

# 20. CUERPOS GEOMÉTRICOS.

## ÍNDICE.

**LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS:** concepto y tipos.

**A. POLIEDROS:** concepto y elementos.

**A.1. CLASIFICACIONES DE POLIEDROS (tipos).**

**A.2. POLIEDROS SEGÚN SU NÚMERO DE CARAS.**

**PRINCIPALES FAMILIAS o GRUPOS DE POLIEDROS** (tipos de poliedros según su regularidad y forma).

- 1. POLIEDROS REGULARES o SÓLIDOS PLATÓNICOS.**
- 2. PIRÁMIDES y BIPIRÁMIDES. Variantes:** oblicuas, truncadas, elongadas, compuestas...
- 3. PRISMAS y ANTIPRISMAS. Variantes:** oblicuos, truncados, elongados, "torcidos"...  
- Paralelepípedos, octoedros y romboedros.
- 4. SÓLIDOS DE JOHNSON.**
- 5. SÓLIDOS DE ARQUÍMEDES.**
- 6. SÓLIDOS DE CATALAN.**
- 7. SÓLIDOS DE KEPLER-POINSOT.**
- 8. OTROS:** poliedros quirales, poliedros duales o conjugados, poliedros uniformes, poliedros de caras uniformes, poliedros estrellados (cóncavos), deltaedros, trapezoedros (deltoedros), esferas y cúpulas geodésicas, bbcomposiciones de poliedros y poliedros en la vida real.

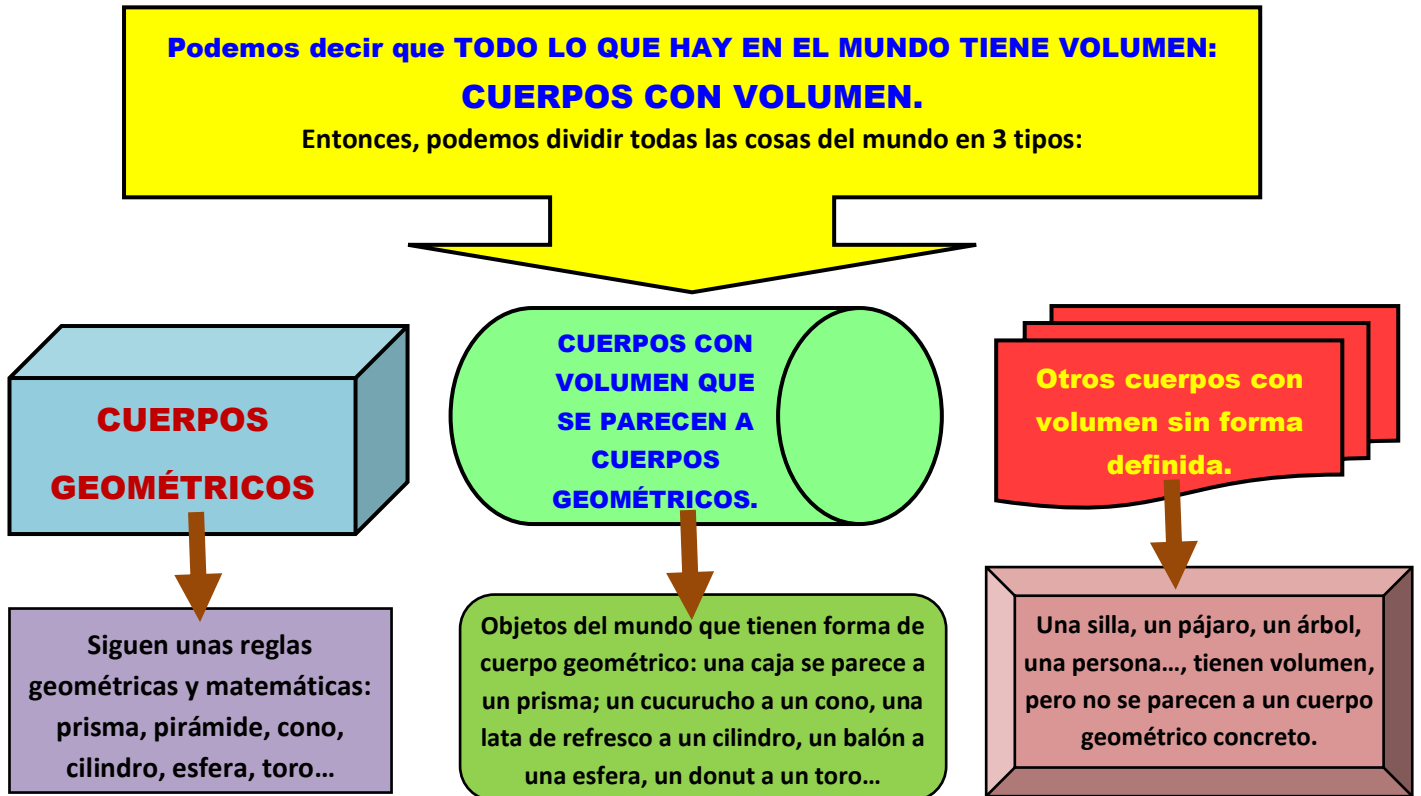
**DESARROLLOS.** Ver anexos y enlaces.

# LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS: concepto y tipos.

Podríamos decir que todo lo que hay en el mundo tiene volumen, desde un árbol, a una gota de agua. Incluso el aire, está formado por moléculas, que aunque no las vemos, también tienen volumen. Por ello, podemos decir que “todo lo que hay en el mundo tiene volumen”.

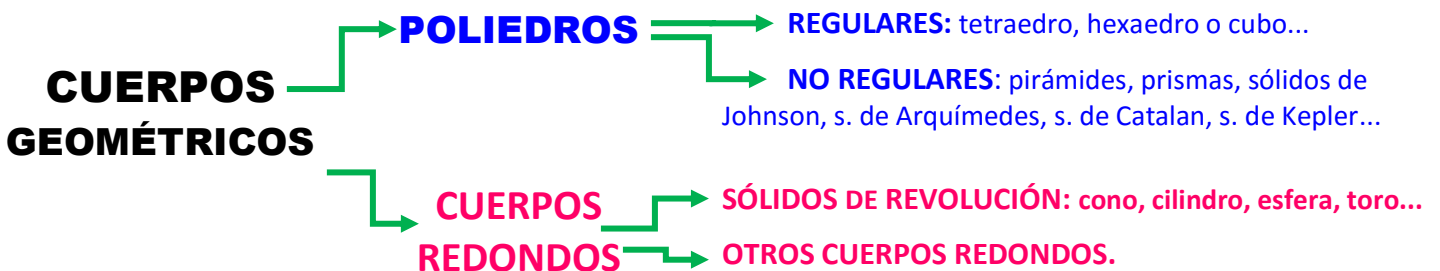
Incluso, podríamos ser más atrevidos y decir que todo lo que hay en el mundo es un cuerpo geométrico, pero según las matemáticas, para que un cuerpo con volumen sea considerado cuerpo geométrico, debe “tener volumen y seguir unas reglas geométricas (muy diversas, las iremos viendo durante la unidad).

Así pues, en el mundo habrá cuerpos geométricos, cuerpos con volumen que se parezcan a cuerpos geométricos y otros cuerpos con volumen sin forma definida.

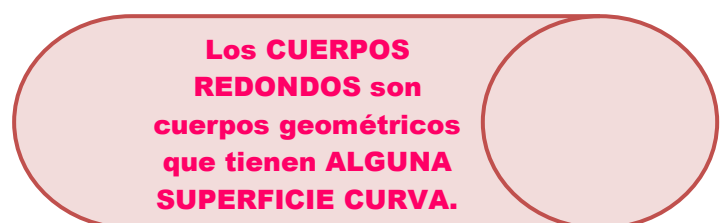
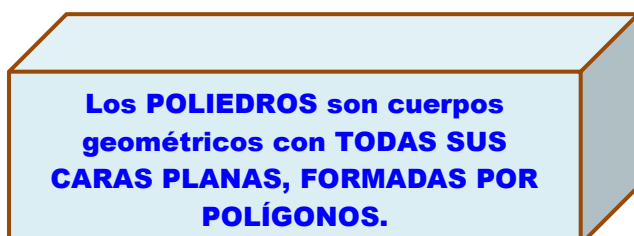


## TIPOS DE CUERPOS GEOMÉTRICOS.

Aunque se pueden clasificar de muchas formas, podemos hacer una primera distinción básica en:



\* **NOTA:** se puede utilizar la palabra “cuerpo”, “sólido” o incluso “figura” para referirse a los cuerpos geométricos.

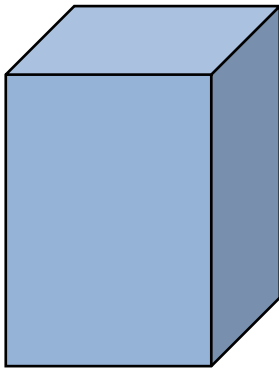


# A. POLIEDROS.

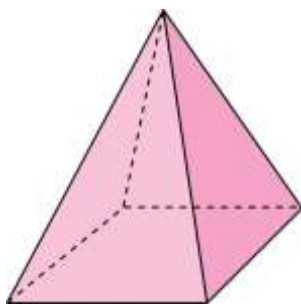
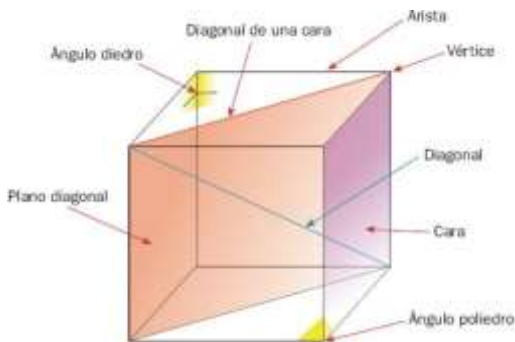
Los poliedros son cuerpos geométricos formados solo por caras planas. Todas sus caras son polígonos. Todas sus aristas son líneas rectas.

\* El término **poliedro** (en inglés: *polyhedron*) viene del griego ‘*poli*’ (muchos) y ‘*edro*’ (cara): “*muchas caras*”.

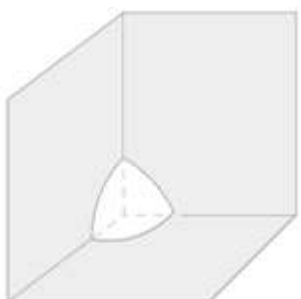
En un poliedro podemos diferenciar diferentes elementos geométricos. Los más importantes son:



Este prisma tiene 6 caras (sus bases son 2 cuadrados y sus caras laterales 4 rectángulos), 12 aristas y 8 vértices.



El vértice superior de las pirámides se llama **CÚSPIDE** (también llamado **ápice**).



Vemos un **ángulo poliedro** (triedro: 3 caras). Para calcularlo, hay que sumar los ángulos diedros que hay entre cada cara (hay 3). Siempre dará menos de 360°.

## 1. CARAS (*faces*). Son los polígonos que forman el poliedro.

\* Vamos a diferenciar **dos tipos de caras en las familias de pirámides y prismas:**

- **Bases.** En las **pirámides** las caras que no son triángulos (salvo en la triangular), y en los **prismas y antiprismas** son las dos caras iguales que presenta dicho polígono (en los paralelepípedos pueden ser cualquier par de caras). También se llaman **caras basales**.

- **Caras laterales.** En las **pirámides** son triángulos (salvo en los troncos de pirámide), en los **prismas** son cuadriláteros y en los **antiprismas** triángulos.

\* En el resto de poliedros, si se consideran las caras, se toman los polígonos en los que se “apoya” el poliedro. Normalmente son los polígonos de más de lados o mayor tamaño.

## 2. ARISTAS (*edges*). Se pueden definir como los lados de los polígonos que forman el poliedro, o como las intersecciones de dos caras (líneas donde se unen dos caras).

## 3. VÉRTICES (*vertices* o *vertexes*). Se pueden definir como los puntos donde se unen tres o más caras o los puntos en los que se cortan las aristas.

Según las caras que concurren (que se unen) en un mismo vértice, se distinguen poliedros de orden 3 (3 caras en cada vértice), de orden 4, de orden 5...

## 4. ÁNGULOS (*angles*). Vamos a distinguir 2 tipos de ángulos:

- **Diedros / diédricos.** Son los ángulos existentes entre dos caras contiguas.

- **Poliedros / poliédricos.** Son los ángulos que se forman entre 3 o más caras que se unen en un vértice. Se calcula sumando todos los ángulos diedros de las caras que lo generan, y se da la circunstancia de que siempre medirá menos de 360°.

Según el número de caras que lo genere se distinguen varios tipos: triedros/triédricos (3 caras en un vértice), tetraedros/tetraédricos (4 caras), pentaedros/pentaédricos (5 caras), y así sucesivamente.

- **Superficiales o poligonales.** Son los ángulos de los polígonos que forman sus caras (los ángulos de los triángulos, cuadrados...)

## 5. DIAGONALES (*diagonals*). Vamos a distinguir 2 tipos:

- **Diédricas.** Son las diagonales del poliedro. Van de un vértice a otro no contiguo.

- **Poliédricas.** Son las diagonales de los polígonos que forman el poliedro. Van de un vértice a otro no contiguo del polígono.

## 6. ALTURA (*height*). Hay dos, para el poliedro y el polígono:

- **Altura del poliedro.** Es la distancia desde la base del poliedro a la parte más alta (o a la otra base). Si no se consideran bases, es la distancia entre las dos caras más lejanas del poliedro. Si el poliedro es muy irregular, pueden considerarse distintas alturas, dependiendo de la referencia que se utilice.

- **Altura de sus caras.** Es la altura de cada uno de los polígonos del poliedro.

## 7. APOTEMA (*apothem*). Igualmente diferenciamos dos:

- **Apotema del poliedro.** Es la distancia del centro del poliedro al centro de sus caras (se utiliza para poliedros regulares).

- **Apotema de sus caras.** Es la distancia del centro de un polígono al centro de uno de sus lados (se utiliza para polígonos regulares).

# A.1. CLASIFICACIONES DE LOS POLIEDROS.

Los poliedros se pueden nombrar y clasificar según distintos criterios. No obstante, lo más normal es clasificarlos familias o grupos. Luego, se deben tener en cuenta otro tipo de características o clasificaciones:

Un mismo poliedro puede estar incluido en más de una familia, pero con distinto nombre, ya que cada familia los nombra y clasifica según distintas características.

## FAMILIAS o GRUPOS DE POLIEDROS.

Las principales familias o grupos de poliedros son los siguientes (hay más grupos, pero son menos usados):

Familia o grupo	Nº de poliedros que la forman	Principales características
<b>1. Poliedros regulares o SÓLIDOS PLATÓNICOS.</b>	5	Todas sus caras son polígonos regulares e iguales. Aristas y vértices iguales. Ángulos iguales (por tanto, convexos).
<b>2. PIRÁMIDES</b> y variantes: TRONCOS de pirámide, oblicuas, BIPIRÁMIDES, elongadas...	Infinitos.	Tienen una base (cualquier polígono) y caras laterales formadas por triángulos que terminan en un vértice llamado cúspide.
<b>3. PRISMAS</b> y variantes: ANTIPRISMAS, oblicuos, truncados, “torcidos”, compuestos...	Infinitos.	Tienen 2 bases (cualquier polígono). Sus caras laterales son cuadriláteros (salvo en los antiprismas, que son triángulos).
<b>4. SÓLIDOS DE JOHNSON.</b>	92	No tienen bases diferenciadas, son convexos y sus caras son polígonos regulares (iguales o distintos). No se incluyen los sólidos platónicos.
<b>5. SÓLIDOS DE ARQUÍMEDES.</b>	13	Son convexos. Sus caras son polígonos regulares (iguales o distintos). Se obtienen a partir de los sólidos platónicos.
<b>6. SÓLIDOS DE CATALAN.</b>	13	Son los poliedros duales de los sólidos de Arquímedes.
<b>7. SÓLIDOS DE KEPLER-POINSOT.</b>	4	Son poliedros regulares menos en sus ángulos, ya que son cóncavos.
<b>8. OTROS POLIEDROS.</b> Nosotros vamos a estudiar más tipos de poliedros, y aunque no se consideran familias o grupos propios, si se agrupan por sus características especiales. Estos grupos son:		
- POLIEDROS QUIRALES.	- POLIEDROS DUALES (o conjugados).	- POLIEDROS UNIFORMES.
- Poliedros de caras uniformes.	- Poliedros de caras uniformes.	- Poliedros ESTRELLADOS (cóncavos).
- DELTAEDROS.	- TRAPEZOEDROS (o deltoedros).	- ESFERAS y CÚPULAS GEODÉSICAS.

Otras formas de clasificar los poliedros:

- **Clasificación según su NÚMERO DE CARAS.** Para ello, se cuenta el número totales de caras de un poliedro, y se construye su nombre utilizando términos provenientes del griego clásico: tetraedro, pentaedro, hexaedro, heptaedro... (La primera parte indica el número de caras y la partícula “edro” significa “cara”).

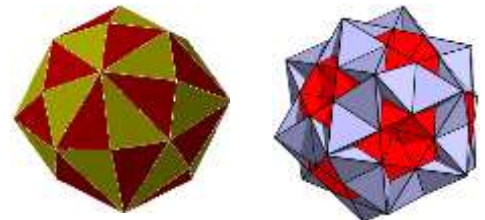
Si te fijas, es la misma forma que se utiliza para nombrar a los polígonos según su número de lados.

- **Clasificación según su REGULARIDAD.** Se clasifican en poliedros regulares e irregulares. Para que un polígono sea regular, debe tener todas sus caras, aristas y ángulos iguales. Lo que pasa es que solo existen 5 poliedros que tengan estas características. También se les llama **SÓLIDOS PLATÓNICOS**.

- **Clasificación en convexos y cóncavos.** Se considera que un poliedro es **convexo** si dos puntos cualesquiera del poliedro se pueden unir con una línea que no salga del poliedro.

La mayoría de **poliedros cóncavos** tienen algún ángulo mayor de 180°. Muchos poliedros cóncavos se consideran “**poliedros estrellados**”.

A continuación mostramos un deltaedro convexo y otro deltaedro cóncavo.



- **Clasificación según sus CARAS.** Según esto podemos distinguir varias situaciones:

· **Poliedro de caras regulares:** todas sus caras son polígonos regulares (aunque pueden ser polígonos distintos, y ser distintas sus aristas). Aquí se incluyen los 5 sólidos platónicos y otros muchos poliedros.

· **Poliedros de caras uniformes:** todas sus caras son iguales (aunque pueden ser polígonos irregulares, o ser su aristas distintas. Aquí se incluyen los 5 sólidos platónicos y otros muchos poliedros.

- **Clasificación según sus aristas:** Se denominan **poliedros de aristas uniformes** a aquellos en los que una arista contiene un par de caras, que son iguales a otro par de caras de cualquier otra arista.

- **Clasificación según sus de vértices:** se denominan **poliedros de vértices uniformes** a aquellos en los que en un vértice convergen el mismo número de caras y en el mismo orden.

## A.2. POLIEDROS SEGÚN SU NÚMERO DE CARAS.

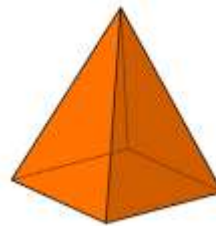
Según el número de caras que tenga un poliedro, recibirá un nombre. Este se compone utilizando una raíz griega que indica el número de caras: ‘tetra’ (4), ‘penta’ (5), ‘hexa’ (6), ‘hepta’ (7)..., y la partícula griega ‘edro’ que significa ‘cara’.

Es la misma forma que se utiliza para nombrar a los POLÍGONOS, la única diferencia es que en ellos se utiliza la partícula “gono” (ángulo) en lugar de “edro” (cara).

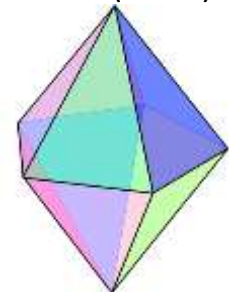
### CLASIFICACIÓN DE LOS POLIEDROS SEGÚN SU NÚMERO DE CARAS.

Nº de CARAS	NOMBRE	EJEMPLOS
4	tetraedro	Existe el tetraedro regular y la pirámide triangular.
5	pentaedro	Existen pentaedros con forma de pirámide cuya base sea cualquier cuadrilátero y prismas triangulares.
6	hexaedro	
7	heptaedro	
8	octaedro u octoedro	
9	eneaedro o nonaedro	
10	decaedro	
11	endecaedro o undecaedro	
12	dodecaedro	
13	tridecaedro	
14	tetradecaedro o tetracaidecaedro	
15	pentadecaedro o pentedecaedro	
16	hexadecaedro	
17	heptadecaedro	
18	octadecaedro u octodecaedro	
19	eneadecaedro o nonadecaedro	
20	icosaedro o isodecaedro	
30	triacontaedro	
40	tetracontaedro	
50	pentacontaedro	
60	hexacontaedro	
70	heptacontaedro	
80	octacontaedro u octocontaedro	
90	eneacontaedro o nonacontaedro	
100	hectaedro	
1.000	chiliedro	
10.000	miriedro	
100.000	decemiriedro	
1.000.000	hectamiriedro o megaedro	
∞	apeiroedro	

Esta pirámide cuadrangular, según su nº de caras, se llama pentaedro (5 caras).



Una bipirámide pentagonal sería un decaedro (10 caras).



Para nombrar a poliedros según su número de caras, primero se utiliza el prefijo para sus unidades, luego el de sus decenas, y así sucesivamente (siempre y cuando las tenga). Por último se añade el sufijo ‘-edro’.

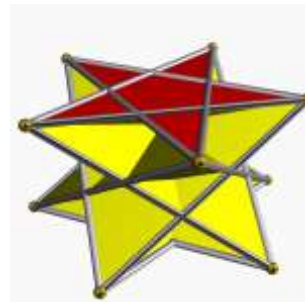
Por ejemplo, un poliedro de 36 caras:

- Unidades: 6 → ‘hexa-’
- Decenas: 30 → ‘-triaconta-’
- Añadimos ‘-edro’

Su nombre será **HEXATRIACONTAEDRO**.

*\* También se admite nombrar las decenas primero: tricontahexaedro.*

Este antiprisma pentagrámico tiene 12 caras, es un dodecaedro.



El dodecaedro regular tiene el mismo número de caras que el antiprisma pentagrámico anterior.



Solo existen poliedros regulares con 4, 6, 8, 12 y 20 caras: **tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.**

# 1. POLIEDROS REGULARES o SÓLIDOS PLATÓNICOS.

**DEFINICIÓN:** Los poliedros regulares son aquellos **poliedros convexos que tienen sus caras, aristas y ángulos iguales**. Esta condición solo la cumplen 6 poliedros.

**Características:**

- Sus caras son o **triángulos equiláteros, cuadrados o pentágonos** regulares.
- Sus **caras** son exactamente **iguales**. Ello implica que **sus aristas y sus ángulos son iguales**.
- Todos ellos **pueden estar contenidos dentro de una esfera**, de tal forma que la esfera toque a todos sus vértices en un punto.
- Todos ellos **pueden contener dentro una esfera** (circunscrita), de tal forma que la esfera toque el centro de cada una de sus caras en un punto. Además, tienen otra esfera que corta a todas sus aristas en el centro.
- **Todos son convexos**, ya que existen poliedros con todas sus caras iguales y aristas iguales pero con ángulos distintos.
- En todos sus **vértices** concurren el mismo número de caras.
- Todos tienen **simetría axial y simetría especular**.

Los poliedros regulares son más conocidos como **SÓLIDOS PLATÓNICOS (o sólidos de Platón)**. Además tienen más nombres: cuerpos cósmicos, sólidos pitagóricos, sólidos perfectos...



El poliedro de la imagen tiene todas sus caras y aristas iguales, sin embargo no es regular porque sus ángulos no son iguales. Esto sucede porque **NO ES CONVEXO**.

Platón fue un importantísimo filósofo griego (y muchas más cosas), Se considera que fue el primero en estudiar y descubrir los 5 poliedros regulares. Los estudió él, pero también otros matemáticos de su misma época, entre los que destaca Pitágoras.

**CUADRO CON LA DESCRIPCIÓN COMPLETA DE LOS SÓLIDOS PLATÓNICOS.**

Nombre	Imagen	Desarrollo	Características	Otros
<b>tetraedro</b>  4 caras			Nº de caras: 4 (triángulos equiláteros). Nº de aristas: 6. Nº de vértices: 4. Caras concurrentes x vértice: 3. Vértices concurrentes x cara: 3. Poliedro dual: tetraedro. Ángulo polígono: 60°. Ángulo diedro: 70,53°.	* En realidad es una <b>pirámide triangular</b> , en la que que todas sus caras son triángulos equiláteros iguales. <b>FUEGO.</b>
<b>hexaedro (o cubo)</b>  6 caras			Nº de caras: 6 (cuadrados). Nº de aristas: 12. Nº de vértices: 8. Caras concurrentes x vértice: 3. Vértices concurrentes x cara: 4. Poliedro dual: octaedro. Ángulo polígono: 90°. Ángulo diedro: 90°.	* En realidad es un <b>prisma cuadrangular</b> , con la peculiaridad de que todas sus caras son cuadrados iguales. <b>TIERRA.</b>
<b>octaedro</b>  8 caras			Nº de caras: 8 (triángulos equiláteros). Nº de aristas: 12. Nº de vértices: 6. Caras concurrentes x vértice: 4. Vértices concurrentes x cara: 3. Poliedro dual: hexaedro. Ángulo polígono: 60°. Ángulo diedro: 109,47°.	* Según los ‘Sólidos de Johnson’, se llamaría <b>bipirámide cuadrada</b> . <b>AIRE.</b>
<b>dodecaedro</b>  12 caras			Nº de caras: 12 (pentágonos regulares). Nº de aristas: 30. Nº de vértices: 20. Caras concurrentes x vértice: 3. Vértices concurrentes x cara: 5. Poliedro dual: icosaedro. Ángulo polígono: 108°. Ángulo diedro: 116,56°.	Platón y otros estudiosos asociaban a cada poliedro regular con un elemento de la naturaleza (en color). <b>UNIVERSO.</b>
<b>icosaedro</b>  20 caras			Nº de caras: 20 (triángulos equiláteros). Nº de aristas: 30. Nº de vértices: 12. Caras concurrentes x vértice: 5. Vértices concurrentes x cara: 3. Poliedro dual: dodecaedro. Ángulo polígono: 60°. Ángulo diedro: 138,19°.	* Según los ‘Sólidos de Johnson’, se llamaría <b>bipirámide pentagonal giroelongada</b> . <b>AGUA.</b>

- De ellos se derivan los **sólidos de Arquímedes** y los de **Kepler-Poinsot**, que a su vez generan más familias.

## 2. PIRÁMIDES.

**DEFINICIÓN:** “Una pirámide es un cuerpo geométrico (y un poliedro) que tiene una base (que puede ser cualquier polígono) y un número de caras laterales (igual al número de lados del polígono de su base). Las pirámides acaban en un vértice llamado cúspide (o ápice).”

### Características:

- Su **número de caras y de vértices** se obtiene sumándole ‘1’ al número de lados del polígono de su base.
- Su **número de aristas** se calcula multiplicando por ‘2’ el número de lados del polígono de la base.
- **La base** de los triángulos que conforman sus caras laterales es cada uno de los lados del polígono de su base.
- Todos los triángulos de sus caras laterales se unen en la **cúspide o ápice**.
- **Existen infinitas posibilidades de tipos de pirámides** (y de sus variantes).

*\* Tener en cuenta que las pirámides son poliedros a los que estamos poniendo nombre según sus características y no según su número de caras. Si fuese así, una pirámide cuadrangular, en realidad, sería un pentaedro.*

### Tipos de pirámides y formas de nombrarlas:

Las pirámides se pueden clasificar según distintos criterios. Además, estos mismos criterios se utilizan para nombrarlas.

- 1º) Las pirámides se clasifican y se nombran **según el número de lados del polígono de la base**: Triangular, cuadrangular, rectangular, romboidal, romboideal, trapezoidal, trapezoideal, pentagonal, hexagonal, heptagonal...
- 2º) Se clasifican (y se nombran) según **si el polígono de la base es regular** (o simétrico) **o irregular** (o asimétrico).
- 3º) Se clasifican (y se nombran) según **si el polígono de la base es convexo o cóncavo**.
- 4º) Se clasifican (y se nombran) según **si son rectas** (la cúspide y el centro de la base están unidas por una línea perpendicular) **u oblicuas o inclinadas**. Normalmente, solo se cita este tipo si es oblicua o inclinada, y cuando es recta no se suele decir nada.
- 5º) **Si están truncadas o no**. Una pirámide truncada se llama **TRONCO DE PIRÁMIDE**. *En realidad, las pirámides truncadas o troncos de pirámide, no son pirámides, ya que no cumplen la definición de pirámide (sus caras ya no están paralelas ni son iguales).* Pueden estar truncadas (cortadas) con distintos grados de inclinación, una o más veces...
- 6º) Algunos autores también incluyen **la altura de la pirámide**, pues según su altura, tendremos distintos tipos de pirámides.
- 7ª) **PIRÁMIDES ELONGADAS** (y otras composiciones): una pirámide elongada es cualquier tipo de pirámide o de sus variantes, a la que se le añade cualquier forma poliédrica y da lugar a un nuevo poliedro.

### EJEMPLOS DE TIPOS DE PIRÁMIDES.

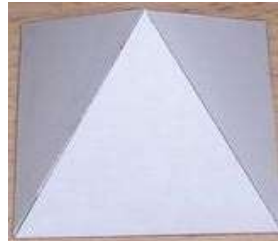
**PIRÁMIDES SEGÚN EL POLÍGONO DE LA BASE.** Todas las expuestas son regulares, convexas y rectas.



Este **tetraedro regular** (sólido platónico) también es una **PIRÁMIDE TRIANGULAR**.



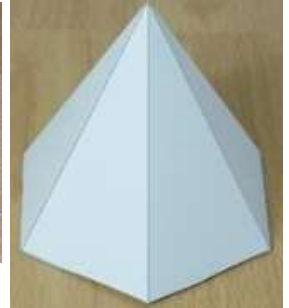
**PIRÁMIDE TRIANGULAR.**



**PIRÁMIDE CUADRANGULAR**, su base es un cuadrado. Por tanto es regular, y además, recta y convexa.



**PIRÁMIDE RÓMBICA**. Su base es un rombo. También se puede llamar **pirámide tetragonal** (tetragono: polígono 4 lados).



**PIRÁMIDE HEXAGONAL**. Su base es un hexágono regular.



**PIRÁMIDE HEPTAGONAL**. Su base es un heptágono regular.



**PIRÁMIDE OCTOGONAL**. Su base es un octógono regular.



**PIRÁMIDE ENEAGONAL**. Su base es un eneágono regular (9 lados).

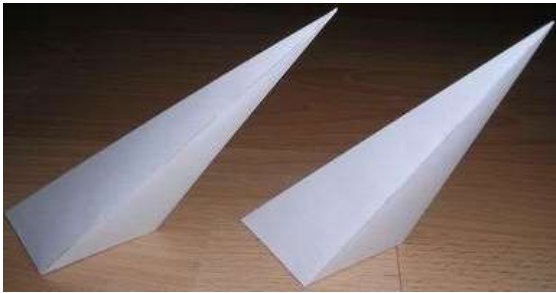


**PIRÁMIDE DECAGONAL**. Su base es un decágono regular (10 lados).



**PIRÁMIDE ICOSAGONAL**. Base: **icoságono** regular (polígono de 20 caras).

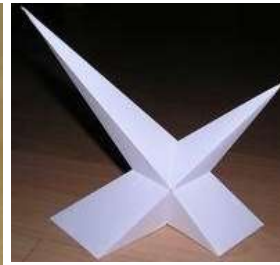
**PIRÁMIDES OBLICUAS.** Las que mostramos son convexas (también las hay cóncavas) y de base regular.



Dos PIRÁMIDES CUADRANGULARES INCLINADAS, con distinta inclinación



TRONCO DE PIRÁMIDE cuadrangular INCLINADO.



Dos PIRÁMIDES CUADRANGULARES OBLICUAS que se cruzan.



PIRÁMIDE TRIANGULAR OBLICUA.

**PIRÁMIDES CÓNCAVAS / ESTRELLADAS.**

Las pirámides cóncavas con forma de estrella se suelen nombrar según el nº de puntas de la estrella (base) y no del nº de lados de su base. Por ello, a las bases de las pirámides estrelladas, se las suele nombrar con las palabras: ‘pentagrámica’, ‘hexagrámica’, ‘heptagrámica’...



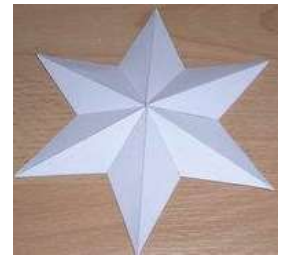
En lugar de pirámide octogonal irregular cóncava, la llamaremos PIRÁMIDE ESTRELLADA CUADRANGULAR (regular).



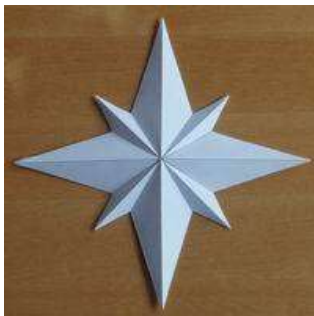
PIRÁMIDE PENTAGRÁMICA (la nombramos según el nº de puntas, y no según el nº de lados del polígono de la base).



PIRÁMIDE PENTAGRÁMICA IRREGULAR (la estrella de su base tiene 5 puntas, como la anterior, pero su base no es regular).



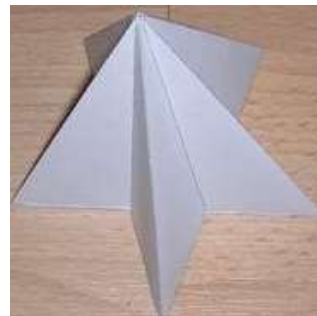
PIRÁMIDE HEXAGRÁMICA. ‘Hexagrámica’ quiere decir que su base es estrellada y que esa estrella tiene 6 puntas.



PIRÁMIDE OCTOGRÁMICA IRREGULAR (puntas regulares 2 a 2).



Es una PIRÁMIDE PENTAGRÁMICA como la de arriba, pero de mayor altura



PIRÁMIDE PENTAGRÁMICA ASIMÉTRICA (o irregular).



PIRÁMIDE HEXAGRÁMICA, de mayor altura que la de arriba..

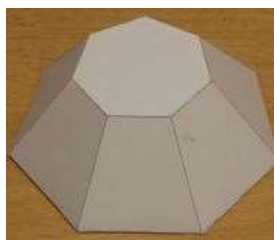
**PIRÁMIDES TRUNCADAS: TRONCOS DE PIRÁMIDES.** Las mostradas aquí son rectas, y la mayoría con base regular.



PIRÁMIDE CUADRADA TRUNCADA.



PIRÁMIDE CUADRADA TRUNCADA OBLICUA.



PIRÁMIDE HEPTAGONAL TRUNCADA.



TRONCO DE PIRÁMIDE DECAGONAL.



TRONCO DE PIRÁMIDE DODECAGONAL.



PIRÁMIDE TETRAGRÁMICA TRUNCADA.



PIRÁMIDE PENTAGRÁMICA TRUNCADA.



PIRÁMIDE PENTAGRÁMICA IRREGULAR TRUNCADA.



PIRÁMIDE HEXAGRÁMICA TRUNCADA.



Era una PIRÁMIDE, pero ha sido truncada 2 veces, y ya no lo parece.

\* Las **pirámides elongadas** suelen formar parte de otras familias, fundamentalmente de los **SÓLIDOS DE JOHNSON**.



## BIPIRÁMIDES o DIPIRÁMIDES Y PIRÁMIDES COMPUESTAS.

Las **bipirámides** (o dipirámides o pirámides dobles), son **poliedros** que surgen al unir dos pirámides por la base. Para ello, su base debe ser igual, y coincidir exactamente al unir las.

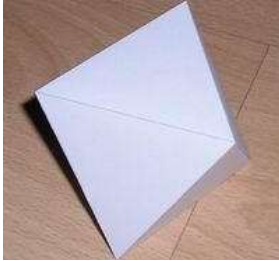
Las bipirámides son un tipo de **pirámides compuestas**, pero pueden existir muchísimas formas de pirámides compuestas e incluso composiciones y modificaciones de las pirámides.

Además, las pirámides se pueden combinar entre sí para originar otros poliedros.

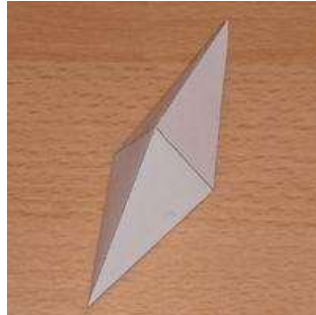
Asimismo, las pirámides pueden combinarse con otros poliedros para dar lugar a interesantes composiciones.

### EJEMPLOS DE TIPOS DE BIPIRÁMIDES Y PIRÁMIDES COMPUESTAS.

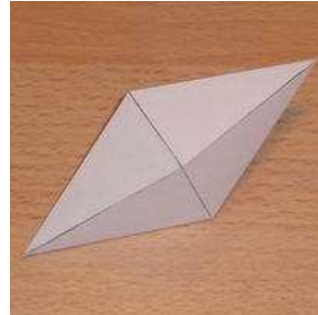
#### BIPIRÁMIDES / DIPIRÁMIDES / PIRÁMIDES DOBLES.



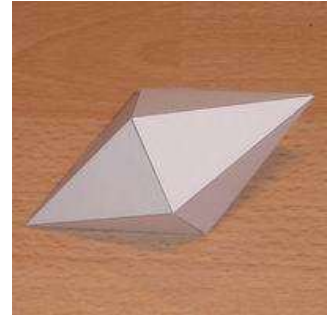
El **octaedro regular** (sólido platónico) está formado por dos pirámides cuadradas (caras laterales: triángulos equiláteros) unidas por sus bases.



DIPIRÁMIDE TRIANGULAR.



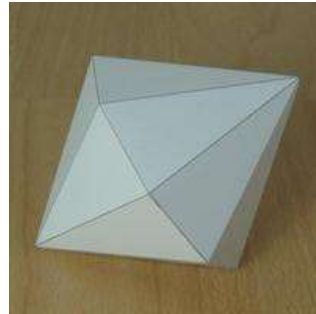
DIPIRÁMIDE CUADRANGULAR.



DIPIRÁMIDE PENTAGONAL.



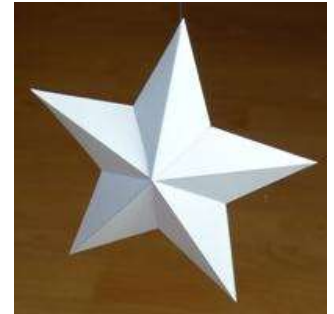
DIPIRÁMIDE HEXAGONAL.



DIPIRÁMIDE OCTOGONAL.



DIPIRÁMIDE DECAGONAL.

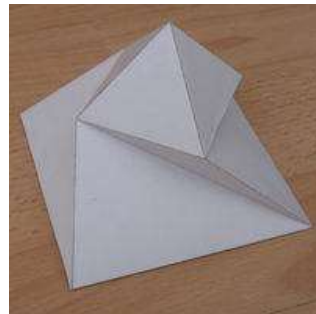


DIPIRÁMIDE PENTAGRÁMICA.

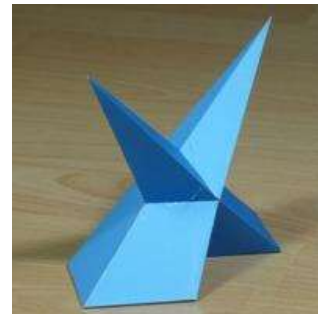
#### PIRÁMIDES COMPUESTAS y otras formas piramidales. Hay muchísimos más tipos.



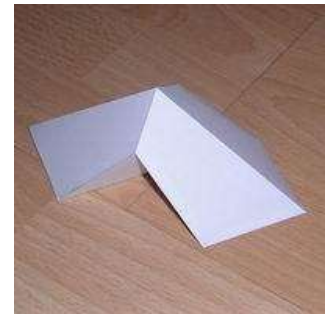
DIPIRÁMIDE PENTAGRÁMICA DE PIE.



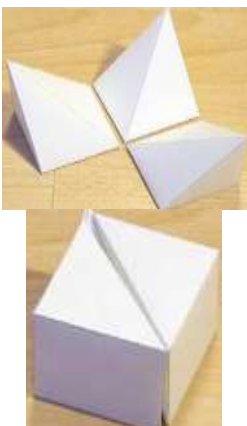
Pirámide **torcida**. En realidad ya no es una pirámide, pero proviene de una.



PIRÁMIDES RÓMBICAS OBLICUAS COMPUESTAS.



TRONCOS DE PIRÁMIDES RÓMBICAS OBLICUAS COMPUESTAS.



3 pirámides rectangulares que forman un cubo al juntarse.



PIRÁMIDE PENTAGONAL-DECAGONAL. Su base es un pentágono, pero tiene 10 caras laterales (triángulos y rombos).



PIRÁMIDE CUADRANGULAR ACODADA (la pirámide cambia sus caras laterales, 8 en total: trapecios y triángulos).



PIRÁMIDE RECTANGULAR ESCALONADA ('ZIGURAT'). Sus caras laterales son trapecios y no termina en cúspide. sino en un rectángulo.

# 3. PRISMAS.

**DEFINICIÓN:** “Un prisma es un cuerpo geométrico (un poliedro) que tiene dos bases iguales y paralelas entre sí, llamadas BASES (que pueden ser cualquier polígono) y un número de caras laterales igual al número de lados del polígono de sus bases, y que son siempre PARALELOGRAMOS (cuadrados, rectángulos, rombos o romboides).”

**Características:**

- Su **número de caras** se obtiene sumándole ‘2’ al número de lados del polígono de su base.
- Su **número de vértices** se calcula multiplicando por ‘2’ el número de lados del polígono de la base.
- Su **número de aristas** se calcula multiplicando por ‘3’ el número de lados del polígono de la base.
- Los polígonos que forman sus bases se llaman **directrices**.
- Sus caras laterales solo pueden ser **cuadrados, rectángulos, rombos o romboides** (paralelogramos).
- Los prismas rectos tienen cuadrados o rectángulos en sus caras laterales, y los oblicuos, cualquier paralelogramo.
- **Existen infinitas posibilidades de tipos de prismas** (y de sus variantes): distintas bases, distinta altura...

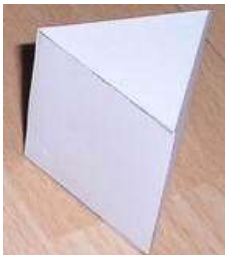
*\* Tener en cuenta que los prismas son poliedros a los que estamos poniendo nombre según sus características y no según su número de caras. Si fuese así, prisma triangular, en realidad, sería un pentaedro.*

**Tipos de prismas y formas de nombrarlos:**

Los prismas se pueden clasificar según distintos criterios. Además, estos mismos criterios se utilizan para nombrarlos.

- 1º) Los prismas se clasifican y se nombran según el número de lados del polígono de la base: triangular, cuadrangular, rectangular, romboidal, romboideal, trapezoidal, trapezoideal, pentagonal, hexagonal, heptagonal...
- 2º) Se clasifican (y se nombran) según si el polígono de la base es regular (o simétrico) o irregular (o asimétrico).
- 3º) Se clasifican (y se nombran) según si el polígono de la base es convexo o cóncavo.
- 4º) Se clasifican (y se nombran) según si son rectos (todas sus caras laterales son rectángulos) u oblicuos o inclinados. Normalmente, solo se cita este tipo si es oblicua o inclinada, y cuando es recta no se suele decir nada.
- 5º) Si están truncados o no. En realidad, los prismas truncados, no son prismas, ya que no cumplen su definición (sus caras ya no están paralelas ni son iguales). Pueden estar truncados (cortados) con distintos grados de inclinación, una o más veces...
- 6º) Algunos autores también incluyen la altura del prisma, pues según su altura, tendremos distintos tipos de prismas.

**EJEMPLOS DE TIPOS DE PRISMAS.**



PRISMA TRIANGULAR.



Hexaedro regular o cubo, es un prisma donde todas sus caras son cuadrados iguales.



PRISMA RECTANGULAR.



PRISMA PENTAGONAL.



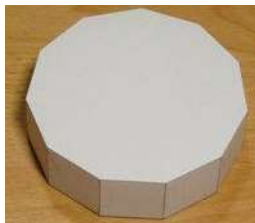
PRISMA HEXAGONAL.



PRISMA HEPTAGONAL.  
Su base tiene 7 lados.



PRISMA ENEAGONAL.  
Su base tiene 9 lados.



PRISMA ENDECAGONAL.  
Su base tiene 11 lados.



PRISMA TRAPEZOIDAL.  
Su base es un trapecoide.



PRISMA CUADRADO OBLICUO.



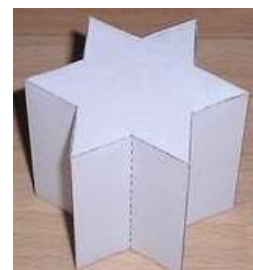
PRISMA RÓMBICO OBLICUO.



PRISMA PENTAGONAL OBLICUO.



PRISMA PENTAGRÁMICO (cóncavo y estrellado).



PRISMA HEXAGRÁMICO (cóncavo y estrellado).



PRISMA PENTAGRÁMICO IRREGULAR. Es cóncavo pero no estrellado.

Fuente (para las imágenes): <http://www.korthalsaltes.com/es/>

## CASOS ESPECÍFICOS DE PRISMAS:

### PARALELEPÍPEDOS: ortoedros, romboedros y cubo.

Los prismas son poliedros muy utilizados en todos los ámbitos de la vida. Además, tienen una geometría muy determinada, lo que permite distinguir 3 tipos de prismas con características propias:

#### PARALELEPÍPEDOS.

Son poliedros, concretamente prismas que cumplen las siguientes condiciones:

- Tienen 6 caras (12 aristas y 8 vértices).
- Todas sus caras son paralelogramos: cuadrados, rectángulos, rombos o romboides.
- Sus caras son dos a dos iguales y paralelas: 3 pares de caras paralelas e iguales.



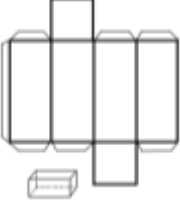

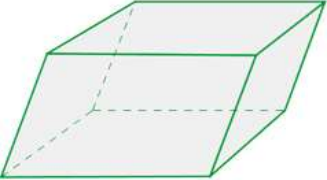
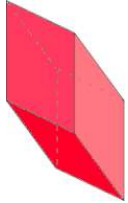
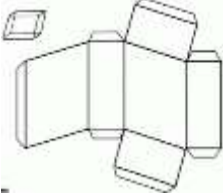

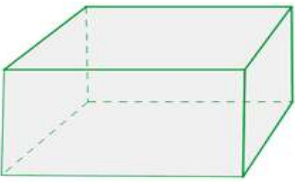

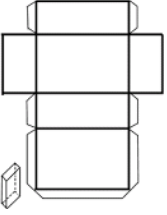

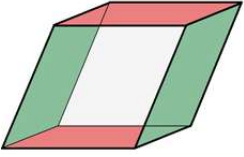
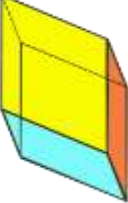
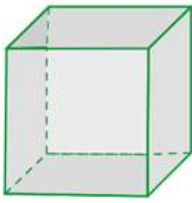
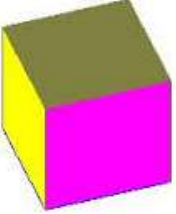
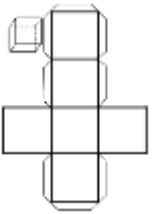

\* *Cualquier prisma cuyas bases sean paralelogramos, será un paralelepípedo.*

EL PARALELEPÍPEDO OBLICUO es un poliedro muy especial. Cualquiera de sus pares de caras iguales podrían considerarse sus bases. Dependiendo que par de caras se considere base se llamará de una forma distinta:

- Bases → cuadrados o rectángulos menores → prisma rectangular/cuadrangular oblicuo.
- Bases → rectángulos mayores → prisma rectangular oblicuo.
- Bases → romboides → prisma romboidal recto.

Existen 5 formas de paralelepípedos: recto, oblicuo, ORTOEDRO, ROMBOEDRO y CUBO.

- **PARALELEPÍPEDO RECTO:** sus bases pueden ser cuadrados, rombos o romboides y sus caras laterales 4 rectángulos iguales. Es un *prisma cuadrangular, rómbico y romboidal recto*.
- **PARALELEPÍPEDO OBLICUO:** sus bases son cuadrados y sus caras laterales 2 rectángulos iguales y 2 romboides iguales. Es un *prisma cuadrangular oblicuo (o inclinado)*.
- **ORTOEDRO:** todas sus caras son RECTÁNGULOS. Es un *prisma rectangular recto*.
- **ROMBOEDRO:** todas sus caras son ROMBOS, siempre iguales. Es un *prisma rómbico inclinado*.
- **CUBO:** todas sus caras son CUADRADOS. Es un *poliedro regular o sólido platónico*: hexaedro regular.

Tipo de paralelepípedo	Imagen (horizontal)	Imagen (vertical)	Desarrollo	Objeto de la vida real
<b>PARALELEPÍPEDO RECTO.</b> Bases: cuadrados, rombos o romboides. Caras laterales: rectángulos iguales.				
<b>PARALELEPÍPEDO OBLICUO:</b> tiene romboides y rectángulos en sus caras. En ocasiones cuadrados en las bases.				 Torres Kio (Madrid).
<b>ORTOEDRO:</b> sus caras son rectángulos. El ortoedro se diferencia del paralelepípedo recto en que sus bases son rectángulos.				 Este ladrillo tiene forma de ORTOEDRO. Sus 6 caras son rectangulares.
<b>ROMBOEDRO:</b> todas sus caras son rombos. Aunque en la visión panorámica no se aprecia, el romboedro está formado por 6 rombos iguales.				Existen pocos objetos o construcciones de la vida real con esta forma.
<b>CUBO (hexaedro regular):</b> todas sus caras son 6 cuadrados iguales.				 Cubo de Rubrik. Tiene forma de cubo.

# ANTIPRISMAS.

Los antiprismas son poliedros que tienen dos caras paralelas e iguales entre sí, llamadas BASES (que pueden ser cualquier polígono) y caras laterales formadas por TRIÁNGULOS (podríamos decir que son una especie de prismas, en los que sus caras laterales en lugar de ser paralelogramos, son triángulos).

El número de caras laterales de un antiprisma suele ser el doble del número de lados del polígono de la base, pero esto no siempre se cumple. Si todos sus triángulos son equiláteros, se llama **antiprisma regular**.

Además, los prismas se pueden combinar entre sí para originar otros poliedros.

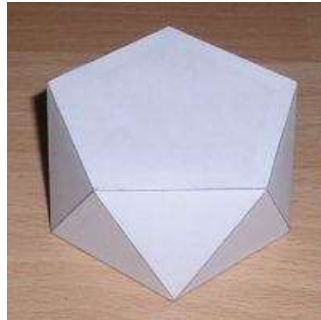
Asimismo, los prismas pueden combinarse con otros poliedros para dar lugar a interesantes composiciones.

Fueron descubiertos por Johannes Kepler a principios del s. XVII.

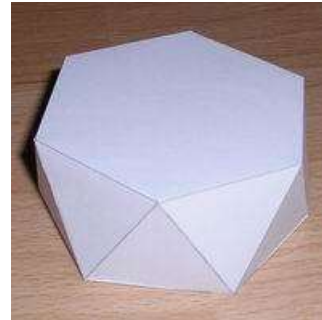
## ANTIPRISMAS.



ANTIPRISMA CUADRANGULAR.



ANTIPRISMA PENTAGONAL.



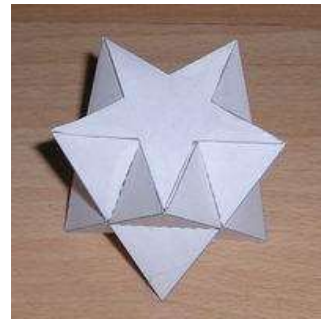
ANTIPRISMA HEXAGONAL.



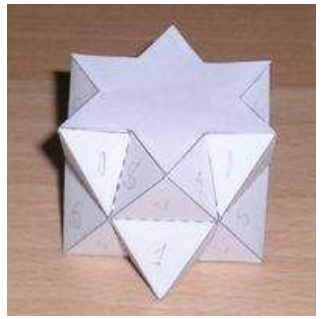
ANTIPRISMA OCTOGONAL.



ANTIPRISMA DECAGONAL.



ANTIPRISMA PENTAGRÁMICO.



ANTIPRISMA HEXAGRÁMICO.



PRISMA HEXAGONAL “MIXTO”, (caras laterales: rombos y triángulos).

## “PRISMAS TORCIDOS”.

Se trata de prismas o antiprismas que sufren una especie de rotación. Debido a ella, un prisma se puede convertir en un antiprisma o en una variante del antiprisma, con triángulos rectángulos o escalenos; o incluso, si la rotación continua, en verdaderos “prismas torcidos” en los que sus caras laterales dejan de ser polígonos, y se convierten en superficies planas curvadas.



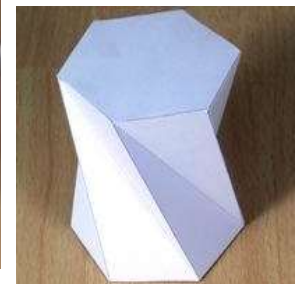
Vemos como un **prisma triangular** se convierte en **antiprisma** y luego en “**prisma torcido**”.



**Antiprisma cuadrangular** y “**prisma torcido**”.



En esta imagen observamos aún mejor como ha evolucionado el **prisma pentagonal** hasta llegar al **prisma torcido pentagonal**.



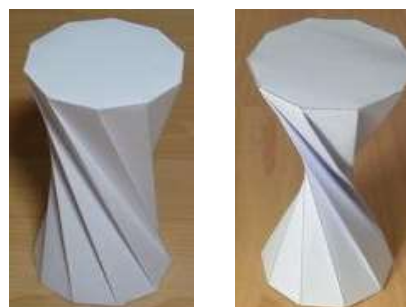
**PRISMA HEXAGONAL TORCIDO.**



Más ejemplos de rotación. De un **prisma hexagonal** a un **prisma torcido hexagonal**.



**Prisma octogonal torcido.** Obsérvese como sus caras han dejado de ser triángulos.



**Prismas decagonales torcidos.**



**Prisma dodecagonal torcido.**

# 4. SÓLIDOS DE JOHNSON.

**DEFINICIÓN:** “Son poliedros que cumplen las siguientes características: no tienen bases diferenciadas, son convexos, y sus caras pueden ser cualquier polígono regular.” (Los sólidos platónicos no se consideran).

**Características:**

- Sus caras pueden ser distintas (siempre y cuando sean polígonos regulares). Por tanto se pueden unir polígonos distintos en un mismo vértice.
- En cada vértice concurren como mínimo 3 caras, y como máximo 5 caras.
- Aunque cualquier polígono puede formar sus caras, por sus características, solo pueden ser: triángulos equiláteros, cuadrados, pentágonos, hexágonos, octógonos o decágonos (todos regulares, lógicamente).
- A este grupo (o familia) pertenecen varias pirámides y bipirámides.
- La mayoría pueden construirse a partir de una pirámide y sus variantes, de prismas y de sólidos platónicos.
- Fueron estudiados por el matemático norteamericano Norman Johnson (nacido en 1930) quién creó una lista con 92 sólidos que cumplían estas características, aunque no descubrió que ese fuese el número exacto, pero en 1969 Victor Zalgaller descubrió que efectivamente solo eran 92.
- Solo existen 92 poliedros que pertenezcan a esta familia, que cumplan estas características.

**Nomenclatura:**

Los sólidos de Johnson tienen nombres complicados, aunque si sabes lo que quiere decir cada término, seguro que ya no lo serán tanto.

- **BI:** significa que hay dos copias de un sólido dadas unidas base con base. En el caso de las cúpulas y rotondas, se pueden unir de manera que se encuentren caras similares (*orto-*) o disimilares (*giro-*). Según esta nomenclatura, un octaedro sería una *bipirámide cuadrada*, un cuboctaedro sería una *girocúpula triangular* y un icosidodecaedro sería una *girobirrotonda pentagonal*.

- **ELONGADO:** significa que se ha unido un prisma a la base de un sólido dado o entre las bases que forman un sólido dado. Según esta nomenclatura, un rombicuboctaedro sería una *ortobicúpula cuadrada elongada*.

- **GIROELONGADO:** significa que se ha unido un antiprisma a la base de un sólido dado o entre las bases que forman un sólido dado. Un icosaedro sería una *bipirámide pentagonal giroelongada*.

- **AUMENTADO:** significa que se ha unido una pirámide o cúpula a una de las caras del sólido dado.

- **DISMINUIDO:** significa que se ha quitado una pirámide o cúpula de un sólido dado.

- **GIROIDE:** significa que se ha rotado una cúpula del sólido de forma que encaje de forma distinta. Un ejemplo está en la diferencia entre las *orto-* y las *girobicúpulas*.

\* Las tres últimas operaciones — aumento, disminución y giro — se pueden realizar más de una vez en un sólido lo suficientemente grande. Si se ha realizado una de estas operaciones dos veces, se indica con el prefijo *bi-* (por ejemplo, un *bigiroide* es un sólido que tiene dos de sus cúpulas rotadas); y si se ha realizado tres veces se indica con el prefijo *tri-* (por ejemplo, un sólido *tridisminuido* es aquél al que se le han quitado tres de sus pirámides o cúpulas).

A veces los prefijos *bi-* y *tri-* dan lugar a ambigüedad. En el caso de que sea necesario distinguir entre un sólido al que se han alterado dos caras paralelas y uno al que se han alterado dos caras oblicuas, se indica la diferencia con los prefijos *para-* y *meta-*, respectivamente. Por ejemplo, un sólido *parabiaumentado* es aquel al que se han aumentado dos caras paralelas, mientras que a un sólido *metabiaumentado* se le han aumentado dos caras oblicuas.

(Fuente principal: Wikipedia).

**EJEMPLOS DE SÓLIDOS DE JOHNSON**



**Pirámide cuadrada.**

Caras: 5 (4 triáng. equilát. y 1 cuadrado).

Vértices: 5.

Aristas: 8.



**Pirámide pentagonal.**

Caras: 6 (5 triáng. eq. y 1 pentágono regular).

Vértices: 6.

Aristas: 10.

No existen más pirámides que se puedan construir solo con polígonos regulares.

El resto de pirámides pueden tener base regular, pero sus caras laterales no serían triángulos equiláteros. Circunstancias parecidas suceden en otros poliedros, por eso solo existen 92 poliedros convexos con todas sus caras formadas solo por polígonos regulares.



**Cúpula triangular.**

Caras: 8 (4 triáng. equil., 3 cuadr. y 1 hexágono).

Vértices: 9.

Aristas: 15.



**Cúpula cuadrada.**

Caras: 10 (4 triáng. eq., 5 cuadr. y 1 octógono).

Vértices: 12.

Aristas: 20.



**Pirámide pentagonal elongada.**

Caras: 11 (5 triáng. eq., 5 cuadr. y 1 pentágono).

Vértices: 11.

Aristas: 20.





**Pirámide cuadrada giroelongada.**

**Caras:** 13 (5 triáng. eq. y 1 cuadrado).  
**Vértices:** 9.  
**Aristas:** 20.



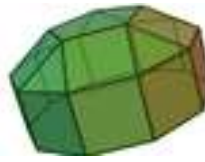
**Bipirámide pentagonal.**  
**Caras:** 10 (10 triángulos equiláteros).

**Vértices:** 7.  
**Aristas:** 15.



**Bipirámide pentagonal elongada.**

**Caras:** 15 (10 triáng. eq. y 5 cuadrados).  
**Vértices:** 12.  
**Aristas:** 25.



**Cúpula pentagonal elongada.**

**Caras:** 22 (5 tr. eq., 15 cuadr., 1 pent. y 1 decag.)  
**Vértices:** 25.  
**Aristas:** 45.



**Rotonda pentagonal elongada.**

**Caras:** 27 (10 tr. eq., 10 cuadr., 6 pentágonos y 1 decágono).  
**Vértices:** 30.  
**Aristas:** 55.



**Cúpula pentagonal giroelongada.**

**Caras:** 32 (25 tri. eq., 5 cuadr., 1 pent., y 1 decg.)  
**Vértices:** 25.  
**Aristas:** 55.



**Rotonda pentagonal giroelongada.**

**Caras:** 37 (30 trián. eq., 6 pentág., y 1 decágono).  
**Vértices:** 30.  
**Aristas:** 65.

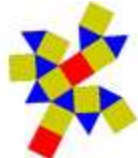


**Girobifastigium.**  
**Caras:** 8 (4 triángulos equil. y 4 cuadrados).  
**Vértices:** 8.  
**Aristas:** 14.



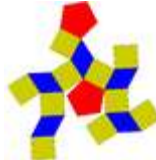
**Girobicúpula cuadrada.**

**Caras:** 18 (8 triángulos equil. y 10 cuadrados).  
**Vértices:** 16.  
**Aristas:** 32.



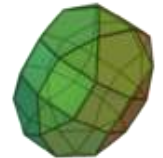
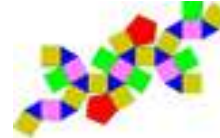
**Ortobicúpula pentagonal.**

**Caras:** 22 (10 trián. eq., 10 cuadra., y 2 pentág.)  
**Vértices:** 20.  
**Aristas:** 40.



**Ortobicúpula pentagonal elongada.**

**Caras:** 32 (10 trián. eq., 20 cuadra. y 2 pentág.)  
**Vértices:** 30.  
**Aristas:** 60.



**Ortobirrotunda pentagonal elongada.**

**Caras:** 42 (20 trián. eq., 10 cuadra., y 12 pentág.)  
**Vértices:** 40.  
**Aristas:** 80.



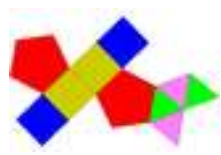
**Girobirrotunda pentagonal elongada.**

**Caras:** 42 (20 trián. eq., 10 cuadr., y 12 pentág.)  
**Vértices:** 40.  
**Aristas:** 80.



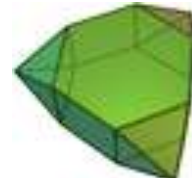
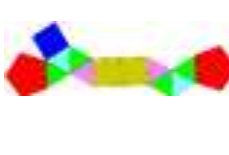
**Prisma pentagonal aumentado.**

**Caras:** 10 (4 triáng. eq., 4 cuadra., y 2 pentág.)  
**Vértices:** 11.  
**Aristas:** 19.



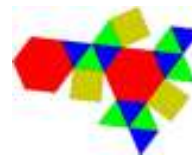
**Prisma pentagonal biaumentado.**

**Caras:** 13 (8 triáng. eq., 3 cuadra., y 2 pentág.)  
**Vértices:** 12.  
**Aristas:** 23.



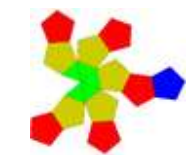
**Prisma hexagonal triaumentado.**

**Caras:** 17 (12 trián. eq., 3 cuad., y 2 hexágonos).  
**Vértices:** 15.  
**Aristas:** 30.



**Dodecaedro aumentado.**

**Caras:** 16 (5 triáng. eq., y 11 pentágonos).  
**Vértices:** 21.  
**Aristas:** 35.



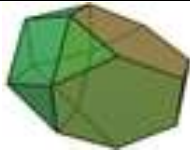
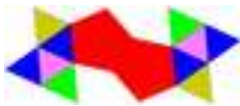
**Dodecaedro triaumentado.**

**Caras:** 24 (15 trián. eq. y 9 pentágonos).  
**Vértices:** 23.  
**Aristas:** 45.



**Icosaedro metabidiminuido.**

**Caras:** 12 (8 triáng. eq., 3 cuad., y 2 pentágonos)  
**Vértices:** 10.  
**Aristas:** 20.



**Tetraedro truncado aumentado.**

**Caras:** 14 (8 triáng. eq., 3 cuadr., y 3 hexág.)  
**Vértices:** 15.  
**Aristas:** 27.



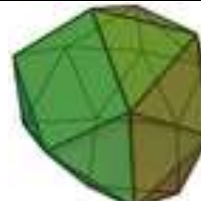
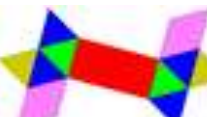
**Cubo truncado aumentado.**

**Caras:** 22 (12 triáng. eq., 5 cuadra., y 5 octógono).  
**Vértices:** 28.  
**Aristas:** 48.



**Esfenocorona.**

**Caras:** 14 (12 triángulos equilat., y 2 cuadrados).  
**Vértices:** 10.  
**Aristas:** 22.



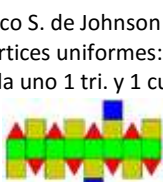
**Biesfenocíngulo.**

**Caras:** 24 (20 triángulos equilat., y 4 cuadrados).  
**Vértices:** 16.  
**Aristas:** 38.



**Girobicúpula cuadrada elongada.**

**Caras:** 24 (8 triáng. eq., y 18 cuadrados).  
**Vértices:** 24.  
**Aristas:** 48.



Único S. de Johnson con vértices uniformes: en cada uno 1 tri. y 1 cuad.

# 5. SÓLIDOS DE ARQUÍMEDES.

**DEFINICIÓN:** “Un sólido arquimediano es un poliedro convexo cuyas caras son polígonos regulares de dos o más tipos. Se obtienen, de manera directa o indirecta, a partir de los sólidos platónicos.”

**Características:**

- Los sólidos arquimedianos son 13.
- 7 sólidos arquimedianos se obtienen a partir de truncar los sólidos platónicos;
- 4 sólidos arquimedianos se obtienen a partir de dos sólidos platónicos truncados;
- los 2 restantes se obtienen a partir de una transformación compleja de uno de los anteriores.
- Son de **vértices uniformes**: en todos concurren el mismo número de caras y de aristas, y en el mismo orden.
- **Sus caras no son uniformes, pero sí regulares**. Tienen al menos 2 caras distintas. Los polígonos de sus caras pueden ser: triángulos equiláteros, cuadrados e incluso pentágonos, hexágonos, octógonos y decágonos regulares.
- Se diferencian de los Sólidos de Johnson en que los sólidos de Arquímedes se obtienen, de manera directa o indirecta, de los sólidos platónicos. También se diferencian en que son de vértices uniformes.
- Fueron estudiados y clasificados [Arquímedes](#), gran matemático, físico, inventor..., que nació y vivió en Siracusa (en la isla de Sicilia, Italia) durante el s. III a. C. Su obra quedó en el olvido y hasta el Renacimiento no se recuperó.



DODECAEDRO ROMO

CUBOCTAEDRO



ICOSIDODECAEDRO



TETRAEDRO TRUNCADO



OCTAEDRO TRUNCADO



CUBO TRUNCADO



ICOSAEDRO TRUNCADO  
("balón de fútbol")



DODECAEDRO TRUNCADO



ROMBICUBOCTAEDRO



CUBOCTAEDRO TRUNCADO



ROMBICOSEDODECAEDRO



ICOSIDODECAEDRO TRUNCADO



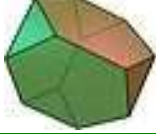
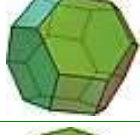
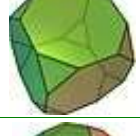
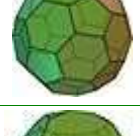
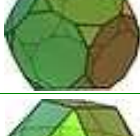
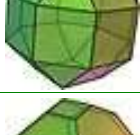
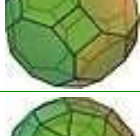
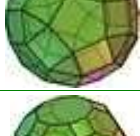
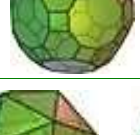
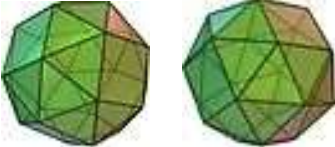
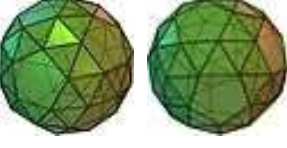


CUBO ROMO



En el cuadro de la siguiente página analizamos todos los sólidos de Arquímedes.

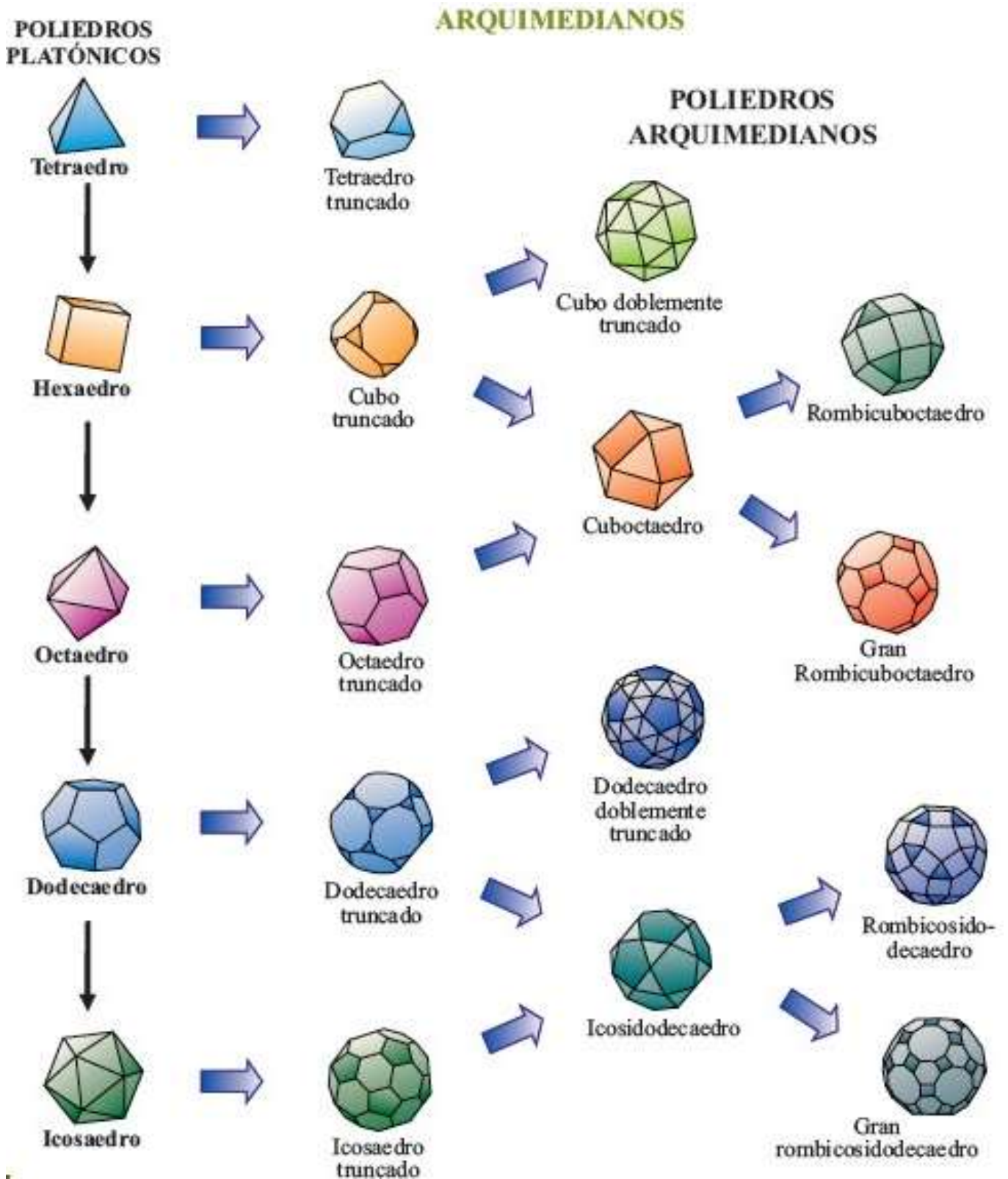
**SÓLIDOS ARQUIMEDIANOS.**

NOMBRE	IMAGEN	DESCRIPCIÓN	¿Cómo se obtiene?
<b>Cuboctaedro</b>		<b>CARAS:</b> 14 (6 cuadrados y 8 triángulos equiláteros). <b>ARISTAS:</b> 24. <b>VÉRTICES:</b> 12.	Se obtiene truncando los vértices de un <b>hexaedro o cubo</b> (sólido platónico).
<b>Icosidodecaedro</b>		<b>CARAS:</b> 32 (12 pentág. reg. y 20 triáng. eq.) <b>ARISTAS:</b> 60. <b>VÉRTICES:</b> 30. <b>* Sus aristas son uniformes (sólido semirregular).</b>	Es el caso límite coincidente del truncamiento del <b>dodecaedro</b> y del <b>icosaedro</b> .
<b>Tetraedro truncado</b>		<b>CARAS:</b> 8 (4 hexágonos regulares y 4 triángulos equiláteros). <b>ARISTAS:</b> 18. <b>VÉRTICES:</b> 12.	Se obtiene truncando los vértices de un <b>tetraedro</b> regular (sólido platónico).
<b>Octaedro truncado</b>		<b>CARAS:</b> 14 (8 hexágonos regulares y 6 cuadrados). <b>ARISTAS:</b> 36. <b>VÉRTICES:</b> 24.	Se obtiene truncando los vértices de un <b>octaedro</b> y también de un <b>hexaedro o cubo</b> (sólidos platónicos).
<b>Cubo truncado</b>		<b>CARAS:</b> 14 (6 octógonos regulares y 4 triángulos equiláteros). <b>ARISTAS:</b> 36. <b>VÉRTICES:</b> 24.	Se obtiene truncando los vértices de un <b>hexaedro o cubo</b> (sólido platónico). La forma de truncarlo es distinta al cuboctaedro.
<b>Icosaedro truncado</b>		<b>CARAS:</b> 32 (20 hexágonos reg. y 12 pentágonos regulares). <b>ARISTAS:</b> 90. <b>VÉRTICES:</b> 60.	Se obtiene truncando los vértices de un <b>icosaedro</b> regular (sólido platónico).
<b>Dodecaedro truncado</b>		<b>CARAS:</b> 32 (12 decágonos reg. y 20 triángulos equiláteros). <b>ARISTAS:</b> 90. <b>VÉRTICES:</b> 60.	Se obtiene truncando los vértices de un <b>dodecaedro</b> regular (sólido platónico).
<b>Rombicuboctaedro</b> o <b>rombicuboctaedro menor</b>		<b>CARAS:</b> 26 (18 cuadrados y 8 triángulos equiláteros). <b>ARISTAS:</b> 48. <b>VÉRTICES:</b> 24.	Se obtiene truncando los vértices de un <b>cuboctaedro</b> (sucesivas operaciones de truncamiento y desplazamiento radial de las caras).
<b>Cuboctaedro truncado</b> o <b>rombicuboctaedro mayor</b>		<b>CARAS:</b> 26 (6 octógonos reg., 8 hexágonos reg. y 12 cuadrados). <b>ARISTAS:</b> 72. <b>VÉRTICES:</b> 48.	Se obtiene truncando los vértices de un <b>cuboctaedro</b> (sucesivas operaciones de truncamiento y desplazamiento radial de las caras).
<b>Rombicosidodecaedro</b> o <b>rombicosidodecaedro menor</b>		<b>CARAS:</b> 62 (12 pentágonos reg., 30 cuadrados y 20 triángulos equil.) <b>ARISTAS:</b> 120. <b>VÉRTICES:</b> 60.	Se obtiene a partir del <b>icosidodecaedro</b> mediante sucesivas operaciones de truncamiento y desplazamiento radial de las caras.
<b>Icosidodecaedro truncado</b> o <b>rombicosidodecaedro mayor</b>		<b>CARAS:</b> 62 (12 decágonos reg., 20 hexágonos reg. y 30 cuadrados). <b>ARISTAS:</b> 180. <b>VÉRTICES:</b> 120.	Se obtiene a partir del <b>icosidodecaedro</b> mediante sucesivas operaciones de truncamiento y desplazamiento radial de las caras.
<b>Cubo romo</b> o <b>cuboctaedro romo</b>  * Es un <b>poliedro quiral</b> : los 2 cubos romos existentes son distintos pero con estructura igual: caras, aristas y vértices iguales.	 (2 formas isomórficas)	<b>CARAS:</b> 38 (6 cuadrados y 32 triángulos equilát.) <b>ARISTAS:</b> 60. <b>VÉRTICES:</b> 24. <b>* Sus aristas son uniformes (sólido semirregular).</b>	Es el caso límite coincidente del truncamiento del <b>cubo</b> y <b>octaedro</b> . Se obtiene también a partir del truncamiento de 12 de los cuadrados del <b>rombicuboctaedro</b> , convirtiéndolos a cada uno de ellos en 2 nuevos triángulos equiláteros.
<b>Dodecaedro romo</b> o <b>icosidodecaedro romo</b>  * Es un <b>poliedro quiral</b> : los 2 dodecaedros romos existentes son distintos pero con estructura igual: caras, aristas y vértices iguales.	 (2 formas isomórficas)	<b>CARAS:</b> 92 (12 pentágonos reg. y 80 triángulos equilát.) <b>ARISTAS:</b> 150. <b>VÉRTICES:</b> 60.	Se obtienen a partir del <b>rombicosidodecaedro menor</b> mediante una rotación coordinada de los pentágonos paralelos a los originales del dodecaedro, de los triángulos que los conectan por sus vértices y, simultáneamente, la conversión de cada uno de los cuadrados que los conectan por las aristas en dos triángulos equiláteros. El sentido de la rotación de los pentágonos determina el resultante.



# CÓMO SE CREAN LOS SÓLIDOS DE ARQUÍMEDES.

Vemos que a partir de los sólidos platónicos, truncándolos (y otras combinaciones), obtenemos los arquimedianos.



Fuente: <http://historiasdematematicas.blogspot.com.es/>

**Fuentes bibliográficas y más información en:**

- [https://es.wikipedia.org/wiki/S%C3%B3lidos\\_arquimedianos](https://es.wikipedia.org/wiki/S%C3%B3lidos_arquimedianos)
- <http://www.korthalsaltes.com/es/cuadros.php?type=a>
- <http://www.sacred-geometry.es/?q=es/content/s%C3%B3lidos-arquimedianos>
- [http://historiaybiografias.com/trece\\_solidos/](http://historiaybiografias.com/trece_solidos/)

**¿TE IMAGINAS DESCUBRIR Y EXPERIMENTAR HACE UNOS 2.300 AÑOS? Pues eso es lo que tuvo que hacer Arquímedes, utilizando figuras de arcilla, madera... No existía el papel, ni el lápiz, ni el boli, ni otras cosas.**

# 6. SÓLIDOS DE CATALAN.



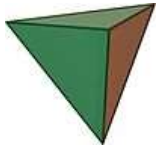


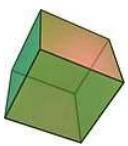


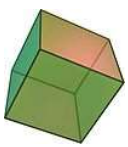


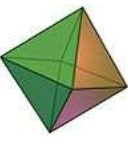


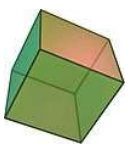


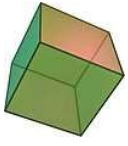
**DEFINICIÓN:** “Los sólidos de Catalan son los poliedros duales de los sólidos de Arquímedes.”




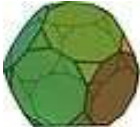
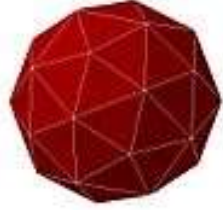









Los vértices del dual de un sólido son los puntos medios de las caras del sólido original.

**Características:**

- Todos son convexos.
- Sus caras son uniformes (todas sus caras son iguales), aunque no son polígonos regulares.
- Sus vértices no son uniformes, ya que los sólidos de Arquímedes de los que proceden tampoco lo son.
- Sus ángulos diédricos son iguales en todo el poliedro.
- Dos de ellos son de aristas uniformes (el rombododecaedro y el triacontaedro rómbico) y otros dos tienen figura isomórfica (el icositetraedro pentagonal y el hexecontaedro pentagonal).
- Fueron estudiados y desarrollados por el matemático belga/francés [Eugène Charles Catalan](#) (1814-1894).
- Los sólidos de catalán son en total 13 (lógicamente, ya que los sólidos arquimedianos también son 13).

## SÓLIDOS DE CATALAN.

NOMBRE	IMAGEN	DESCRIPCIÓN	DUAL (solido de Arquímedes).	Poliedro del que se obtiene el sólido de Arquímedes.
<b>Triaquistetraedro</b> o <b>tetraedro triakis</b>		<b>CARAS:</b> 12 triángulos isósceles. <b>ARISTAS:</b> 18. <b>VÉRTICES:</b> 8.	<b>Tetraedro truncado.</b> 	<b>Tetraedro regular</b> (sólido platónico). 
<b>Rombododecaedro</b> o <b>dodecaedro rómbico</b>		<b>CARAS:</b> 12 rombos. <b>ARISTAS:</b> 24. <b>VÉRTICES:</b> 14.	<b>Cuboctaedro.</b> 	<b>Hexaedro o cubo</b> (sólido platónico). 
<b>Triaquisoctaedro</b> u <b>octaedro triakis</b>		<b>CARAS:</b> 24 triángulos isósceles. <b>ARISTAS:</b> 36. <b>VÉRTICES:</b> 14.	<b>Cubo truncado.</b> 	<b>Hexaedro o cubo</b> (sólido platónico). 
<b>Tetraquishexaedro</b> o <b>hexaedro tetrakis</b>		<b>CARAS:</b> 24 triángulos isósceles. <b>ARISTAS:</b> 36. <b>VÉRTICES:</b> 14.	<b>Octaedro truncado.</b> 	<b>Octaedro regular</b> (sólido platónico). 
<b>Icositetraedro deltoidal</b>		<b>CARAS:</b> 24 trapezoides (deltoides o “punta de flecha”). <b>ARISTAS:</b> 48. <b>VÉRTICES:</b> 26.	<b>Rombicuboctaedro</b> 	Se obtiene del <b>cuboctaedro</b> , y este de un <b>cubo</b> . 
<b>Hexaquisoctaedro</b> o <b>disdiaquisdodecaedro</b> u <b>octaedro exquis</b> o <b>dodecaedro disdiaquis</b>		<b>CARAS:</b> 48 triángulos escalenos. <b>ARISTAS:</b> 72. <b>VÉRTICES:</b> 26.	<b>Cuboctaedro truncado.</b> 	Se obtiene del <b>cuboctaedro</b> , y este de un <b>cubo</b> . 

<p><b>Triacontaedro rómbico</b></p>		<p><b>CARAS:</b> 30 rombos. <b>ARISTAS:</b> 60. <b>VÉRTICES:</b> 32.</p>	<p><b>Icosidodecaedro.</b></p> 	<p>Es el caso límite coincidente del truncamiento del <b>dodecaedro</b> y del <b>icosaedro</b>.</p>
<p><b>Triaquisicosaedro</b> o <b>icosaedro triakis</b></p>		<p><b>CARAS:</b> 60 triángulos isósceles. <b>ARISTAS:</b> 90. <b>VÉRTICES:</b> 32.</p>	<p><b>Dodecaedro truncado.</b></p> 	<p><b>Dodecaedro regular</b> (sólido platónico).</p>
<p><b>Pentaquidodecaedro</b> o <b>dodecaedro pentakis</b></p>		<p><b>CARAS:</b> 60 triángulos isósceles. <b>ARISTAS:</b> 90. <b>VÉRTICES:</b> 32.</p>	<p><b>Icosaedro truncado.</b></p> 	<p><b>Icosaedro regular</b> (sólido platónico).</p>
<p><b>Hexecontaedro deltoidal</b></p>		<p><b>CARAS:</b> 60 trapezoides (deltoides o “punta de flecha”). <b>ARISTAS:</b> 120. <b>VÉRTICES:</b> 62.</p>	<p><b>Rombicidodecaedro,</b></p> 	<p>Se obtiene de un <b>icosisidodecaedro</b>, y este de un <b>dodecaedro</b> e <b>icosaedro</b>.</p>
<p><b>Hexaquicosaedro</b> o <b>disdiaquistriacontaedro</b> o <b>icosaedro hexakis</b> o <b>triacontaedro disdiakis</b></p>		<p><b>CARAS:</b> 120 triángulos escalenos. <b>ARISTAS:</b> 180. <b>VÉRTICES:</b> 62.</p>	<p><b>Icosidodecaedro truncado.</b></p> 	<p>Se obtiene de un <b>icosisidodecaedro</b>, y este de un <b>dodecaedro</b> e <b>icosaedro</b>.</p>
<p><b>Icositetraedro pentagonal</b></p>		<p><b>CARAS:</b> 24 pentágonos irregulares. <b>ARISTAS:</b> 60. <b>VÉRTICES:</b> 38.</p>	<p><b>Cubo romo.</b></p> 	<p>Es el caso límite coincidente del truncamiento del <b>cubo</b> y <b>octaedro</b>. Se obtiene también a partir del truncamiento de 12 de los cuadrados del <b>rombicuboctaedro</b>, convirtiéndolos a cada uno de ellos en 2 nuevos triángulos equiláteros.</p>
<p><b>Hexecontaedro pentagonal</b></p>		<p><b>CARAS:</b> 60 pentágonos irregulares. <b>ARISTAS:</b> 150. <b>VÉRTICES:</b> 92.</p>	<p><b>Dodecaedro romo.</b></p> 	<p>Se obtienen a partir del <b>rombicidodecaedro menor</b> mediante una rotación coordinada de los pentágonos paralelos a los originales del dodecaedro, de los triángulos que los conectan por sus vértices y, simultáneamente, la conversión de cada uno de los cuadrados que los conectan por las aristas en dos triángulos equiláteros. El sentido de la rotación de los pentágonos determina el resultante.</p>

# 7. SÓLIDOS DE KEPLER-POINSOT.

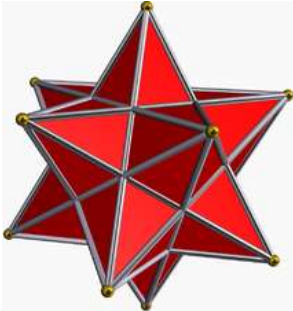
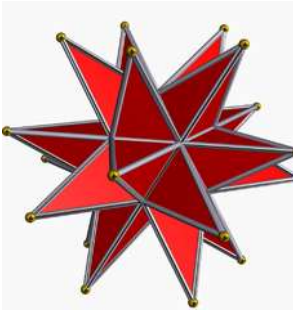
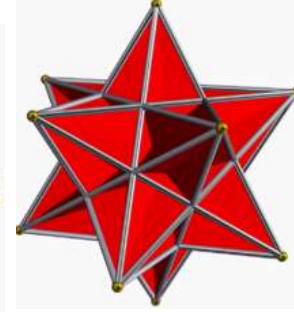



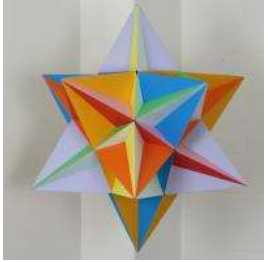




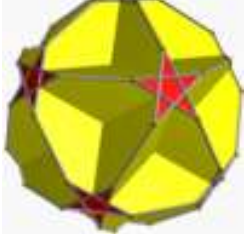
**DEFINICIÓN:** “Los sólidos de Kepler son poliedros regulares cóncavos.”

O sea, los sólidos platónicos eran regulares convexos y los sólidos de Kepler son regulares cóncavos.

**Características:**

- Todos son cóncavos.
- Sus caras son iguales, regulares y uniformes. Todas ellas son **polígonos regulares**. También sus aristas son iguales.
- Sus **vértices son uniformes**: en ellos concurren el mismo número de caras.
- Las caras están solo parcialmente en la superficie del sólido, y las partes expuestas están sólo conectadas en puntos (si están conectadas de algún modo). Si las partes se cuentan como caras separadas, el sólido deja de ser regular.
- Fueron estudiados y desarrollados por el matemático y astrónomo alemán **Johannes Kepler** (1571 – 1630), quién es mundialmente conocido porque demostró definitivamente que los planetas giran alrededor del Sol, y muchas más cosas sobre el Universo. En 1809, matemático y astrónomo francés **Louis Poinso**t completó y mejoró su trabajo. De ahí su nombre.
- **Los sólidos de Kepler o de Kepler-Poinsot son solo 4.**

“Pentagrama”: cara estrellada compuesta por 5 triángulos isósceles.

	<b>Pequeño dodecaedro estrellado</b>	<b>Gran dodecaedro estrellado</b>	<b>Gran icosaedro</b>	<b>Gran dodecaedro</b>
<b>IMAGEN</b>				
<b>CARAS</b>	12 pentagramas	12 pentagramas	20 caras triangulares cruzadas (equiláteros), formando 12 pentagramas.	12 caras pentagonales (6 pares de pentágonos paralelos), con 5 pentágonos que coinciden en cada vértice, que al cruzarse con cada uno de los otros genera un recorrido pentagramático.
<b>Aristas</b>	30	30	30	30
<b>Vértices</b>	12 ( $12 \times 5/2^5$ )	20 ( $20 \times 5/2^3$ )	12 ( $12 \times 3^{5/2}$ )	12 ( $12 \times 5^{5/2}$ )
<b>Pol. dual</b>	Gran dodecaedro	Gran icosaedro	Gran dodecaedro estrellado	Pequeño dodecaedro estr.
<b>Cómo se construye</b>	Consiste en tomar un dodecaedro y en vez de tomar el pentágono, levantamos en cada arista un triángulo equilátero y juntamos todos los triángulos de una cara.	Consiste en tomar un dodecaedro y sobre cada arista levantar un tetraedro regular y juntarlos todos sobre la cara, es decir, en cada cara de un dodecaedro, levantamos una pirámide de base pentagonal.	Es muy difícil de visualizar. Pensad en el dodecaedro estrellado, pero sobre cada cara construimos un tetraedro... hacia dentro.	Consiste en cinco caras pentagonales entrelazadas, o más fácil de visualizar, tomamos un icosaedro y en cada cara construimos un tetraedro... hacia dentro.
<b>Estelación</b>	Es la 1ª estelación del dodecaedro.	Es la 3ª estelación del dodecaedro.	Es la 16ª estelación del icosaedro (hay 17).	Es la 2ª estelación del dodecaedro.
<b>Otras imágenes</b>				
<b>Forma truncada</b>				

## 8. OTROS POLIEDROS.

Aunque ya hemos visto las principales familias o grupos específicos de poliedros, hay muchos más, infinitos, que no estarían en ninguna de dichas familia. Vamos a establecer una serie de categorías, las analizaremos y mostraremos imágenes de poliedros que pertenecerían a ellas.

### - POLIEDROS QUIRALES.

Un poliedro quiral es aquel que presenta dos formas distintas isomórficas, una es la imagen especular de la otra, es decir, tiene dos formas con estructura exactamente igual: caras (tipo y número), aristas, vértices, convexidad..., pero sin embargo se pueden construir de dos formas distintas (es como si se reflejaran en un espejo, uno tendría vista izquierda y el otro derecha).

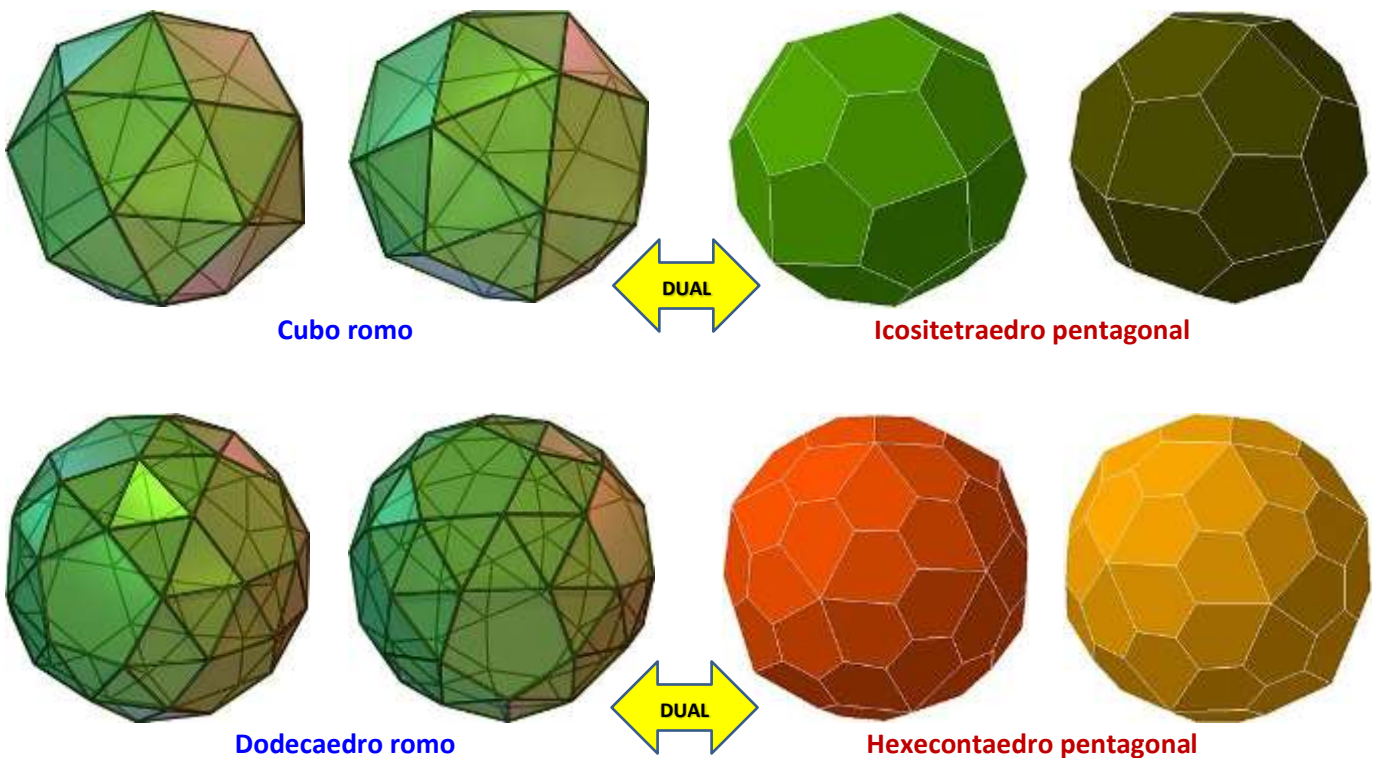
Los ejemplos más comunes de sólidos quirales son:

- De los sólidos de Arquímedes: [cubo romo](#) y [dodecaedro romo](#).
- De los sólidos de Catalan: [icositetraedro pentagonal](#) y [hexecontaedro pentagonal](#).

Los **sólidos de Arquímedes** y los de **Catalan** son **duales entre sí**: el dodecaedro romo es el dual del icositetraedro pentagonal y viceversa, y el cubo romo es el dual del hexecontaedro pentagonal y viceversa.

Sólidos de Arquímedes quirales.

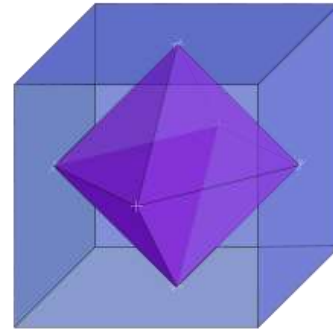
Sólidos de Catalan quirales.



## - POLIEDROS DUALES O CONJUGADOS.

Un poliedro dual o conjugado es un poliedro que se obtiene de otro de la siguiente manera: *se establece un punto en el centro de cada cara del poliedro original. Esos puntos serán los vértices del nuevo poliedro. Se unen los vértices continuos unos con otros, con aristas, y obtenemos un poliedro nuevo, que es dual del original.*

Podemos saber si un poliedro es dual de otro si el número de vértices del primero coincide con el número de caras del segundo y viceversa y ambos tienen el mismo número de aristas.



El octaedro y el cubo son poliedros duales. Aquí aparecen con los vértices del octaedro en el centro de las caras del cubo.

### El poliedro dual de un sólido platónico es otro sólido platónico:

<p>El dual del tetraedro regular es otro tetraedro regular.</p>	<p>El dual del hexaedro es un octaedro, y viceversa (el dual del octaedro es el hexaedro).</p>	<p>El dual del dodecaedro es el icosaedro, y viceversa (el dual del icosaedro es el dodecaedro).</p>
---	--	--

- Los **sólidos de Catalan** son los duales de los **sólidos de Arquímedes** (ver su apartado).
  - Las **bipirámides** son los poliedros duales de los **prismas** y viceversa (una bipirámide cuadrangular es dual de un prisma cuadrangular y viceversa, un prisma cuadrangular es el dual de una bipirámide cuadrangular).
  - Los **4 sólidos de Kepler** son duales entre sí, de esta manera: Pequeño dodecaedro estrellado – Gran dodecaedro y Gran dodecaedro estrellado - Gran icosaedro.
  - Los **trapezoedros o deltoedros** son los poliedros duales de los **antiprismas** y viceversa (ver más adelante).
  - **Cualquier poliedro tiene otro poliedro dual.**
- Pero no solo eso, también hay **POLIEDROS AUTODUALES**, en los que su dual es él mismo: todas las **pirámides**, las **pirámides elongadas** y los **trapezoedros disminuidos**.

### MÁS IMÁGENES DE POLIEDROS DUALES.

<p>En la imagen vemos como el <b>gran dodecaedro</b> está situado dentro de su poliedro dual: el <b>pequeño dodecaedro estrellado</b>.</p>	<p>Imagen con los sólidos platónicos dentro de su dual.</p>	<p>El <b>dodecaedro regular</b> y el <b>icosaedro regular</b> son poliedros duales entre sí. En la imagen puedes ver como los vértices del icosaedro coinciden exactamente con el centro de las caras del dodecaedro.</p>
<p>Esta <b>bipirámide pentagonal</b> es dual con el <b>antiprisma pentagonal</b> y viceversa.</p>	<p>La <b>estrella octángula de Kepler</b> (<i>stella octangula</i>, nombre original), descubierta por Kepler está formada por la composición en macla de <b>2 tetraedros</b> regulares (están incluidos en un cubo, y cada uno de los vértices coincide con los vértices del cubo, y las aristas coinciden con las diagonales de las caras del cubo). Es el <b>único poliedro compuesto dual consigo mismo</b>.</p>	
<p>Todas las <b>pirámides elongadas</b> son duales consigo mismas.</p>	<p>Todos los <b>trapezoedros disminuidos</b> son duales consigo mismos.</p>	

## - POLIEDROS UNIFORMES.

Se consideran poliedros uniformes a aquellos que cumplen las siguientes características:

- Tienen todas sus caras formadas por polígonos regulares.
- En muchos de ellos sus aristas son todas iguales.
- Sus vértices son uniformes (en él se unen el mismo número de caras).
- Pueden ser convexos o cóncavos
- Se subdividen en:
  - **Regulares:** todas sus caras son iguales y regulares. Sus aristas y vértices son uniformes.
  - **Cuasi-regulares:** sus caras son distintas, pero son polígonos regulares. Sus aristas y vértices son uniformes.
  - **Semi-regulares:** sus caras son distintas, pero son polígonos regulares. Sus vértices son uniformes pero sus aristas no.

Se diferencian con los **sólidos de Johnson** en que pueden ser convexos o cóncavos y que tienen que tener uniformidad en sus aristas y vértices.

Se consideran 75 tipos distintos de poliedros uniformes (aunque con caras infinitas existen más):

Poliedros uniformes convexos	Poliedros uniformes cóncavos (“estrellas”)
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Los 5 sólidos platónicos: todos regulares.</li> <li>- Los 13 sólidos de Arquímedes: 2 cuasi-regulares y 11 semirregulares.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Los 4 sólidos de Kepler: todos regulares.</li> <li>- 53 poliedros estrellados: 5 cuasi regulares y 48 semirregulares.</li> <li>- 1 poliedro estrellado creado por John Skilling (con pares de caras que coinciden). Lo llamó: <b>Gran dirhombidodecaedro disminuido</b> (<a href="#">great disnub dirhombidodecahedron</a>, nombre original. También conocido por Skilling’s figure).</li> </ul>

- Todos los **prismas** cuyas bases sean polígonos regulares y sus caras laterales sean cuadrados (hay infinitos casos).
- Todos los **antiprismas** cuyas bases sean polígonos regulares y sus caras laterales sean triángulos equiláteros (hay infinitos).

### EJEMPLOS DE POLIEDROS UNIFORMES



Cuboctaedro



Cubo truncado



Octaedro truncado



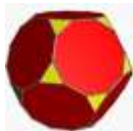
Rombicuboctaedro



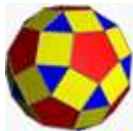
Cubo romo



Icosidodecaedro



Dodecaedro truncado



Rombicosidodecaedro



Cubo



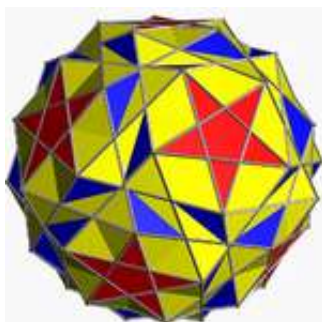
Octaedro



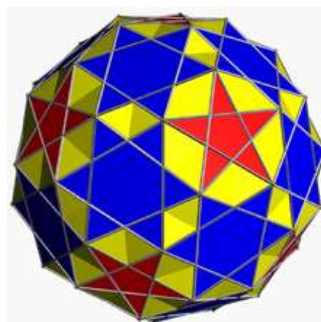
Dodecaedro



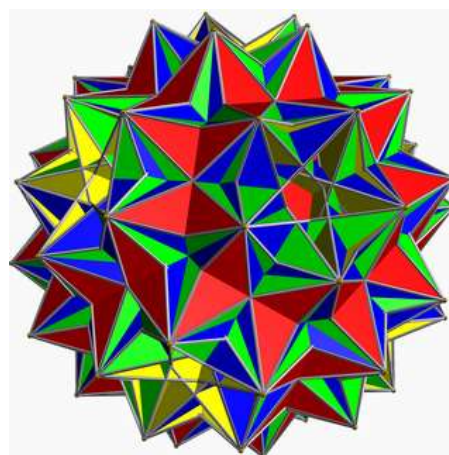
Icosaedro



**Dodecadodecaedro romo** (84 caras). Tiene pentágonos, rombos y triángulos equiláteros, aunque al ser cóncavo da la impresión de que no lo son.



**Pequeño icosidodecaedro romo** (112 caras). Tiene hexágonos, pentágonos, romos y triángulos equiláteros. Es cóncavo.



**Gran dirhombidodecaedro disminuido**

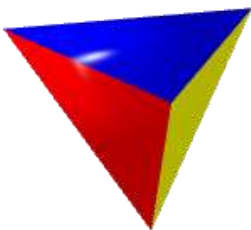
La “figura de Skilling”, tiene 204 caras. Es un poliedro uniforme impresionante formado por triángulos.

## - POLIEDROS DE CARAS UNIFORMES.

Son todos los poliedros que tienen todas sus caras iguales.

Los poliedros que cumplen estas características son:

- **Sólidos platónicos:** todos: tetraedro regular, hexaedro o cubo, octaedro regular, dodecaedro e icosaedro regular.
- **Pirámides:** el tetraedro regular (sólido platónico) y tres tipos de bpirámides incluidas en los sólidos de Johnson.
- **Prismas:** romboedro. Además, el hexaedro regular o cubo (sólido platónico), y el prisma triangular triaumentado (s. Johnson).
- **Sólidos de Johnson:** bpirámide triangular, bpirámide pentagonal, bpirámide cuadrada giroelongada, prisma triangular triaumentado y biesfenoide romo.
- **Sólidos de Arquímedes:** ninguno.
- **Sólidos de Catalan:** todos (hay 13): rombododecaedro, triaquisoctaedro, triaquistetraedro, tetraquishexaedro, icositetraedro deltoidal, icositetraedro pentagonal, triacontaedro rómbico, triaquisicosaedro, pentaquisdodecaedro, hexecontaedro deltoidal y hexecontaedro pentagonal..
- **Sólidos de Kepler:** los 4: pequeño dodecaedro estrellado, gran dodecaedro estrellado, gran icosaedro y gran dodecaedro.



**Tetraedro regular** (4 triáng. equil. iguales). Es un sólido platónico y una pirámide triangular.



**Bipirámide cuadrada giroelongada.**

Compuesta por 16 triángulos equiláteros iguales.

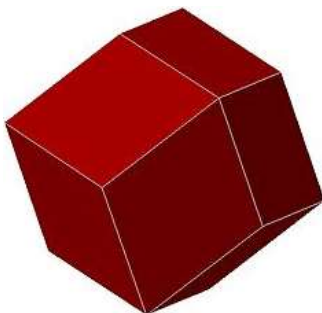


**Prisma triangular triaumentado.** 14 caras (triáng. equil. iguales).

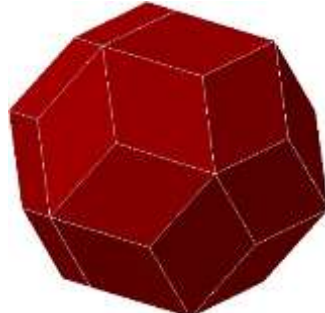


**Biesfenoide romo** (12 triáng.)

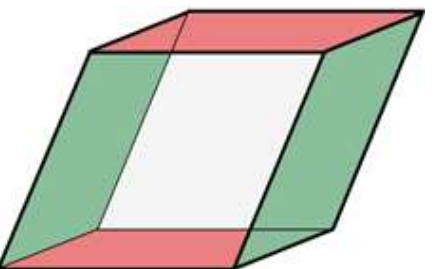
**Poliedros uniformes con sus caras formadas solo por rombos: ROMBOEDROS:** rombododecaedro, triacontaedro rómbico y romboedro (prisma). Si un poliedro está formado solo por rombos, entonces, todos los rombos son iguales (todas sus caras iguales).



**Rombododecaedro** (S. Catalan). Caras: 12 rombos.



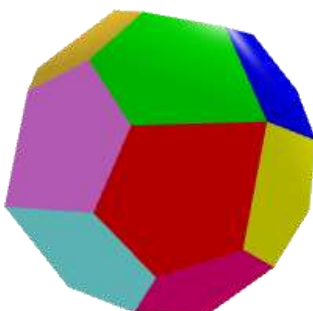
**Triacontaedro rómbico** (S. Catalan). Caras: 30 rombos.



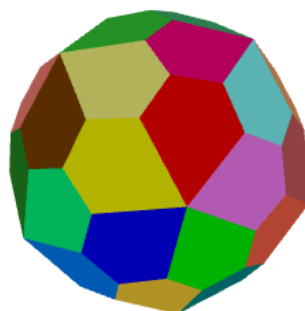
**Romboedro (prisma).** Caras: 6 rombos.

**Poliedros formados solo por pentágonos: “PENTAGONEDROS”.**

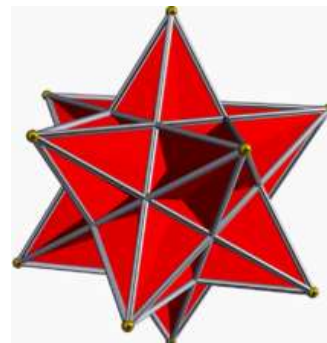
Los sólidos de Kepler tienen todas sus caras iguales.



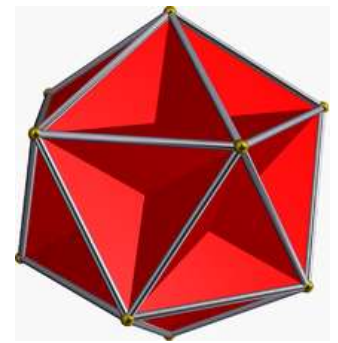
**Icositetraedro pentagonal.** Caras: 24 pentágonos irregulares.



**Hexecontaedro pentagonal.** Caras: 60 pentágonos irregulares.



**Gran icosaedro**



**Gran dodecaedro**



## - POLIEDROS ESTRELLADOS Y CÓNCAVOS.

Aunque ya hemos visto algunos poliedros estrellados (los sólidos de Kepler, algunas pirámides y prismas...), y muchos poliedros cóncavos (para que un polígono se considere estrellado uno de sus requisitos es ser cóncavo), vamos a ver más casos.

**- POLIEDRO ESTRELLADO:** son poliedros cóncavos autointersecados (sus aristas se ‘cortan’). Para entendernos mejor, serían poliedros cóncavos con forma de estrella.

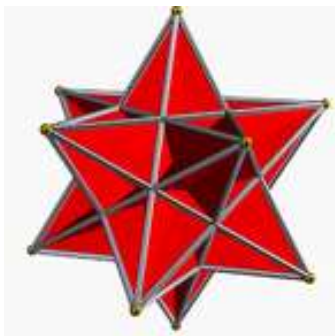
Aunque solo existen 4 poliedros estrellados regulares (los de Kepler-Poinsot), existen infinitos poliedros estrellados no uniformes:

- Infinitos prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides con base en forma de estrella.
- Otros sólidos uniformes que tengan forma parecida a una estrella. En este sentido, se consideran 57 estrellas uniformes no prismáticas, incluidas la 4 estrellas regulares (sólidos de Kepler-Poinsot).

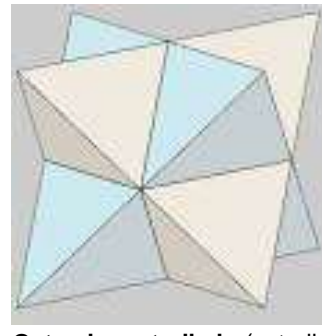
**- POLIEDRO CÓNCAVO:** son poliedros con algún ángulo cóncavo en una de sus caras o con algún ángulo diedro cóncavo (ángulo entre dos caras) cóncavo.



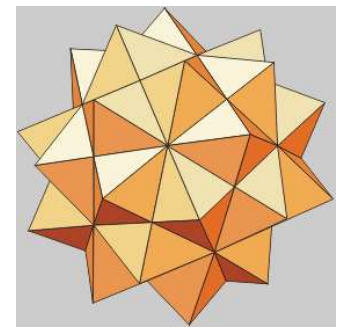
Dodecaedro estelar pequeño



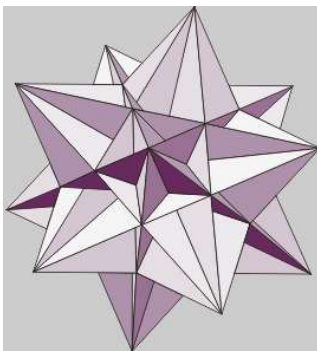
Icosaedro grande



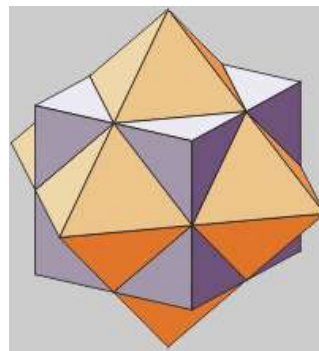
Octaedro estrellado (estrella octángula, por Kepler)



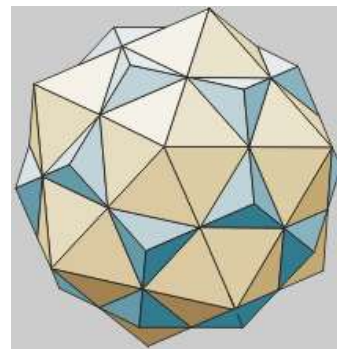
Icosaedro segunda estrella.



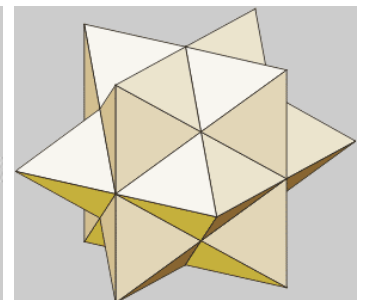
Icosaedro grande



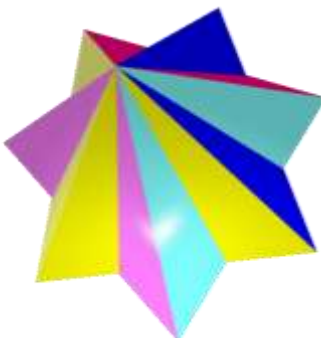
Cuboctaedro



Dodecaedro rómbico



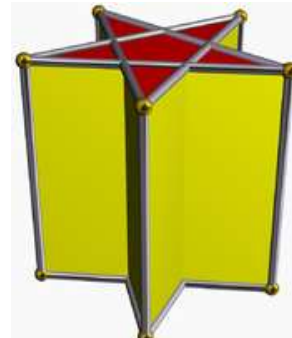
Dodecaedro rómbico estrellado.



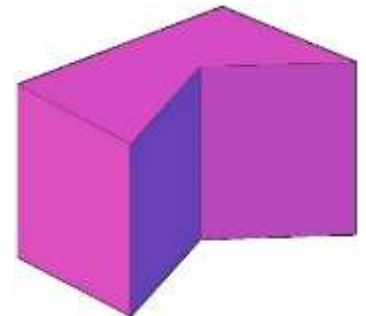
Pirámide heptagrámica



Pirámide pentagrámica



Prisma pentagrámico



Este poliedro (prisma) es cóncavo pero no es estrellado.

\* Los poliedros estrellados con fondo azul, son también **DELTAEDROS**.

# - DELTAEDROS.

Su nombre viene de la letra griega **delta** ( $\Delta$ ), que tiene forma de triángulo equilátero.

Un deltaedro es todo poliedro cuyas caras sean triángulos equiláteros e iguales.

Los deltaedros pueden ser poliedros convexos o cóncavos:

- Existen solo **8 deltaedros convexos** (3 sólidos platónicos y 5 sólidos de Johnson).
- Existen infinitos **deltaedros cóncavos** posibles. Entre ellos, la mayoría de estrellados, y los sólidos de Kepler.
- Sus caras son todas iguales, todas son triángulos equiláteros. Por tanto sus aristas son iguales.
- Sus vértices no son siempre uniformes.
- Sus ángulos diedros no son siempre iguales. (Los ángulos de sus caras miden todos  $60^\circ$ , ya que son triángulos equiláteros)

## DELTAEDROS CONVEXOS

**Tetraedro regular**



4 caras. 6 aristas. 4 vértices.

**Bipirámide triangular**



6 caras. 9 aristas. 5 vértices.

**Octaedro regular**



8 caras. 12 aristas. 6 vértices.

**Bipirámide pentagonal**



10 caras. 15 aristas. 7 vértices.

**Biesfenoide romo**



12 caras. 18 aristas. 8 vértices.

**Prisma triangular triaumentado**



16 caras. 24 aristas. 10 vértices.

**Bipirámide cuadrada giroelongada**



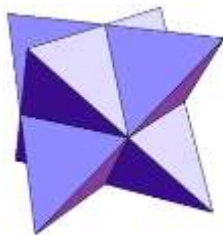
16 caras. 24 aristas. 10 vértices.

**Icosaedro regular**



20 caras. 30 aristas. 12 vértices.

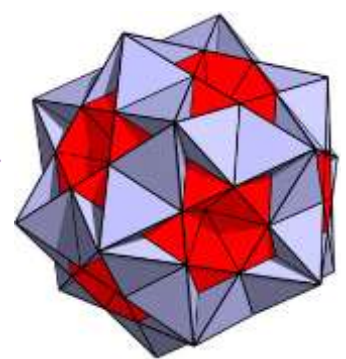
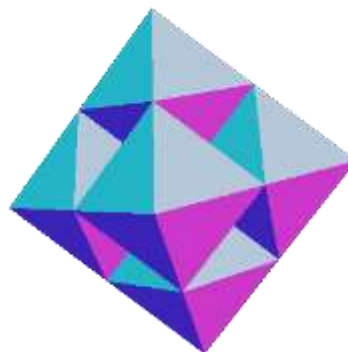
## DELTAEDROS CÓNCAVOS. (Recordar que muchos son estrellados).



Poliedro deltaedro y estrellado. Surge de la unión de 2 tetraedros regulares. Kepler lo llamó **Estrella octángula**. También se puede llamar **octaedro estrellado**.

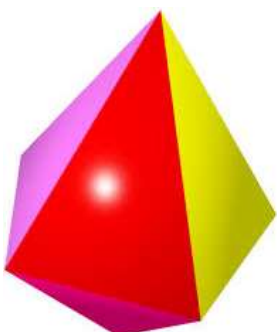


**2ª estelación del dodecaedro** (Gran dodecaedro. S. Kepler-Poinsot). 6 octaedros forman un deltaedro.

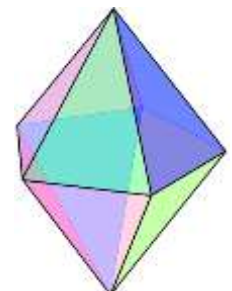


Podemos encontrar casos de deltaedros en los sólidos de Johnson, en los de Catalan, en los de Arquímedes y los de Kepler.

Estos poliedros están formados por triángulos pero no son equiláteros. Por tanto, **NO SON DELTAEDROS.**



**Hexaquisicosaedro** (s. de Catalan)



**Bipirámide pentagonal**

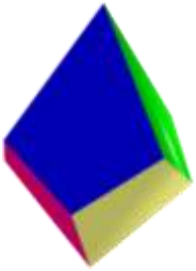
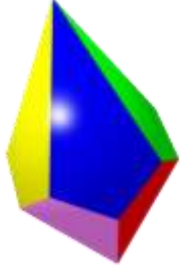
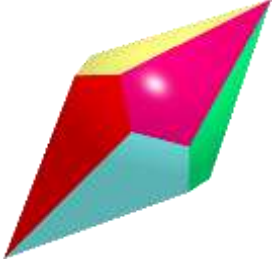

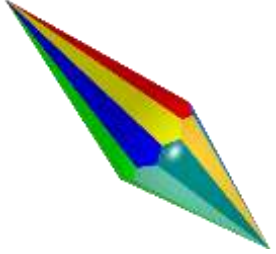
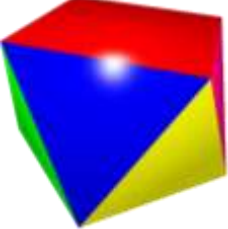



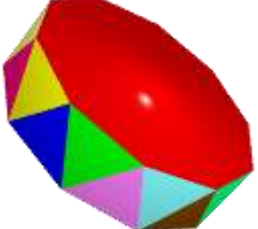
# - TRAPEZOEDROS.

Los trapezoedros son poliedros que están formados solo por trapezoides deltoides. Para que esto se cumpla, deben ordenarse de una forma específica, que les da una apariencia similar a las bipirámides.

Los trapezoedros son los poliedros duales de los antiprismas, y viceversa.

También son conocidos como **deltoedros** o **antibipirámides**.

## Otros casos de poliedros duales: LOS TRAPEZOEDROS.

<p><b>Trapezoedro cuadrangular.</b></p> <p>8 caras, 16 aristas, 10 vértices.</p> <p>Dual: antiprisma cuadrangular.</p> 	<p><b>Trapezoedro pentagonal.</b></p> <p>10 caras, 20 aristas, 12 vértices.</p> <p>Dual: antiprisma pentagonal.</p> 	<p><b>Trapezoedro hexagonal.</b></p> <p>12 caras, 24 aristas, 14 vértices.</p> <p>Dual: antiprisma pentagonal.</p> 	<p><b>Trapezoedro octogonal.</b></p> <p>16 caras, 32 aristas, 18 vértices.</p> <p>Dual: antiprisma octogonal.</p> 	<p><b>Trapezoedro decagonal.</b></p> <p>20 caras, 40 aristas, 22 vértices.</p> <p>Dual: antiprisma decagonal.</p> 
 <p><b>Antiprisma cuadrangular.</b></p> <p>10 caras, 16 aristas, 8 vértices.</p> <p>Dual: trapezoedro cuadrangular.</p>	 <p><b>Antiprisma pentagonal.</b></p> <p>12 caras, 20 aristas, 10 vértices.</p> <p>Dual: trapezoedro pentagonal.</p>	 <p><b>Antiprisma hexagonal.</b></p> <p>14 caras, 24 aristas, 12 vértices.</p> <p>Dual: trapezoedro hexagonal.</p>	 <p><b>Antiprisma octogonal.</b></p> <p>18 caras, 32 aristas, 16 vértices.</p> <p>Dual: trapezoedro octogonal.</p>	 <p><b>Antiprisma decagonal.</b></p> <p>22 caras, 40 aristas, 20 vértices.</p> <p>Dual: trapezoedro decagonal.</p>





Fuente imágenes: <http://www.sacred-geometry.es/?q=es/content/pir%C3%A1mides-y-prismas>

En todos los trapezoedros y antiprismas se pueden calcular sus caras, vértices y aristas de la siguiente forma:

<i>(n = nº lados base)</i>	Nº DE CARAS	Nº DE ARISTAS	Nº DE VÉRTICES	TEOREMA DE EULER: $C - A + V = 2$
<b>TRAPEZOEDROS</b>	$n \times 2$	$n \times 4$	$n \times 2 + 2$	<b>Caras</b> = Aristas – Vértices + 2 <b>Aristas</b> = caras + vértices – 2 <b>Vértices</b> = aristas – caras + 2
<b>ANTIPRISMAS</b>	$n \times 2 + 2$	$n \times 4$	$n \times 2$	

**OTROS TRAPEZOEDROS.** Entre los sólidos de Catalan, existen 2 trapezoedros o deltoedros.

**TRAPEZOEDROS DISMINUIDOS.** Son trapezoedros cuya “parte inferior” es menor. Son duales consigo mismos.

 <p><b>Icositetaedro deltoidal.</b> 24 trapezoides deltoides.</p>	 <p><b>Hexecontaedro deltoidal.</b> 60 trapezoides deltoides.</p>	 <p>De base 4.</p>	 <p>De base 5.</p>	 <p>De base 6.</p>	 <p>De base 7.</p>
--	--	---	--	---	---

## - ESFERAS Y CÚPULAS GEODÉSICAS.

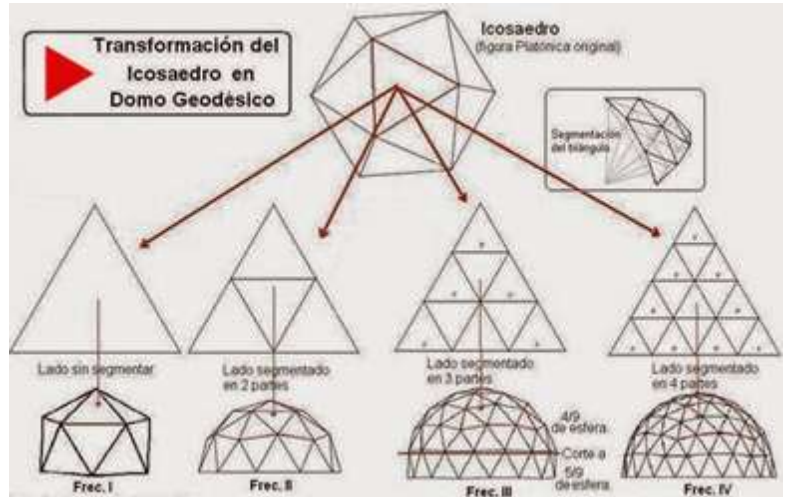
Una esfera geodésica es un poliedro que tiene numerosas caras y tiene forma similar a una esfera. Se considera que una esfera geodésica se genera a partir de un poliedro regular (un sólido platónico), principalmente del icosaedro e incluso del dodecaedro regular. Una semiesfera geodésica se denomina cúpula o domo.

Las esferas geodésicas se construyen con triángulos equiláteros, que se pueden agrupar formando pentágonos y hexágonos regulares. También se podrían aceptar esferas geodésicas formadas con otros polígonos.

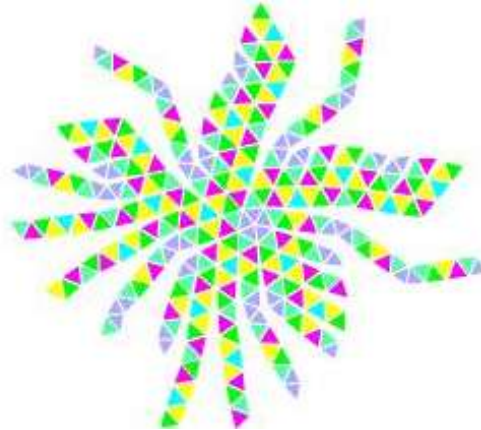
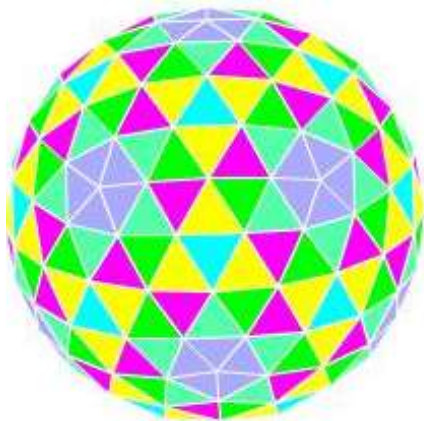
### Frecuencia.

Tomando como referencia el icosaedro regular, se pueden ir creando sucesivas esferas geodésicas, con más o menos caras. Estas deben ser triángulos equiláteros, ya que ‘evolucionan’ a partir de un icosaedro.

- **Frecuencia 1:** es el icosaedro regular. Estaría formada por 20 triángulos equiláteros.
- **Frecuencia 2:** se dividen en 2 los lados de los triángulos del icosaedro. Obtenemos 4 triángulos por cada 1 del icosaedro, en total:  $4 \times 20 = 80$  caras.
- **Frecuencia 3:** se dividen en 3 los lados de los triángulos del icosaedro. Obtenemos 9 triángulos por cada 1 del icosaedro, en total:  $9 \times 20 = 180$  caras.
- **Frecuencia 4:** se dividen en 4 los lados de los triángulos del icosaedro. Obtenemos 16 triángulos por cada 1 del icosaedro, en total:  $16 \times 20 = 320$  caras.
- **Frecuencia 5:** se dividen en 5 los lados de los triángulos del icosaedro. Obtenemos 25 triángulos por cada 1 del icosaedro, en total:  $25 \times 20 = 500$  caras.
- Así sucesivamente.



### EJEMPLOS.

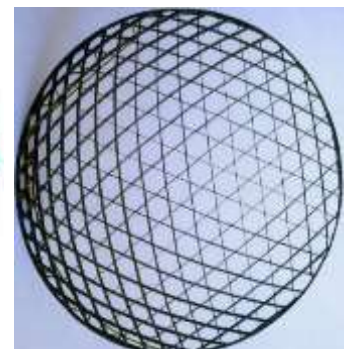


Una esfera geodésica, formada por triángulos, aunque también se pueden agrupar formando pentágonos y hexágonos regulares, ¿los ves? Incluimos su desarrollo.

Un edificio con forma de esfera geodésica.



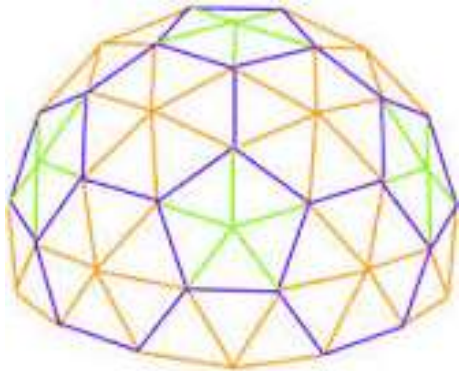
En la imagen vemos como un icosaedro puede evolucionar a una esfera geodésica de frecuencia 2 y posteriormente a otra de frecuencia 3.



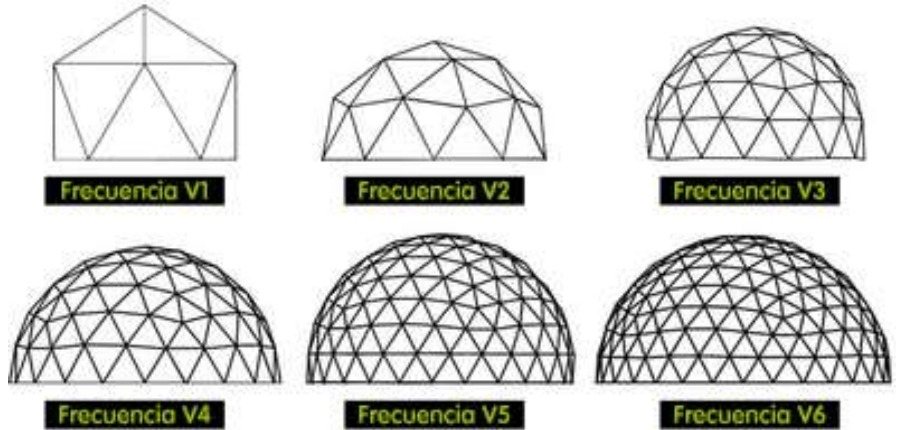
Aquí, no ha evolucionado de un icosaedro, aunque su forma es similar

# CÚPULAS GEODÉSICAS [semiesferas geodésicas o domos].

Se puede considerar una cúpula geodésica a una semiesfera geodésica. A veces, una cúpula puede ser mayor o menor que una semiesfera geodésica. También se pueden llamar **semiesfera geodésica o domo**.



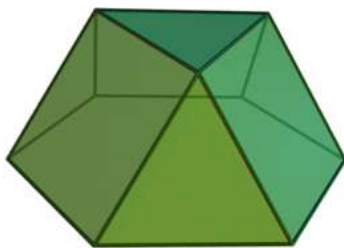
En esta **semiesfera geodésica** podemos apreciar mejor como sus triángulos equiláteros pueden aruparse en pentágonos y hexágonos regulares.



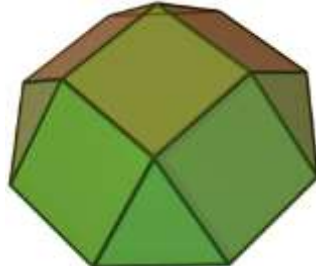
Evolución y clasificación de cúpulas o semiesferas geodésicas.



Varios **SÓLIDOS DE JOHNSON** utilizan el término de ‘cúpula’ en su nombre. En realidad no cumplen la definición de cúpula o domo, pero reciben su nombre por su parecido en su construcción. Todas sus caras son polígonos regulares.



**Cúpula triangular:** 4 triángulos, 3 cuadrados y 1 hexágono.



**Cúpula cuadrada:** 4 triángulos, 5 cuadrados y 1 octógono.



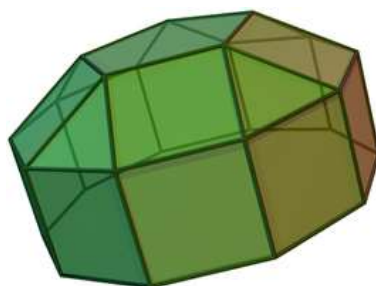
**Cúpula pentagonal:** 5 triang., 5 cuadr., 1 octógono y 1 decágono.



**Cúpula triangular elongada:** 4 triáng., 9 cuadrados y 1 hexágono.



**Cúpula cuadrada elongada:** 4 triáng., 13 cuadrad. y 1 octógono.



**Cúpula pentagonal elongada:** 5 triáng., 15 cuadrad., 1 pentágono y 1 decágono.

Más casos: **Cúpula triangular giroelongada**, **Cúpula cuadrada giroelongada** y **Cúpula pentagonal giroelongada**.

También encontramos casos en los que se utiliza cúpula pero con otras denominaciones: **ortobicúpula** (y **ortobicúpula elongada**), **girobicúpula** (y **elongada**), **ortocúpularrotonda** (y **elongada**), **girocúpularrotonda** (y **elongada**), **bicúpula giroelongada** y **cúpularrotonda giroelongada**.

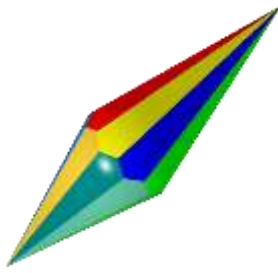
## - OTROS POLIEDROS.

Vamos a mostrar a continuación una serie de imágenes de poliedros muy variados. No entraremos en profundidades teóricas, sino que nos centraremos en disfrutar de su belleza, originalidad y expresividad. Hay infinitos poliedros.

**POLIEDROS FORMADOS CON DELTOIDES.** No son TRAPEZOEDROS o DELTOEDROS, porque aunque están formados por deltoides (un tipo de trapecioide), no son los duales de ningún antiprisma.

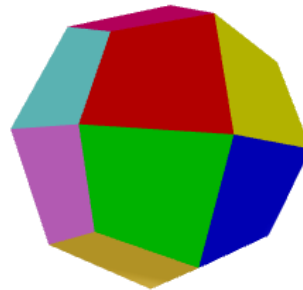


Bipirámide decagonal

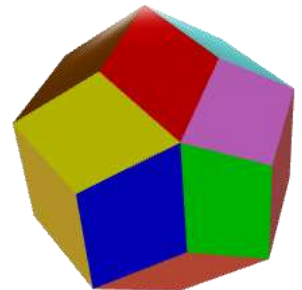


Trapezoedro decagonal

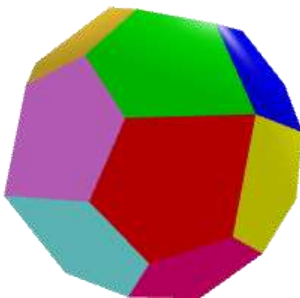
Comparar la diferencia entre una bipirámide y un trapezoedro.



Icositetraedro deltoidal



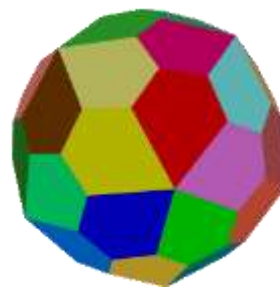
Triacontaedro rómbico



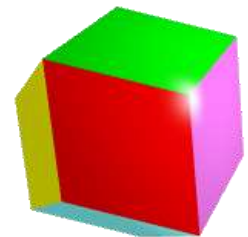
Icositetraedro pentagonal



Hexecontaedro deltoidal



Hexecontaedro pentagonal

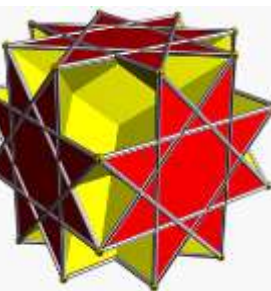
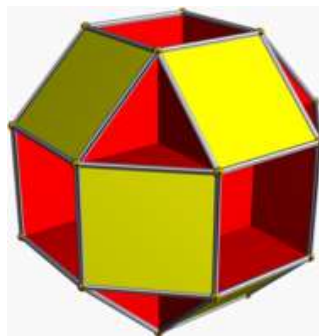


Dodecaedro rómbico. Aunque se parecen, sus caras laterales no son trapecoides, sino rombos.

Estos poliedros son cóncavos, aunque no cumplen todas las características de un poliedro estrellado.



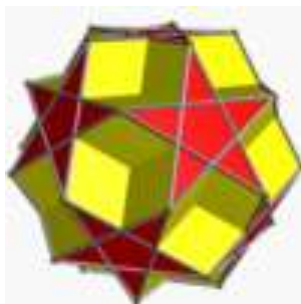
Gran rombihexacron



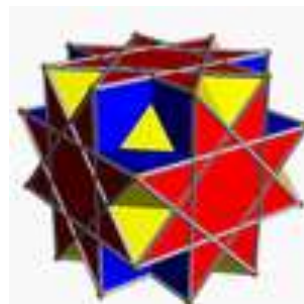
Gran rombihexaedro



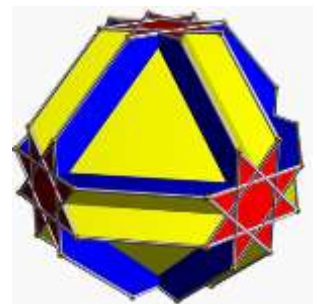
Gran icosidodecaedro



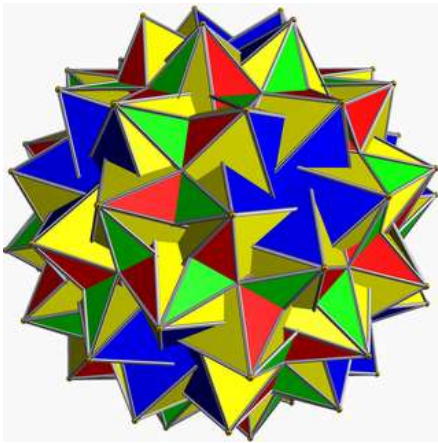
Dodecadodecaedro



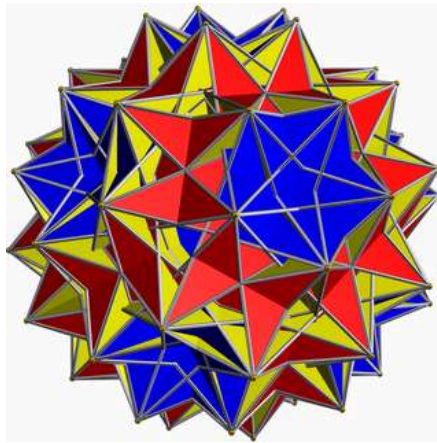
Gran cubicuboctaedro



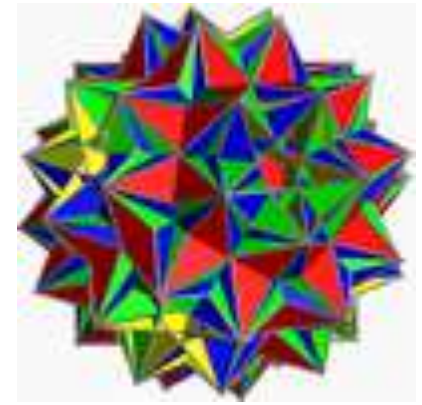
Cuboctaedro cubitruncado



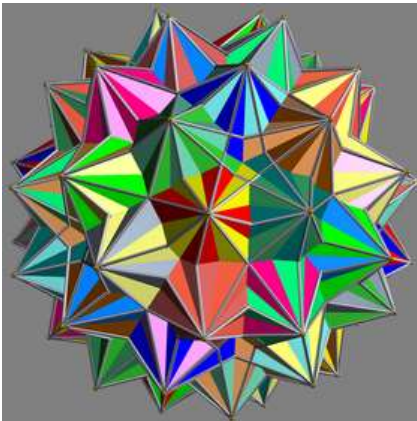
“Gran dodeicosidodecaedro romo”



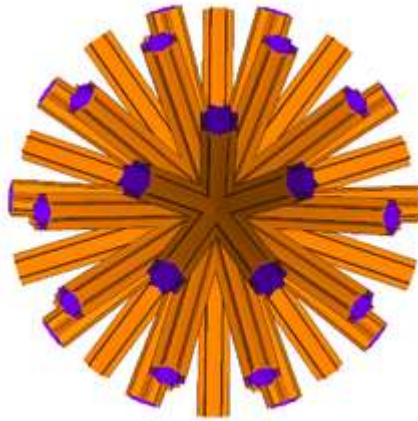
“Gran dirrombicosidodecaedro”



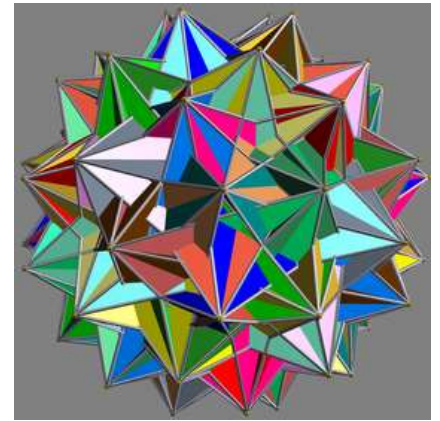
Gran dirrombicosidodecaedro dirromo



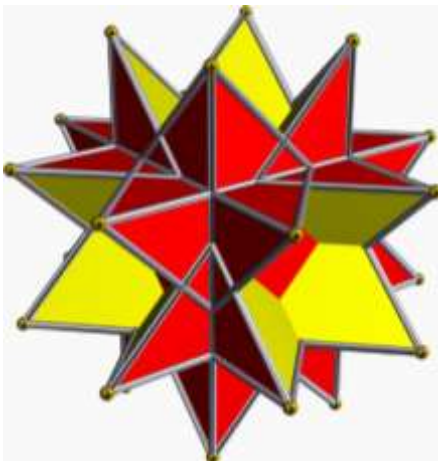
“Compuesto de 20 octaedros”



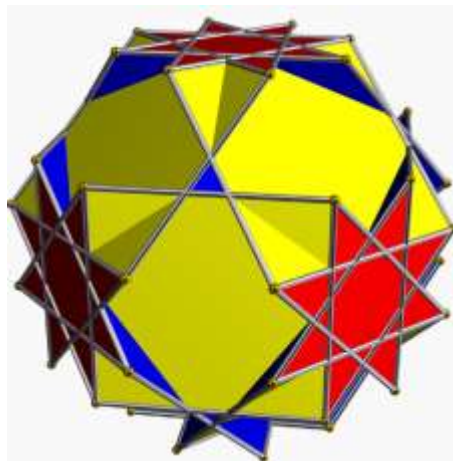
Gran dirrombidodecacron diromo



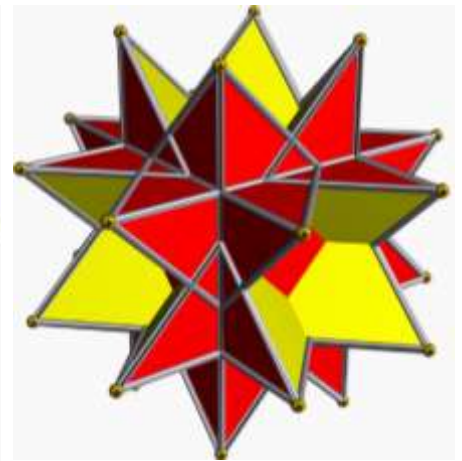
“Compuesto de 20 tetrahemihexaedros”



Hexaedro truncado estrellado

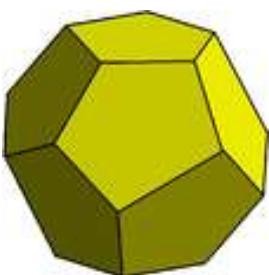


Gran cuboctaedro truncado

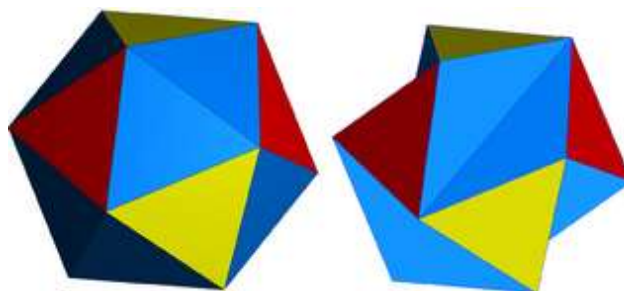


Gran hexaedro estrellado

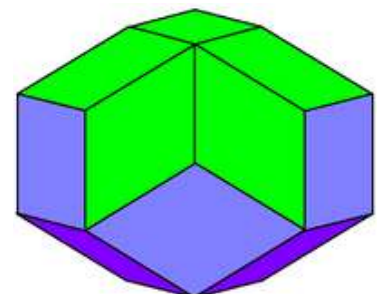
Más casos de poliedros.



**PIRITOHEDRO.** Similar a un dodecaedro regular. Los pentágonos son irregulares.



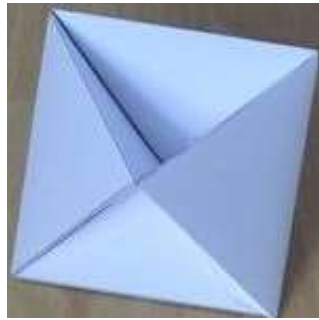
2 casos de icosaedro: regular e icosaedro de Jessen.



Otra forma de icosaedro (“rómico”).

MÁS POLIEDROS  
CONSTRUIDOS EN PAPEL.

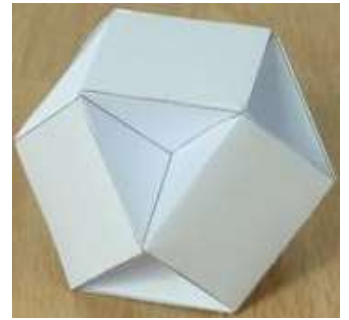
Fuente:  
[http://www.korthalsaltes.com/  
es/cuadros.php?type=ou](http://www.korthalsaltes.com/es/cuadros.php?type=ou)  
y  
[http://www.korthalsaltes.com/  
es/cuadros.php?type=op](http://www.korthalsaltes.com/es/cuadros.php?type=op)



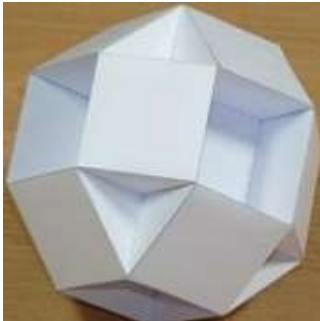
**Tetrahemihexaedro**  
7 caras, 12 aristas y 6 vértices.



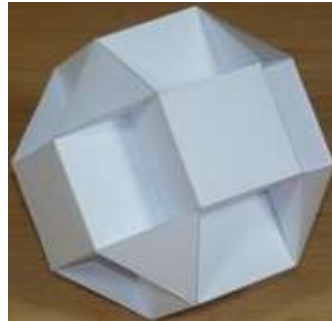
**Octahemioctaedro**  
12 caras, 24 aristas y 12 vértices.



**Cubohemioctaedro**  
10 caras, 24 aristas y 12 vértices.



**Pequeño rombihexaedro**  
18 caras, 48 aristas y 24 vértices.



**Pequeño cubicuboctaedro**  
20 caras, 48 aristas y 24 vértices.



**Pequeño dodecicosidodecaedro**  
44 caras, 120 aristas y 60 vértices



**Pequeño dodecahemidodecaedro**  
18 caras, 60 aristas y 30 vértices.



**Pequeño ditrigonal icosidodecaedro**  
32 caras, 60 aristas y 20 vértices.



**Pequeño icosicosidodecaedro romo**  
112 caras, 180 aristas y 60 vértices



**Pequeño icosihemidodecaedro**  
26 caras, 60 aristas y 30 vértices.



**Dodecadodecaedro**  
24 caras, 60 aristas y 30 vértices.



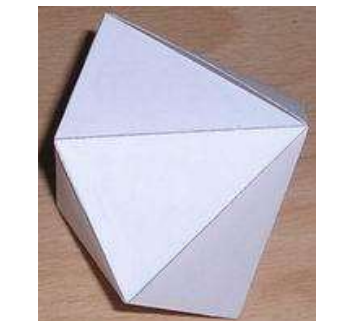
**Gran rombihexacron**  
24 caras, 48 aristas y 18 vértices.



**Pequeño triakisoctaedro**  
24 caras, 36 aristas y 14 vértices.



**Pequeño triambico icosaedro**  
20 caras, 60 aristas y 32 vértices.



**Dodecaedro isósceles**  
12 caras, 18 aristas y 8 vértices.



**Hexakaidecaedro**  
16 caras, 24 aristas y 10 vértices.



**Isósceles icosaedro**  
20 caras, 30 aristas y 12 vértices.



**Icositetraedro**  
24 caras, 36 aristas y 14 vértices.



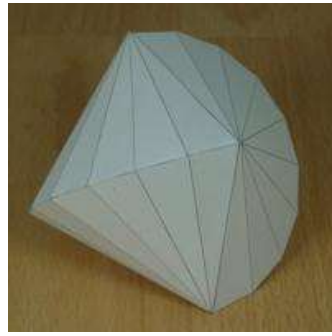
**Icosioctaedro**  
28 caras, 42 aristas y 16 vértices.





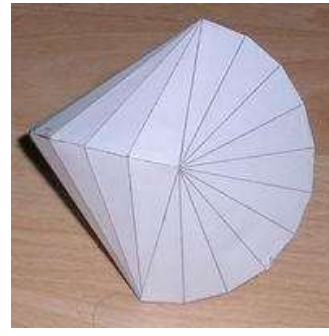
**Tricontidiedro**

32 caras, 48 aristas y 18 vértices.



**Tricontihexaedro**

36 caras, 54 aristas y 20 vértices.



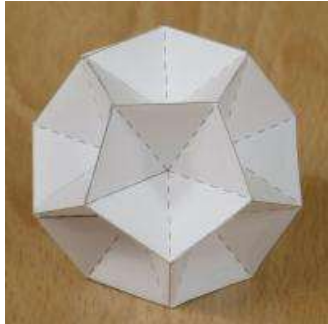
**Tetracontaedro**

40 caras, 60 aristas y 22 vértices.



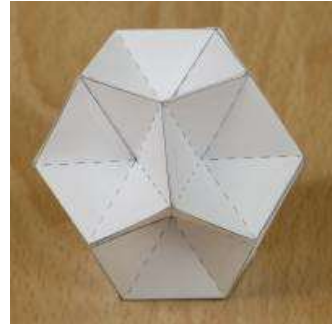
**Hecatoedro**

100 caras, 150 aristas y 52 vértices.



**Tercera estelación del icosaedro**

20 caras.



**Tercera estelación del icosaedro**

20 caras.



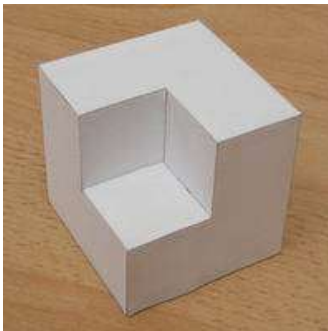
**Séptimo stellation del icosaedro**

20 caras.



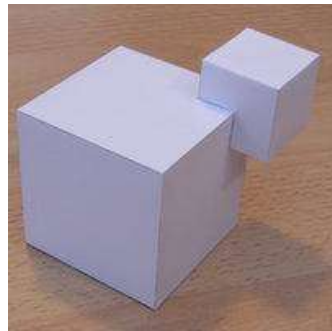
**Noveno stellation del icosaedro**

20 caras.



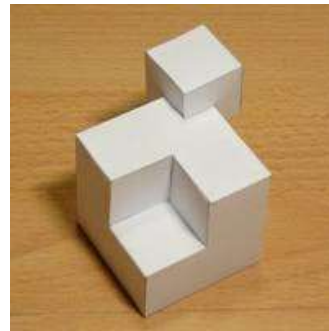
**Formas cubicas 1**

9 caras, 21 aristas y 14 vértices.



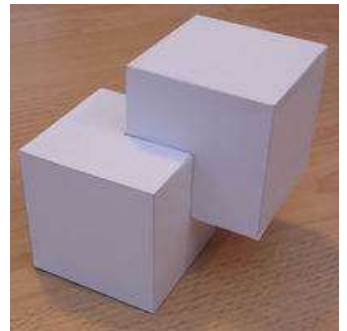
**Formas cubicas 2**

12 caras, 30 aristas y 20 vértices.



**Formas cubicas 3**

15 caras, 34 aristas y 21 vértices.



**Formas cubicas 5**

12 caras, 30 aristas y 20 vértices.



**Medio icosaedro truncado**



**Medio dodecaedro truncado**



**Medio cuboctaedro truncado**



**Medio icosidodecaedro truncado**



**Antiprisma dipiramidal decagonal (tetracontaedro)**

40 caras, 60 aristas y 22 vértices.



**Sólido pentagonal-pentagrámico**

17 caras, 30 aristas y 15 vértices.



**Sólido pentagonal-decagonal**

17 caras, 30 aristas y 15 vértices.



**Esfericón tallado híbrido**

**AUTORES:** Este trabajo ha sido creado a partir del trabajo de investigación y creación en el aula con el alumnado de 5ºA del CEIP Manuel Siurot, en el tercer trimestre del curso 2015/1016, siendo adaptado, organizado y ampliado por el tutor: **Ángel L. Rodríguez Tamayo.**

**Nota:** Próximamente se incluirá la parte relativa a los cuerpos redondos, que ha sido desarrollada pero falta terminar de redactarla.