

評価＝授業の成績

＋レポート(12/21に配布)

---

ただし、出席は可・不可かのボーダーには考慮します。なお、眠い状態で演習に臨むのはおすすめしません。眠い人は寝ましょう。<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~tshun/2016a.html>から演習への要望等が送れます。

1913年、ラマヌジャンはハーディーへの手紙に、次の公式を記した:

ロジャーズ・ラマヌジャン連分数 (1913): 
$$\frac{1}{1 + \frac{e^{-2\pi}}{1 + \frac{e^{-4\pi}}{1 + \frac{e^{-6\pi}}{\ddots}}}} = \left( \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) e^{2\pi/\sqrt{5}}$$

ハーディ曰く (“The Indian Mathematician Ramanujan”, Amer.Math.Month.44,1937

“They defeated me completely; I had never seen anything in the least like them before. A single look at them is enough to show that they could only be written down by a mathematician of the highest class. They must be true because, if they were not true, no one would have had the imagination to invent them”.

[拙訳]これらの公式に、完璧に打ち負かされてしまった。このようなものをいまだかつて見たことがない。ぱっと見ただけで、最高レベルの数学者によってのみ書き下されたものだと分かる。これらは真であるはずだ。何故なら人類にはこのようなものを捏造するだけの想像力は備わっていないのだから

「一次関数ってことは、二次関数もあるんですか？」 ← linear, non-linear

「え？あ、そ。あるよ」

「三次関数も？」

「そうそう。三次関数もある」 <<SNIP>>

「これは社会に出たら何に使うんですか？」

「そうね。なんに使うんだろうね」

『リップヴァンウィンクルの花嫁』より

「先生知らないの？」

↑ 11/26 ~ 12/9

「ごめんね。ちょっと調べておくね」

@飯田橋ギンレイホール

今日は線型代数の応用、特に  
固有値・固有ベクトルについて

今日は、ジョルダン標準形  
(ちょっと高級な  $P^{-1}AP$ ) と  
少しだけガロアの話をしてします

行列の対角化  $= A$  を  $n \times n$  行列とするとき、うまく可逆行列  $P$  を選んで  
 $P^{-1}AP$  を対角行列にする。

行列の対角化 =  $A$  を  $n \times n$  行列とするとき、うまく可逆行列  $P$  を選んで  
 $P^{-1}AP$  を対角行列にする。

→ 何故そんなことをしたいのか？

理由はたくさんあるが、とりあえず  $A^n$  を求めたい！

行列の対角化 =  $A$  を  $n \times n$  行列とするとき、うまく可逆行列  $P$  を選んで  $P^{-1}AP$  を対角行列にする。

→ 何故そんなことをしたいのか？

理由はたくさんあるが、とりあえず  $A^n$  を求めたい！

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

行列の対角化 =  $A$  を  $n \times n$  行列とするとき、うまく可逆行列  $P$  を選んで  $P^{-1}AP$  を対角行列にする。

→ 何故そんなことをしたいのか？

理由はたくさんあるが、とりあえず  $A^n$  を求めたい！

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

受験問題も解けるようになる！

(例)  $a_0=2, a_1=7, a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$  ( $n \geq 0$ ) の数列の一般項  $a_n$  を求めよ。

行列の対角化 =  $A$  を  $n \times n$  行列とすると、うまく可逆行列  $P$  を選んで  
 $P^{-1}AP$  を対角行列にする。

→ 何故そんなことをしたいのか？

理由はたくさんあるが、とりあえず  $A^n$  を求めたい！

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

受験問題も解けるようになる！

(例)  $a_0=2, a_1=7, a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$  ( $n \geq 0$ ) の数列の一般項  $a_n$  を求めよ。

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

行列の対角化 =  $A$  を  $n \times n$  行列とするとき、うまく可逆行列  $P$  を選んで  
 $P^{-1}AP$  を対角行列にする。

→ 何故そんなことをしたいのか？

理由はたくさんあるが、とりあえず  $A^n$  を求めたい！

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

受験問題も解けるようになる！

(例)  $a_0=2, a_1=7, a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$  ( $n \geq 0$ ) の数列の一般項  $a_n$  を求めよ。

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad P := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$



行列の対角化 =  $A$  を  $n \times n$  行列とするとき、うまく可逆行列  $P$  を選んで  
 $P^{-1}AP$  を対角行列にする。

→ 何故そんなことをしたいのか？

理由はたくさんあるが、とりあえず  $A^n$  を求めたい！

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

受験問題も解けるようになる！

(例)  $a_0=2, a_1=7, a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$  ( $n \geq 0$ ) の数列の一般項  $a_n$  を求めよ。

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad P := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

行列の対角化 =  $A$  を  $n \times n$  行列とするとき、うまく可逆行列  $P$  を選んで  
 $P^{-1}AP$  を対角行列にする。

→ 何故そんなことをしたいのか？

理由はたくさんあるが、とりあえず  $A^n$  を求めたい！

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

受験問題も解けるようになる！

(例)  $a_0=2, a_1=7, a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$  ( $n \geq 0$ ) の数列の一般項  $a_n$  を求めよ。

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad P := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad a_n = 5 \cdot 2^n - 3$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

行列の対角化 =  $A$  を  $n \times n$  行列とするとき、うまく可逆行列  $P$  を選んで  
 $P^{-1}AP$  を対角行列にする。

→ いつでもできるとは限らない。

行列の対角化 =  $A$  を  $n \times n$  行列とするとき、うまく可逆行列  $P$  を選んで  
 $P^{-1}AP$  を対角行列にする。

→ いつでもできるとは限らない。

(例)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  について、もしも  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$  となったとすると:

行列の対角化 =  $A$  を  $n \times n$  行列とするとき、うまく可逆行列  $P$  を選んで  
 $P^{-1}AP$  を対角行列にする。

→ いつでもできるとは限らない。

(例)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  について、もしも  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$  となったとすると:

$$O = A^2 = P \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix} P^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix} = P^{-1}OP = O$$

行列の対角化 =  $A$  を  $n \times n$  行列とするとき、うまく可逆行列  $P$  を選んで  
 $P^{-1}AP$  を対角行列にする。

→ いつでもできるとは限らない。

(例)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  について、もしも  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$  となったとすると:

$$O = A^2 = P \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix} P^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix} = P^{-1}OP = O$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = 0 \Rightarrow A = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1} = O \quad \text{矛盾!}$$

行列の対角化 =  $A$  を  $n \times n$  行列とするとき、うまく可逆行列  $P$  を選んで  $P^{-1}AP$  を対角行列にする。

→ いつでもできるとは限らない。

(例)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  について、もしも  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$  となったとすると:

$$O = A^2 = P \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix} P^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix} = P^{-1}OP = O$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = 0 \Rightarrow A = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1} = O \text{ 矛盾!}$$

→ いつでもジョルダン標準形にはできる:  $\{\text{対角行列}\} \subseteq \{\text{ジョルダン標準形}\}$   
今の場合、 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  がジョルダン標準形になっている。

行列の対角化 =  $A$  を  $n \times n$  行列とすると、うまく可逆行列  $P$  を選んで  $P^{-1}AP$  を対角行列にする。

→ いつでもできるとは限らない。

(例)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  について、もしも  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$  となったとすると:

$$O = A^2 = P \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix} P^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix} = P^{-1}OP = O$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = 0 \Rightarrow A = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1} = O \text{ 矛盾!}$$

→ いつでもジョルダン標準形にはできる:  $\{\text{対角行列}\} \subseteq \{\text{ジョルダン標準形}\}$   
今の場合、 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  がジョルダン標準形になっている。

固有値  $\alpha$  のジョルダン細胞:

$$(\alpha), \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \dots$$



**定理** :  $A$  を  $n \times n$  複素行列とする。このとき、ある可逆行列が存在して  $P^{-1}AP$  は、ジョルダン細胞を対角に並べた行列 (ジョルダン標準形) になる

固有値  $\alpha$  のジョルダン細胞:

$$(\alpha), \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \dots$$

**定理** :  $A$  を  $n \times n$  複素行列とする。このとき、ある可逆行列が存在して  $P^{-1}AP$  は、ジョルダン細胞を対角に並べた行列 (ジョルダン標準形) になる

(例)  $2 \times 2$  の場合のジョルダン標準形の種類:  $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

固有値  $\alpha$  のジョルダン細胞:

$$(\alpha), \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \dots$$

**定理** :  $A$  を  $n \times n$  複素行列とする。このとき、ある可逆行列が存在して  $P^{-1}AP$  は、ジョルダン細胞を対角に並べた行列 (ジョルダン標準形) になる

(例)  $2 \times 2$  の場合のジョルダン標準形の種類:  $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$   
固有値が1つの場合

固有値  $\alpha$  のジョルダン細胞:

$$(\alpha), \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \dots$$

**定理** :  $A$  を  $n \times n$  複素行列とする。このとき、ある可逆行列が存在して  $P^{-1}AP$  は、ジョルダン細胞を対角に並べた行列 (ジョルダン標準形) になる

(例)  $2 \times 2$  の場合のジョルダン標準形の種類:  $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

固有値が1つの場合

$3 \times 3$  の場合のジョルダン標準形の種類:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

固有値  $\alpha$  のジョルダン細胞:

$$(\alpha), \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \dots$$

**定理** :  $A$  を  $n \times n$  複素行列とする。このとき、ある可逆行列が存在して  $P^{-1}AP$  は、ジョルダン細胞を対角に並べた行列 (ジョルダン標準形) になる

(例)  $2 \times 2$  の場合のジョルダン標準形の種類:  $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

$3 \times 3$  の場合のジョルダン標準形の種類: 固有値が1つの場合

$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

ジョルダン細胞のべき:  $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} & {}_nC_2\alpha^{n-2} & {}_nC_3\alpha^{n-3} \\ 0 & \alpha^n & n\alpha^{n-1} & {}_nC_2\alpha^{n-2} \\ 0 & 0 & \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$

$(\alpha)^n = (\alpha^n)$ ,  $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} & {}_nC_2\alpha^{n-2} \\ 0 & \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$ ,

**定理** :  $A$  を  $n \times n$  複素行列とする。このとき、ある可逆行列が存在して  $P^{-1}AP$  は、ジョルダン細胞を対角に並べた行列 (ジョルダン標準形) になる

(例)  $2 \times 2$  の場合のジョルダン標準形の種類:  $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

$3 \times 3$  の場合のジョルダン標準形の種類: 固有値が1つの場合

$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

これでどんな  $A$  についても  $A^n$  を求めることができる!

ジョルダン細胞のべき:

$$(\alpha)^n = (\alpha^n), \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} & {}_nC_2\alpha^{n-2} \\ 0 & \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & 0 & \alpha^n \end{pmatrix},$$

**定理** :  $A$  を  $n \times n$  複素行列とする。このとき、ある可逆行列が存在して  $P^{-1}AP$  は、ジョルダン細胞を対角に並べた行列 (ジョルダン標準形) になる

---

受験問題も解けるようになる!

(例)  $a_0=2, a_1=7, a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$  ( $n \geq 0$ ) の数列の一般項  $a_n$  を求めよ。

**定理** :  $A$  を  $n \times n$  複素行列とする。このとき、ある可逆行列が存在して  $P^{-1}AP$  は、ジョルダン細胞を対角に並べた行列 (ジョルダン標準形) になる

受験問題も解けるようになる!

(例)  $a_0=2, a_1=7, a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$  ( $n \geq 0$ ) の数列の一般項  $a_n$  を求めよ。

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \text{ --- (★)}$$



**定理** :  $A$  を  $n \times n$  複素行列とする。このとき、ある可逆行列が存在して  $P^{-1}AP$  は、ジョルダン細胞を対角に並べた行列 (ジョルダン標準形) になる

受験問題も解けるようになる!

(例)  $a_0=2, a_1=7, a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$  ( $n \geq 0$ ) の数列の一般項  $a_n$  を求めよ。

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \text{ --- (★)}$$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad P := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

**定理** :  $A$  を  $n \times n$  複素行列とする。このとき、ある可逆行列が存在して  $P^{-1}AP$  は、ジョルダン細胞を対角に並べた行列 (ジョルダン標準形) になる

受験問題も解けるようになる!

(例)  $a_0=2, a_1=7, a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$  ( $n \geq 0$ ) の数列の一般項  $a_n$  を求めよ。

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \text{ --- (★)}$$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad P := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n P^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

**定理** :  $A$  を  $n \times n$  複素行列とする。このとき、ある可逆行列が存在して  $P^{-1}AP$  は、ジョルダン細胞を対角に並べた行列 (ジョルダン標準形) になる

受験問題も解けるようになる!

(例)  $a_0=2, a_1=7, a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$  ( $n \geq 0$ ) の数列の一般項  $a_n$  を求めよ。

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \text{ --- } (\star)$$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad P := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \quad a_n = 2 \cdot 2^n + \underset{\substack{\uparrow}}{3n} \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n P^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

**定理** :  $A$  を  $n \times n$  複素行列とする。このとき、ある可逆行列が存在して  $P^{-1}AP$  は、ジョルダン細胞を対角に並べた行列(ジョルダン標準形)になる

(別解)(★)までは同じ。 $A$  の固有値は  $2$  のみであるから、  
 $a_n = p2^n + q2^n$  ( $A$  が対角化できる場合) または  $a_n = p2^n + qn2^{n-1}$  (真のジョルダン標準形の場合)。  $n=0,1$  の場合を考えると、後者で  $p=2, q=3$  が分かる。(終)

受験問題も解けるようになる!

$$\begin{cases} 2 = p + q \\ 7 = 2p + 2q \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} 2 = p \\ 7 = 2p + q \end{cases}$$

(例)  $a_0=2, a_1=7, a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$  ( $n \geq 0$ ) の数列の一般項  $a_n$  を求めよ。

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \text{ --- (★)}$$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad P := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \quad a_n = 2 \cdot 2^n + \underset{\substack{\uparrow \\ 3}}{3n} \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n P^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

カミーユ・ジョルダン(1838–1922)は、「ジョルダン標準形」「ジョルダン閉曲線定理」などに名を残す数学者であるが、「ガロア理論 (Galois theory)」の教科書を初めて著したことでも有名である(1870年『置換と代数方程式論』)。

カミーユ・ジョルダン(1838–1922)は、「ジョルダン標準形」「ジョルダン閉曲線定理」などに名を残す数学者であるが、「**ガロア理論** (Galois theory)」の教科書を初めて著したことでも有名である(1870年『置換と代数方程式論』)。



## エヴァリスト・ガロア



数学者

エヴァリスト・ガロアは、フランスの数学者および革命家である。フランス語の原音に忠実に「ガロワ」と表記されることもある。[ウィキペディア](#)

生年月日: 1811年10月25日

生まれ: フランス ブール＝ラ＝レーヌ

死没: 1832年5月31日, フランス パリ

カミーユ・ジョルダン(1838–1922)は、「ジョルダン標準形」「ジョルダン閉曲線定理」などに名を残す数学者であるが、「**ガロア理論** (Galois theory)」の教科書を初めて著したことでも有名である(1870年『置換と代数方程式論』)。



## エヴァリスト・ガロア



数学者

エヴァリスト・ガロアは、フランスの数学者および革命家である。フランス語の原音に忠実に「ガロワ」と表記されることもある。[ウィキペディア](#)

生年月日: 1811年10月25日

生まれ: フランス ブール＝ラ＝レーヌ

死没: 1832年5月31日, フランス パリ

カミーユ・ジョルダン(1838-1922)は、「ジョルダン標準形」「ジョルダン閉曲線定理」などに名を残す数学者であるが、「ガロア理論 (Galois theory)」の教科書を初めて著したことでも有名である(1870年『置換と代数方程式論』)。



## エヴァリスト・ガロア

数学者

エヴァリスト・ガロアは、フランスの数学者および革命家である。フランス語の原音に忠実に「ガロワ」と表記されることもある。[ウィキペディア](#)

生年月日: 1811年10月25日

生まれ: フランス

死没: 1832年5月31日, フランス

too young  
to die!



カミーユ・ジョルダン(1838-1922)は、「ジョルダン標準形」「ジョルダン閉曲線定理」などに名を残す数学者であるが、「**ガロア理論** (Galois theory)」の教科書を初めて著したことでも有名である(1870年『置換と代数方程式論』)。



## エヴァリスト・ガロア

数学者

エヴァリスト・ガロアは、フランスの数学者および革命家である。フランス語の原音に忠実に「ガロワ」と表記されることもある。[ウィキペディア](#)

生年月日: 1811年10月25日

生まれ: フランス、ル・ヴェラ＝レー

死没: 1832年5月31日、フランス、パリ

too young  
to die!

ガロアは「**5次方程式の解の公式は存在しない**」ことを証明し、その過程で今日「**群** (group)」や「**体** (field)」と呼ばれるの概念に到達した。これは**現代代数学**の嚆矢の1つと考えられている。

カミーユ・ジョルダン(1838-1922)は、「ジョルダン標準形」「ジョルダン閉曲線定理」などに名を残す数学者であるが、「**ガロア理論** (Galois theory)」の教科書を初めて著したことでも有名である(1870年『置換と代数方程式論』)。



エヴァリスト・ガロア

数学者

エヴァリスト・ガロアは、フランスの数学者および革命家である。フランス語の原音に忠実に「ガロワ」と表記されることもある。ウィキペディア

生年月日: 1811年10月25日

生まれ: フランス、パリのヌーヴェル・サントル

死没: 1832年5月31日、フランス、パリ

too young  
to die!

ガロアは「**5次方程式の解の公式は存在しない**」ことを証明し、その過程で今日「**群** (group)」や「**体** (field)」と呼ばれるの概念に到達した。これは**現代代数学**の嚆矢の1つと考えられている。

ガロアの人生に容易なことは何もなかった。家庭に不幸が訪れ、受験に2度失敗し、論文は紛失され、政治活動にのめりこんで逮捕・投獄を繰り返した。

死を予感した決闘の前夜、ガロアは手紙を走り書きした。親友のシュヴァリエに託された着想は、ジョルダンの著作によって誰でも読める財産となった。

カミーユ・ジョルダン(1838-1922)は、「ジョルダン標準形」「ジョルダン閉曲線定理」などに名を残す数学者であるが、「ガロア理論 (Galois theory)」の教科書を初めて著したことでも有名である(1870年『置換と代数方程式論』)。



エヴァリスト・ガロア

数学者

エヴァリスト・ガロアは、フランスの数学者および革命家である。フランス語の原音に忠実に「ガロワ」と表記されることもある。ウィキペディア

生年月日: 1811年10月25日

生まれ: フランス

死没: 1832年5月31日, フランス

too young to die!

ガロアは「5次方程式の解の公式は存在しない」ことを証明し、その過程で今日「群 (group)」や「体 (field)」と呼ばれるの概念に到達した。これは現代代数学の嚆矢の1つと考えられている。

ガロアの人生に容易なことは何もなかった。家庭に不幸が訪れ、受験に2度失敗し、論文は紛失され、政治活動にのめりこんで逮捕・投獄を繰り返した。

死を予感した決闘の前夜、ガロアは手紙を走り書きした。親友のシュヴァリエに託された着想は、ジョルダンの著作によって誰でも読める財産となった。ガロアはフランス革命の混乱に倒れたが、数学では最高の革命児である。