# (8) Obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu

Kristýna Kuncová

Matematika B3

# Def: Obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu

**Příklad**

1. $y'' = -y$
2. $y'' = 6x$

**Definice**

Nechť $M \subset \mathbb{R}^2, f : M \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných. Pak rovnici

$$y'' = f(x, y, y')$$

nazýváme *obyčejnou diferenciální rovnicí 2. řádu*.

# Def: Řešení ODR 2. řádu

## Otázka

Určete, které funkce jsou řešením ODR $y'' = 2y' - 2y$. (Pro všechny berte $x \in \mathbb{R}$.)

- A $\sin x$
- B $\cos x$
- C $e^x \sin x$
- D $e^x \cos x$
- E $e^x$

C, D

## Definice

*Řešením* diferenciální rovnice $y'' = f(x, y, y')$ rozumíme dvojici $(y, I)$, kde $I$ je otevřený interval a $y$ je funkce definovaná alespoň na $I$, $y \in C^2(I)$, splňující

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \qquad \forall x \in I.$$

# Def: Počáteční podmínka

## Otázka

Najděte řešení ODR

1. $y'' = -y,\ y(0) = 0, y'(0) = 1$
2. $y'' = -y,\ y(0) = 2, y'(0) = -3$
3. $y'' = -y,\ y(0) = 0, y'(\pi) = 0$
4. $y'' = -y,\ y(0) = 0, y'(\frac{\pi}{2}) = 0$

$\sin x$; $-3\sin x + 2\cos x$; $0$; $c \sin x$; $c, x \in \mathbb{R}$

## Definice

ODR s *počátečními podmínkami* rozumíme

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$$

kde $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

*Řešením* pak rozumíme dvojici $(y, I)$, kde $I$ je otevřený interval a $y$ je funkce definovaná alespoň na $I$, $y \in C^2(I)$, $x_0 \in I$, splňující

$$\begin{aligned} y''(x) &= f(x, y(x), y'(x)), \qquad \forall x \in I, \\ y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= y_1 \end{aligned}$$

# Def: Lineární ODR 2. řádu

## Definice

Rovnici

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

kde $a_1, a_0, b : (c,d) \to \mathbb{R}$ jsou spojité a $b \neq 0$ v alespoň 1 bodě, nazýváme *nehomogenní lineární ODR 2. řádu*.
Rovnici

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

kde $a_1, a_0 : (c,d) \to \mathbb{R}$ jsou spojité, nazýváme *homogenní lineární ODR 2. řádu*.

## Otázka

Určete, které rovnice jsou lineární 2. řádu (resp. na lineární převoditelné):

- A $y'' + e^x y' + y = \cos x$
- B $x^2 y'' + \frac{y'}{x} = 0$
- C $5y'' + \sqrt{y} = xy$
- D $yy'' + yy' = y^2$
- E $\ln(x^2) - y' = xy^2$

A, B, D

# Lemma o linearitě

## Lemma (O linearitě)

Nechť $y_1$ a $y_2$ jsou řešení HLDR

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Pak $y_1 + y_2$ a $ky_1$, kde $k \in \mathbb{R}$, jsou také řešením této rovnice.

## Důkaz

Máme: $y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 = 0.$
Pak

$$(ky_1)'' + a_1(x)(ky_1)' + a_0(x)(ky_1) = k(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1) = k0.$$

Víme: $y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 = 0$ a $y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2 = 0.$
Pak

$$\begin{aligned}(y_1 + y_2)'' + a_1(x)(y_1 + y_2)' + a_0(x)(y_1 + y_2) &= \\ (y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1) + (y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2)& \\ = 0 + 0.&\end{aligned}$$

# Lineárně nezávislé funkce

## Definice

Řekneme, že funkce $y_1, y_2, \ldots, y_r : (c, d) \to \mathbb{R}$ jsou *lineárně závislé na* $(c, d)$, jestliže existují konstanty $c_1, \ldots, c_r$, kde alespoň 1 z nich je nenulová, tak že

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_r y_r(x) = 0, \qquad \forall x \in (c, d).$$

V opačném případě řekneme, že jsou *lineárně nezávislé na* $(c, d)$.

## Otázka (Vizte cvičení)

Jsou funkce $f$, $g$ a $h$ lineárně závislé nebo nezávislé?

- $h(x) = 4 + 3x, f(x) = (1 + x)^2, g(x) = 2 - x - 2x^2$
- $h(x) = \sin(x + 2), f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$
- $h(x) = x^2, f(x) = (1 - x)^2, g(x) = (1 + x)^2$

LZ, LZ, LN

# Def: wronskián

## Definice

Nechť $y_1, \dots, y_r \in C^{r-1}(c,d)$. Determinant

$$W[y_1, \dots, y_r] = \left| \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_r \\ y_1' & y_2' & & y_r' \\ \vdots & & \ddots & \\ y_1^{(r-1)} & \dots & & y_r^{(r-1)} \end{pmatrix} \right|$$

nazveme *Wronského determinant - wronskián*.

## Otázka

Spočtěte wronskián funkcí $y_1 = x$ a $y_2 = x^2$.
$x^2$

# Wronskián a lineární nezávislost

**Lemma**

Je-li $W[y_1, \dots, y_r] \neq 0$ alespoň pro jedno $x \in (c, d)$, pak jsou funkce $y_1, y_2, \dots, y_r : (c, d) \to \mathbb{R}$ lineárně nezávislé na $(c, d)$.

**Otázka**

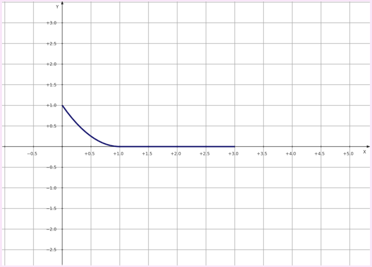
Určete, zda jsou funkce $y_1 = \sin x$ a $y_2 = \cos x$ lineárně nezávislé.
Ano.

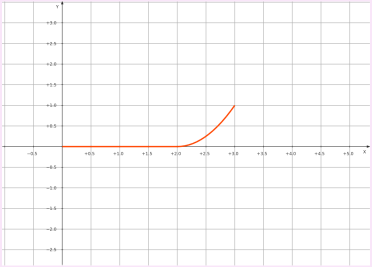
# Protipříklad

## Příklad

Obrácené tvrzení neplatí.

$$f_1(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \in (0,1), \\ 0 & x \in (1,3). \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0 & x \in (0,2), \\ (x-2)^2 & x \in (2,3). \end{cases}$$





Pak $W[f_1, f_2] = 0$ pro všechna $x \in (0,3)$, přesto tyto funkce jsou lineárně nezávislé.

# Fundamentální systém řešení FSŘ

## Věta

Množina všech řešení HLDR

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

je lineárním podprostorem prostoru $C^2(c,d)$ a je dimenze 2.

## Příklad

$$y'' = -y, \qquad y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

$$y'' = y, \qquad y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0, \qquad y = c_1 x + c_2 x^2$$

## Definice

Bázi prostoru řešení HLDR budeme nazývat *fundamentální systém řešení FSŘ*.
(Př. $\{x, x^2\}$, $\{\sin x, \cos x\}$.)

# Def: Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

## Definice

Diferenciální rovnici

$$k_2 y'' + k_1 y' + k_0 y = b(x), \qquad k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R},$$

kde $b : (c, d) \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, nazveme *lineární diferenciální rovnicí 2. řádu s konstantními koeficienty*. Rovnici

$$k_2 y'' + k_1 y' + k_0 y = 0, \qquad k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R},$$

nazveme *homogenní lineární diferenciální rovnicí 2. řádu s konstantními koeficienty*.
Rovnici

$$k_2 \lambda^2 + k_1 \lambda + k_0 = 0$$

nazveme *charakteristickou rovnicí* příslušné lineární diferenciální rovnice.

# Def: Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty II

**Příklad**

$$y'' - 3y' + 2y = x^2$$

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

## Věta

Pro HLDR 2. řádu s konstantními koeficienty

$$k_2y'' + k_1y' + k_0y = 0,$$

$k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ platí: Má-li charakteristická rovnice

1. 2 různé reálné kořeny $\lambda_1$, $\lambda_2$, pak

$$y_H = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

2. 1 reálný kořen $\lambda_1$, pak

$$y_H = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}$$

3. 2 imaginární komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = a \pm ib$, pak

$$y_H = c_1 e^{ax}\cos(bx) + c_2 e^{ax}\sin(bx),$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

# Věta: Řešení HLDR 2. řádu s konstantními koeficienty II

**Příklad**

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \qquad y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

$$y'' + 2y' + y = 0 \qquad y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

$$y'' + 4y' + 13y = 0, \qquad y = c_1 e^{-2x} \cos(3x) + c_2 e^{-2x} \sin(3x)$$

# Věta: Sčítání pravé strany

## Věta

Nechť $y_1$ je řešením rovnice

$$k_2 y'' + k_1 y' + k_0 y = b_1,$$

a $y_2$ je řešením rovnice

$$k_2 y'' + k_1 y' + k_0 y = b_2,$$

kde $k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $b_1, b_2 : (c, d) \to \mathbb{R}$ je spojitá. Pak funkce $y_1 + y_2$ je řešením rovnice

$$k_2 y'' + k_1 y' + k_0 y = b_1 + b_2.$$

## Důkaz

Dosadíme

$$\begin{aligned} k_2(y_1 + y_2)'' + k_1(y_1 + y_2)' + k_0(y_1 + y_2) \\ &= k_2 y_1'' + k_1 y_1' + k_0 y_1 + k_2 y_2'' + k_1 y_2' + k_0 y_2 \\ &= b_1 + b_2. \end{aligned}$$

# Věta: Sčítání pravé strany II

## Příklad

$$y'' + y = x + \sin x$$

Funkce $y_H = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ řeší HLDR $y'' + y = 0$
Funkce $y_{P1} = x$ řeší NLDR $y'' + y = x$
Funkce $y_{P2} = -\frac{1}{2} x \cos x$ řeší NLDR $y'' + y = \sin x$
Funkce

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x - \frac{1}{2} x \cos x$$

řeší původní rovnici

$$y'' + y = x + \sin x$$