数理解析研究所講究録 1214 巻 2001 年 37-45

頂点作用素代数と群論に関係した幾つかの問題

宮本雅彦

２０００年１２月京都数理解析研究所にて

1　序文

本講演の目的は新しい結果の紹介ではなく、有限群及びその表現論の研究者に、頂点作用素代数の群論（有限群論）への応用を考えてもらうことであり、その為に必要な幾つかの手法と結果を紹介することです。頂点作用素代数と有限群との関係としては、ムーンシャイン頂点作用素代数の自己同型群がモンスター単純群であるように、頂点作用素代数の自己同型群を考えるのが一番自然であり、この点に関しては改めてここで強調する必要もないと思います。また、適当な頂点作用素代数 V の n 個のテンソル積 $V^{\otimes n}$ を考えると、自己同型群として自然に n 次対称群 S_n が作用しており、そういう意味で、任意の有限群を自己同型群（部分群）としてもつ頂点作用素代数は存在します。この場合には V の中心電荷が c なら $V^{\otimes n}$ の中心電荷は nc であり、$c>0$ なら一般に大きくなってしまいます。では、それ以外に頂点作用素代数と有限群を結びつけ、お互いを理解する為に利用できないだろうか？　また、頂点作用素代数の中心電荷を変えずに、頂点作用素代数を大きくして、適切な自己同型群を持つものを構成する方法はないだろうか？という事を考えてほしいのです。私自身の最近の興味は、モジュラー群 $SL(2,\mathbb{Z})$ や $SL(2,\mathbb{Z})^{\times 48}$ の有限指数部分群などの無限群の頂点作用素代数（のトレイス関数全体）への作用であり、これらの研究も群と頂点作用素代数の関係の大きなテーマの一つだと思います。講演の準備当初は、既約加群のトレイス関数の固定部分群の指数が有限ではないかといった数理物理から出てきている予想や、トレイス関数のなす空間へのモジュラー群への作用がユニタリ変換であるための条件など、無限群を含めた群論に関係した問題をお話しする予定でいたのですが、ここでは本来の有限群とその表現に絞って考察することにしたいと思います。例えば、有限群を頂点作用素代数の外（自己同型）ではなく、内部に持ち込む事が出来ないだろうかという問いに対して考察して見ようというのが本講演の目的です。これに関係しては、つくば市で開かれた第１７回代数的組み合わせ論研究集会において通常の色々な結合代数が頂点作用素代数のなかに現れる話を紹介しておりますので、その報告集も参考にしてほしいと思います。

2 リー代数の頂点作用素代数

リー代数と群との関係は非常に深いと思います。例えば、群環 $\mathbb{C}G$ (それよりは $I = \{\sum \lambda_g g \in \mathbb{C}G | \sum_{g \in G} \lambda_g = 0\}$) はそれ自身 積 $[a, b] = ab - bc$ によってリー代数であり、また、p-群 P に対して $P = P_0 > P_1 > \ldots > P_m = 1$ を $[P_i, P_{i+1}] \subseteq P_{i+2}$ を満たすような正規部分群の列とすると、$\hat{P} = \oplus_{i=0}^{m-1}(P_i/P_{i+1})$ は積

$$[a + P_i, b + P_i] = a^{-1}b^{-1}ab + P_{i+1}$$

によってリー代数となっています。また、G の忠実な表現 $G \subseteq GL(V)$ があれば、$\mathrm{End}(V)$ はリー代数の構造を持っています。

まず、リー代数に関係した頂点作用素代数を紹介しましょう。これは頂点作用素代数としてはリー代数そのものと言って良いものなので、考察しやすい例となっています。また、指標にモジュラー形式が出てきたりして、色々利用価値も高いと思われるので覚えておいてほしい頂点作用素代数の一つです。

一般には $\mathcal{G}$-不変な対称内積 $< | >$ を持つリー代数 $\mathcal{G}$ に対して頂点作用素代数 V でウエイト 1 の空間 V_1 が $\mathcal{G}$ と同型なリー代数となるものが定義できることが B. H. Lian によって示されていますが、数学的に最初に証明したのは Frenkel-Zhu です。

$\mathcal{G}$ を対称不変内積 $< | >$ を持つリー代数とし、そのアフィンリー代数

$$\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{G}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}C$$

を、リー代数構造

$$\begin{aligned} &[at^n, bt^m] = [a, b]t^{n+m} + n < a|b > C \\ &[C, \hat{\mathcal{G}}] = 0 \end{aligned}$$

によって定義します。このリー代数は自然に次数 $\deg at^{-m} = m$, $\deg C = 0$ と 3 角分割

$$\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{G}[t]t \oplus (\mathcal{G} \oplus \mathbb{C}C) \oplus \mathcal{G}[t^{-1}]t^{-1}$$

を持っており、この 3 角分割 $\hat{\mathcal{G}} = \hat{\mathcal{G}}^+ \oplus \hat{\mathcal{G}}^0 \oplus \hat{\mathcal{G}}^-$ を利用して $\hat{\mathcal{G}}$ の最高ウエイト加群 (ヴァーマ加群) を次のようにして構成します。

まず、W を $\mathcal{G}$-加群とします。C は適当なスカラー c 倍として作用させると定義し (レベル c と呼ぶ)、しかも、$\hat{\mathcal{G}}^+$ は W に 0 として作用を定義すると、W は $\hat{\mathcal{G}}^0 \oplus \hat{\mathcal{G}}^+$-加群とみることができます。この W を $\hat{\mathcal{G}}$-加群にまで誘導します。即ち、誘導加群

$$U_W = Ind^{\hat{\mathcal{G}}}(W) = \hat{\mathcal{G}} \otimes_{\hat{\mathcal{G}}^0 \oplus \hat{\mathcal{G}}^+} W$$

を構成します。もう少し詳しく構造を説明すると、W の基底 $\{w_1, \ldots, w_n\}$ と $\mathcal{G}$ の基底 $\{x_1, \ldots, x_m\}$ を使って、

$$\{x_{n_1}(-i_1) \ldots x_{n_t}(-i_t)w_j | n_j \in \{1, \ldots, m\}, \quad j = 1, \ldots, n, \quad i_1 \geq \ldots \geq i_t > 0\}$$

が U_W の基底となります。この U_W を見やすくするために、次数を次のように定義し、次数空間 $U_W = \oplus_{n=0}^{\infty}(U_W)_{r+n}$ に分解します。まず、 W の元は色々な関係から後で決まるので、$\deg w_j = r$ とすると、基底の元の次数を

$$\deg x_{n_1}(-i_1)...x_{n_t}(-i_t)w_j = r + i_1 + ... + i_t$$

で定義する。W の元の次数が決まると自動的に U_W の他の元の次数が決まります。そうすると、各斉次空間 $(U_W)_{r+n}$ は有限次元であり、指標 $\sum \dim(U_W)_{r+n}q^n$ には分配関数 $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^i)}$ の $\dim W$ 乗したものが出てきます。

特に、$\mathcal{G}$ の自明な表現 $W = \mathbb{C}\mathbf{1}$ （$\mathcal{G}$ はすべて 0 として作用しています）に対して構成した空間（フォック空間） $V = U_{\mathbb{C}}$ は、定義から $\widehat{\mathcal{G}}^-$ の不変包絡環 $U(\widehat{\mathcal{G}}^-)$ と次数空間として同型です。この無限次元ベクトル空間の中に頂点作用素代数の構造が入り、他の U_W はその頂点作用素代数の加群となることを紹介します。

V 上の作用のうち $a \in \mathcal{G}$ に対して、

$$a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)z^{-n-1}$$

と置きます。ここで、$a(n)$ は $at^n \in \hat{\mathcal{G}}$ の V への左からの積による作用を表します。では、頂点作用素を定義していきましょう。

まず、真空元 $\mathbf{1} \in V_0$ に対しては

$$Y(\mathbf{1}, z) = 1_V$$

とおき、ウエイト 1 の元 $a(-1)\mathbf{1} \in V_1$ に対しては

$$Y(a(-1)\mathbf{1}, z) = a(z)$$

とおきます。頂点作用素の定義は常に線形に拡張すると思ってください。これによりウエイト 1 以下の元に対してはすべて頂点作用素が定義されました。リー代数頂点作用素代数の利点は、このウエイト 1 の元の作用だけでも分かるとほぼすべての構造が分かるということです。それで、頂点作用素もある意味でこれしか使わないのですが、一応定義をのべておきましょう。V の基底は分かっているので、帰納的に正規積を使って

$$\begin{aligned}&Y(a(n)v, z) = a(z) \cdot_n Y(v, z)\\&= \mathrm{Res}_w\{(z-w)^n a(w)Y(v, z) - (-w+z)^n Y(v, z)a(w)\end{aligned}$$

で定義します。これが定義可能であることなどは確認されております。

定理 2.1 上のように、 $Y(-, z)$ を定義すると、$(V, Y(-, z)$ は ヴィラソロ元の存在以外の全ての条件を満足する。特に、*Jacobi* の恒等式を満足している。また、加群への作用も同様にできる。

ヴィラソロ元は$\mathcal{G}$の正規直交基底を $\{a^1,...,a^n\}$ とすると、

$$\omega = \frac{1}{c-d}\sum_{i=1}^{n} a^i(-1)a^i(-1)\mathbf{1}$$

と置くことによって、ヴィラソロ元の条件を満たしていることがわかります。これが、ここで d は$\mathcal{G}$の dual coxeter number と呼ばれるもので、各単純リー代数に対して定義されているものです。ですから、有限個の c の値を除いて定義できることが分かります。、

3　ツー代数

頂点作用素代数の内部に色々な代数が見つかっていますが、その価値においてツー代数が最も重要でしょう。ここでツー代数の説明をしておきますが、その性質の証明は非常に長い計算なので省きます。実際、頂点作用素代数を応用しようとする立場には詳細を覚える必要はないと思います。ただ、流れをみるために、頂点作用素代数に関する次の２つの式は常に記憶にとどめてほしいと思います。一つは交換関係式、

$$[v(m),u(n)] = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{m}{i}(v(i)u)(m+n-i)$$

であり、他方は結合法則

$$(v(m)u)(n) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{m}{i}\left(v(m-i)u(n+i)-(-1)^m u(m+n-i)v(i)\right)$$

です。ここで $u(n)$ は u の頂点作用素（または加群 U への頂点作用素）$Y(u,z)$ （または $Y^U(u,z)$ ）の展開 $Y(u,z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} u(n)z^{-n-1}$ の係数であり、$u(n) \in \mathrm{End}(V)$ （または $u(n)\in\mathrm{End}(U)$) です。

頂点作用素代数 $(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ と加群 (U,Y^U) があれば、V の各元 $v\in V$ に対して U への作用を係数とする形式的ベキ級数

$$Y^U(v,z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} v(n)z^{-n-1}$$

が与えられますが、$v\in V_{\mathrm{wt}v}$ なら $v(i)$ は次数を $\mathrm{wt}v-i+1$ だけ動かす作用であることが公理から出てきます。(頂点作用素代数内部の積と U への作用とを区別せずに $v(n)$ と表示していますが、関係式が全く同じなので、作用する対象さえしっかり区別していると、同じように考えることが出来ます。) 特に $v(\mathrm{wt}v-1)$ は丁度 U の次数を保つ作用となっており、これを $o(v)$ で表し、線形に V のすべての元に対して定義します。この次数を保つ作用に関しては交換関係式より、

$$[o(v),o(u)] = [v(\mathrm{wt}v-1),u(\mathrm{wt}u-1)]$$
$$= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty}\binom{\mathrm{wt}v-1}{i}(v(i)u)(\mathrm{wt}v+\mathrm{wt}u-2-i) = o(\sum_{i=0}^{\infty}\binom{\mathrm{wt}v-1}{i}v(i)u)$$

が出てきます。$v[0]u$ で最後の式の括弧の中の式を表すと、$[o(v), o(u)] = o(v[0]u)$ と表示できます。$v(m): \quad v \in V_n$ は U 上に次数を一定に動かす作用なので、それら全体で生成された環 R は次数空間 $R_{n\in\mathbf{Z}} = \oplus R_n$ です。ここで R_n は次数を $-n$ 動かすもの全体です。$R_nR_m = R_{n+m}$ であることは明らかです。最高ウエイト加群には次数が最小の部分 U_0 があります。これを U のトップ加群と呼びます。トップ加群に対しては次数を下げるような作用素は 0 として働くので、$RR^+U_0 = 0$ となります。ここで $R^+ = \oplus_{n=1}^{\infty} R_n$ です。それ故、環 $R_0/R_0 \cap RR^+$ が U_0 に作用していると考えることができるわけですが、この環 $R_0/R_0 \cap RR^+$ がズー代数の一つの姿なのです。$v, u \in V$ を考えると、$o(v) \in R_0/R_0 \cap RR^+$ と見ることができ、しかも $o(v)o(u)$ が $R_0/R_0 \cap RR^+$ における積です。

この項を求めるために、$o(v_mu)$ の結合律の展開の内から RR^+ の元と R_0 の元である $o(v)o(u) = v(\mathrm{wt}v - 1)u(\mathrm{wt}u - 1)$ 以外の項 (例えば $u(\mathrm{wt}v + \mathrm{wt}u - 2 - i)v(i) \quad (i = 0, 1, ..., \mathrm{wt}v - 2$ 達) を消去することを考えます。その為に、$o(v(0)u), o(v(1)u), ..., o(v(\mathrm{wt}v - 1)u)$ の展開を連立方程式だとみて、定数倍し、和ととることで消去させたものが

$$v * u = \mathrm{Res}_z Y(v, z)u\frac{(1+z)^{\mathrm{wt}v-1}}{z}$$

であり、$o(\omega(0)v - \omega(1)v) = 0$ であることに注目して、RR^+ 以外の元をすべて消してしまったのが

$$v ** u = \mathrm{Res}_z Y(v, z)u\frac{(1+z)^{\mathrm{wt}v-1}}{z^2}$$

です。これにより、$O(V)$ を $\{v**u : v, u \in V\}$ 全体で生成された部分空間とすると、$V/O(V)$ は積 $*$ によって結合代数となり、最小次数の空間 U_0 への作用は $o(v*u)_{|U_0} = o(v)_{|U_0}o(u)_{|U_0}$ が成り立っています。

ズー代数の重要なことは

定理 3.1 (Zhu) $A(V)$-既約加群 U_0 と V-既約加群 U は U_0 が U の最小次数空間という対応で 1 対 1 対応をしている。

ということです。

このズー代数は各既約加群 U に対しても

$$O(U) = < v ** u | v \in V, u \in U >$$

とおいて、$A(U) = U/O(U)$ を定義することができます。これは代数ではありませんが、V の作用を左から

$$v * u = \mathrm{Res}_z Y^U(v, z)u\frac{(1+z)^{\mathrm{wt}v-1}}{z}$$

右からの作用を

$$u \cdot v = \mathrm{Res}_z Y^U(v, z)u\frac{(1+z)^{\mathrm{wt}v}}{z}$$

によって定義することによって、$A(U)$ は両側 $A(V)$-加群となります。$A(V)$-既約加群は V-の既約加群と対応しているわけですから、$A(V)$-両側加群としての $A(U)$ はどのような意味を持つかということを考えてみましょう。簡単の為に $A(V)$ を半単純環（行列環の直和）と仮定しておきます。このとき、$A(V)$ の既約両側加群は $W_1 \otimes W_2^*$ の構造を持っています。ここで、 W_1, W_2 は $A(V)$-既約加群であり、 W_i^* は W_i の双対空間を表します。それ故、$A(U) \cong \oplus_{i,j}\lambda_{ij}(W_i \otimes W_j^*)$ と $A(V)$-既約加群として表示できます。ここで λ_{ij} は重複度を表しています。このとき、

定理 3.2 (F-Z, Li) λ_{ij} はフュージョン規則と一致する。即ち、

$$U \times W_j = \sum \lambda_{ij} W_j$$

となる。

実際に、 $W_i \otimes W_j^* \subseteq A(U) = U/O(U)$ があると、$\phi\ : U \to W_i \otimes W_j^*$ を考えることができるわけで、$u \in U$ （または $u \in A(U)$) に対して

$$\phi(u) = \sum_r w_r \otimes f_r \in W_i \otimes W_j^*$$

と表示すると、$u \otimes w_j \to \phi(u)(w_j) = \sum_r (f_r(w_j))w_r$ によって $\mathrm{Hom}_{A(V)}(A(U)\otimes_{A(V)} W_j, W_i)$ が定義できるわけです。これをさらにツ一代数の加群から V の加群を構成するように全体に延ばして V の既約加群の間の交絡作用素を構成できるのです。

上の定理が成り立つ為には V が有理型の頂点作用素代数であることが必要ですが、それは現在のフュージョン規則の定義が物理から出てきた為に有理型以外の例を考えていないからなのです。その点を考慮すれば、有理型でなくても、例えば $A(V)$ が半単純でなくても $W_i \otimes W_j^*$ が $A(U)$ の（ U の）剰余空間として存在するなら、用語の意味を適切に変えて行くことによって交絡作用素は定義でき、頂点作用素代数としては問題ないと私は思っています。本質的に $A(U)$ の $A(V)$-両側加群としての構造が頂点作用素代数の加群の間の交絡作用素（intertwining operators) を決定する基本だということです。

4 リー代数頂点作用素代数と交絡作用素

リー代数 $\mathcal{G}$ から構成された頂点作用素代数 $V_{\mathcal{G}}$ においてはウエイト 1 の空間 $(V_{\mathcal{G}})_1$ が積 $v(0)u$ によって元々のリー代数 $\mathcal{G}$ になるという性質を持っているので、対応が明らかです。また定義から V 自身がウエイト 1 の元で生成されていますし、他の元の作用素は $(V_{\mathcal{G}})_1$ の元の作用の積の無限和（一つの元に作用するときは有限個を除いて 0 ）で表示できます。これを使うと $R_0/(RR^+ \cap R_0)$ が $g \in (V_{\mathcal{G}})_1$ の元の次数を保つ作用 $g(0)$ 達によって生成された環（$\mathcal{G}$ の普遍包絡環）となることが分かります。$A(V) = V/O(V)$ として見たときには

$$g_1(0)...g_n(0) \in R_0 \Leftrightarrow (g_1(-1)+g_1(0))\cdots(g_n(-1)+g_n(0))\mathbf{1} \in V/O(V)$$

の関係で対応していることが分かります。

$g \in V_1$ の元による左からの作用と右からの作用は定義から

$$g * u = \mathrm{Res}_z Y(g,z)u\frac{(1+z)^1}{z} = g(0)u + g(-1)u$$
$$u \cdot g = \mathrm{Res}_z Y(g,z)\frac{(1+z)^0}{z} = g(-1)u$$

です。

これを使ってツー代数の加群への作用を考えてみましょう。W を既約 V-加群とし、W_0 でトップ加群を表すことにします。このとき、$A(U) \otimes W_0$ への作用を考える為に、$A(U)$ への作用は

$$g(A(U)) = g * A(U) = (g(0) + g(-1))A(U)$$
$$= g(0)A(U) + g(-1)A(U) = g(0)A(U) + A(U) \cdot g$$

となるので、$A(U) \otimes_{A(V)} W_0$ への作用は

$$\begin{aligned} g(A(U) \otimes_{A(V)} W_0) = & \; g(0)A(U) \otimes_{A(V)} W + A(U) \cdot g \otimes_{A(V)} W \\ = & \; g(0)A(U) \otimes_{A(V)} W + A(U) \otimes_{A(V)} g(0)W \end{aligned}$$

と一致し、自然な余積 $g \to g(0) \otimes 1 + 1 \otimes g(0)$ を与えていることが分かります。しかも上の議論から $A(U) \otimes_{A(V)} W_0 = U_0 \otimes W_0$ であることがわかります。

この結果から $V_{\mathcal{G}}$ の既約加群は $\mathcal{G}$ の既約加群と一対一対応しており、フュージョン規則も $\mathcal{G}$ のテンソル積と一致していることが分かります。

上の事実はリー代数をホップ代数として実現したようなものです。群環もホップ代数なので、群論研究者として次のような自然な問題が起こります。

問題 1 頂点作用素代数において、ツー代数とその両側加群との間の作用に関して、群環をホップ代数として実現するものを構成せよ。

5 最後に

最後に、まとまらない話をさせていただきます。 すべて深い考察なしに述べていることなので、誤りがあればお教えください。

一般に頂点作用素代数 V が自己同型群 G を持つ場合には、

$$V = \oplus_{\chi \in ch(G)}(V_\chi \otimes M_\chi)$$

と分解します。ここで、M_χ は G-既約加群の同型類であり、V_χ は既約 V^G-加群です。また、頂点作用素代数に対してもガロア理論が成り立つのですが、通常のガロア理論と異なり、小さいものから大きな頂点作用素代数（同じ中心電荷を持つもの）を構成する方法がほとんど知られておりません。（一部の極小系列のヴィラソロ代数頂点作用素代数に対しては大きな頂点作用素代数 ” W-代数 ” を構成することは考えられておりますが、自己同

型との関係を考察したものはありません。多分、ヴィラソロ代数頂点作用素代数自身が自己同型を持たないのがその理由ではないかというのが僕の考えです。その為に、自己同型群を持つリー代数頂点作用素代数で拡張を考察したら自己同型を持つ拡張ができるのではないかという気がするのです。しかも、私が期待している自己同型というのは最初の自己同型そのものではありません。（多分、群としては同型か内部自己同型群になっていると思っています。）

G を有限群とし、W_0 を忠実な G-既約加群で、$G \subseteq SL(W_0)$ の場合を考えてみましょう。$\mathcal{G} = \mathrm{End}(W_0)$ にリー代数の構造を入れ、不変内積は通常のように、$< A, B >= \mathrm{tr}\, AB$ によって定義します。これによって構成した頂点作用素代数 $V_{\mathcal{G}}$ をまず考察してみます。W_0 はリー代数 $\mathrm{End}(W_0)$ の加群と考え、$\alpha \in \mathrm{End}(W_0)$ をべき零元とします。このとき、$U(\mathcal{G})$ の中にイデアル $(\mathcal{G}U(\mathcal{G}))$ による filtration をいれ、それによる完備化 $\widehat{U(\mathcal{G})}$ の中の元

$$\exp(\alpha(0)t) = I + \alpha(0)t + \frac{1}{2}\alpha(0)^2t^2 + ... \in U(\mathcal{G}) \qquad t \in \mathbb{C}$$

は加群のテンソル積に対して $\exp(\alpha t)(u \otimes w) = \exp(\alpha t)u \otimes \exp(\alpha t)w$ が成り立ちます。このような性質 $g(u \otimes w) = gu \otimes gw$ を満たすものを群的元と呼ぶのですが、群的元全体 $G(U(\mathcal{G}))$ は容易に $U(\mathcal{G})$ の中の部分群を構成していることがわかります。このとき、この W_0 は $\mathrm{End}(V)$-加群であると同時に、$G(U(\mathcal{G}))$-加群であり、リー代数 $\mathrm{End}(V)$-加群のテンソル積は群 $G(U(\mathcal{G}))$-加群のテンソルとなっています。よく知られているように、G は $G(U(\mathcal{G}))_{|W_0}$ の部分群なので、W_0 の n 回テンソル積はすべて G-加群であり、部分加群の中にすべての G-加群がすべて出てくることはよく知られた事実です。

（リー代数として見たときの $\mathcal{G}$-加群としては別のものになっているわけですし、G-加群がそれ自体で $\mathcal{G}$-加群となっているわけではない点に注意すること。）

考えてほしい問題として、このように G-不変なリー代数 $\mathcal{G}$ とその加群 W_0 が与えられたとき、W_0 のテンソル積を繰り返したもの $W_0^{\otimes n}$（またはその一部）をトップ加群とする $V_{\mathcal{G}}$-加群 $W_{W_0^{\otimes n}}$ 達を集めて大きな頂点作用素代数は構成できないだろうかということです。

問題 2

$$\oplus_{n=0}^{\infty}(W_{W_0^{\otimes n}} \otimes M^{\otimes n})$$

の剰余空間として頂点作用素代数の構造をもつものを構成せよ。ここで、 M は群 G-加群 M で、 $\mathbb{C}G$ をリー代数と見たとき、W_0 と同型なものです。

本当は、もっと多くの加群のテンソル積に対して考察したいのですが、この問題に対する入門として上の問題を提起しておきます。古典的な体の拡大に対応して説明するなら、体 K に対して一変数多項式環 $K[X]$ とその剰余体を考察しているつもりです。

参考文献

[Bo] R. E. Borcherds, *Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 83 (1986), 3068-3071.

[FLM] I. B. Frenkel, J. Lepowsky, and A. Meurman, "Vertex Operator Algebras and the Monster", Pure and Applied Math., Vol. 134, Academic Press, 1988.

[FZ] I. B. Frenke, Y. Zhu, Vertex operator algebras associated to representations of affine and virasoro algebras, Duke Math. J. Vol. 66 (1992) 123-168.

[Li2] H. Li, Determining fusion rules by $A(V)$-modules and bimodules, J. Algebra 212 (1999) 515-556.

[Zh] Y. Zhu, *Modular invariance of characters of vertex operator algebras*, J. Amer. Math. Soc. 9 (1996), 237-302.