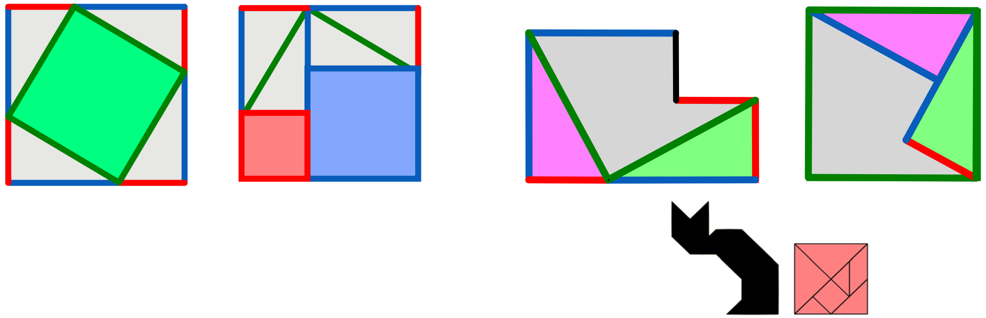
Kapitel 2: Begriffsbildung

2.6 Maßbegriffe: Flächen- und Rauminhalt

Themenkreis Flächeninhalt

Stufen bei der Behandlung von Größen

- **Flächeninhalt?!**
  - **Axiome des Flächeninhalts**
    - **Flächen-messung**
      - Seitenlängen aus $\mathbb{N}$
      - Seitenlängen aus $\mathbb{Q}^+$
      - Seitenlängen aus $\mathbb{R}^+$ — Inkommen-surabilität
    - **Flächen-vergleich**
      - Ergänzungs-gleichheit
      - Zerlegungs-gleichheit



Stufen bei der Behandlung von Größen

1. Stufe
- Erfahrungen sammeln und aufgreifen: Sach-, Spiel- und Alltagssituationen

2. Stufe
- Direktes Vergleichen von Repräsentanten

3. Stufe
- Indirektes Vergleichen mit Hilfe selbst gewählter Maßeinheiten
  - ein drittes Objekt als Vermittler benutzen
  - ein Objekt als selbst gewählte Einheit benutzen

4. Stufe
- Indirektes Vergleichen mit Hilfe standardisierter Maßeinheiten
- Messen mit verschiedenen Messgeräten

5. Stufe
- Umrechnen: Verfeinern und Vergröbern der Maßeinheiten

6. Stufe
- Aufbau von Größenvorstellungen

7. Stufe
- Rechnen mit Größen

Franke, M. & Ruwisch, S. (2003). Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule. Spektrum Akademischer Verlag, 184

Axiome des Flächeninhalts

Vgl. Kolmogorov-Axiome Wahrscheinlichkeitsmaßes

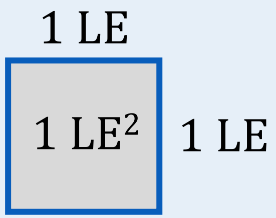
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Nichtnegativität

- Die Maßzahl A des Flächeninhalts ist nichtnegativ. $(A \geq 0)$

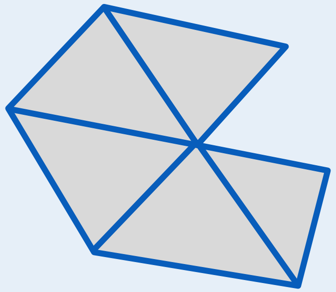
Normierung

- Ein Quadrat der Seitenlänge $1\ \mathrm{LE}$ hat den Flächeninhalt $A = 1\ \mathrm{LE}^2$.



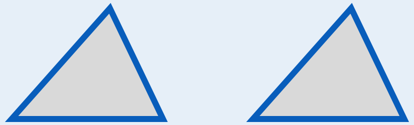
Additivität

- Der Flächeninhalt einer Figur ist gleich der Summe der Flächeninhalte der Teilfiguren, in die die Fläche zerlegt werden kann.



Kongruenzaxiom

- Kongruente Figuren haben denselben Flächeninhalt.



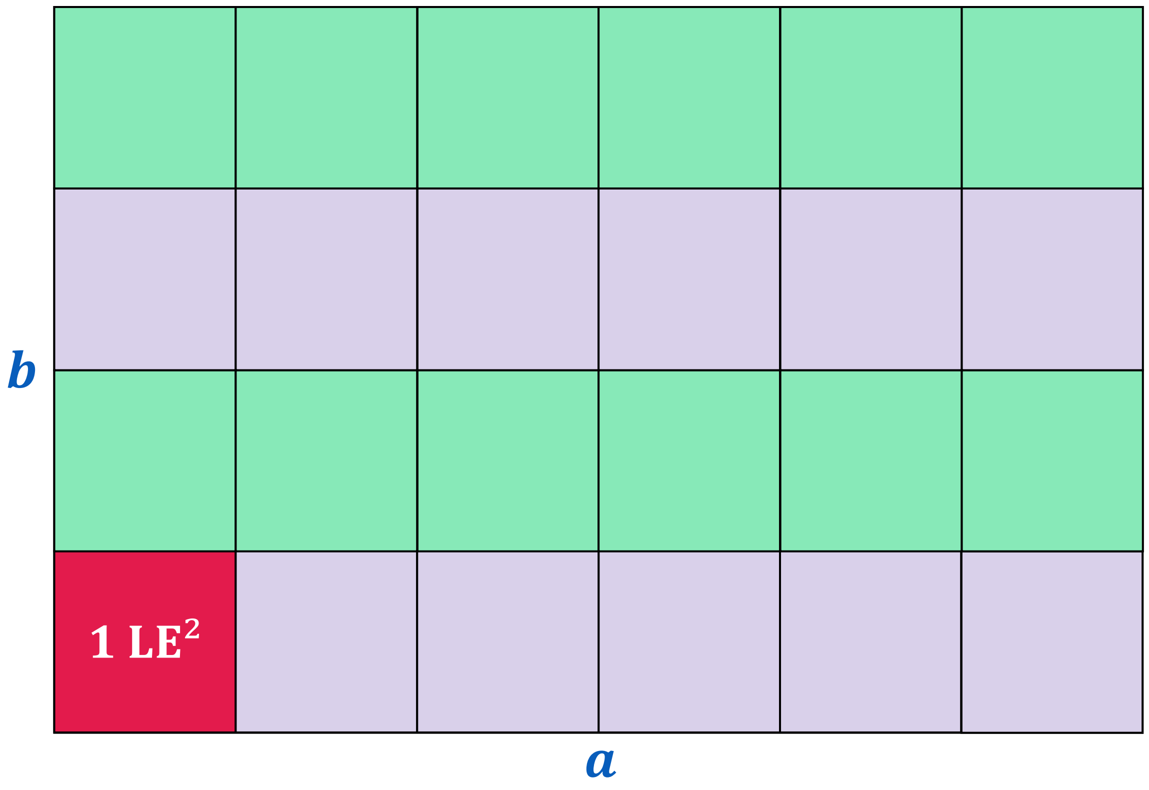
Franke, M. & Ruwisch, S. (2003). Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule. Spektrum Akademischer Verlag, 184

Rechtecksflächeninhalt $(a, b \in \mathbb{N})$

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Flächenmessung

- Auslegen mit Einheitsquadraten
- b Reihen, zu je a Einheitsquadraten $\Rightarrow A = a \cdot b \cdot 1\ \mathrm{LE}^2 = a \cdot b\ \mathrm{LE}^2$



Kernideen des Messens

(1) Maßeinheit finden bzw. nutzen

(2) Mit der Maßeinheit auslegen

(3) Maßeinheiten zählen

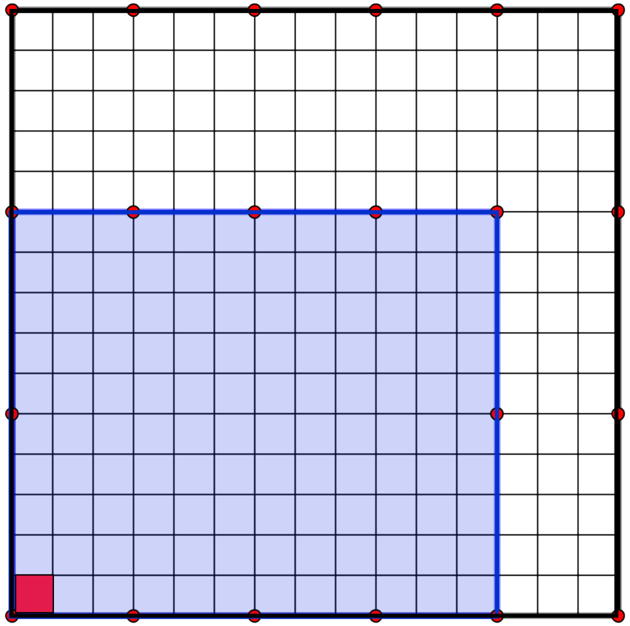
(4) Maßeinheit ggf. verfeinern

Vgl. Benz, Peter-Koop, Grüßing (2015). *Frühe mathematische Bildung*. Berlin: Springer Spektrum. 234f

Rechtecksflächeninhalt $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}^+\right)$

Idee

- Ein Rechteck mit den Kantenlängen $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ lässt sich nicht mit Einheitsquadraten auslegen.
- Verfeinern der Einteilung beider Kantenlängen führt zu $\frac{p \cdot s}{q \cdot s}, \frac{r \cdot q}{s \cdot q} \in \mathbb{Q}$.
- In das Einheitsquadrat passen folglich $(q \cdot s) \cdot (q \cdot s) = (q \cdot s)^2$ kleine Teilquadrate.
  (Im Beispiel: $(3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = (3 \cdot 5)^2 = 15^2 = 225$)
- Ein Teilquadrat besitzt also den Flächeninhalt $\frac{1}{(q \cdot s)^2} \mathrm{LE}^2 = \frac{1}{225} \mathrm{LE}^2$.



$\frac{p}{q} = \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{p \cdot s}{q \cdot s}$

$\frac{r}{s} = \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{r \cdot q}{s \cdot q}$

Flächenmessung

- Auslegen mit Teilquadraten ergibt $p \cdot s$ Zeilen mit je $r \cdot q$ Quadraten.
- $A = (p \cdot s) \cdot (r \cdot q) \cdot \frac{1}{(q \cdot s)^2} \mathrm{LE}^2 = \frac{(p \cdot s) \cdot (r \cdot q)}{(q \cdot s)^2} \mathrm{LE}^2 = \frac{p \cdot s \cdot r \cdot q}{q \cdot s \cdot q \cdot s} \mathrm{LE}^2 = \frac{p \cdot r}{q \cdot s} \mathrm{LE}^2 = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} \mathrm{LE}^2$

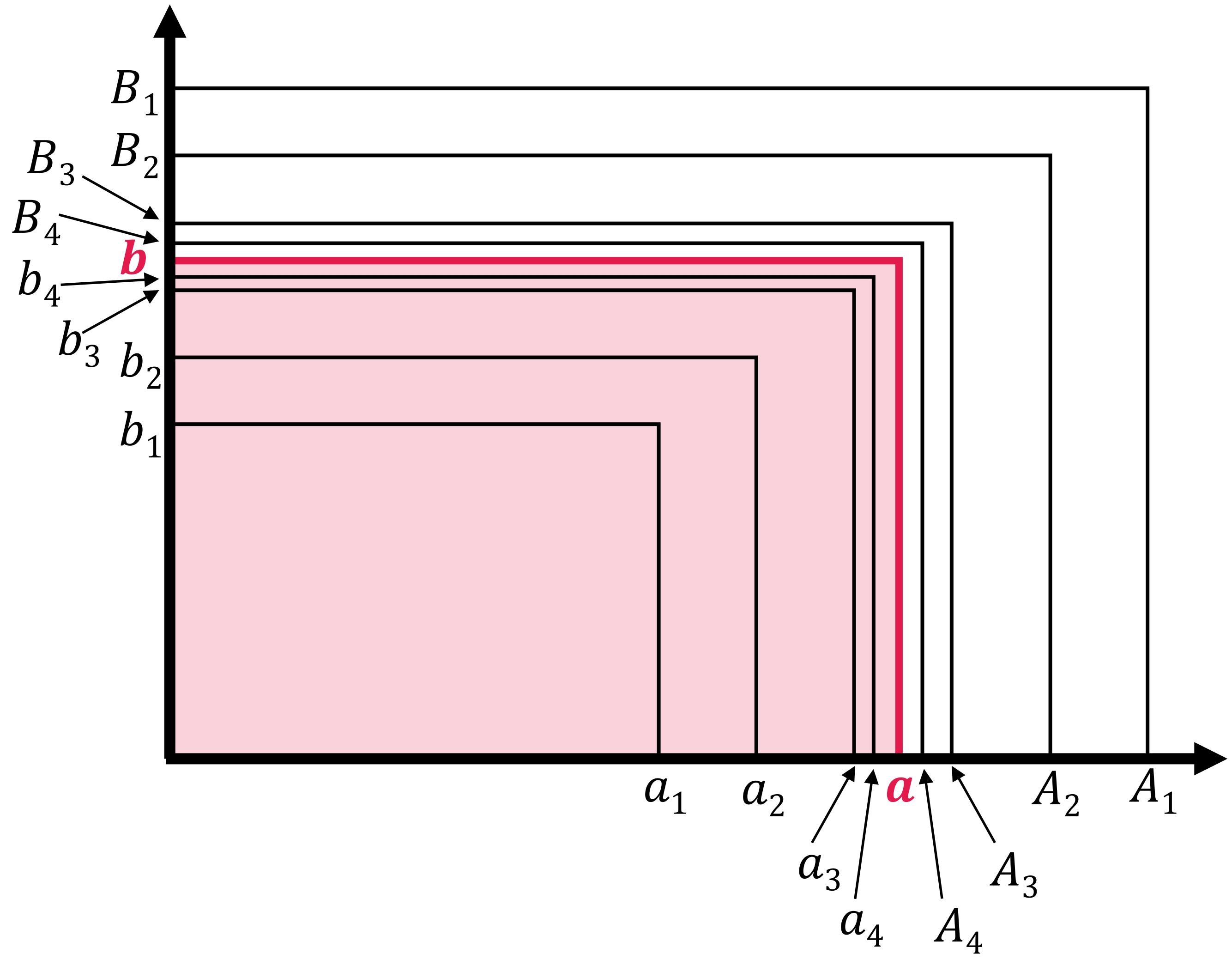
Rechtecksflächeninhalt ($a, b \in \mathbb{R}^+$)

$$a = \{[a_n, A_n]\}$$
$$b = \{[b_n, B_n]\}$$

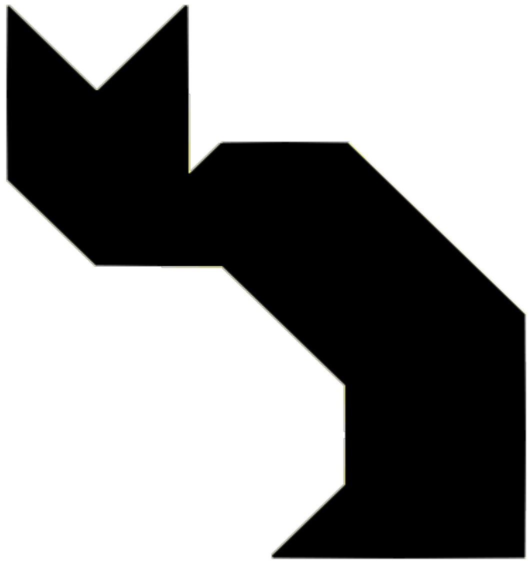
mit

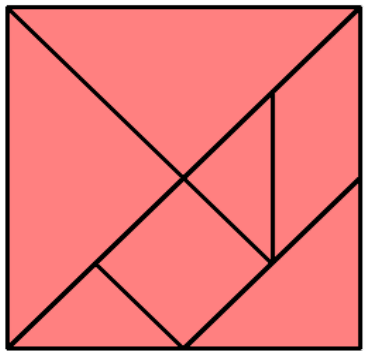
$$a_n, b_n, A_n, B_n \in \mathbb{Q}^+$$
$$\Rightarrow \{[a_n b_n, A_n B_n]\} = ab$$

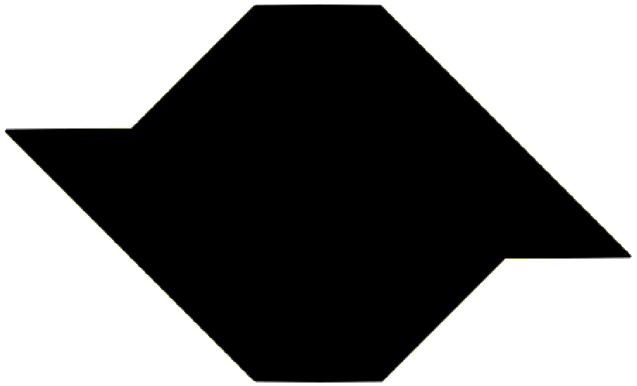
ist eine Intervallschachtellung für den Flächeninhalt.

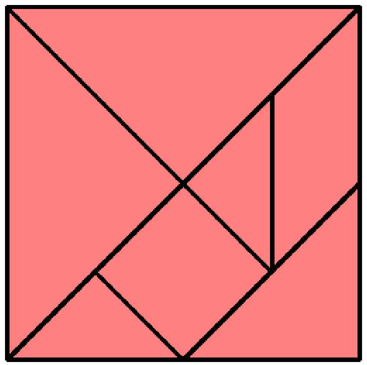


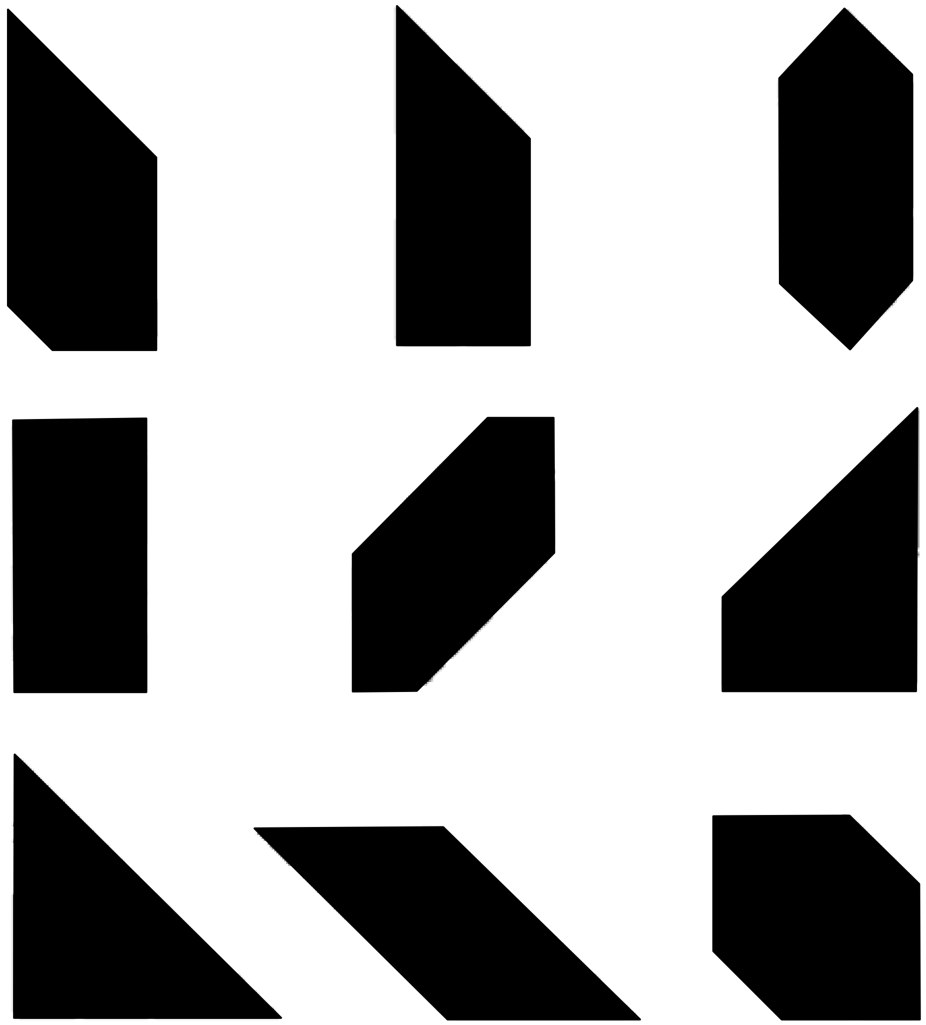
Tangram: Zerlegungsgleichheit









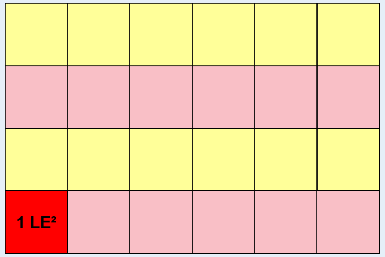


Flächeninhaltsbestimmung

R TU P Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

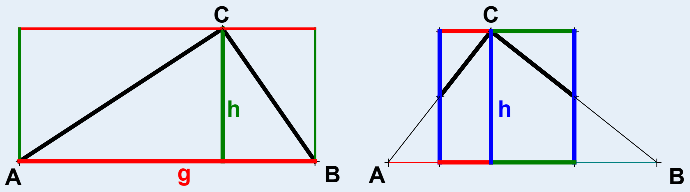
Rechteck

- Flächenmessung, d. h. Auslegen mit Einheitsquadraten (bzw. Intervallschachtelung)



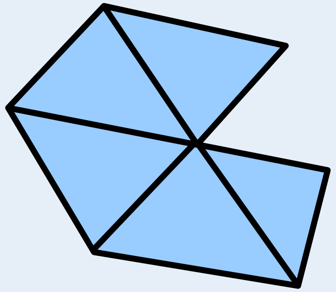
Dreieck

- Flächenvergleich mit dem Rechteck



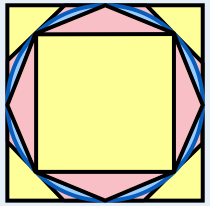
Polygon

- Triangulierung (Einteilen in Dreiecke)

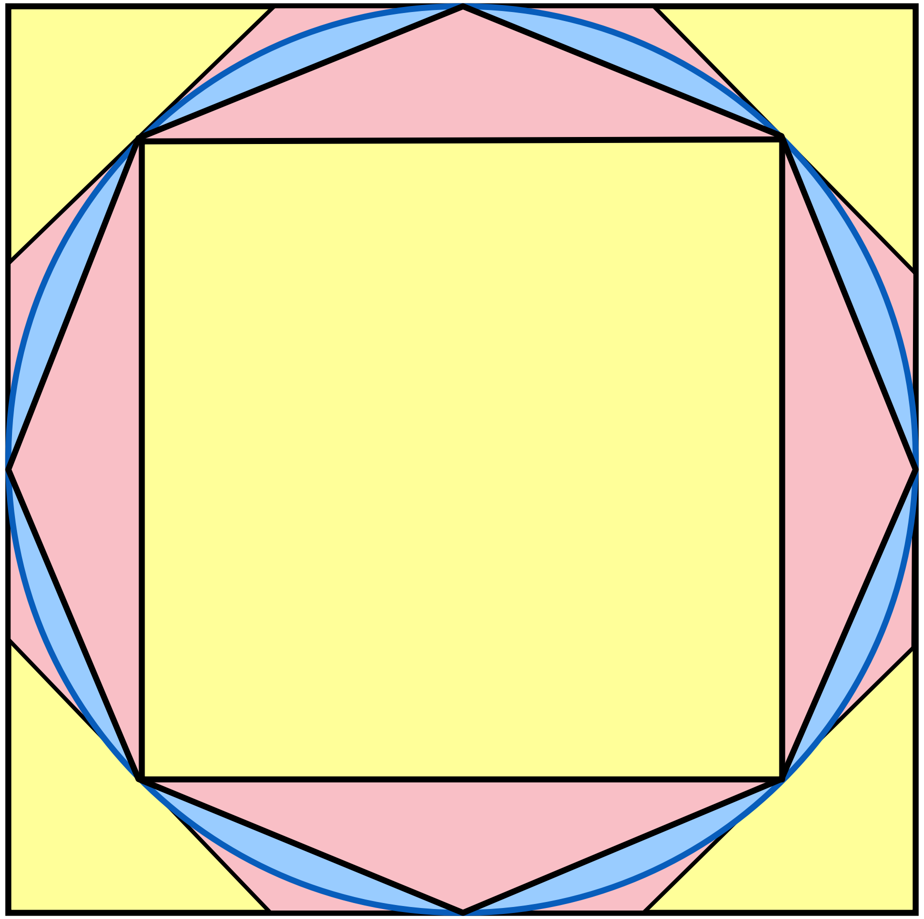


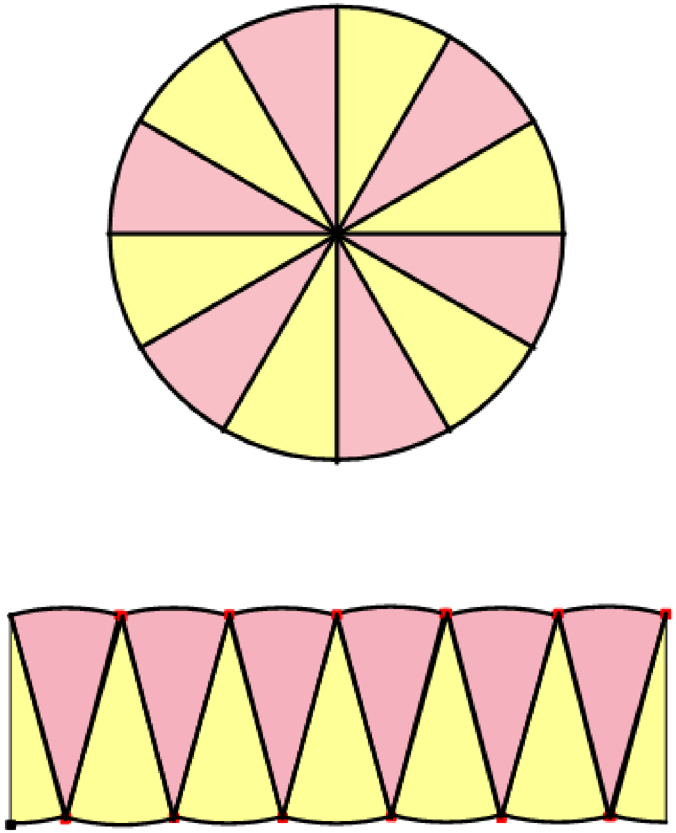
Kreis

- Intervallschachtelung



Kreisinhaltsbestimmung





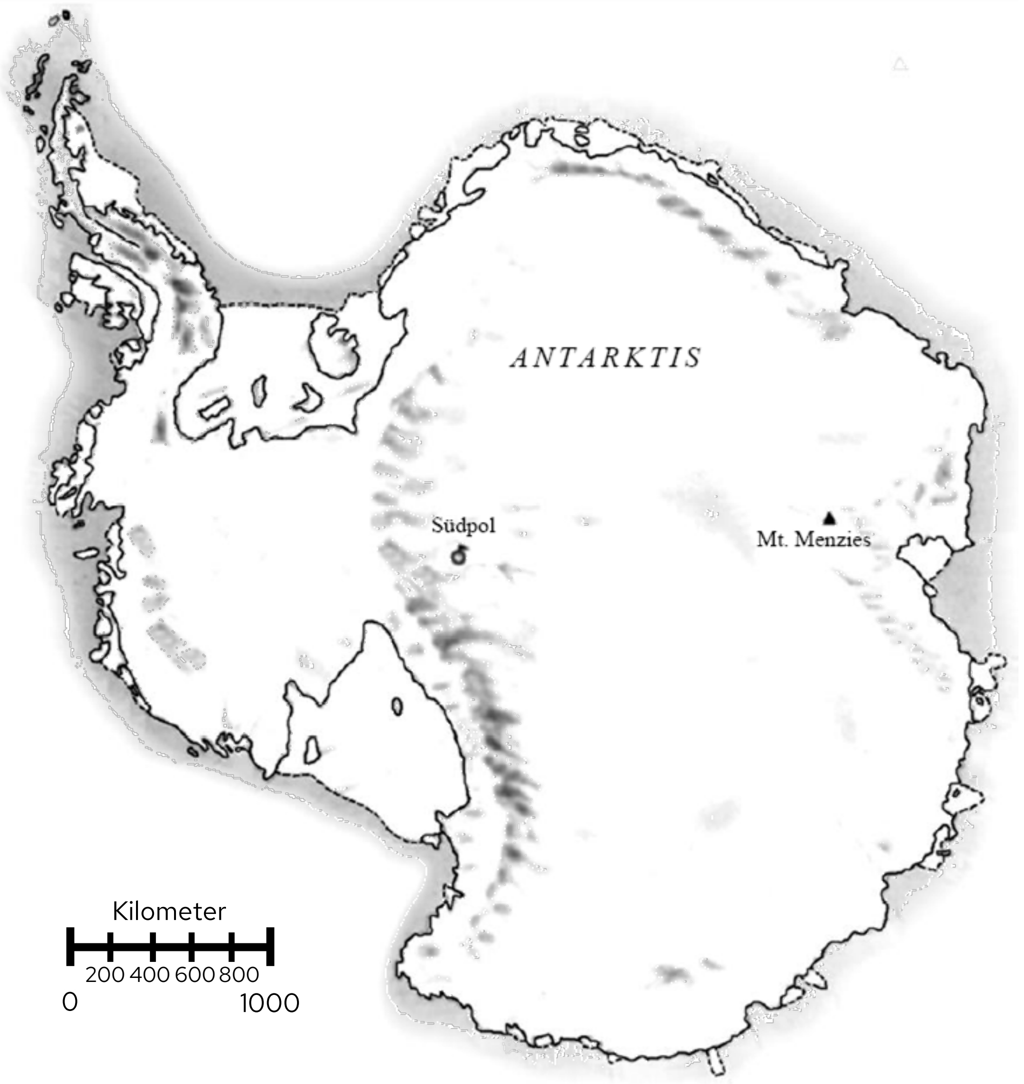
Flächeninhalt der Antarktis

Schätze die Fläche der Antarktis, indem du den Maßstab der Karte benutzt.

Schreibe deine Rechnung auf und erkläre, wie du zu deiner Schätzung gekommen bist.

(Du kannst in der Karte zeichnen, wenn dir das bei deiner Schätzung hilft.)

PISA-Aufgabe



Idee: „Auslegen“ mit Einheitsquadraten

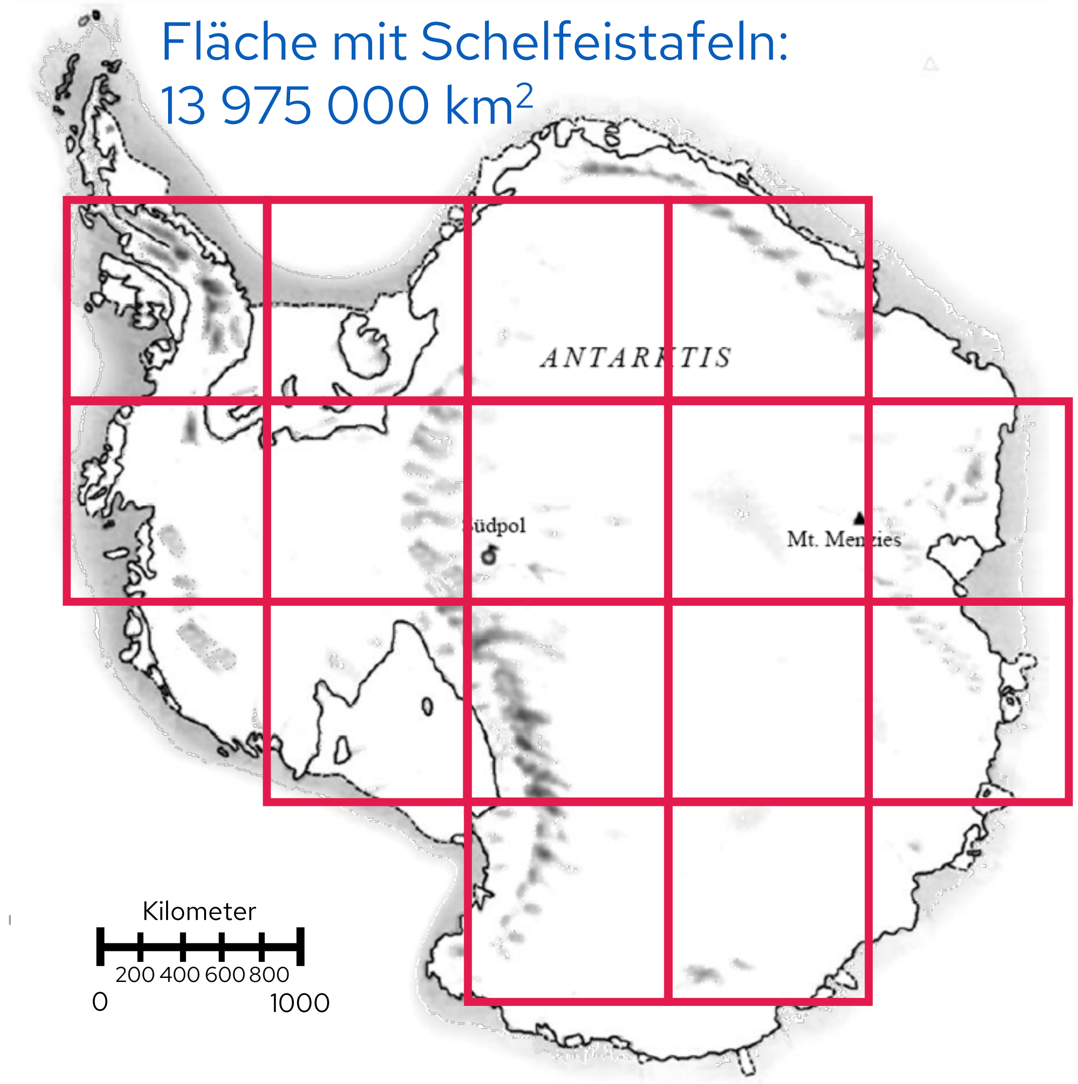
Schätze die Fläche der Antarktis, indem du den Maßstab der Karte benutzt.

Schreibe deine Rechnung auf und erkläre, wie du zu deiner Schätzung gekommen bist.

(Du kannst in der Karte zeichnen, wenn dir das bei deiner Schätzung hilft.)

PISA-Aufgabe

Fläche mit Schelfeistafeln:
13 975 000 km²



Idee: Vergleichen mit einfacher Fläche

Schätze die Fläche der Antarktis, indem du den Maßstab der Karte benutzt.

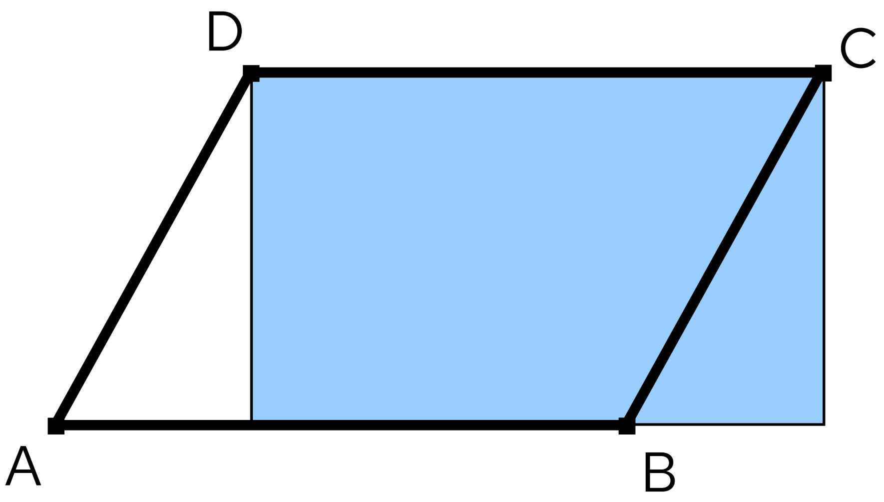
Schreibe deine Rechnung auf und erkläre, wie du zu deiner Schätzung gekommen bist.

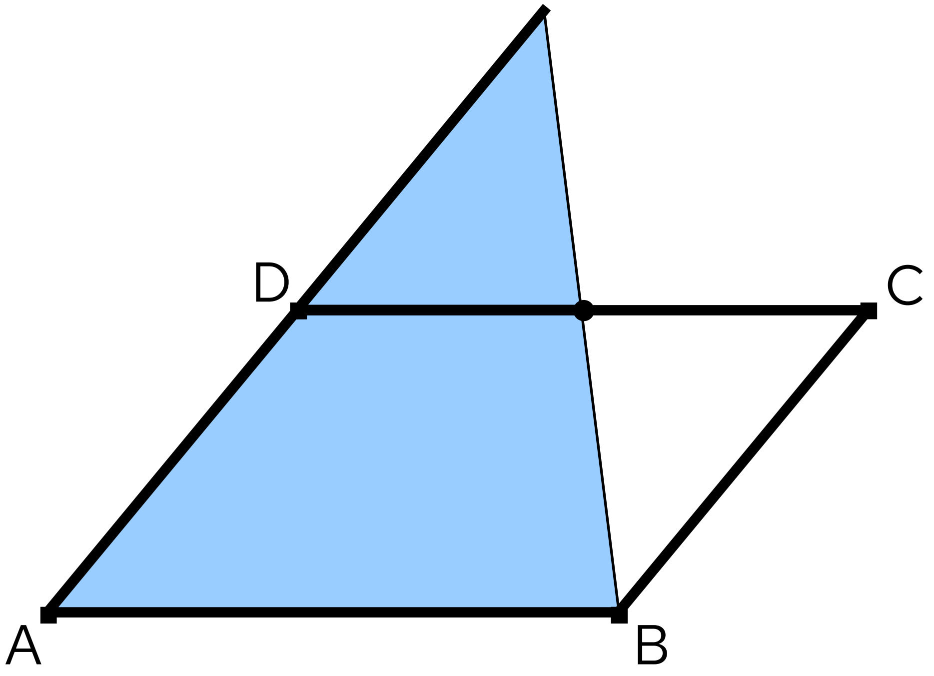
(Du kannst in der Karte zeichnen, wenn dir das bei deiner Schätzung hilft.)

PISA-Aufgabe

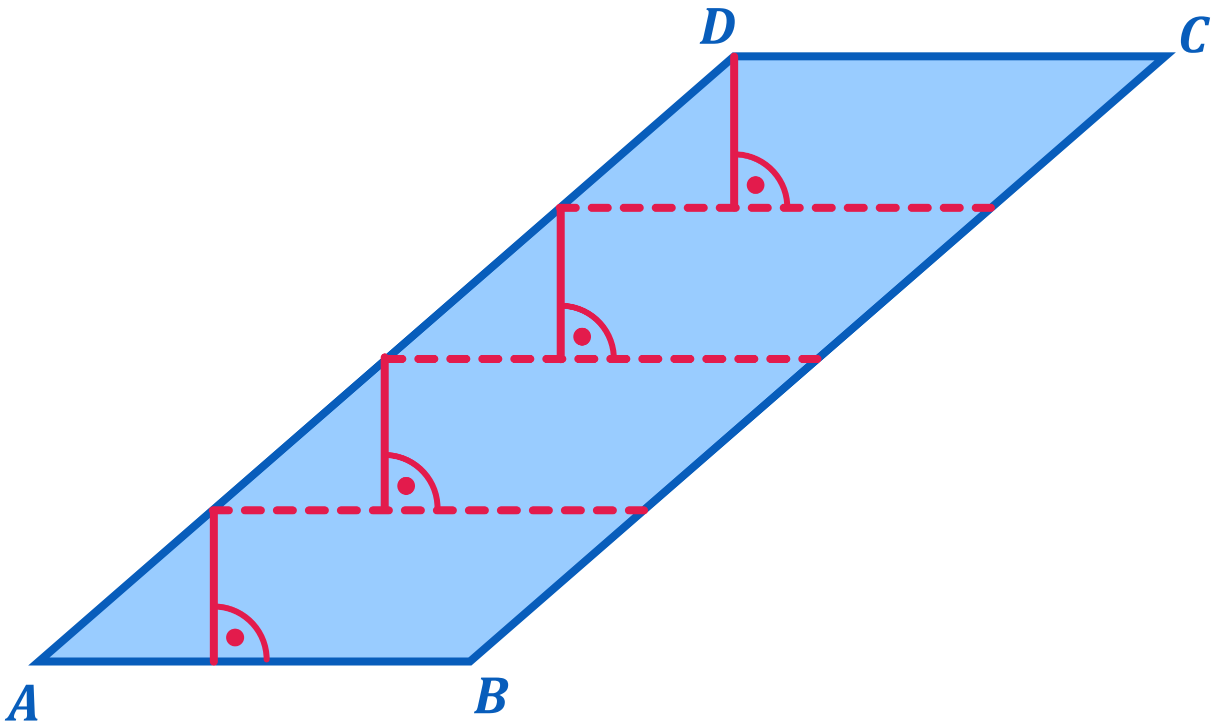
Fläche mit Schelfeistafeln:
13 975 000 km²

Parallelogramm





Parallelogramm

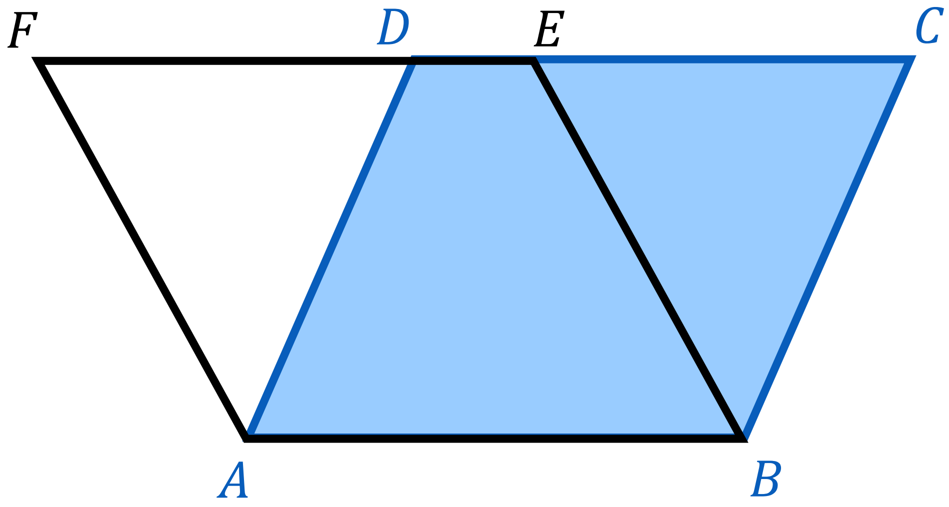


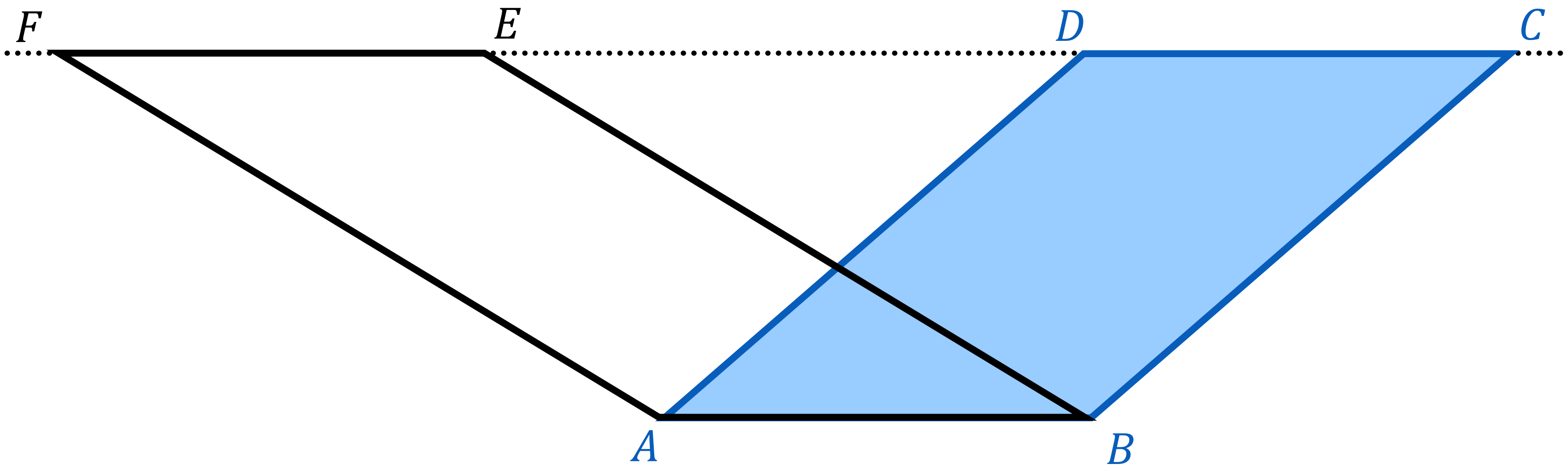
Parallelogramm

Parallelogramme, die in der Länge einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen sind zerlegungsgleich.

Beweisidee: $\Delta ADF \sim \Delta BCE$

Voraussetzung: $[CD] \cap [EF] \neq \emptyset$



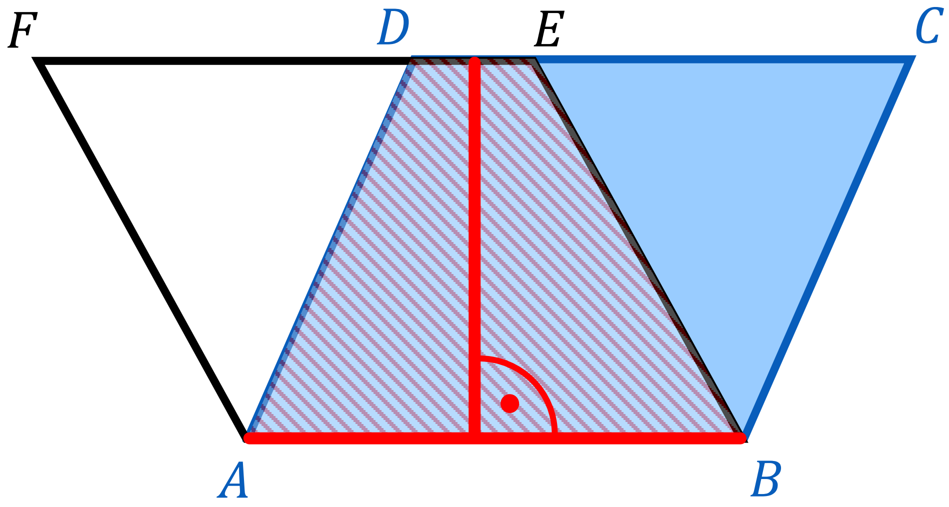


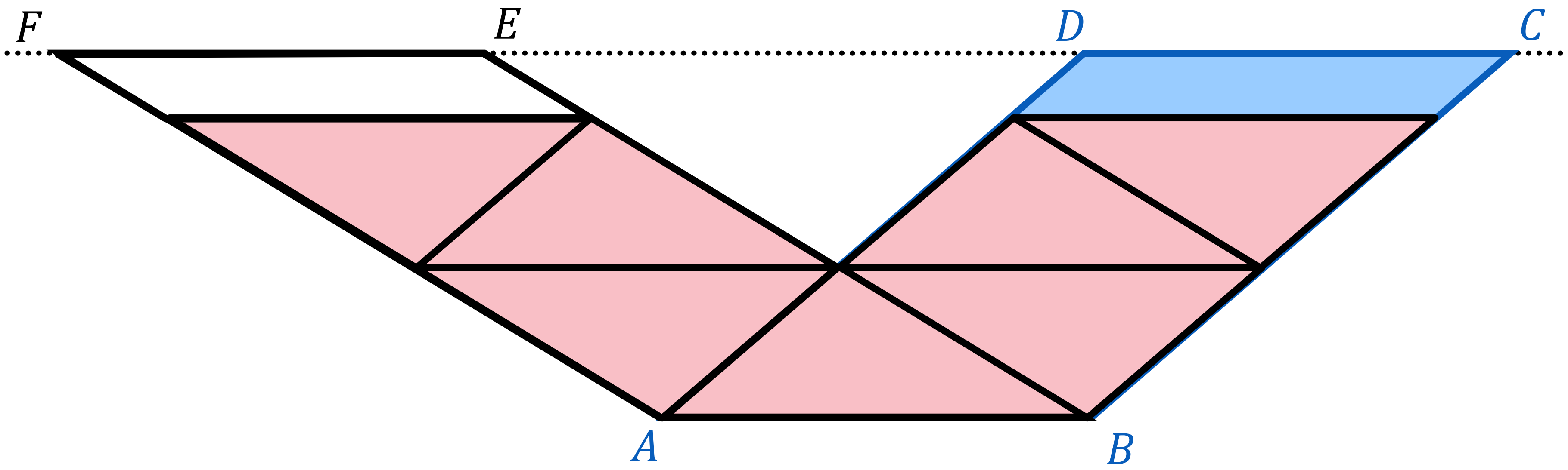
Parallelogramm

Parallelogramme, die in der Länge einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen sind zerlegungsgleich.

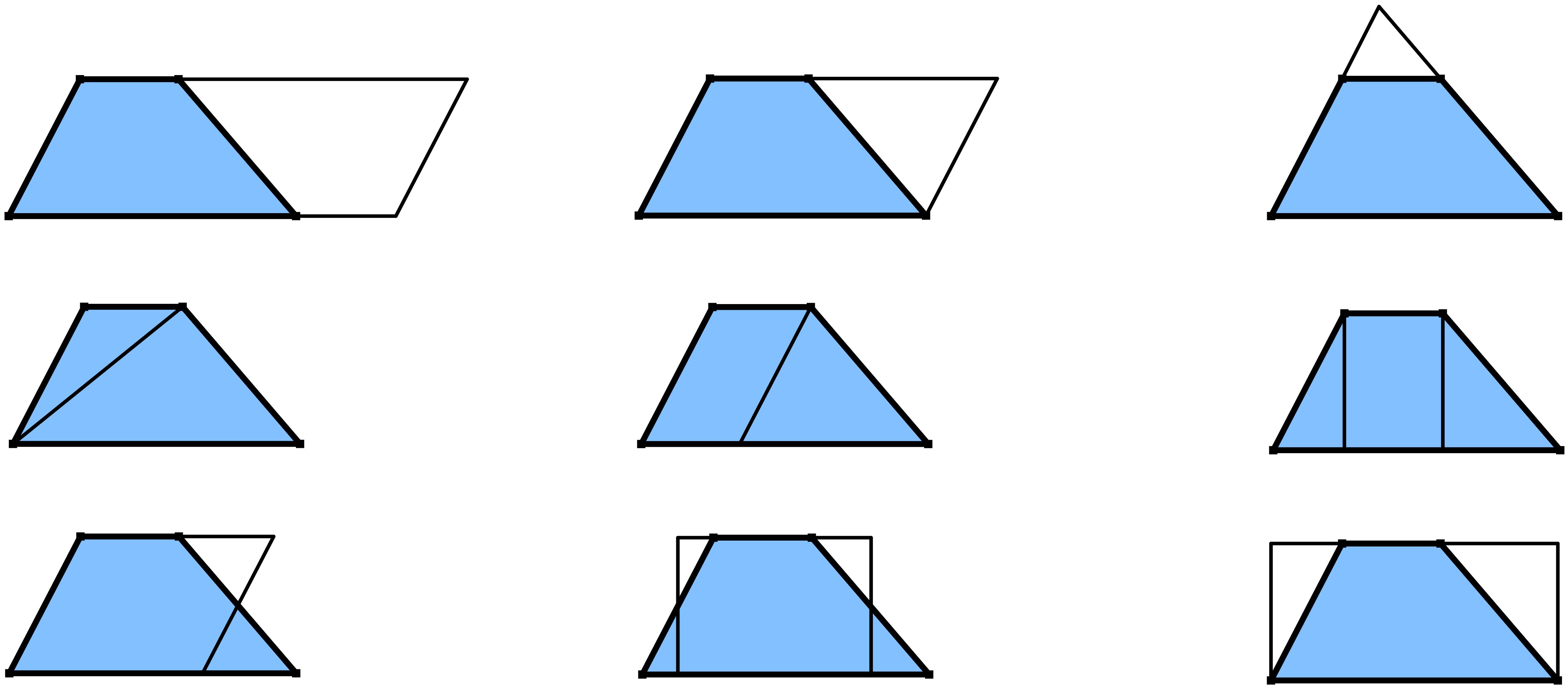
Beweisidee: $\Delta ADF \sim \Delta BCE$

Voraussetzung: $[CD] \cap [EF] \neq \emptyset$

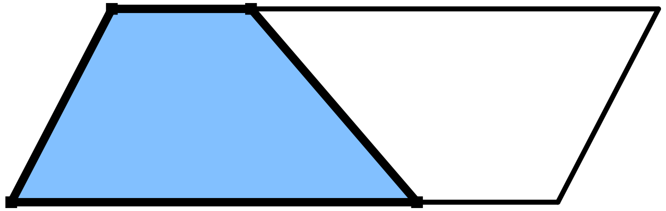


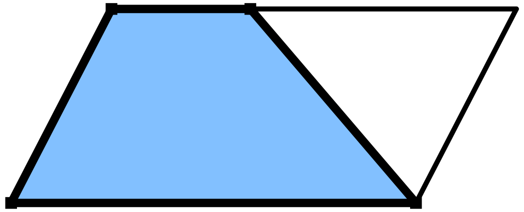


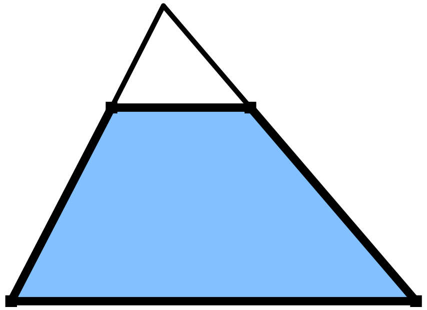
Flächeninhaltsbestimmung beim Trapez

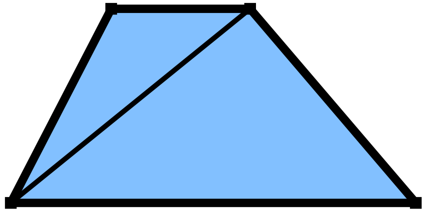


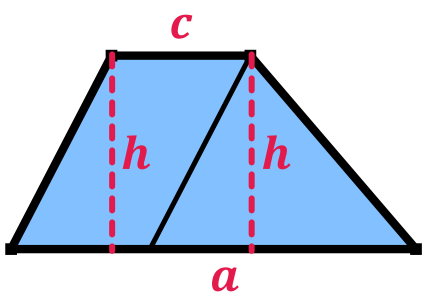
Flächeninhaltsbestimmung beim Trapez



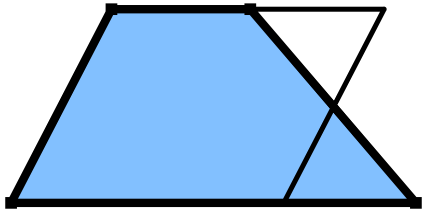


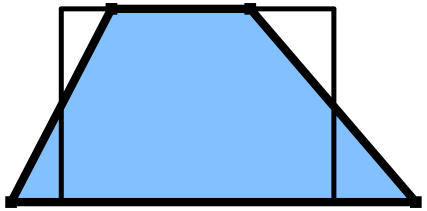


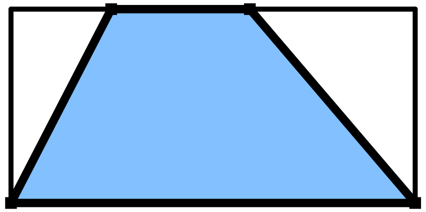




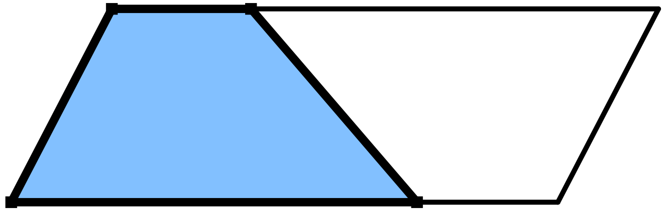
$$
\begin{aligned}
A_{Trapez} &= A_{Parallelogramm} + A_{Dreieck} \\
&= c \cdot h + \frac{1}{2}(a - c) \cdot h \\
&= c \cdot h + \frac{1}{2} a \cdot h - \frac{1}{2} c \cdot h \\
&= \frac{1}{2} a \cdot h + \frac{1}{2} c \cdot h = \frac{a+c}{2} \cdot h
\end{aligned}
$$

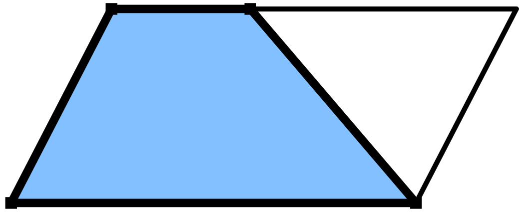


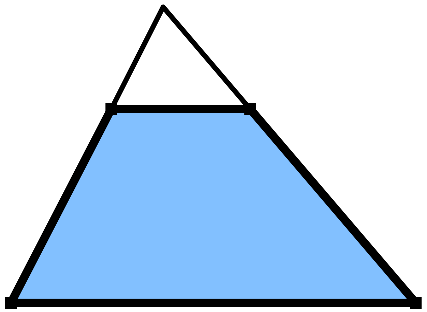


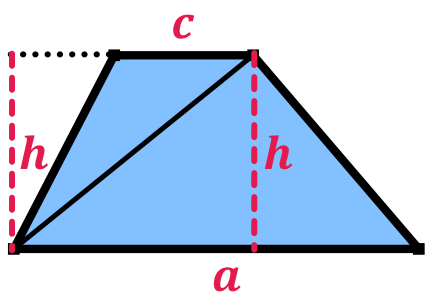


Flächeninhaltsbestimmung beim Trapez

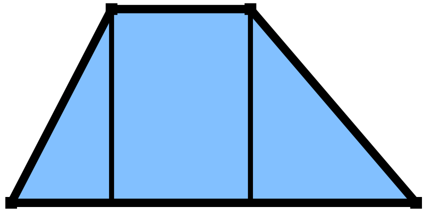


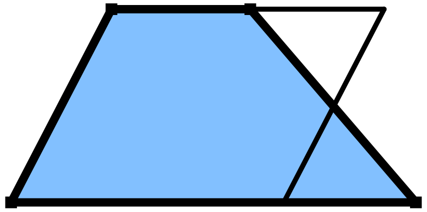


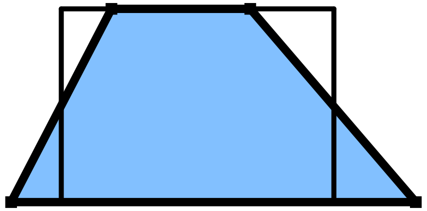


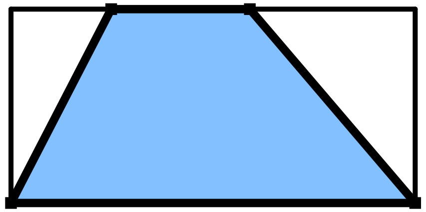


$$A_{Trapez} = A_{Dreieck_1} + A_{Dreieck_2}$$
$$= \frac{1}{2} c \cdot h + \frac{1}{2} a \cdot h$$
$$= \frac{a+c}{2} \cdot h$$









Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 2: Begriffsbildung

2.6 Maßbegriffe: Flächen- und Rauminhalt

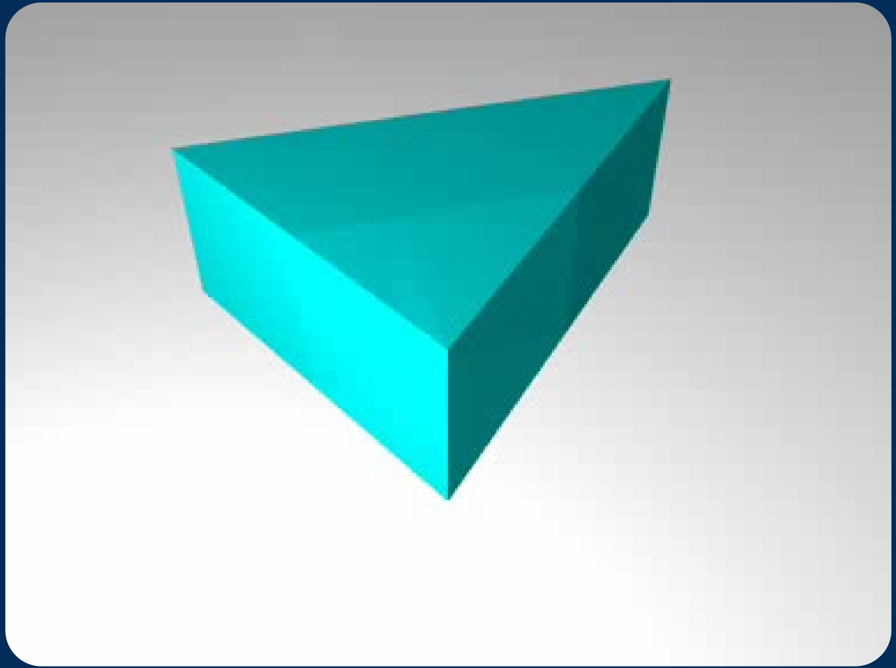
Rauminhaltsbegriff

Herleitung

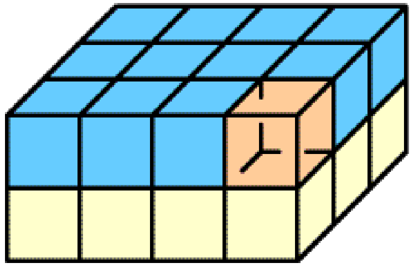
- Weitgehend analog zum Flächeninhaltsbegriff
- Aber: Satz von Dehn beachten!

Satz von Dehn (vgl. Text!)
Zwei rauminhaltsgleiche Polyeder sind im Allgemeinen weder zerlegungs- noch ergänzungsgleich.

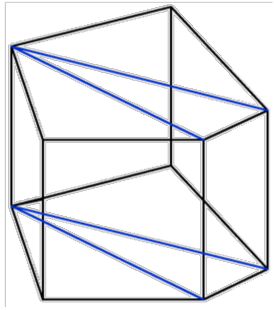
Volumen Dreiecks-prisma



Quader-volumen



Volumen gerades Prisma

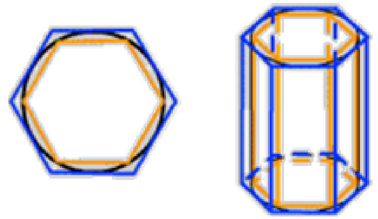


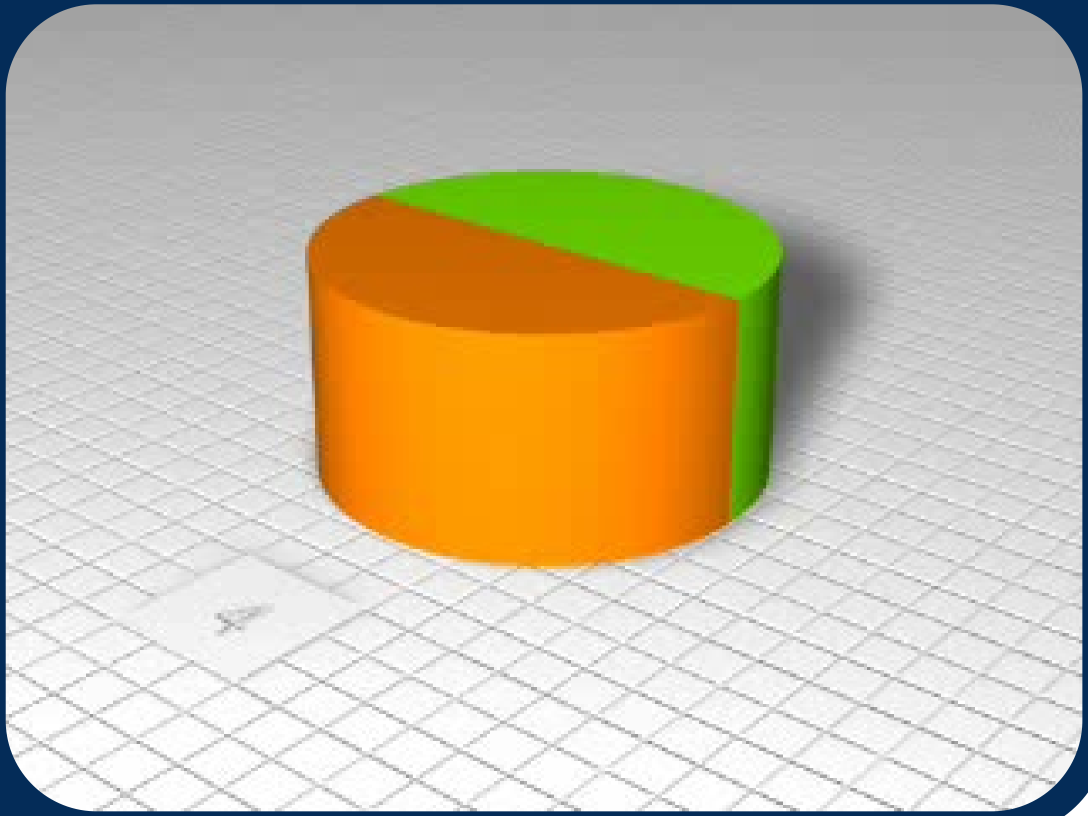
https://www.geogebra.org/m/ffmbrx8j
https://juergen-roth.de/skripte/did_geometrie/cavalieri_dehn_pyramidenvolumen.pdf

Rauminhaltsbegriff

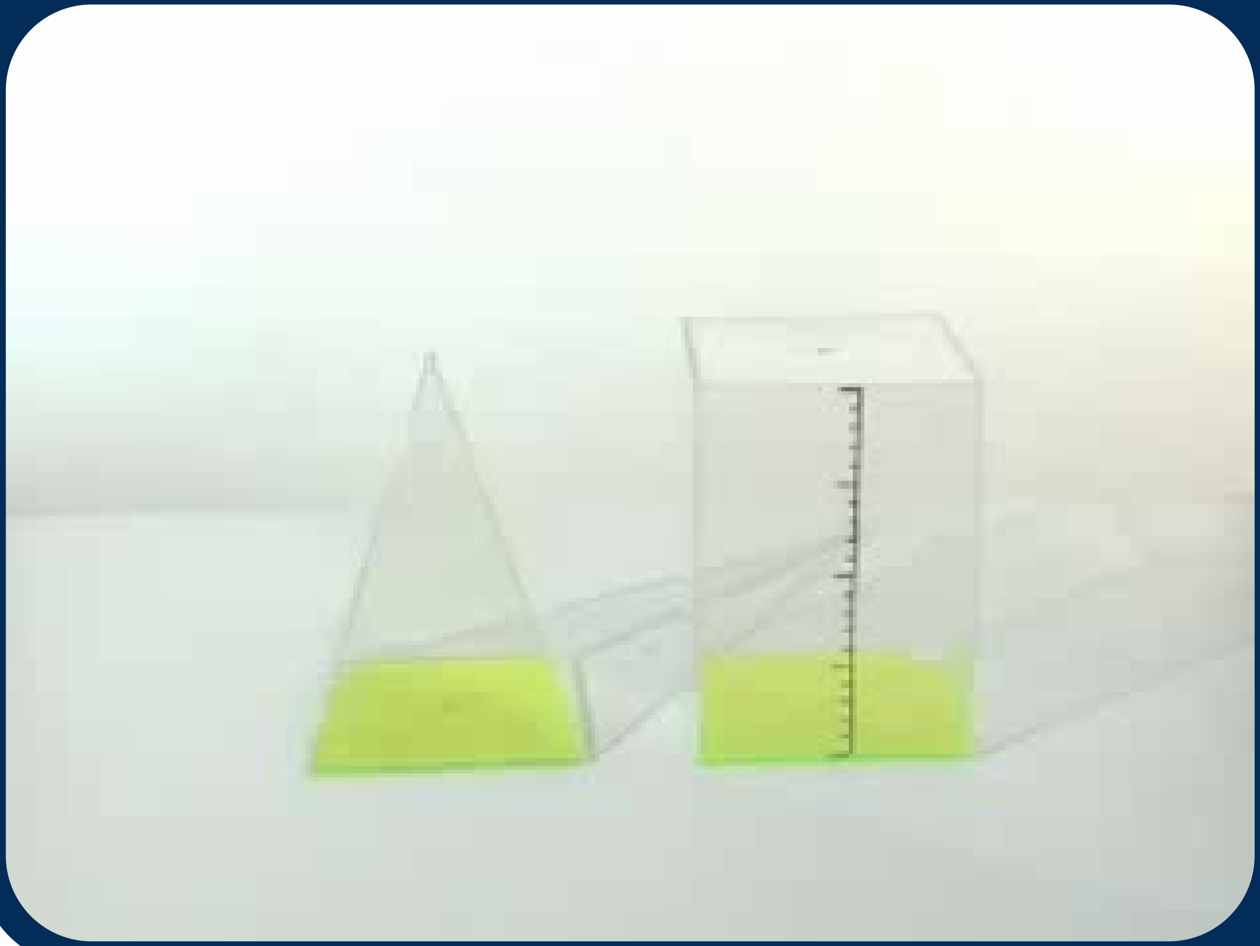
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Zylindervolumen



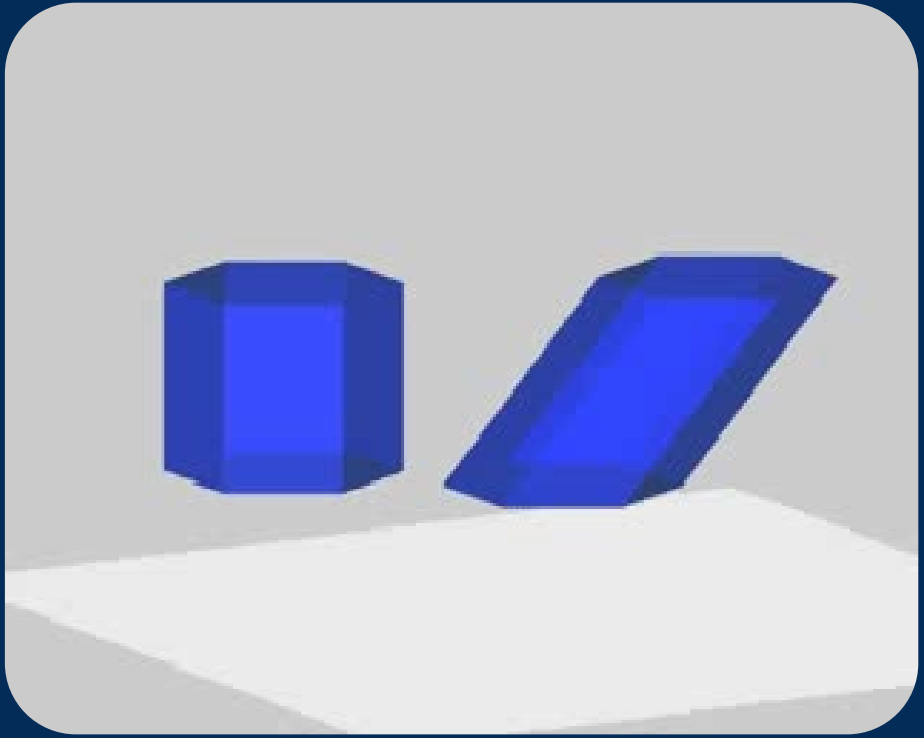


Pyramidenvolumen (vgl. Text)



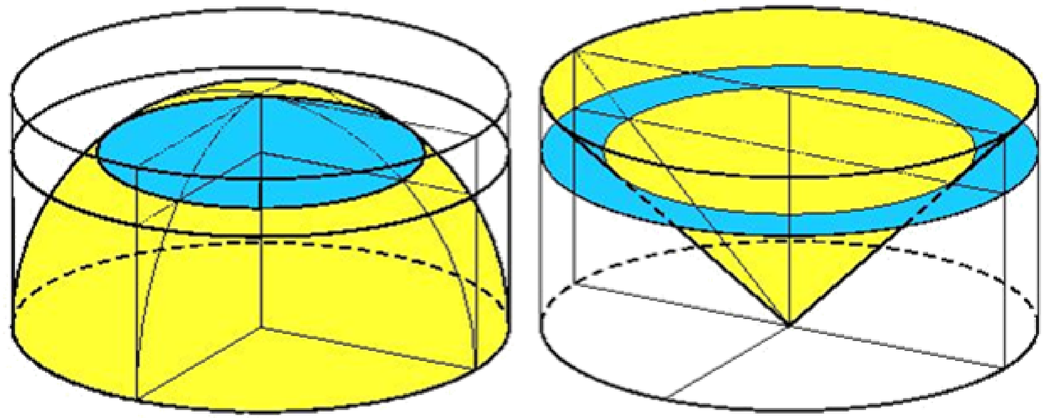
Rauminhaltsbegriff

Satz von Cavalieri (vgl. Text!)
Zwei Körper gleicher Höhe sind volumengleich, wenn sie in jeweils gleicher Höhe flächengleiche Querschnitte haben.



Kugelvolumen (vgl. Text)

- Herleitung über den Satz von Cavalieri

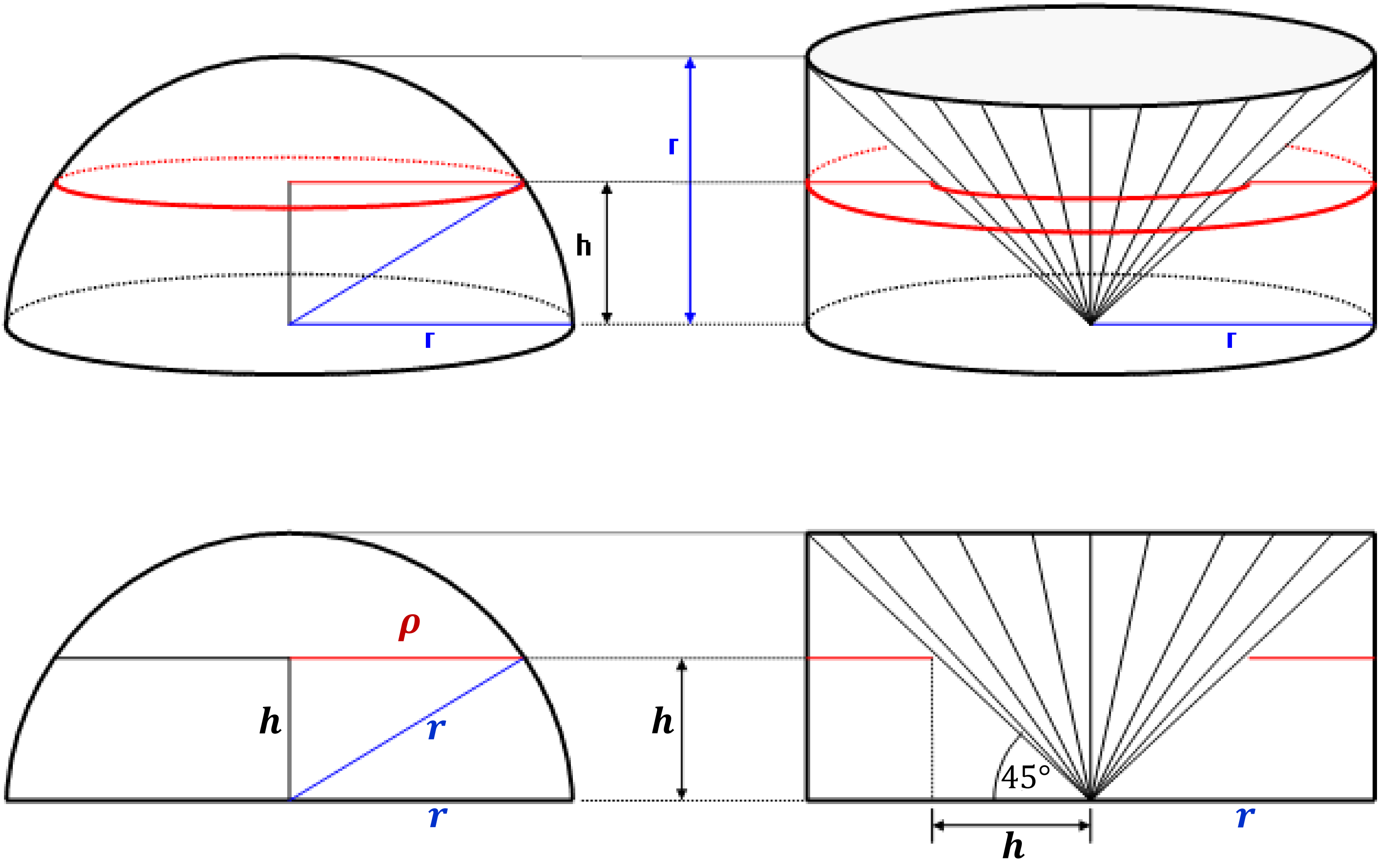


https://www.geogebra.org/m/a7SkNSWh

Text lesen!

- Prinzip von Cavalieri
- Satz von Dehn
- Volumen der Pyramide
- Kugelvolumen/Kugeloberfläche

Kugelvolumen



Kugelvolumen

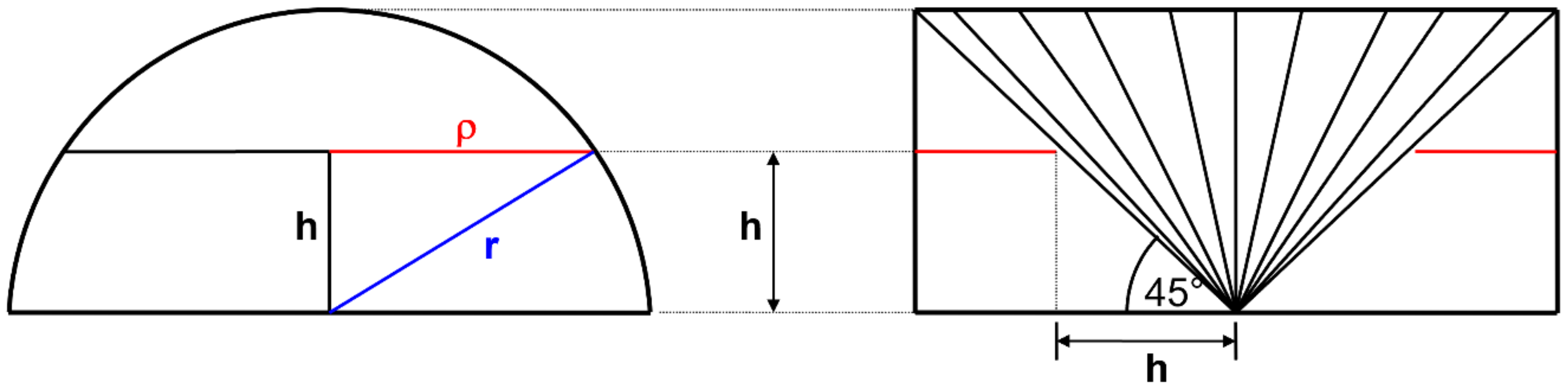
Es muss noch gezeigt werden, dass die Flächeninhalte der Schnittflächen in der Höhe h in beiden Körpern gleich groß sind.

$$A_{\text{Schnittfläche}} = \rho^2 \cdot \pi = (r^2 - h^2) \cdot \pi$$

$$A_{\text{Schnittfläche}} = r^2 \cdot \pi - h^2 \cdot \pi = (r^2 - h^2) \cdot \pi$$

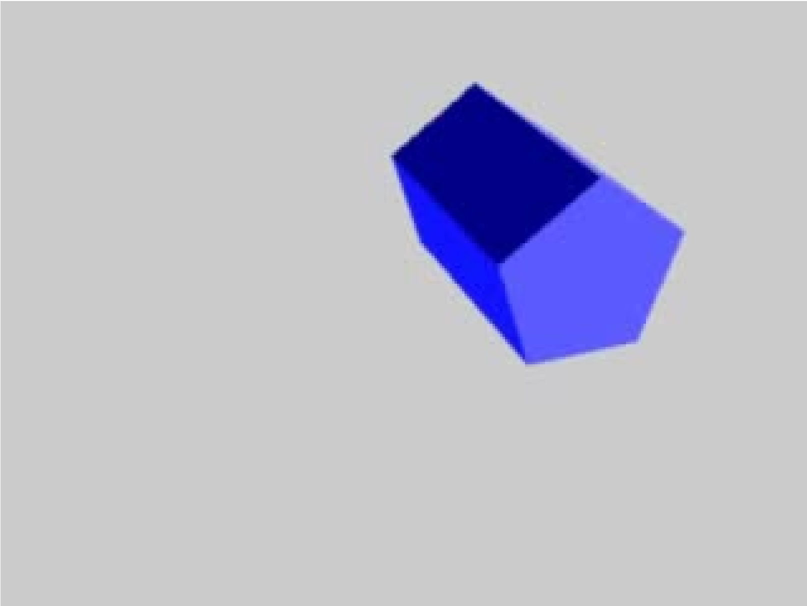
Nach dem Prinzip von Cavalieri gilt also:

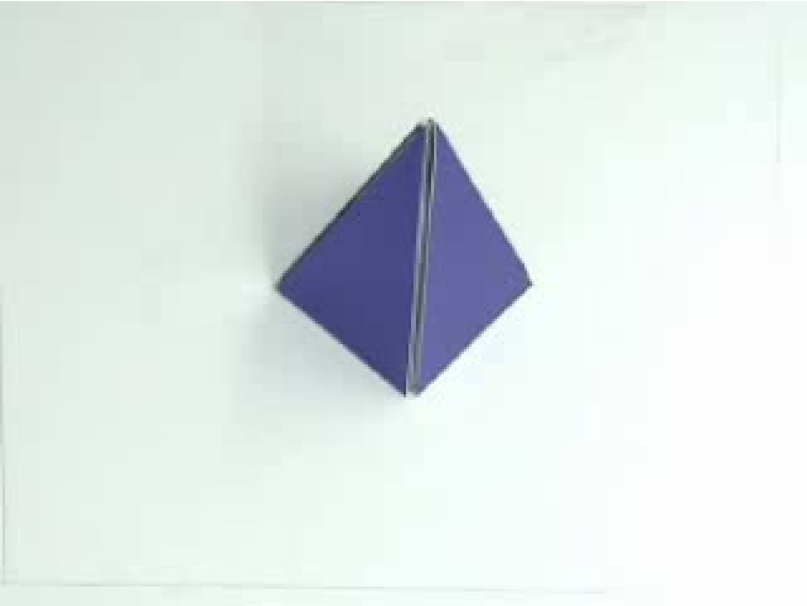
$$V_{\text{Halbkugel}} = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Kegel}} = G \cdot r - \frac{1}{3} \cdot G \cdot r = \frac{2}{3} \cdot G \cdot r = \frac{2}{3} \cdot r^2\pi \cdot r = \frac{2}{3} \cdot r^3\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \cdot r^3\pi}$$



 https://www.geogebra.org/m/a7SkNSWh

Exkurs: Netze von Körpern





RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

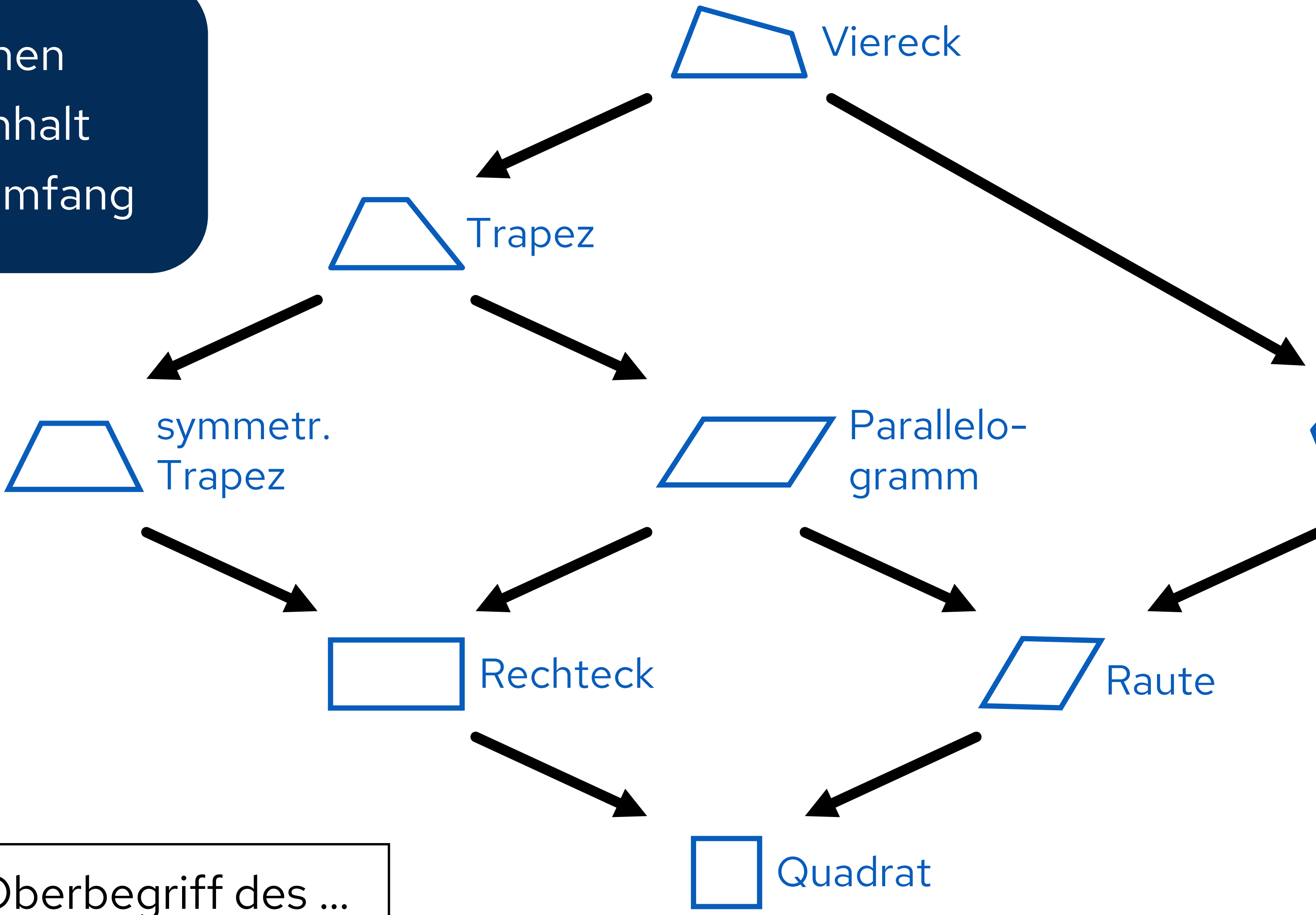
Kapitel 2: Begriffsbildung

Haus der Vierecke
Strukturierung: Seiten & Winkel

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

- Definitionen
- Begriffsinhalt
- Begriffsumfang

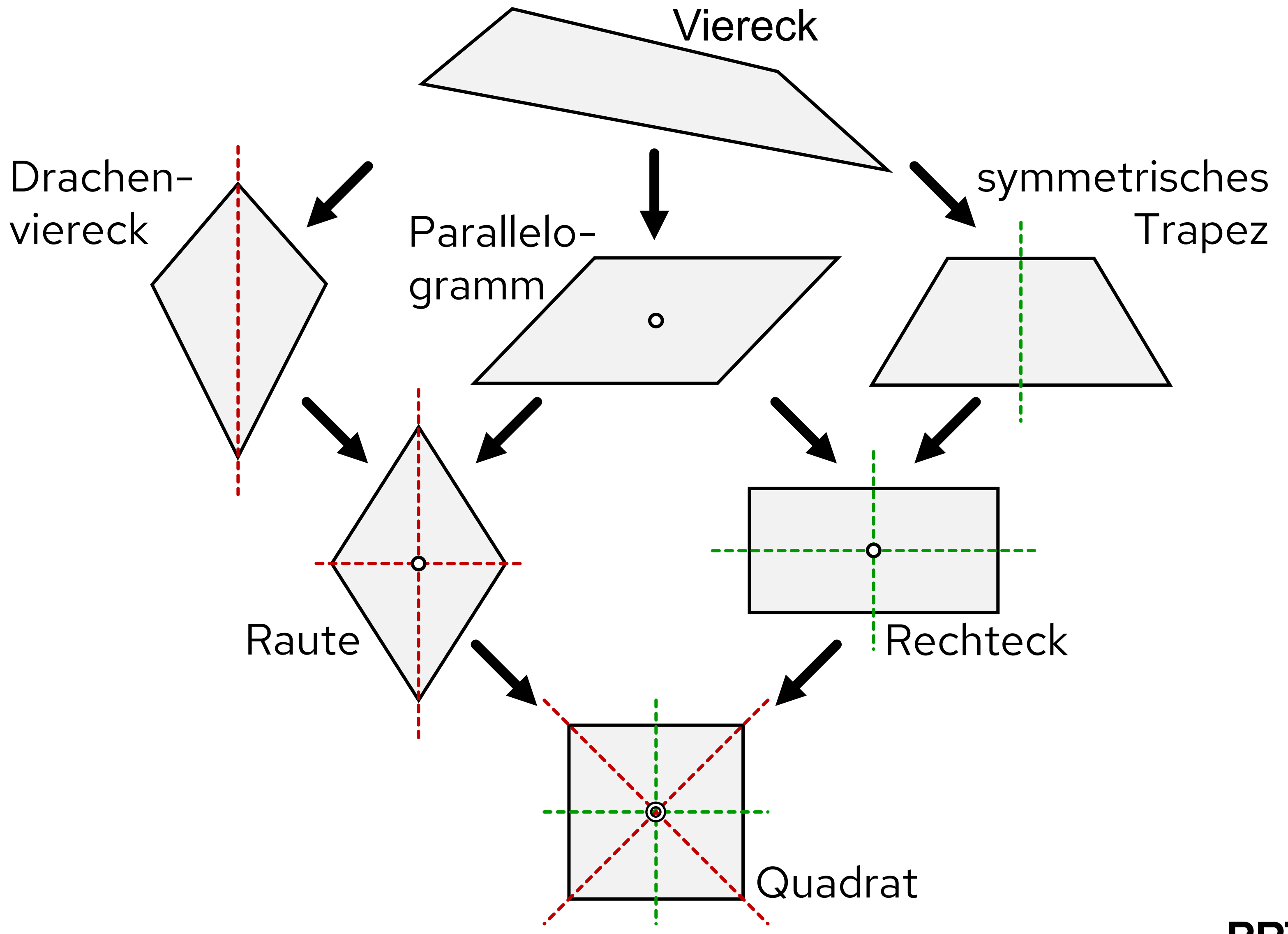
- Oberbegriff
- Unterbegriff
- Nachbarbegriff

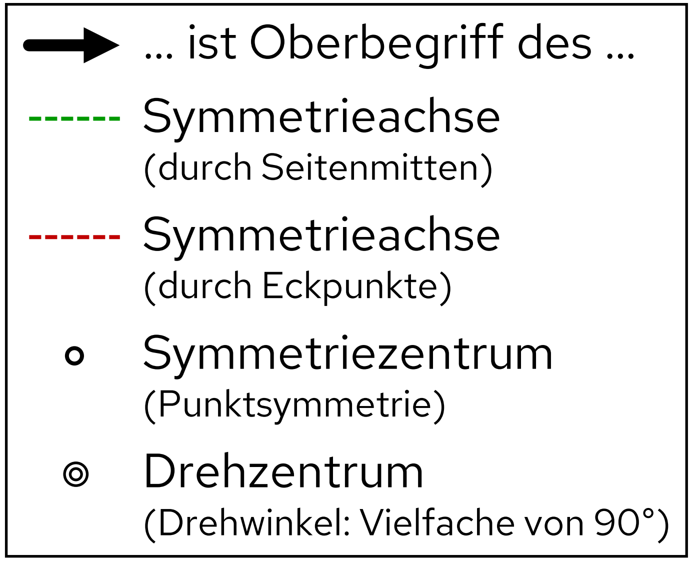


→ … ist Oberbegriff des …

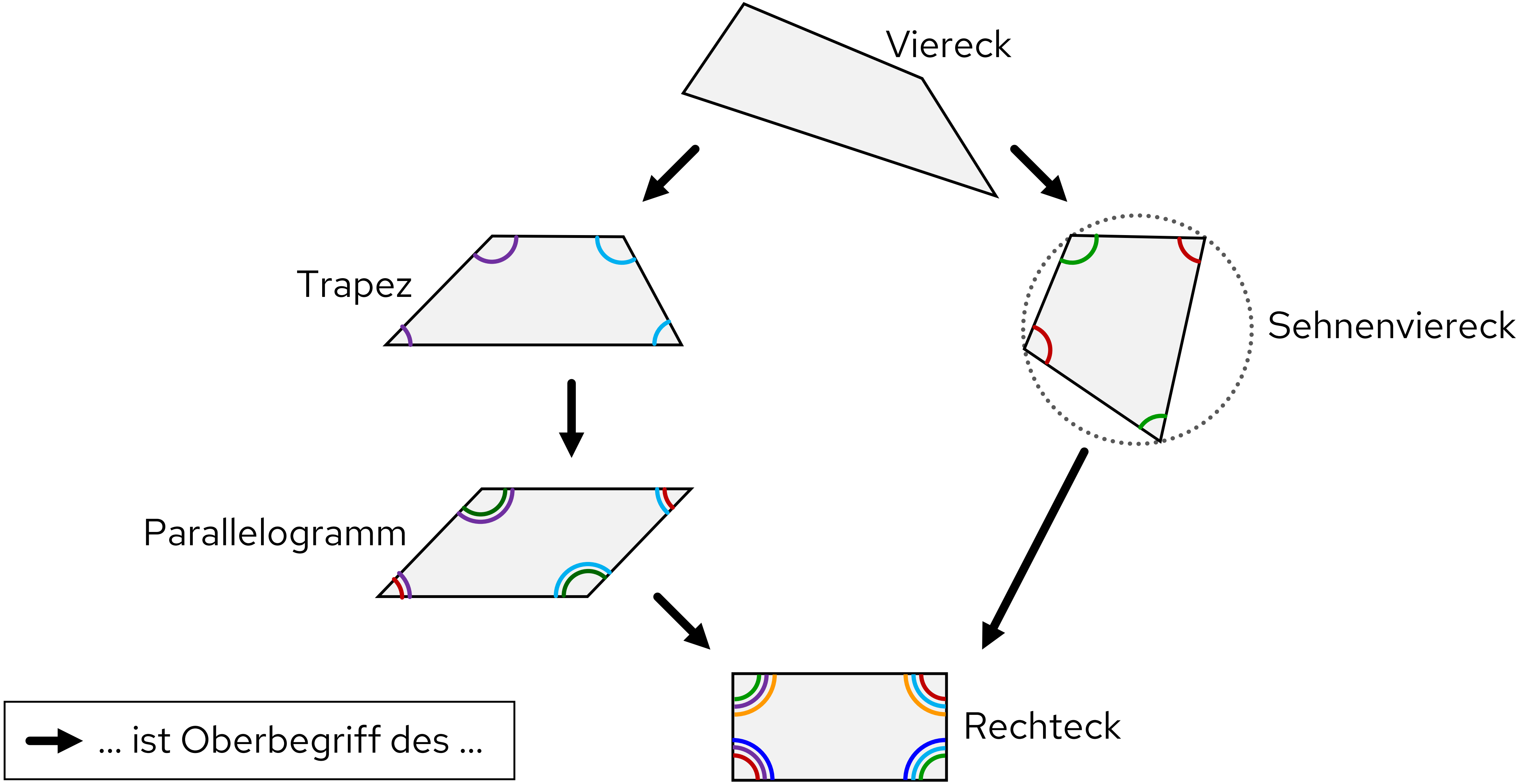
- Strukturierungs-kriterien

Haus der Vierecke
Strukturierung: Symmetrie





Haus der Vierecke
Strukturierung: Innenwinkel



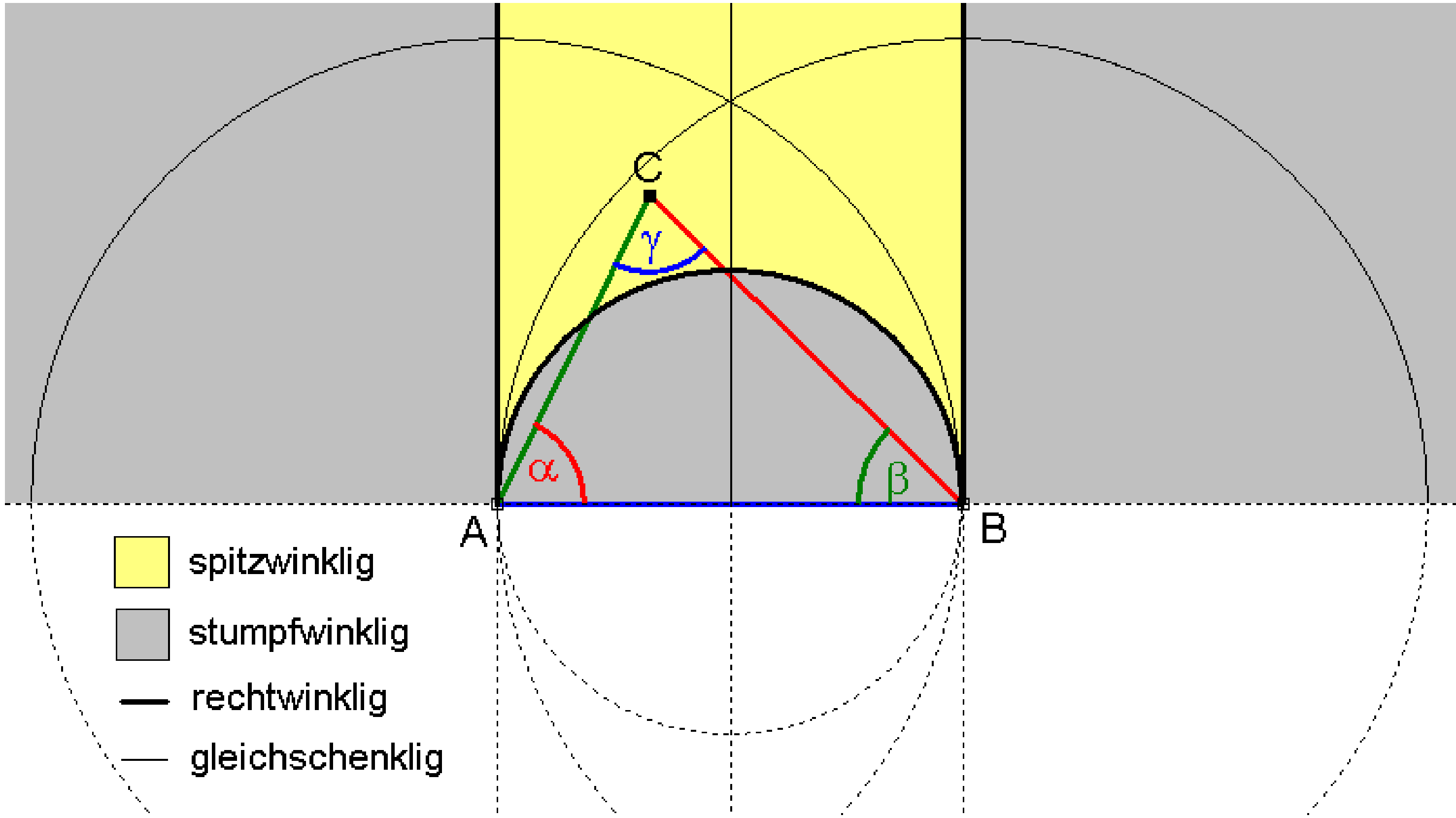
RPTU

Objektbegriffe: Dreiecksgrundformen

Dreiecksbegriffe

- rechtwinklig
- spitzwinklig
- stumpfwinklig
- gleichschenklig
- gleichseitig

als bewegliche Strukturen aufbauen.



Ziel

Begriffe flexibler verfügbar machen als mit statischen Prototypen.

„Merkbild“

- Im Merkbild sind Bewegungen kondensiert.
- Wissensabruf benötigt Bewegliches Denken

Gleichschenklige Dreiecke

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

1) **B**ewege den Punkt $\boldsymbol{C}$ so, dass Dreiecke entstehen, die

a) gleichschenklig mit $|AC| = |BC|$ sind,

b) gleichschenklig mit $|AC| = |AB|$ sind,

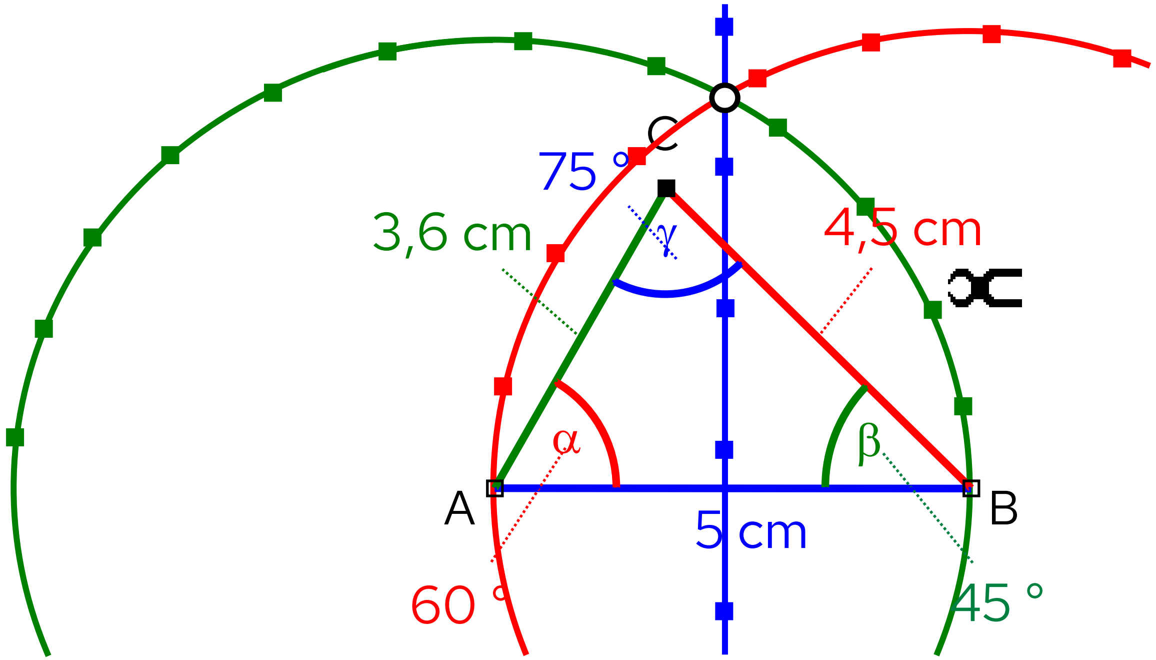
c) gleichschenklig mit $|BC| = |AB|$ sind.

2) **A**ngabe von Kurven (Begründung)

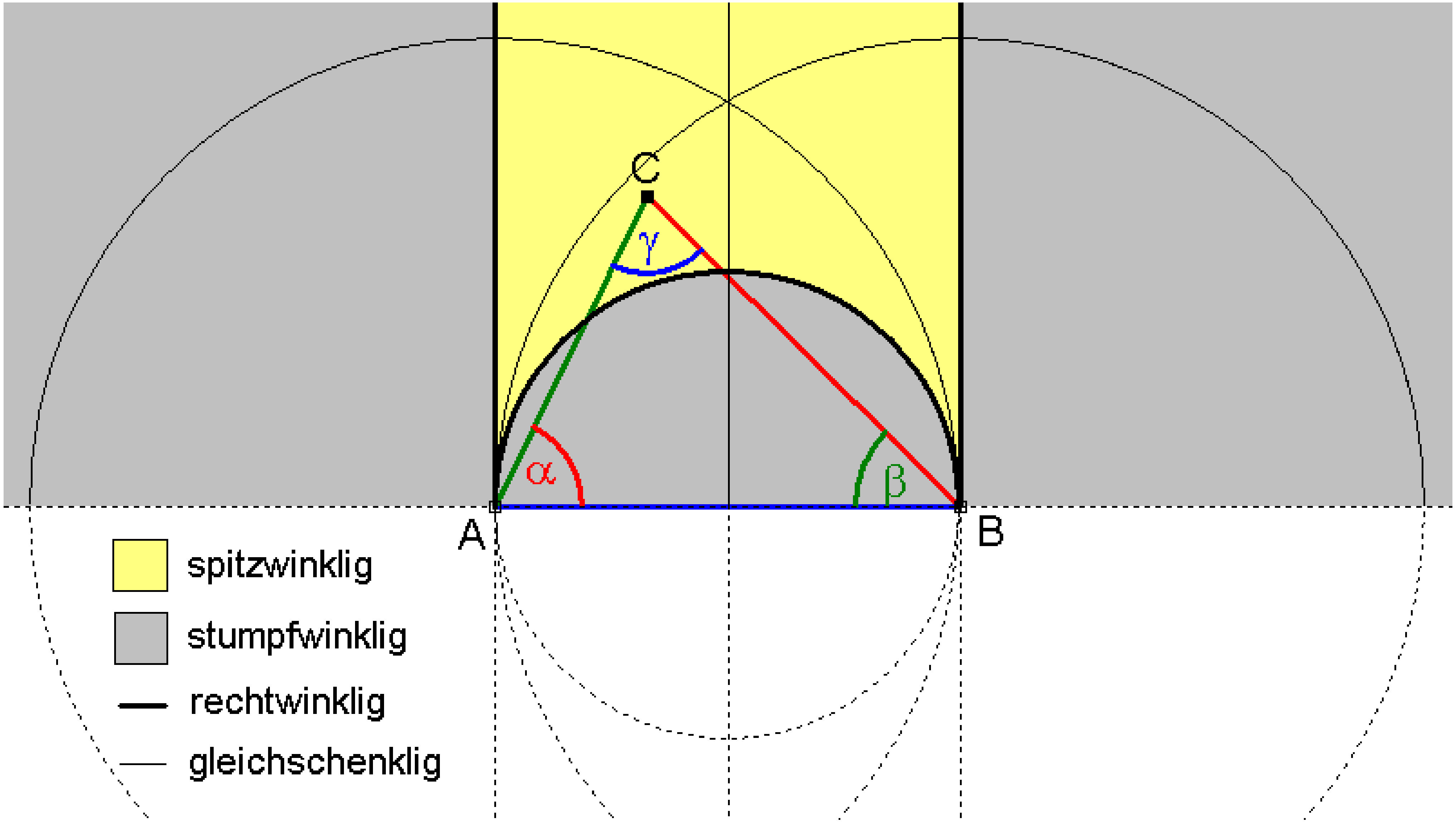
3) **W**iderlegen bzw. vertrauensbildende Maßnahme durch Binden von $\boldsymbol{C}$ an die Kurven.

4) **B**eobachtung der Innenwinkel
→ Basiswinkelsatz

5) **G**leichseitige Dreiecke



Dreiecksgrundformen: „Merkbild“



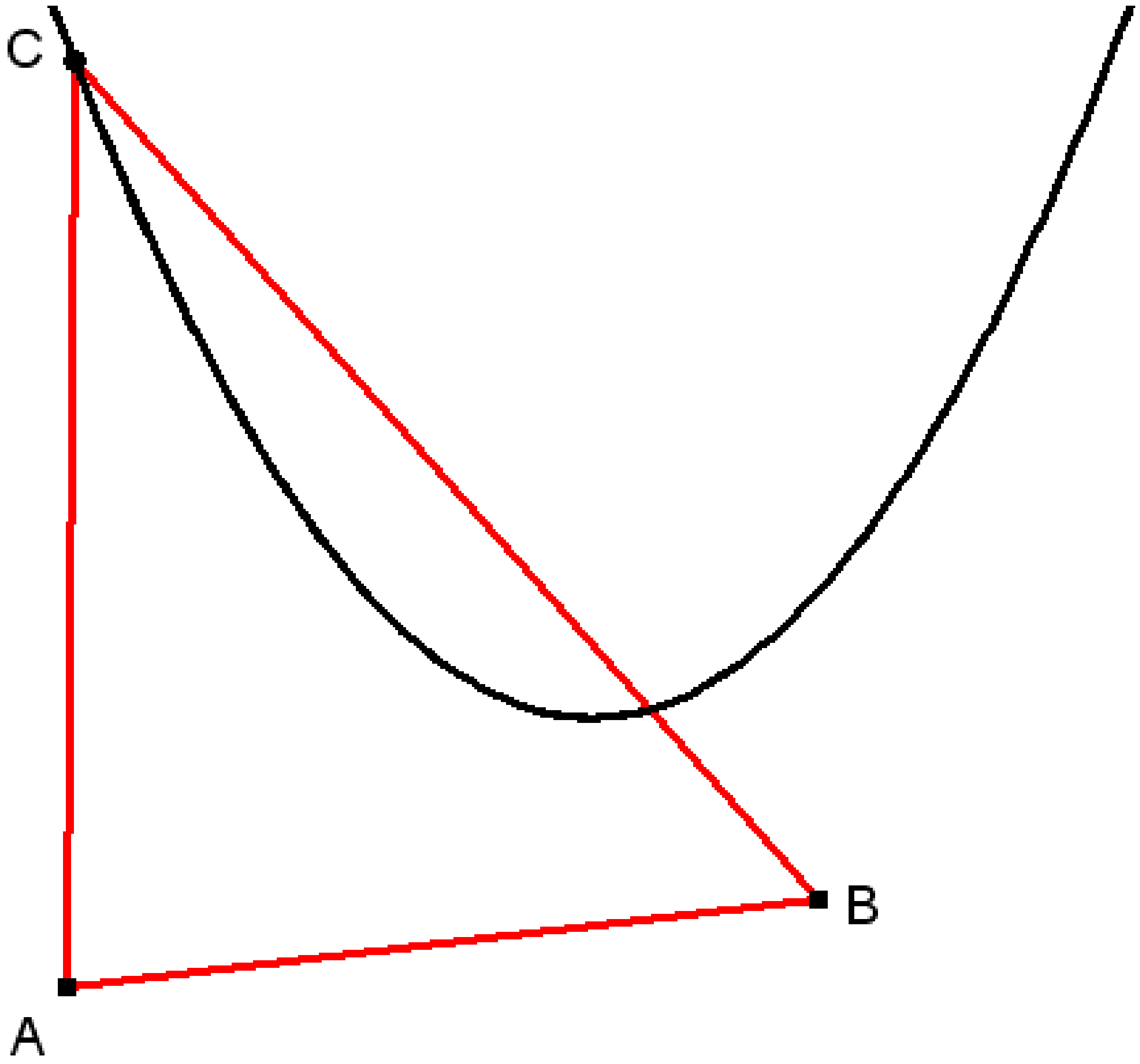
 https://www.geogebra.org/m/NRtMBwUJ

Eckpunkt wandert auf einer Kurve

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Aufgabe

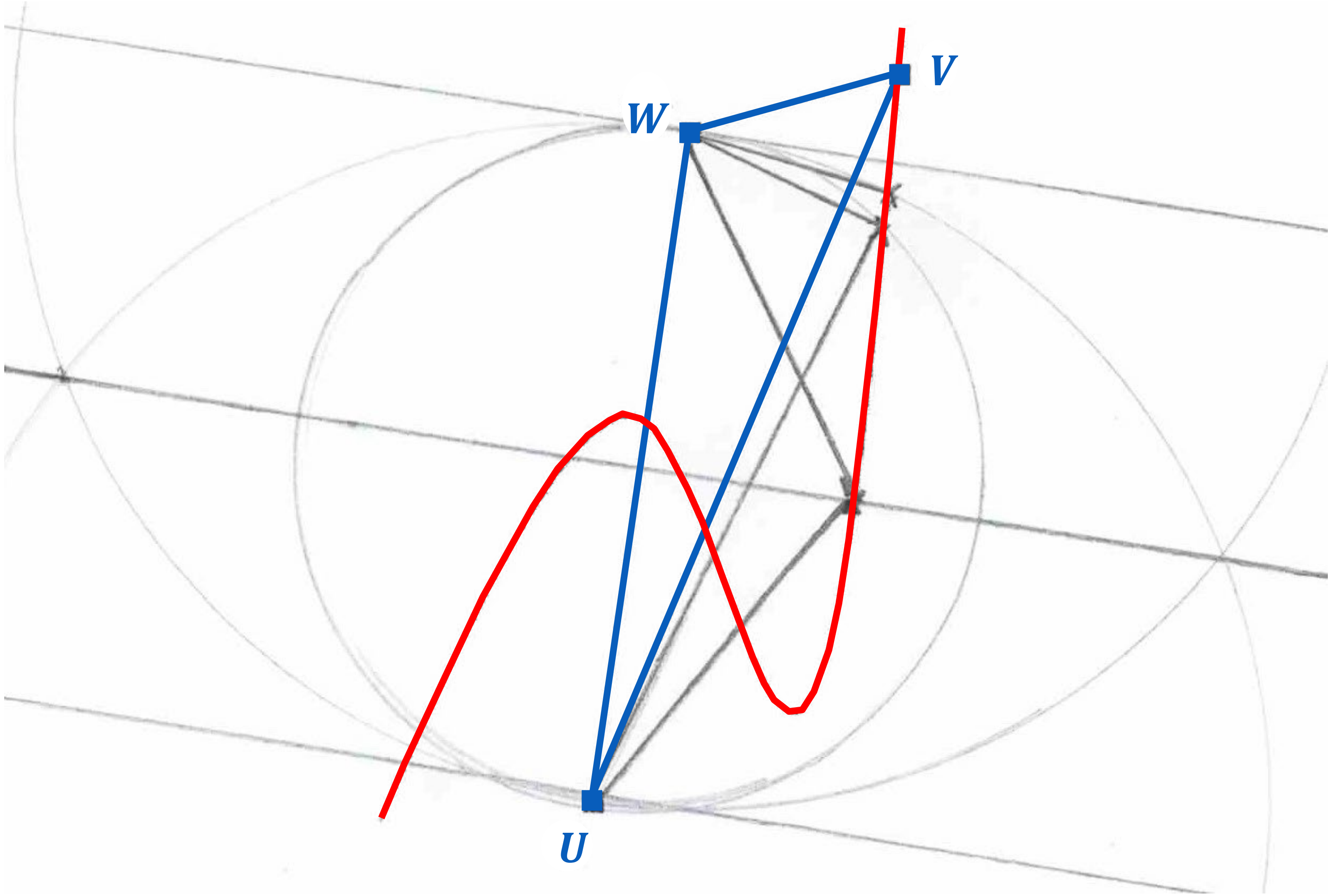
- Der Punkt C wird entlang der eingezeichneten Kurve nach rechts bewegt.
- Welche Dreiecksgrundformen nimmt das Dreieck ΔABC dabei der Reihe nach an?



Prüfungsaufgabe

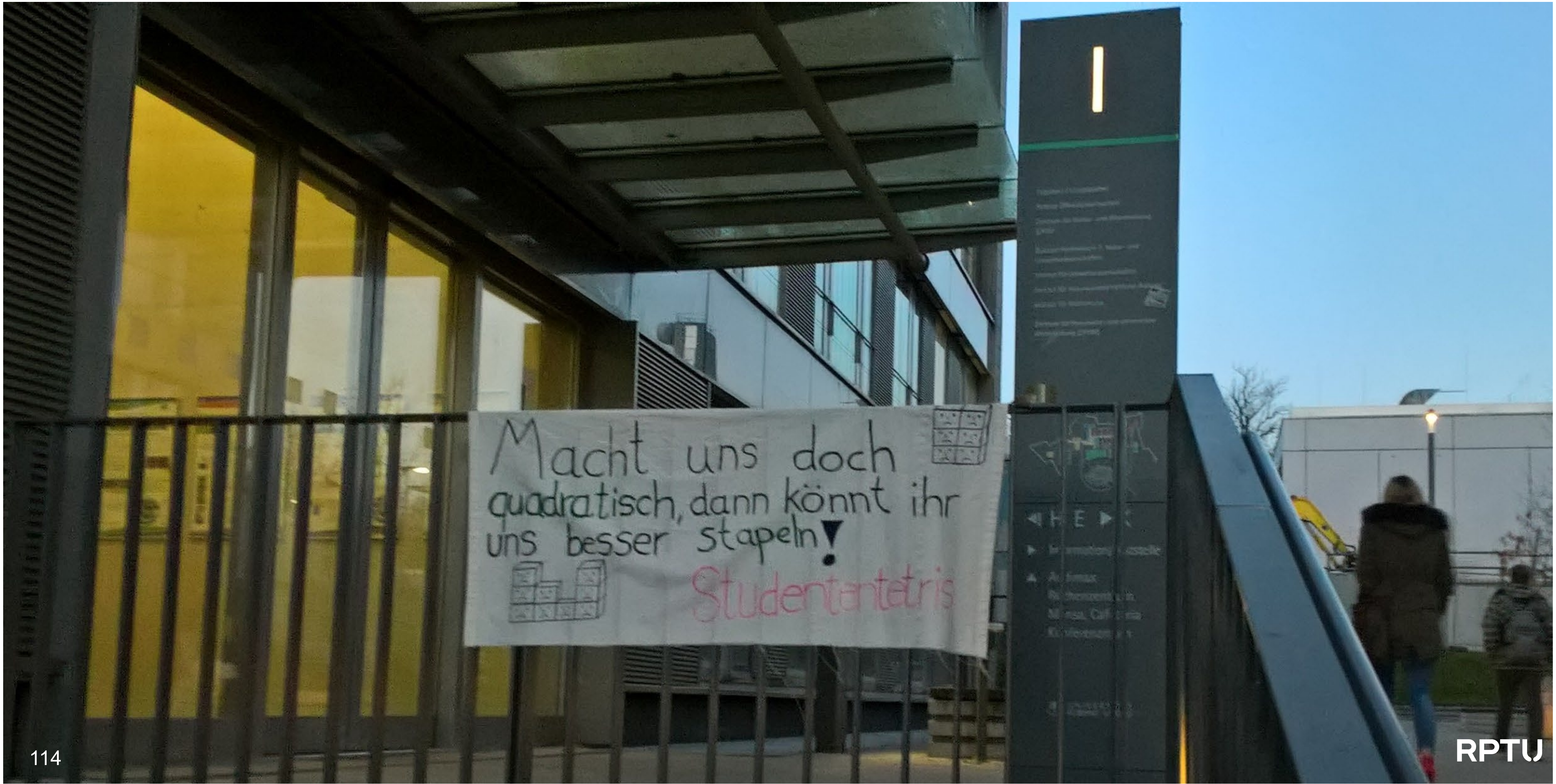
Aufgabe

- Der Punkt V wird entlang der eingezeichneten Kurve nach links unten bewegt.
- Welche Dreiecksgrund-formen nimmt das Dreieck ΔUVW dabei der Reihe nach an?



Roth, J. (2011). Computerwerkzeuge und Prüfungen – Probleme, Lösungsansätze und Chancen.
In: Kortenkamp et al. (Hrsg.): Computerwerkzeuge und Prüfungen (S. 67-79). Hildesheim: Franzbecker

Objektbegriffe im Alltag



Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 2: Begriffsbildung

2.1 Was macht einen Begriff aus?

2.2 Wie lernt man einen Begriff?

2.3 Unterrichtsphasen beim Erarbeiten zentraler Begriffe

2.4 Begriffe klassifizieren

2.5 Relationsbegriffe: Ähnlichkeit

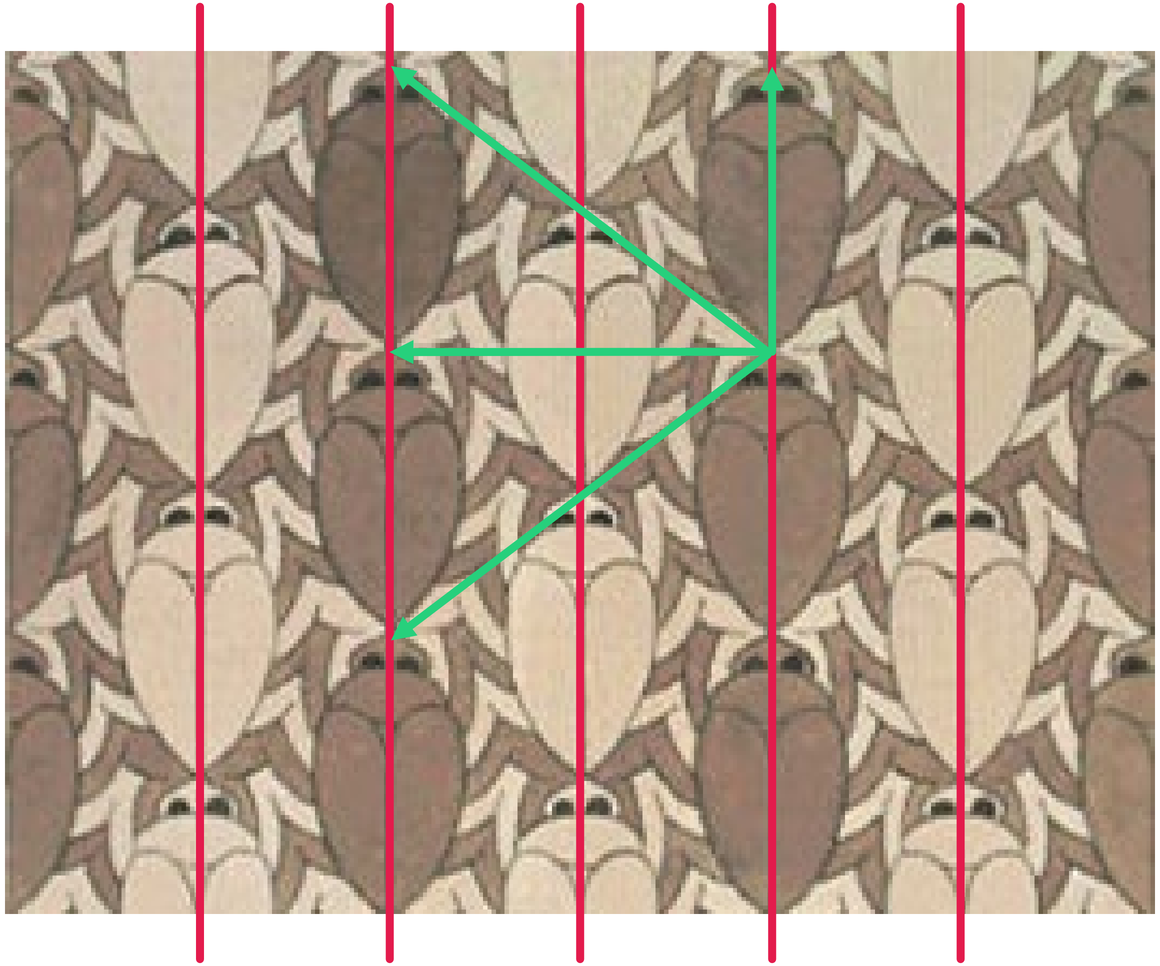
2.6 Maßbegriffe: Flächen- und Rauminhalt

2.7 Objektbegriffe: Dreieck und Viereck

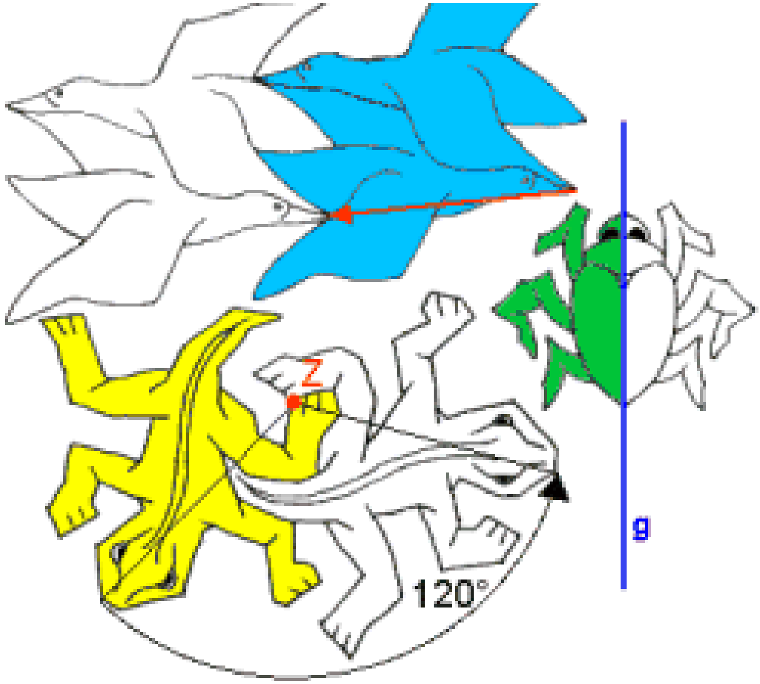
2.8 Abbildungsbegriffe: Kongruenzabbildungen

2.9 Winkelbegriff

Kongruenzabbildungen



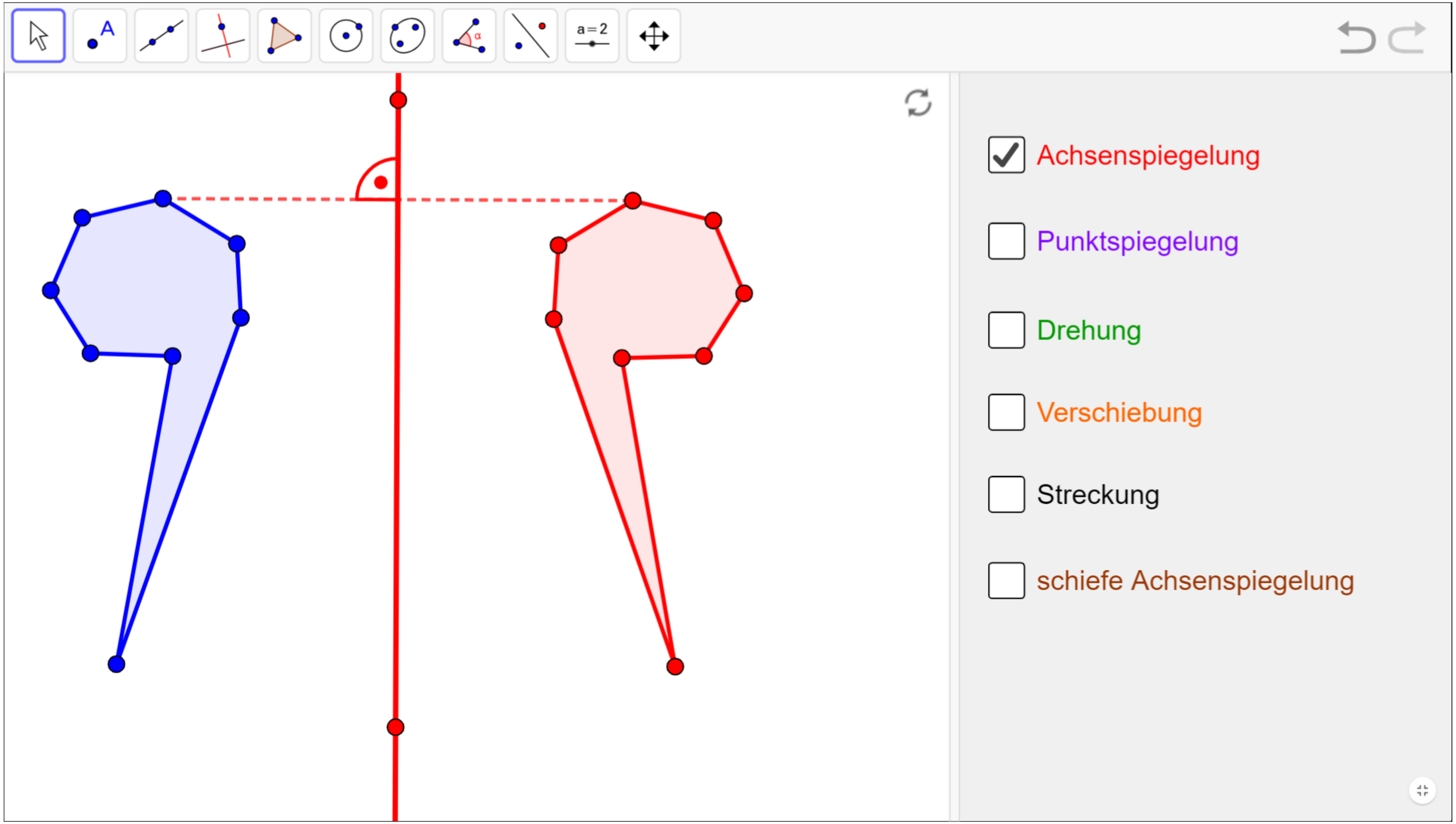
Kongruenzabbildungen



Symmetrie in Graphiken
M. C. Eschers

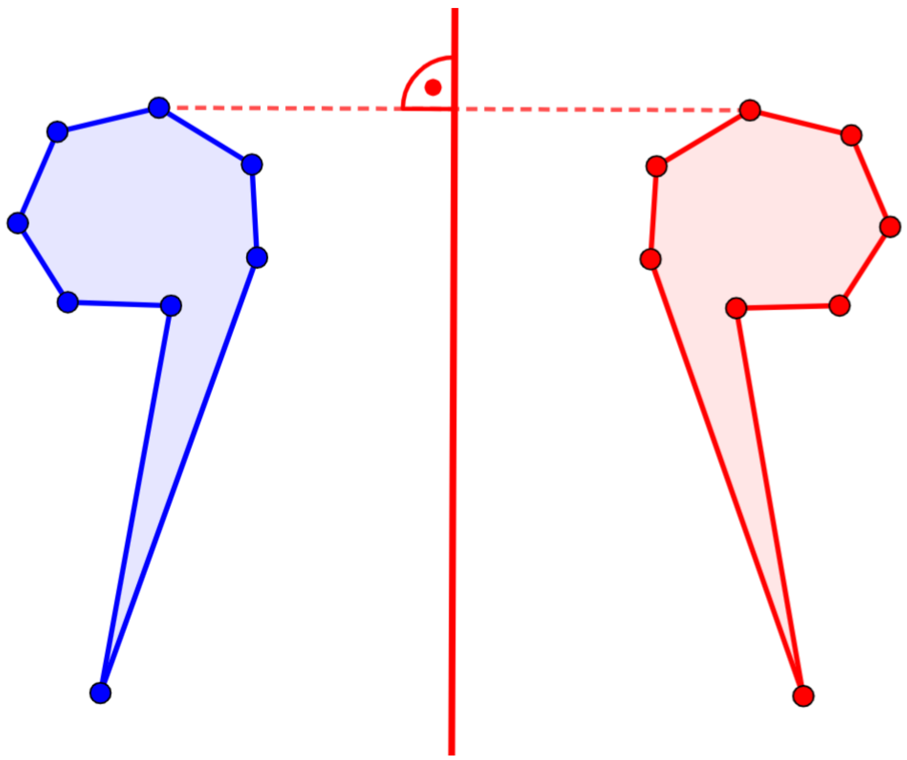
Erstellt von
Maike Dependahl

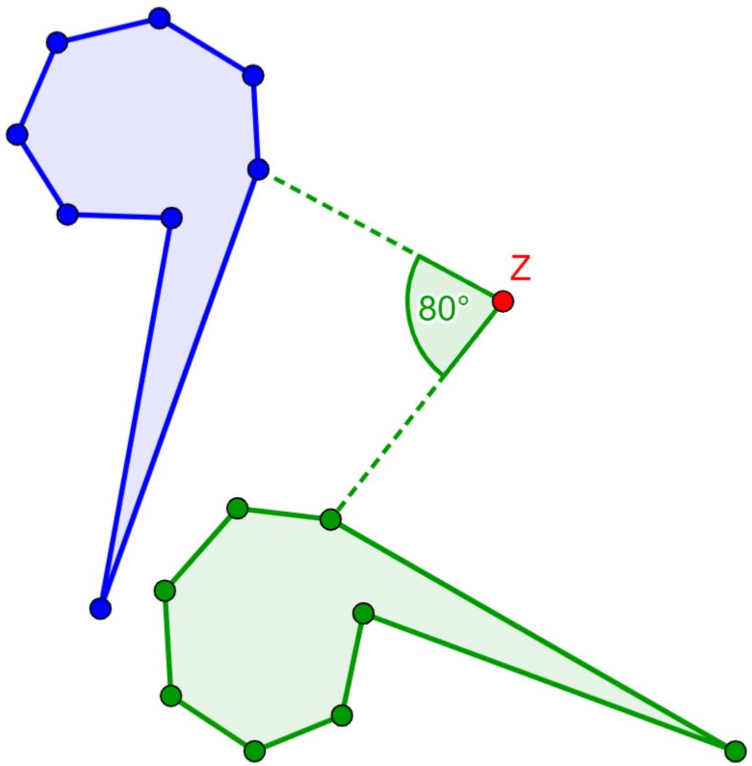
Abbildungen



 https://www.geogebra.org/m/xmpjvc6m

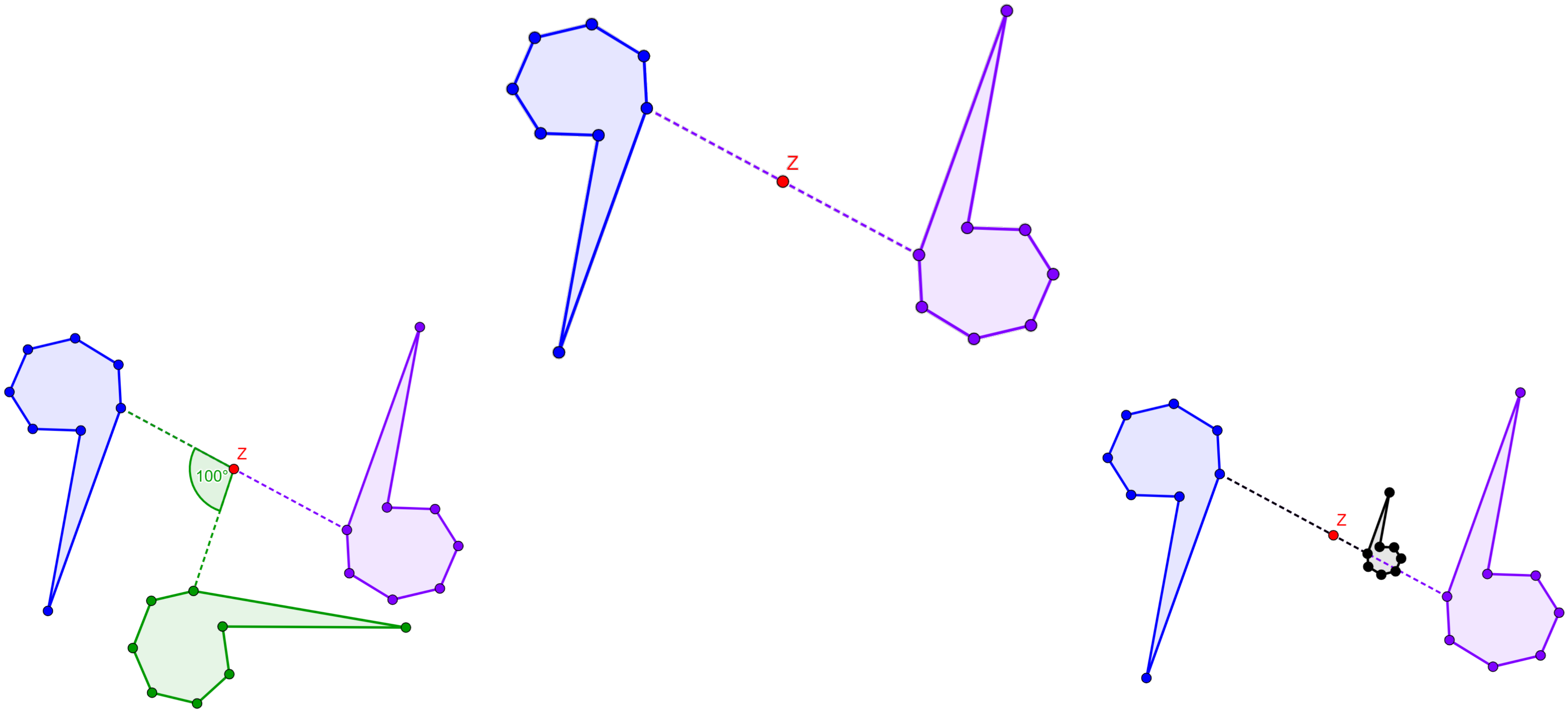
Achsenspiegelung und Drehung





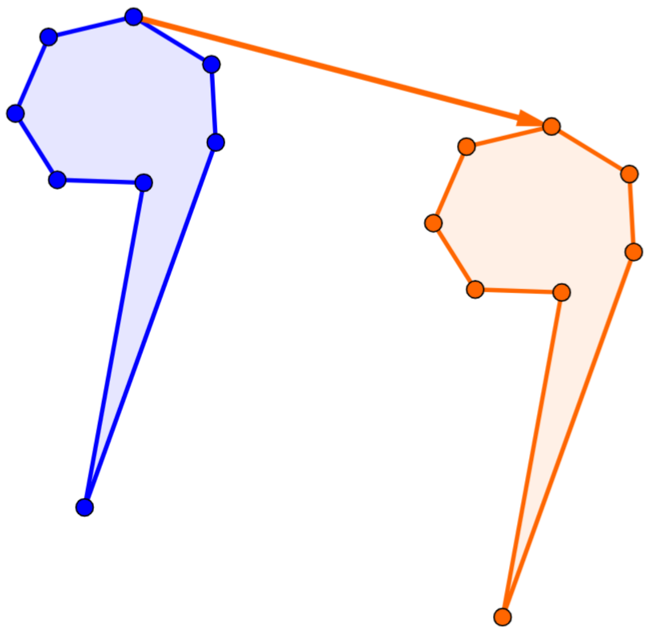
 https://www.geogebra.org/m/xmpjvc6m https://www.geogebra.org/m/tkxfmrku

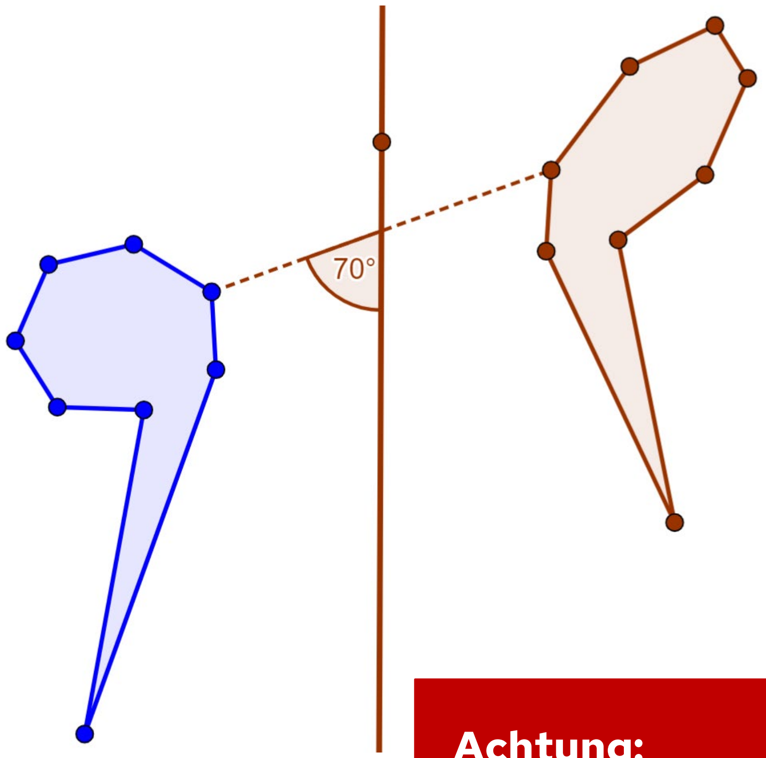
Punktspiegelung



 https://www.geogebra.org/m/xmpjvc6m

Verschiebung & schiefe Achsenspiegelung

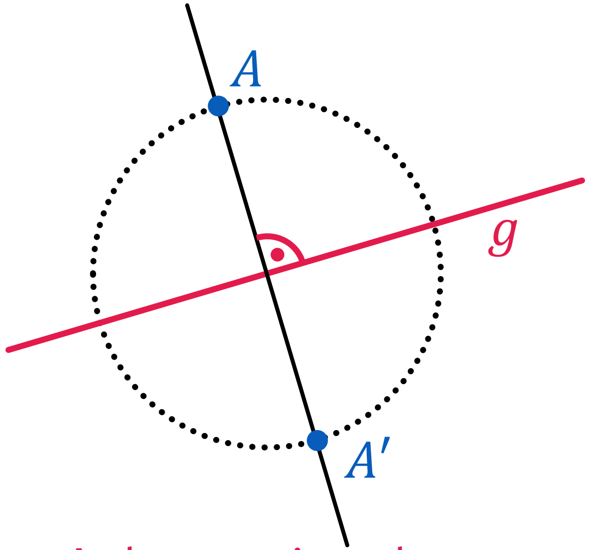




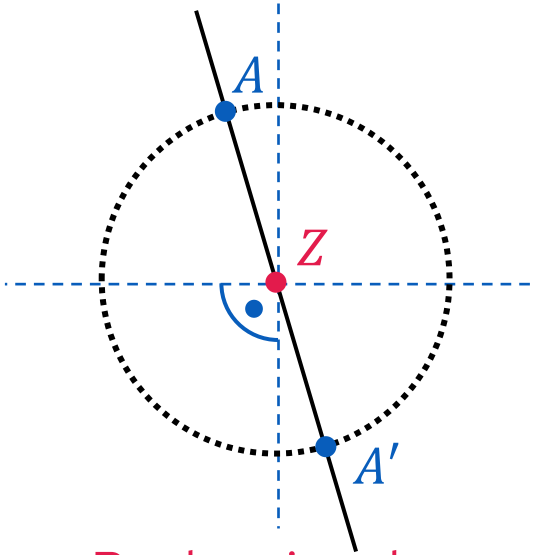
Achtung:
Die schiefe Achsenspiegelung ist keine Kongruenzabbildung! Sie dient als Kontrastbeispiel!

 https://www.geogebra.org/m/xmpjvc6m

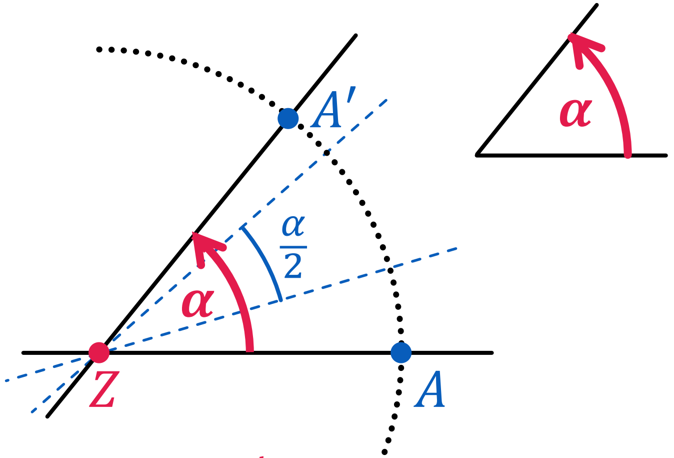
Typen von Kongruenzabbildungen



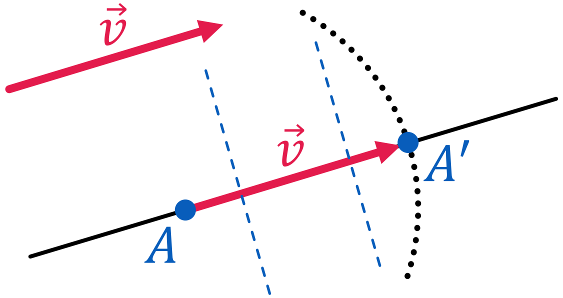
Achsenspiegelung



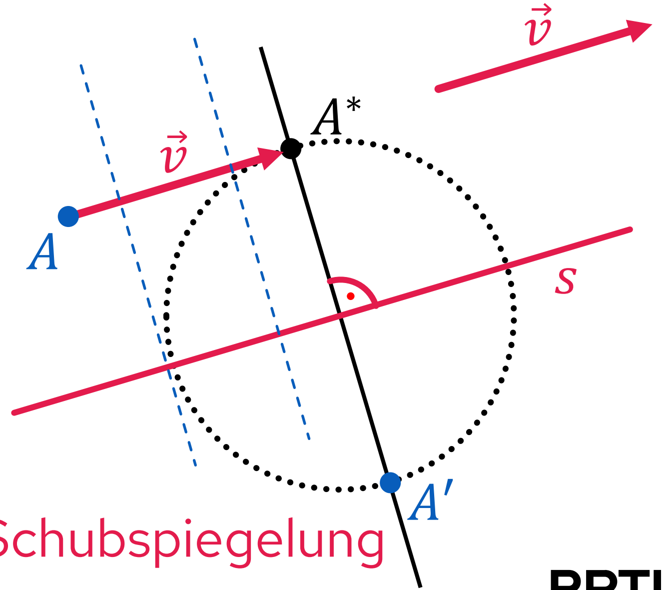
Punktspiegelung



Drehung

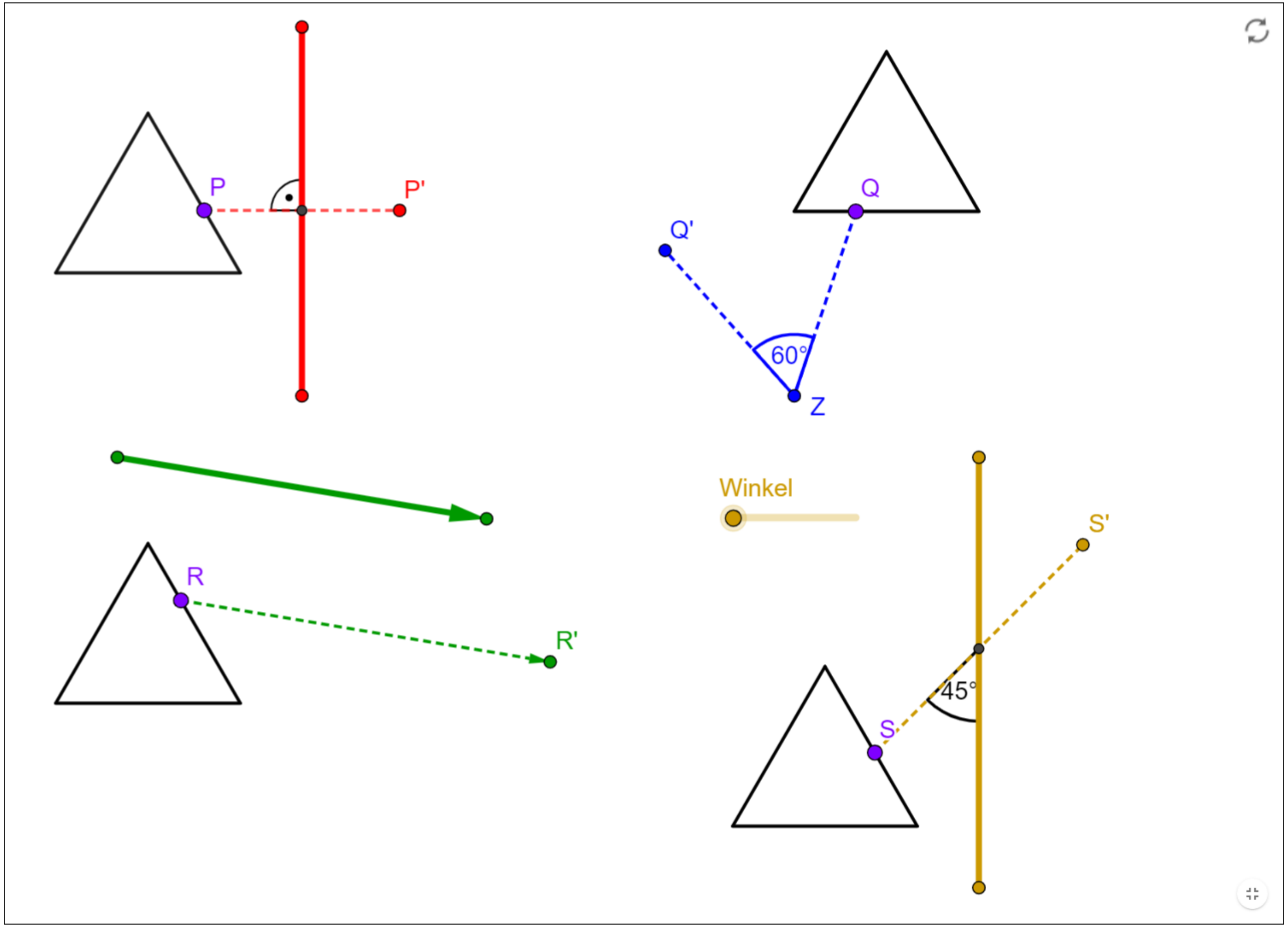


Parallelverschiebung



Schubspiegelung

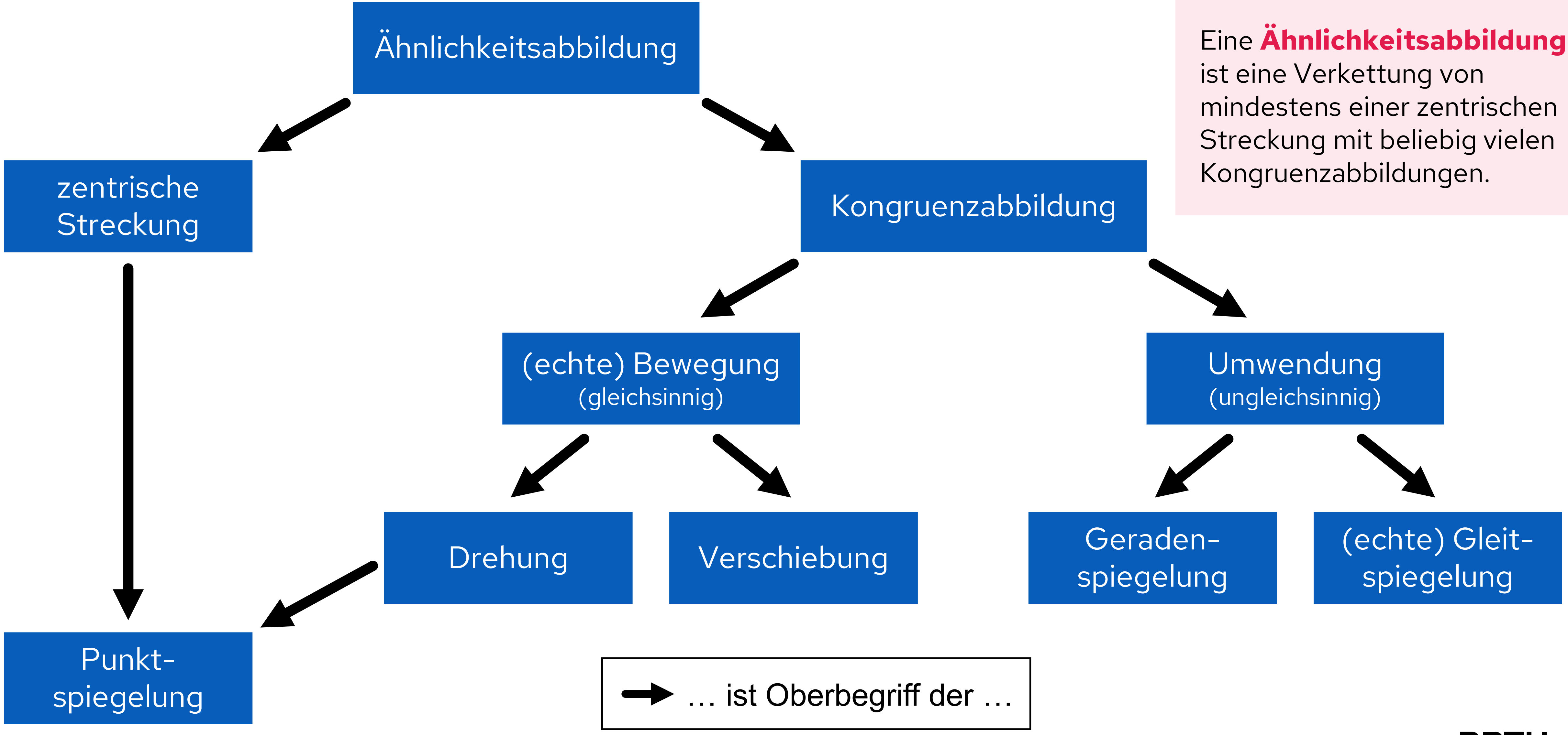
Kongruenzabbildungen?



 https://www.geogebra.org/m/z5tzpqjs

Hierarchie der Ähnlichkeitsabbildungen

Eine **Ähnlichkeitsabbildung** ist eine Verkettung von mindestens einer zentrischen Streckung mit beliebig vielen Kongruenzabbildungen.



Exkurs: Kongruenzsätze für Dreiecke

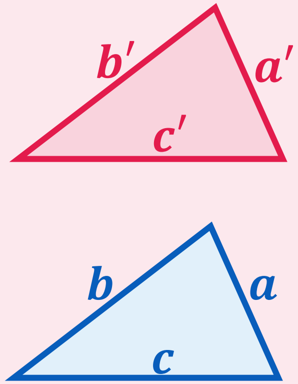
Bemerkung: Da kongruente Drei- ecke deckungsgleich sind, sind ent- sprechende Winkel gleich groß und entsprechende Seiten gleich lang.

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kongruenzsatz SSS

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den Längen aller Seiten übereinstimmen.

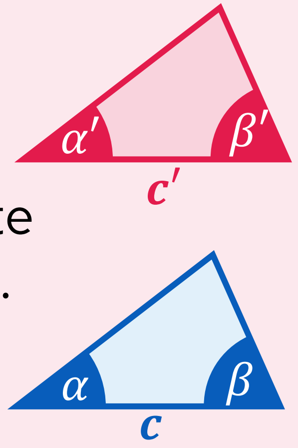
$|a'| = |a| \wedge |b'| = |b| \wedge |c'| = |c|$
$\Rightarrow \Delta A'B'C' \cong \Delta ABC$



Kongruenzsatz WSW

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in der Länge einer Seite und den Winkelgrößen der beiden an der Seite anliegenden Winkel übereinstimmen.

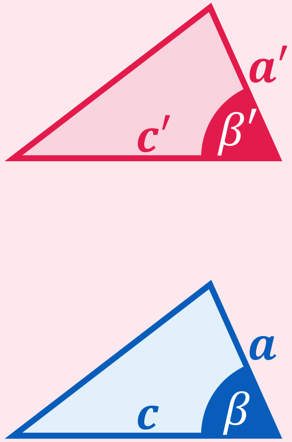
$|c'| = |c| \wedge |\alpha'| = |\alpha| \wedge |\beta'| = |\beta|$
$\Rightarrow \Delta A'B'C' \cong \Delta ABC$



Kongruenzsatz SWS

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in der Winkelgröße eines Winkels und den Seitenlängen der beiden am Winkel anliegenden Seiten übereinstimmen.

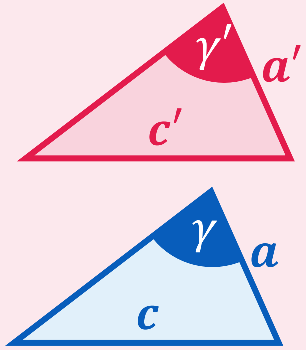
$|\beta'| = |\beta| \wedge |a'| = |a| \wedge |c'| = |c|$
$\Rightarrow \Delta A'B'C' \cong \Delta ABC$



Kongruenzsatz SsW

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den Längen zweier Seiten und der Winkelgröße des Winkels, der der längeren Seite gegenüberliegt übereinstimmen.

$|a'| = |a| \wedge |c'| = |c| \wedge |c| > |a| \wedge |\gamma'| = |\gamma|$
$\Rightarrow \Delta A'B'C' \cong \Delta ABC$



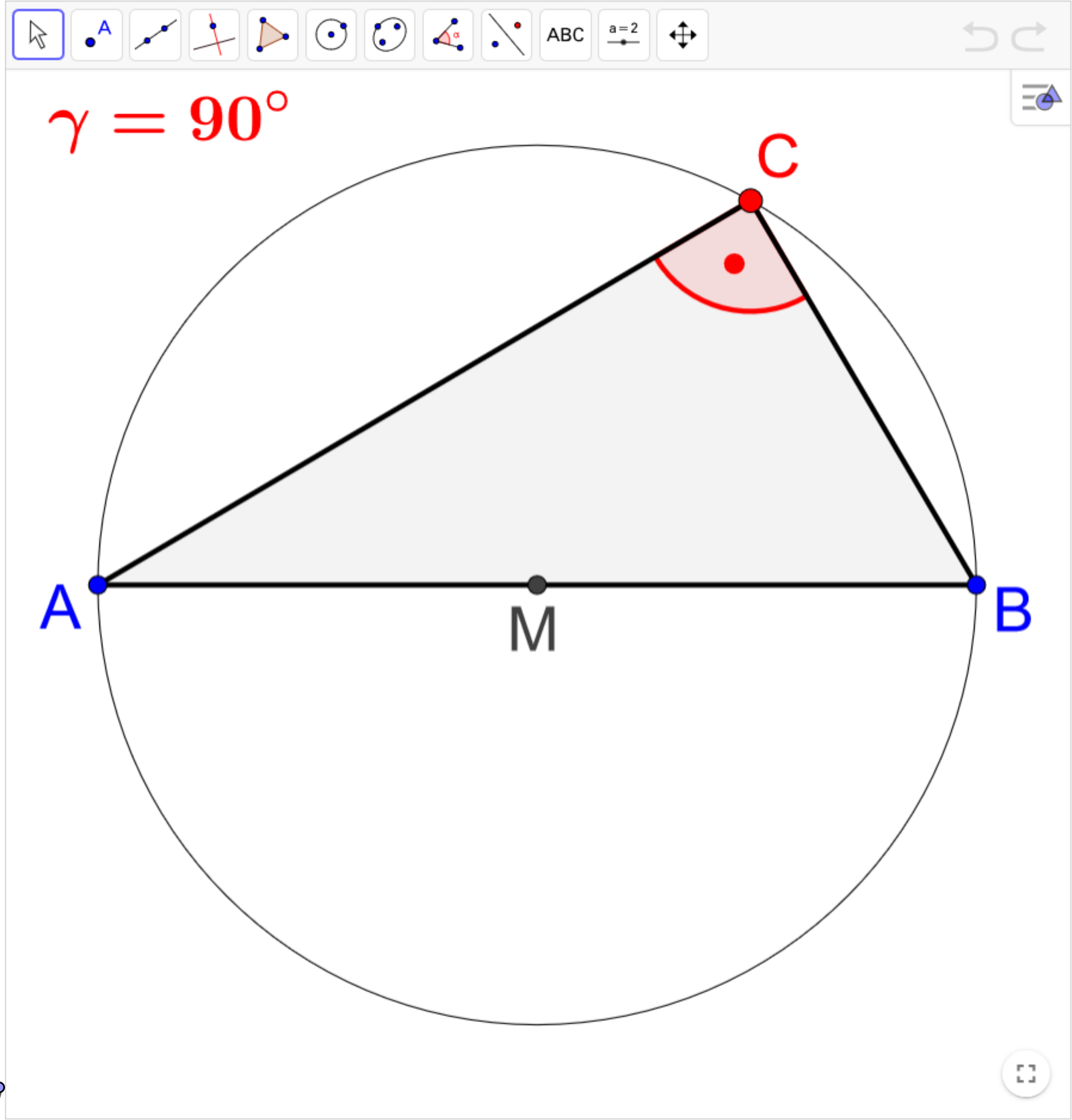
Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H. G. (2018). Kongruenzsätze. In H.-G. Weigand et al. (Hrsg.). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 195-199). Berlin: Springer Spektrum.

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen

Kapitel 2: Begriffsbildung

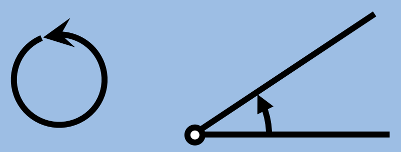
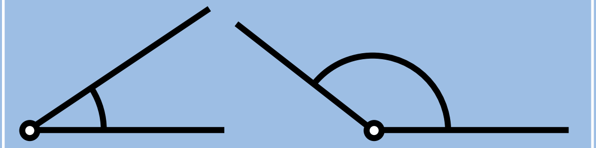
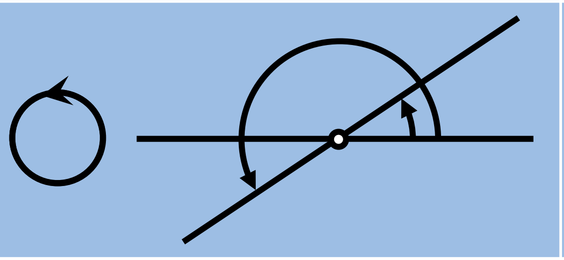
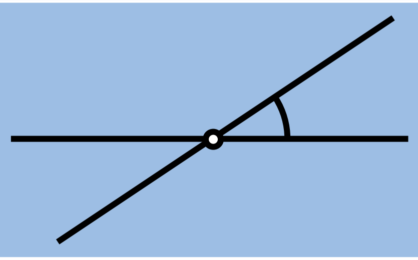
Thaleskreis – Winkeltypen



https://www.geogebra.org/m/ckw8eaky

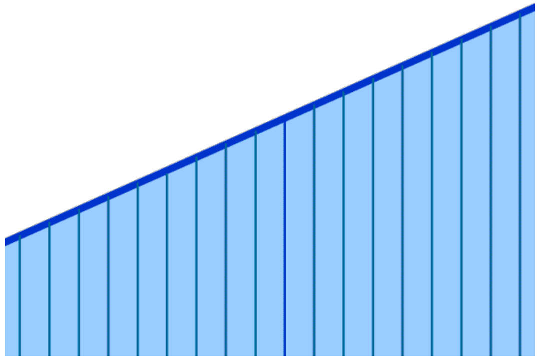
 Elschenbroich, H.-J. & Sträßer, R. (2023). Ziemlich verwinkelt. *MU, (69)*3, 26-36

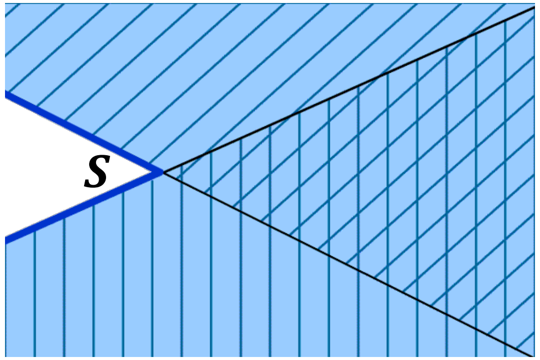
Winkelbegriffe

goniometrisch	elementar-geometrisch	analytisch-geometrisch	stereometrisch
Winkel eines geordneten Paares von Halbgeraden in orientierter Ebene, bestimmt mod 2π	Winkel eines ungeordneten Paares von Halbgeraden in nicht orientierter Ebene, bestimmt zwischen $0°$ und $180°$	Winkel eines geordneten Paares von Geraden in orientierter Ebene, bestimmt mod π	Winkel eines ungeordneten Paares von Geraden in nicht orientierter Ebene, bestimmt zwischen $0°$ und $90°$
			

Winkelbegriffe

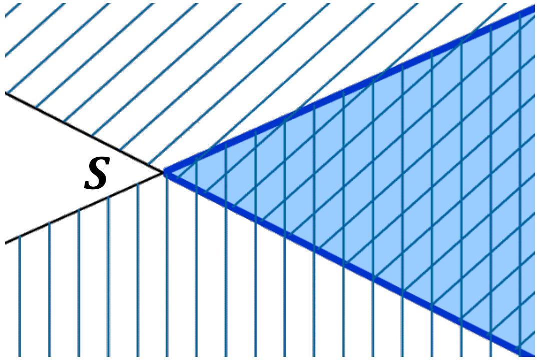
Durch eine Gerade g werden in der Zeichenebene zwei Halbebenen bestimmt. Eine Halbebene ist die Menge aller Punkte, die auf einer Seite von g liegen, einschließlich g selbst.





Die Schnitt- bzw. Vereinigungsmenge zweier Halbebenen, deren Randgeraden sich in einem Punkt S schneiden, heißt spitzer bzw. überstumpfer Winkel.

Eine Halbgerade nennt man auch Nullwinkel, eine Halbebene auch gestreckter Winkel.



Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de
dms.nuw.rptu.de

RPTU