数理解析研究所講究録
第 1655 巻 2009 年 22-31

微分から見た種々の分離拡大と歪多項式環

中島　惇 (Atsushi Nakajima)
環太平洋大学・次世代教育学部
Faculty of Education for Future Generations,
International Pacific University

この小論の目的は, 環の分離拡大, 擬分離拡大およびこれらに類似する拡大を微分の立場から統一的に定義し, 多項式環の剰余環について, 分離拡大などとの関係について述べることである.

多項式環においては, 分離拡大に対応する分離多項式とここで定義された拡大 (弱分離拡大という) に対応する多項式との差異は, それらの多項式の判別式の可逆性と非零因子性との差異となっている.

歪多項式環の場合は, 分離多項式の一般化に対応して分離多項式に類似する様々な型の多項式が存在する. ここでは可換環 R 上の歪多項式環 $R[X;*]$ を取り扱い, R が可換整域の場合には, $R[X;*]$ の多項式 $f(X)$ による剰余環がある種の微分に関して同じ性質を持つことを示す. また R が零因子を持つ場合は, ここで定義された各種の拡大に対応する様々な歪多項式を例示する.

以下, 環は単位元 1 を持ち, 写像はすべて加法的であるとし, S/R で単位元を共有する環の拡大を表すこととする.

1. 定義と例

S/R を環拡大, M を S-両側加群とする. はじめに微分の立場から種々の分離拡大を定義する.

$D : S \to M$ が R-微分 (R-derivation) であるとは, 次が成り立つことである :

$$D(xy) = D(x)y + xD(y), \quad D(r) = 0 \quad (\forall\ x,\ y \in S,\ \forall\ r \in R).$$

R-微分 D が $D(x) = mx - xm$ $(m \in M)$ となっているとき, D を内部的 (inner) といい, また $D(x)y = yD(x)$ $(\forall\ x,\ y \in S)$ であるとき, D を中心的 (central) という.

S/R において,

$$\mu : S \otimes_R S \ni x \otimes y \mapsto xy \in S$$

が S-両側加群の準同型写像として分裂 (split) するとき, S/R を分離拡大 (separable extension) という. F. DeMeyer, E. Ingraham は [1, p.76 Theorem] において S が R-多元環の場合に, また S. Elliger は [2, Satz 4.2] において, S/R が非可換拡大の場合に次の (1), (2) が同値であることを示した.

(1) S/R は分離拡大である.

(2) 任意の両側 S-加群 M に対して, R-微分 $D : S \to M$ はすべて内部的である.

微分加群を用いて, 可換環の分離拡大の一般化 (擬分離拡大という) の研究が Y. Nakai [11] において行われた. これに関係する非可換化は右微分, 右微分加群な

どの形で M. Sweedler [14] が取り上げ, 微分的分離多元環 (differentially separable algebra) として分離多元環との関係を詳細に研究している. これらの背景から H. Komatsu [6] は非可換環の場合の微分加群を巧みに構成すると共に, 次のような非可換擬分離拡大の特徴づけを与えた ([6, Lemma 2.1]).

S/R が擬分離拡大 (quasi-separable extension) であるための必要十分条件は任意の中心的 R-微分 $D : S \to M$ が零となることである.

また [6] においては一般の歪多項式環における剰余環の擬分離性と分離性との関係について考察している. これらのことに着目して次のように定義する.

定義 1. S/R を環拡大とする.

(1) S/R が分離的 (separable) とは, 任意の R-微分 $D : S \to M$ が内部的である.

(2) S/R が弱分離的 (weakly separable) とは, 任意の R-微分 $D : S \to S$ が内部的である.

(3) S/R が擬分離的 (quasi-separable) とは, 任意の中心的 R-微分 $D : S \to M$ は零である.

(4) S/R が 弱擬分離的 (weakly quasi-separable) とは, 任意の中心的 R-微分 $D : S \to S$ は零である.

はじめに弱分離的かつ弱擬分離的であるが, 分離的ではない環拡大の例を挙げる.

例 2. A を単位元 1 を持つ可換環とし, A 上の 2 次行列環の部分集合を

$$T_2 = \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & t \end{pmatrix} \mid r, s, t \in A \right\}, \quad R_2 = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \mid r \in A \right\}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく. このとき, T_2/R_2 は単位元 I_2 を共有する環拡大であり, T_2 の任意の R_2-微分 D は, ある $a, b \in A$ に対して

$$D\left(\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & ra + sb - ta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる. この D は内部的だから, T_2/R_2 は弱分離的である. また明らかに D が中心的ならば零であるから, T_2/R_2 は弱擬分離的でもある.

次に T_2/R_2 が分離的でないことを示す. 写像

$$\varphi : T_2 \ni x = \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \in R_2$$

は環全射準同型である. T_2/R_2 が分離拡大ならば, K. Sugano [13, Proposition 1] により, 任意の $x \in T_2$ に対して, 次の性質を満たす中心冪等元 $e \in T_2$ が存在する：

$$\varphi(x)e = ex, \quad \varphi(e) = 1.$$

$e = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}$ $(\xi^2 = \xi \in A)$ より $e = 0$ が得られ, $\varphi(e) = 1$ に矛盾する. 従って T_2/R_2 は分離拡大ではない.

2次三角行列については, 可換環 S の単位元を共有する部分環を A とするとき,

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & s \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in A, s \in S \right\}, \quad R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in A \right\}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば, 同様な計算で T/R は弱分離的かつ弱擬分離的であるが, 分離的でないことがわかるから, 分離的でない弱分離かつ弱擬分離拡大は多数ある.

2. 可換環上の弱分離多項式

R を可換環とし, R 上の多項式環を $R[X]$ で表す. $R[X]$ に含まれる最高次係数が 1 の多項式 $f(X)$ (monic polynomial) に対して, $f(X)$ で生成される $R[X]$ のイデアルを $(f(X))$ で表し,

$$R[x] = R[X]/(f(X)), \quad x = X + (f(X))$$

とおく. このとき, 環拡大 $R[x]/R$ が弱分離的, 擬分離的であることに対応して, $f(X)$ を $R[X]$ の弱分離的, 擬分離的多項式という.

$f(X) = X^n - aX - b \in R[X]$ とする. f と $f'(X) = nX^{n-1} - a$ の終結式 (resultant) は次の $(2n-1) \times (2n-1)$ 行列の行列式である.

$$D_{Res} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a & -b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a & -b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & 0 & -a & -b \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & n & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a \end{bmatrix}$$

このとき, $X^n - aX - b$ の判別式は $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\mathrm{Res}(f,\ f')$ であり, D_{Res} の行列式は $\det(D_{Res}) = -(n-1)^{n-1}a^n + (-1)^{n-1}n^n b^{n-1}$ である.

分離多項式 $f(X)$ については, 次のことが知られている.

定理. $f(X) = X^n - aX - b \in R[X]$ について, 次は同値である.

(1) $f(X)$ は分離的.

(2) $f(X)$ の判別式が R において可逆 (invertible).

(3) $f'(x) = nx^{n-1} - a$ が $R[x]$ において可逆.

可換環上の分離多項式については, より詳細な結果が知られているが, これらについては, 例えば, [1], [7], [8], [9] などを参照されたい. この定理に対応する結果として, 弱分離多項式については次のようになる：

定理 3. $f(X)=X^n-aX-b\in R[X]$ について, 次は同値である.

(1) $f(X)$ が弱分離多項式.

(2) $f(X)$ の判別式が R で非零因子 (nonzero divisor).

(3) $f'(x)=nx^{n-1}-a$ が $R[x]$ で非零因子.

証明. $D:R[x]\to R[x]$ を R-微分とし

$$D(x)=\alpha_{n-1}x^{n-1}+\alpha_{n-2}x^{n-2}+\cdots+\alpha_1x+\alpha_0 \quad (\alpha_i\in R).$$

とおくと, $x^n=ax+b$ より, $\alpha_{n-1},\cdots,\alpha_1,\alpha_0$ について, 次の連立 1 次方程式を得る.

$$\left.\begin{aligned}(n-1)a\alpha_{n-1}+n\alpha_0&=0\\ nb\alpha_{n-1}+(n-1)a\alpha_{n-2}&=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\\ nb\alpha_2+(n-1)a\alpha_1&=0\\ nb\alpha_1-a\alpha_0&=0.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

この方程式の係数行列は

$$M=\begin{bmatrix}(n-1)a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n\\ nb & (n-1)a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & nb & (n-1)a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & nb & (n-1)a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & nb & -a\end{bmatrix}$$

だから, その行列式は X^n-aX-b の判別式と一致する. R-微分 D が零であるための必要十分条件は $\alpha_{n-1},\cdots,\alpha_0$ についての連立 1 次方程式 (1) が自明な解のみを持つことであるから, それは M の行列式が非零因子となることと同値となる. よって (1) と (2) は同値である. (1) と (3) の同値性も同様に証明される.

この定理より例えば, 有理整数環 $\mathbb{Z}$ 上の多項式 $f(X)=X^2-2nX-m\in\mathbb{Z}[X]$ は分離的ではない. また $f(X)$ が弱分離的であるための必要十分条件は $m\neq -n^2$ である.

このように分離多項式でない弱分離多項式が多数ある. 分離多項式にはいろいろな意味で可逆性が関係しているが, 弱分離多項式には非零因子が深く関係しているように思われ, 分離多項式の諸性質に対応する弱分離多項式の性質の研究により, 弱分離拡大のよりよい特徴付けが望まれる.

3. 可換整域上の歪多項式

$*:R\to R$ を環 R の自明でない環自己同型, または微分とし, その歪多項式環を $R[X;*]$ とする. X の係数は右側に書く, すなわち, 任意の $r\in R$ に対して

$*$ が自己同型 ρ の時は $rX = X\rho(r)$,

$*$ が微分 D のときは $rX = Xr + D(r)$

である. $R[X;*]$ の多項式 $f(X)$ で最高次係数 1, $f(X)R[X;*] = R[X;*]f(X)$ となる多項式全体を $R[X;*]_{(0)}$ で表わし, $f(X) \in R[X;D]_{(0)}$ に対して, 次のように定義する :

$$R[x;*] = R[X;*]/f(X)R[X;*],\ x = X + f(X)R[X;*].$$

また $f(X) \in R[X;*]_{(0)}$ が分離的, 弱分離的, 弱擬分離的等の定義は, 対応する環拡大 $R[x;*]/R$ が分離的, 弱分離的, 弱擬分離的等であることと定義する. 一般の歪多項式環における様々な多項式の取り扱いについては [3], [4], [5] などを参照されたい.

以下, R は特に断らない限り, 単位元 1 をもつ可換整域 (commutative domain) と仮定する.

3.1. 自己同型型の歪多項式環

$\rho : R \to R$ を自明でない R の環自己同型とするとき、次が成り立つ.

定理 4. $R[X;\rho]_{(0)}$ のすべての多項式は弱擬分離的である.

証明は $R[x;\rho] = R[X;\rho]/f(X)R[X;\rho]$ の R-微分が x の多項式で表されることより容易である. またこの定理は $\{\rho(r) - r \mid r \in R\}$ が非零因子を含んでいれば成り立つが, R が零因子を含んでいるときには, 弱擬分離的でない多項式がある.

例 5. $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{0, 1, \cdots, 5\}$ とし, $A[Y]$ を多項式環, $R = A[Y]/(Y^6) = A[y]$, $y = Y + (Y^6)$ とする. このとき

$$\rho : R \ni r = r(y) \mapsto r(5y) \in R$$

は環自己同型だから, $R[X;\rho]$ が構成できる. $\rho^2 = 1$ より

$$f(X) = X^2 - a, \quad a = \sum_{i=0}^{2}(a_{2i}y^{2i} + 3a_{2i+1}y^{2i+1}) \in R$$

とおけば, $f(X) \in R[X;\rho]_{(0)}$ となり, 剰余環 $R[x;\rho] = R[X;\rho]/f(X)R[X;\rho]$ が得られる. ここで R-線形写像 δ を

$$\delta(x) = c, \quad \delta(x^2) = \delta(x)c + c\delta(x), \quad 0 \neq c = 3\sum_{i=0}^{5} c_i y^i \in R$$

と定義すれば, δ は零でない $R[x;\rho]$ の中心的微分となることがわかるから, $X^2 - a$ は弱擬分離的でない. また δ は内部的でない微分でもあるから, $X^2 - a$ は擬分離的でもない.

$R[X;\rho]_{(0)}$ の多項式は容易に分類され, 次が得られる.

定理 6. $f(X) \in R[X;\rho]_{(0)}$ に対して, $R[x;\rho] = R[X;\rho]/f(X)R[X;*]$ とおく. $k \neq 1$ を ρ の位数とし, δ を $R[x;\rho]$ の R-微分とする.

(1) $n \leqq k$ ならば, $f(X) = X^n - a_0$ であり,

$$\delta(x) = b \in R, \quad ただし \quad \mathrm{Tr}(b) = (\rho^{n-1} + \cdots + \rho + 1)(b) = 0$$

となる. このとき,

(1-1) $f(X) = X^n$ が弱分離的であるための必要十分条件は, $\mathrm{Tr}(r) = 0$ となる $r \in R$ が存在しないことであり,

(1-2) $f(X) = X^n - a_0$ が弱分離的であるための必要十分条件は

$$\{r \in R \mid \mathrm{Tr}(r) = 0\} \subseteq \{a_0(\rho(r) - r) \mid r \in R\}$$

となることである.

(2) $n = tk + \ell$ $(0 \leqq \ell < k)$ ならば, $f(X)$, $\delta(x)$ はそれぞれ

$$f(X) = X^n - X^{n-k}a_{n-k} - X^{n-2k}a_{n-2k} - \cdots - X^{n-tk}a_{n-tk}$$

$$\delta(x) = \sum_{i=0}^{t} x^{ik+1}b_{ik+1} \quad かつ \quad \delta(x^n) = x^n \sum_{i=0}^{t} x^{ik}\mathrm{Tr}(b_{ik+1})$$

となる. ただし, $n = tk$ ならば $b_{tk+1} = 0$. このとき $R = (\rho - 1)R$ ならば, $f(X)$ は弱分離的である.

この定理の (2) における条件 $R = (\rho - 1)R$ については, R が体上の有限次元多元環のときには成り立たないが, これが成り立たない場合であっても, 次の例でみるように弱分離的になることがある.

例 7. A を標数が 2 でない可換整域, $R = A[Y]$ を多項式環, A-自己同型を

$$\rho : R \ni Y \mapsto -Y \in R$$

とし, 歪多項式環 $R[X;\rho]$ を構成する. さらに 2 が可逆でないと仮定する.

(1) $R[X;\rho]_{(0)}$ の 2 次多項式は $f(X) = X^2 - b(Y^2)$ $(b(Y) \in R)$ の型であり, R-微分は δ は $\delta(x) = xYb_1(Y^2)$ $(b_1(Y) \in R)$ で与えられる. これより零でない内部的ではない微分が存在するから, $X^2 - b(Y^2)$ は弱分離的ではない.

(2) $R[X;\rho]_{(0)}$ の 3 次多項式は $f(X) = X^3 - Xa(Y^2)$ $(a(Y) \in R)$ の型であり, R-微分は δ は $\delta(x) = xYb_2(Y^2)$ $(b_2(Y) \in R)$ で与えられる. この微分も零でなく内部的ではないので, $X^3 - Xa(Y^2)$ も弱分離的ではない.

(1), (2) いずれの場合も 2 が可逆であれば, これらの多項式は弱分離的である. この例では $R \neq (\rho - 1)R$ であるから, 定理 6 (2) の逆は成立しない.

2 次の歪多項式については, Nagahara [9] に詳細な結果がある. 例えば, R を可換環, $f(X) = X^2 - b \in R[X;\rho]_{(0)}$ とするとき, 次のことが示されている ([9, Lemma 2.3]) :

$f(X)$ が分離的 $\Longleftrightarrow$ b が可逆, かつ $z+\rho(z)=1$ となる $z\in R$ が存在する.

b を可逆でない非零因子とし, このような z が存在すれば, $R[x;\rho]=R[X;\rho]/f(X)R[X;\rho]$ の任意の R-微分 δ は $\rho(b_1)=b_1$ を満たす $b_1\in R$ に対して, $\delta(x)=xb_1$ で与えられ, $\delta(x)=(-zb_1)x-x(-zb_1)$ となるからすべて内部的である. 従って X^2-b は弱分離的である. このように弱分離性は非可換多項式の場合でも非零因子が関係している.

3.2. 微分型の歪多項式

$D:R\to R$ を自明でない微分とし, 微分型の歪多項式環 $R[X;D]$ を考えれば, 自己同型型の定理 4 に対応するものが成り立つ.

定理 8. $R[X;D]_{(0)}$ のすべての多項式は弱擬分離的である.

自己同型の場合と同様に $D(R)=\{D(r)\mid r\in R\}$ が非零因子を含んでいれば, この定理は成り立つ. R が零因子を含んでいるときには, 自己同型型と同様に弱擬分離的でない多項式は多数ある.

例 9. $A=\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}=\{0,1,2,3\}$ 上の多項式環 $A[Y]$ の剰余環を $R=A[Y]/(Y^4)=A[y]$, $y=Y+(Y^4)$ とする. A-微分 D を

$$D:R\ni y\mapsto 2\in R$$

と定義し, $R[X;D]$ を構成する. このとき, D の定義から

$$f(X)=X^2-a,\quad a=2\sum_{i=0}^{3}a_iy^i\in R$$

とおけば, $f(X)\in R[x;D]_{(0)}$ であるから, 剰余環 $R[x;D]=R[X;D]/f(X)R[X;D]$ が得られる. また R-線形写像 δ を

$$\delta:R[x;D]\ni x\mapsto xb_1+b_0,\quad \delta(x^2)=\delta(x)x+x\delta(x),\quad 0\neq b_i=2\sum_{j=0}^{3}b_{ij}y^i\in R$$

と定義すれば, δ は零でない中心的な R-微分であるから, $f(X)$ は弱擬分離的ではない. また δ は内部的でもないから, $f(X)$ は弱分離的でもない.

p-多項式については, [5, Lemma 1], [3, Theorem 4.1] において, 次のことが示されている：

p-多項式の分離性: R を可換環とするとき, $f(X)=X^{p^e}-X^{p^{e-1}}a_e-\cdots-X^pa_2-Xa_1-a_0\in R[X;D]_{(0)}$ が分離的であるための必要十分条件は

$$D^{p^e-1}(c)+a_eD^{p^{e-1}-1}(c)+\cdots+a_2D^{p-1}(c)+a_1c=1$$

となる $c\in R$ が存在することである.

一般の p-多項式について, 微分の方を決めることは簡単ではないが, p-次多項式の弱分離性については次のことがわかる：

定理 10. p を R の標数とし, $f(X) = X^p - X^{p-1}a_{p-1} - \cdots - Xa_1 - a_0 \in R[X;D]_{(0)}$, δ を $R[x;D] = R[X;D]/f(X)R[X;D]$ の R-微分とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) $f(X) = X^p - Xa_1 - a_0$, $D(a_0) = D(a_1) = 0$ であり, さらに a_1 は任意の $r \in R$ に対して, $D^p(r) = D(r)a_1$ を満たす.

(2) δ は $D^{p-1}(b) = ba_1$ を満たす $b \in R$ に対して, $\delta(x) = b$ で与えられる.

(3) $f(X)$ が弱分離的であるための必要十分条件は $\{b \in R \mid D^{p-1}(b) = ba_1\} \subseteq D(R)$ である.

最後に p-多項式に関係する例と, 非可換係数多項式環における弱分離多項式、擬弱分離多項式の例をいくつか挙げる.

例 11. R を標数 2 の可換環, $D : R \to R$ を零でない微分で $D^2 = 0$ かつ $D(R)$ が非零因子を含んでいるものとする. $f(X) \in R[X;D]$ に対して, $R[x;D] = R[X;D]/f(X)R[X;D]$ とおく. (可換環 A 上の多項式環 $A[Y]$ における通常の微分はこの条件を満たしている.)

(1) $R[X;D]_{(0)}$ の 2 次多項式は $f(X) = X^2 - a_0$, $D(a_0) = 0$ の型であり, $R[x;D]$ の R-微分は $\delta(x) = b_0$, $D(b_0) = 0$ で与えられる. このとき, δ が内部的であるための条件は $b_0 \in \mathrm{Im}D$ である. $1 \in \mathrm{Ker}D \subseteq \mathrm{Im}$ より, p-多項式の分離性の定理から, $f(X)$ が弱分離的であることと分離的であることは同値になる.

(2) $R[X;D]_{(0)}$ に含まれる 3 次多項式は存在しないことは容易にわかる. 4 次多項式は $f(X) = X^4 - X^2a_2 - a_0$, $D(a_i) = 0$ $(i = 0, 2)$ の型になる. $R[x;D]$ の R-微分 δ は

$$\delta(x) = x^2b_2 + b_0, \quad D(b_2)a_2 = D(b_0)a_2 = 0$$

で与えられ, δ が内部的であるための必要十分条件は $b_0, b_2 \in D(R)$ である. 従って, 次のことがわかる：

(i) $f(X) = X^4 - a_0$ は弱分離的ではない.

(ii) $f(X) = X^4 - X^2a_2 - a_0$ のとき, a_2 が非零因子であれば,

$$f(X) \text{ が弱分離的} \iff \mathrm{Im}D = \mathrm{Ker}D.$$

ここで a_2 が可逆でなければ, $f(X)$ は分離的ではない. 従って分離的ではない弱分離的 p-多項式が存在する.

(iii) $f(X) = X^4 - X^2a_2 - a_0$ のとき, $a_2 \neq 0$ が零因子であれば, $f(X)$ は分離的ではない. $\{b \in R \mid D(b)a_2 = 0\} \subseteq \mathrm{Im}D$ であれば, $f(X)$ は弱分離的である.

(3) $f(X) = X^6 - X^4a_4 - X^2a_2 - a_0$ において, a_0 が非零因子とする. このとき

$$f(X) \text{ が弱分離的} \iff \mathrm{Im}D = \mathrm{Ker}D.$$

このように p-多項式以外にも弱分離的となるものがある.

例 12. A を標数 2 の可換環, T_2, R_2 を例 2 で定義した環, すなわち,

$$T_2 = \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & t \end{pmatrix} \mid r, s, t \in A \right\}, \quad R_2 = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \mid r \in A \right\}$$

とする. 例 2 より, $\xi \in A$ に対して

$$D : T_2 \ni z = \begin{bmatrix} r & s \\ 0 & t \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & s\xi \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in T_2$$

は T_2 の R_2-微分であるから, 歪多項式環 $T_2[X; D]$ が構成できる.

(1) $a_0, a_1 \in A$ に対して, $\alpha_0 = \begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_0 + \xi(\xi - a_1) \end{bmatrix}$, $\alpha_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix}$ とおくと, $f(X) = X^2 - X\alpha_1 - \alpha_0 \in T_2[X; D]_{(0)}$ となるから, $T_2[x; D] = T_2[X; D]/f(X)T_2[X; D]$ が得られる.

(i) $0 \neq b_1 \in A$ を

$$a_0 b_1 = a_1 b_1 = \xi b_1 = 0$$

を満たす元とし, T_2-線形写像 δ を

$$\delta : T_2[x; D] \ni x \mapsto x\beta_1 = x \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} \in T_2[x; D], \quad \delta(x^2) = x\beta_1 x + x^2 \beta_1$$

と定義すれば, δ は零でない T_2-微分である. δ は内部的でも中心的でもないから $f(X)$ は弱分離的でも弱擬分離的でもない.

(ii) $f(X) = X^2 - X\alpha_1 - \alpha_0$ は (i) と同じものとし, a_1 を非零因子とする. このとき, $T_2[x; D]$ の T_2-微分 δ は任意の $b_0, b_1 \in A$ に対して, 次で与えられる :

$$\delta(x) = x\beta_1 + \beta_0, \ \beta_1 = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}, \ \beta_0 = \begin{bmatrix} b_0 & 0 \\ 0 & b_0 - \xi b_1 \end{bmatrix}, \ \beta_1 \alpha_1 = \beta_0 \alpha_1 = 0.$$

a_1 が非零因子であるから, T_2-微分は零のみとなり, $f(X)$ は弱分離的かつ弱擬分離的である.

(2) $a_1 \in A$ に対して, $\gamma = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 + \xi^2 \end{bmatrix}$ とおく. このとき, $f(X) = X^2 - \gamma$ とおけば, $f(X) \in T_2[X; D]_{(0)}$ である. (1) より, $\xi^2 = 0$ ならば, $f(X)$ は弱分離的かつ弱擬分離的でない. また ξ を非零因子とすれば, $f(X)$ は弱分離的かつ弱擬分離的である.

このように係数環が零因子を含む場合は多様である. ここで取り扱われている弱分離的多項式はすべて弱擬分離的である. 弱分離的であるが, 弱擬分離的でない多項式は存在するか, またどのような条件の下で歪多項式環における弱分離多項式の型を決めることができるかなどが問題となる.

$R[x;*]$ においては, いろいろと具体的な計算が可能であるが, ここでの定義では一般の弱分離拡大 S/R はまったく取り扱えないので、分離拡大のように S の元による弱分離拡大の特徴付けが望まれる.

参考文献

[1] F. DeMeyer and E. Ingraham : Separable Algebras Over Commutative Rings, Lecture Note in Mathematics **181**(1971), Springer-Verlag, Berlin·Heidelberg·New York.

[2] S. Elliger : Über automorphismen und derivationen von ringen, J. Reine Angew. Math. **277**(1975), 155-177.

[3] S. Ikehata : On separable polynomials and Frobenius polynomials in skew polynomial rings, Math. J. Okayama Univ. **22**(1980), 115-129.

[4] S. Ikehata : On separable polynomials and Frobenius polynomials in skew polynomial rings II, Math. J. Okayama Univ. **25**(1983), 23-28.

[5] S. Ikehata : Purely inseparable extensions and Azumaya algebras, Math. J. Okayama Univ. **41**(1999), 63-69.

[6] H. Komatsu : Quasi-separable extensions of noncommutative rings, Comm. Alg. **29**(2001), 1011-1019.

[7] B. R. McDonald : Linear Algebras Over Commutative Rings, Pure and Applied Mathematics **87**(1984), Marcel Dekker, New York and Basel.

[8] T. Nagahara : On separable polynomials over a commutative ring, Math. J. Okayama Univ. **14**(1970), 175-181.

[9] T. Nagahara : On separable polynomials over a commutative ring II, Math. J. Okayama Univ. **15**(1972), 149-162.

[10] T. Nagahara : On separable polynomials of degree 2 in skew polynomial rings, Math. J. Okayama Univ. **19**(1976), 65-95.

[11] Y. Nakai : On the theory of differentials in commutative rings, J. Math. Soc. Japan **13**(1961), 63-84.

[12] A. Nakajima : On generalizations of a separable extension over a ring, submitted.

[13] K. Sugano : On separable extensions over a local ring, Hokkaido Math. J. **11**(1982), 111-115.

[14] M. E. Sweedler : Right derivations and right differential operators, Pacific J. Math. **86** (1980), 327-360.