Alfred Schreiber

Begriffsbestimmungen

Aufsätze zur Heuristik und Logik mathematischer Begriffsbildung

λογος

Die Open-Access-Stellung der Datei erfolgte mit finanzieller Unterstützung des Fachinformationsdiensts Philosophie (https://philportal.de/)

FACHINFORMATIONSDIENST
PHILOSOPHIE

DOI: https://doi.org/10.30819/2883

Alfred Schreiber

Begriffsbestimmungen

Aufsätze zur Heuristik und Logik mathematischer Begriffsbildung

Logos Verlag Berlin

λογος

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

ISBN 978-3-8325-2883-6

Logos Verlag Berlin GmbH
Comeniushof, Gubener Str. 47,
10243 Berlin
Tel.: +49 (0)30 42 85 10 90
Fax: +49 (0)30 42 85 10 92
INTERNET: http://www.logos-verlag.de

Inhaltsverzeichnis

Die Irrfahrten tun gut, wenn man zurückkehrt.

LUDWIG WITTGENSTEIN

Vorbemerkung

Die im Folgenden zusammengestellten Aufsätze berühren diverse Fragen der mathematischen Begriffsbildung, über die ich in den drei Dekaden seit 1975 nachgedacht, vorgetragen und publiziert habe. Der Anstoß zu diesen Studien kam nicht selten aus meiner Lehrpraxis als Didaktiker der Mathematik; sie wurden dann vorzugsweise in einer eher grundsätzlichen und theoretischen Einstellung durchgeführt. Vorrangig herauszuarbeiten waren dabei die erkenntnisleitenden (heuristischen) Funktionen der Begriffsbildungen und, soweit nötig und möglich, das logische Verständnis der in ihnen wirksamen Ideen. In einigen Fällen (etwa bei den „fundamentalen Ideen“ oder bei der „operativen Genese der Geometrie“) kommt ein didaktischer Ertrag hinzu.

Betrachtungen über Begriffe berühren häufig auch die Fragen nach ihrem Bezug zur Erfahrung. Die grundlegenden Aspekte des Verhältnisses von Mathematik und Empirie sind das Thema der ersten Gruppe von Aufsätzen. Es folgen Erörterungen zu allgemeinen Leitideen, zur Interpretation geometrischer Erkenntnis und zum Wahrscheinlichkeitsbegriff. Die letzte Gruppe von Studien ist Fragen gewidmet, die mit der mathematischen Modellierung von epistemologischen und wissenschaftslogischen Konzepten zu tun haben.

Da die Texte aller Beiträge neu zu erfassen und als druckfähige Vorlage aufzubereiten waren, lag es nahe, sie zumindest redaktionell zu überarbeiten (Druckfehler, Verbesserungen im sprachlichen Ausdruck und dgl.). Bei einigen Aufsätzen schien es mir darüber hinaus geraten, sie auch inhaltlich mehr oder weniger stark zu revidieren. So wurden Passagen gekürzt, die aus heutiger Sicht überflüssig erscheinen, andere Passagen umgearbeitet, um ihre Aussage klarer und deutlicher zu präsentieren. Ergänzungen und Kritik, die sich aufgrund späterer Entwicklungen oder Einsichten ergeben haben, werden gelegentlich in einem Supplement oder Postskriptum nachgereicht.

A. S.
Dresden, 20. Mai 2011

I

Mathematik als Experiment[1]

> *Die Unterschiedlichkeit der Mathematik gegenüber der empirischen Forschung besagt nicht, dass wir in der Mathematik eine von vornherein … gesicherte Erkenntnis haben. Es erscheint als notwendig zuzugestehen, dass wir auch in den Gebieten des Mathematischen lernen müssen und auch hier eine Erfahrung sui generis (wir mögen sie „geistige Erfahrung“ nennen) haben.*
>
> PAUL BERNAYS

Meine Damen und meine Herren: Gern folge ich dem schönen Brauch, eine feierliche Antrittsvorlesung mit wenigstens einem literarischen Zitat zu schmücken. Es stammt aus Max Frischs Drama *Don Juan oder Die Liebe zur Geometrie*. Hören Sie einmal, was der Titelheld seinem unverständigen Freund Don Roderigo anvertraut:

> »Weißt du, was ein Dreieck ist? Unentrinnbar wie ein Schicksal: es gibt nur eine einzige Figur aus den drei Teilen, die du hast, und die Hoffnung, das Scheinbare unabsehbarer Möglichkeiten, was unser Herz so oft verwirrt, zerfällt wie ein Wahn vor diesen drei Strichen. So und nicht anders! sagt die Geometrie.«

Don Juan wird nachgesagt, er habe die Frauen nicht wirklich geliebt. Mir scheint, mit der Geometrie verhält es sich nicht viel anders. Denn das, wofür er sich hier begeistert, ist nicht der Inhalt der Geometrie, sondern ihre Form: ist Mathematik als System.

Seit langem ist das System (in mancherlei Gestalt) auch Leitgedanke des Unterrichts. So hat sich die Mathematik viel Respekt verschafft – weitaus

---

[1] Antrittsvorlesung vom 4. November 1987 an der vormals Pädagogischen Hochschule (heute Universität) Flensburg, veröffentlicht in: P. Bender (Hrsg.), *Mathematikdidaktik*: *Theorie und Praxis*. Festschrift für Heinrich Winter, Berlin 1988.

mehr als Verständnis oder gar Liebe. Kann man sich ihr nicht dennoch nähern und, wenn ja, wie? – Für manche ist ihre geschichtliche Entwicklung ein Zugang, für andere sind es ihre Anwendungen. Was ist jedoch, zwischen Vergangenheit und Zukunft, mit der Gegenwart? Was macht eigentlich ein Mathematiker, wenn er nicht gerade seine fertigen Theorien und Beweise zu Papier bringt?

Die mathematische Tätigkeit ist, wie alle menschliche Arbeit, in den seltensten Fällen ein geradliniger Weg zu gesicherten Resultaten. Das Vermuten, das Versuchen, auch das Scheitern gehören dazu; wir finden sie hinter der Fassade des Systems. Dabei ist experimentelles Vorgehen eine Methode, deren sich einige der größten Mathematiker – Archimedes, Euler, Gauß – bedient haben und die heute zunehmend an Bedeutung gewinnt.

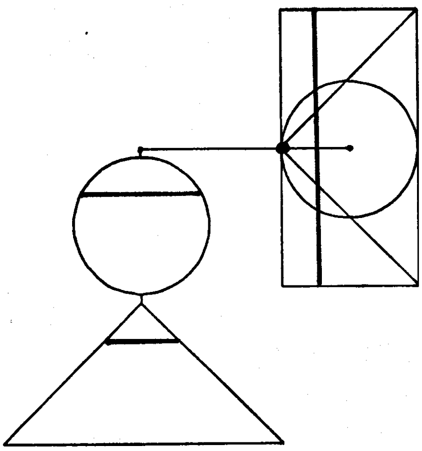
Ich möchte Sie im Folgenden zu typischen Beispielen mathematischen Experimentierens einladen. Hoffentlich begegnen wir auf diese Weise nun doch wieder dem von Don Juan gefürchteten »Scheinbaren unabsehbarer Möglichkeiten«. Anstatt aber unser Herz zu verwirren, sollte es uns auf den Weg der Erkenntnis bringen.

Heuristische Experimente

Ein Experiment liefert im allgemeinen ein Ergebnis. Wenn es darüberhinaus verständlich macht, weshalb das Ergebnis gilt, dann scheint es mir ganz besonders gelungen. Von dieser Art „heuristischer Experimente“, wie ich sie einmal nennen möchte, gibt es nicht allzu viele. Ihr Meister war Archimedes; er hat sie im Zusammenhang mit seinen geometrischen Maßbestimmungen erfunden und entwickelte in ihnen zugleich Grundgedanken der Integralrechnung.

Das vielleicht schönste Beispiel ist die Bestimmung des Kugelvolumens. Archimedes wußte schon, dass ein Zylinder den dreifachen Inhalt umfasst wie ein gleichhoher Kegel derselben Grundfläche. Dazwischen liegt die dem Zylinder einbeschriebene Kugel. Eine Formel ist hier schwierig herzuleiten, wenn man sie nicht schon vorher kennt. Vielleicht kam Archimedes mit einer Waage zu der (richtigen) Vermutung, dass sich die Rauminhalte von Kegel, Halbkugel und Zylinder gleicher Höhe und gleichen Kreisquerschnitts wie $1 : 2 : 3$ verhalten. Durch einen Wägeversuch versteht man natürlich noch nicht, warum die Volumina in dieser wirklich bemerkenswerten Beziehung stehen. Archimedes vollzieht den Vorgang daher gedanklich folgendermaßen nach: Parallel zur Grundfläche wird durch den Zylinder (mit Grundkreisradius r) ein dünner Schnitt gelegt, der auch durch den einbeschriebenen Kegel und eine Kugel geht, deren Durchmesser gleich der Zylinderhöhe r ist. Nun denke man sich einen Hebel, dessen linker Arm so lang ist wie der Kegel hoch (nämlich gleich r, dem doppelten Kugelradius); an ihn werden Kegel- und Kugelscheibe gehängt. Am rechten Arm hängt die Zylinderscheibe im Abstand des Schnittes, und zwar im Gleichgewicht mit den beiden anderen Scheiben! Der Nachweis dazu beruht auf dem Archimedischen Hebelprinzip (Last × Lastarm = Kraft × Kraftarm) und kommt mit einfachen geometrischen Überlegungen aus (Formel für den Kreisinhalt und Euklids Höhensatz).

Der entscheidende Schritt („vom Differential zum Integral“) besteht darin, die einzelnen Scheibchen aufzusummieren. Am linken Hebelarm hängen danach im Abstand r Kegel und Kugel, am rechten Arm der Zylinder im Abstand, den sein Schwerpunkt vom Unterstützungspunkt des Hebels hat (Figur 1). Da Gleichgewicht herrscht, müssen Kegel und Kugel zusammen soviel wiegen wie der Zylinder. Daraus ergibt sich dann das Volumen der Kugel. Archimedes war sich im Klaren darüber, dass diese Überlegung, vor allem das Aufsummieren „unendlich dünner“ Scheiben, ein Gedankenexperiment und nicht etwa einen exakten Beweis darstellt; bekanntlich hat er diesen mit Hilfe des Exhaustionsverfahrens nachgeliefert. Nichtsdestoweniger vermittelt das heuristische Vorgehen wesentliche Einsichten in den Sachverhalt.[2]

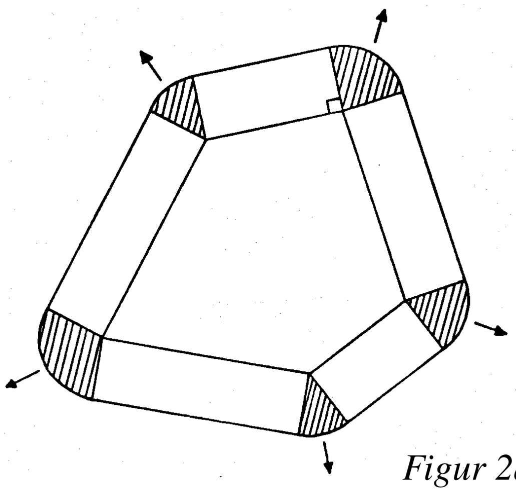


Figur 1

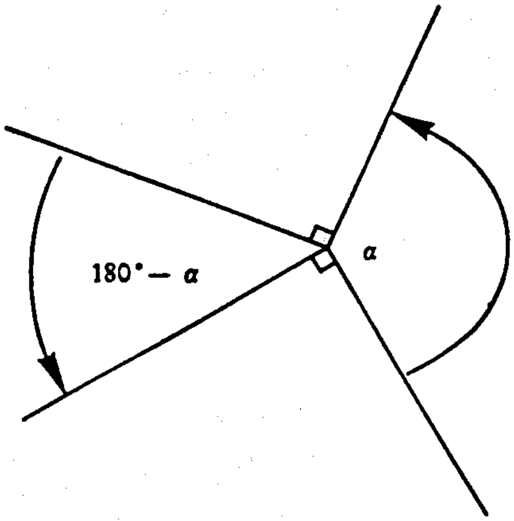
Ich möchte Ihnen noch ein weiteres Beispiel aus der Geometrie anbieten. Es ist viel einfacher als der Archimedische Wägeversuch und eignet sich besonders gut als Experiment im Klassenzimmer. – Stellen Sie sich im ebenen Gelände eine konvexe (d. h. einbuchtungsfreie) Fläche vor. Die Fläche habe einen Umfang L, d. h. bei einem Rundgang längs der Randlinie müßten Sie einen Weg der Länge L zurücklegen. Wenn nun aber der Rundgang im genauen Abstand a vom Rand der Fläche verläuft, so entsteht ein Mehrweg. – Wovon hängt dieser Mehrweg ab: von der Gestalt der Fläche, von ihrem Umfang L,

[2] Eine genauere Darlegung der Argumentation ist zu finden bei O. Becker: *Das Mathematische Denken der Antike*. Zweite, durchges. Auflage: Göttingen 1966, S. 109 f. – Vgl. auch E. J. Dijksterhuis: Archimedes und seine Bedeutung für die Geschichte der Wissenschaft, in: *Abhandlungen zur Wissenschaftsgeschichte und Wissenschaftslehre*. Carl Schünemann Verlag: Bremen 1952, S. 20-22.

vom Abstand a? Das folgende Experiment gibt mit einem Schlag die Antwort: Zeichnen Sie die fragliche Fläche verkleinert auf ein Blatt Papier, am besten als ein Vieleck mit nicht zu großer Eckenzahl. Wenn klar ist, wie man in konstantem Abstand um eine Ecke herumgeht (nämlich auf einem passenden Kreisbogen), dann bereitet es keine Schwierigkeiten, den Rundgang zu zeichnen und die Fläche an dieser Linie auszuschneiden. – Nun kommt der entscheidende Schritt: das Ausschneiden der Sektoren (Polarwinkel) an den Ecken (Figur 2a). Nur an den Ecken entsteht ja der Mehrweg; Sie brauchen daher nichts anderes zu tun als sämtliche dieser Sektoren zusammenzulegen. Ergebnis: Sie schließen sich zu einem Kreis (was einleuchtet wegen der Volldrehung, die man bei einem Rundgang macht).



Figur 2a



Figur 2b

Dieses Resultat ist überraschend und einfach: Der Mehrweg beträgt $2\pi a$, das ist der Umfang des aus den Polarwinkeln zusammengelegten Kreises; wir könnten ihn „Mehrwegkreis“ nennen: Er hängt insbesondere überhaupt nicht davon ab, wie groß oder wie geformt die umlaufene Fläche (hier: ein konvexes Polygon) ist. Rollt man den Mehrwegkreis auf dem Rand der Fläche ab, so zieht sein Mittelpunkt gerade die Spurlinie für den äquidistanten Rundgang.

Das Mehrweg-Experiment halte ich übrigens für den angemessenen Zugang zu den Winkelsummensätzen in der Schule. Da sich ein Innenwinkel und der zugehörige Polarwinkel zu 180° ergänzen (Figur 2b), entstehen beim Umlauf um ein n-Eck n gestreckte Winkel. Um die Summe der Innenwinkel zu erhalten, ist der Anteil der Polarwinkel, somit zwei gestreckte Winkel, herauszunehmen. Die gesuchte Summe ist also $(n - 2) \cdot 180°$, zum Beispiel beim Dreieck 180°.

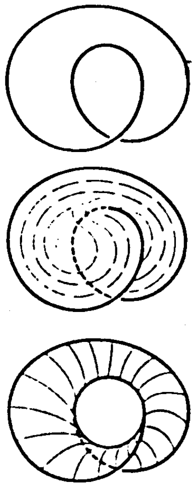
Demonstration oder Exploration?

Heuristische Experimente sind so etwas wie „Beinahe-Beweise“, die in ihrem Ablauf den Grund ihres Resultats offenbaren. In vielen Fällen müssen wir uns mit weniger begnügen, nämlich mit der Realisierung eines Sachverhalts. Z. B. lassen sich mit dem Lichtkegel einer Taschenlampe an einer Wand Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln erzeugen. Ein solches Experiment könnte man „demonstrativ“ nennen. Manchmal steckt in der Situation aber mehr, und man kann das anstehende Problem regelrecht erkunden. Zerschneiden Sie z. B. einmal ein Möbius-Band – das ist ein verdreht zusammengeklebter rechteckiger Papierstreifen – längs seiner Mittellinie, so gibt es hier in der Tat einiges Überraschende zu entdecken. Die Grenze zwischen Demonstration und Exploration ist fließend.

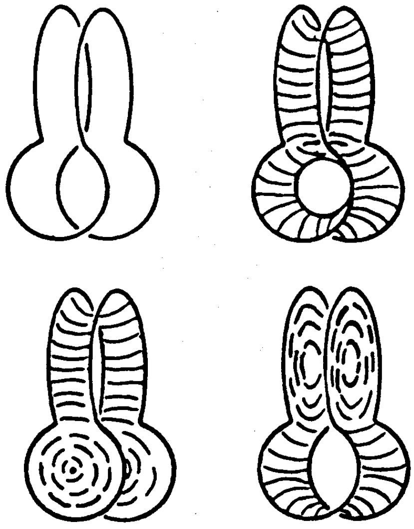
Zu den schönsten Experimenten dieser Zwischen-Kategorie gehören die klassischen Versuche von J. A. F. Plateau zur Entstehung von Minimalflächen. Jeder Punkt einer solchen Fläche besitzt eine Umgebung, die innerhalb ihres Randes die Fläche kleinsten Inhalts darstellt. Schon im 18. Jahrhundert waren Minimalflächen bekannt: das von Euler entdeckte Katenoid, das durch Rotation der Kettenlinie entsteht, und die von Meusnier gefundene Schraubfläche.

Das mathematische Suchen und Untersuchen von Minimalflächen ist einigermaßen kompliziert. Plateau, ein Physiker des 19. Jahrhunderts, ging daher experimentell an die Sache heran. Er formte aus einem dünnen Draht eine geschlossene Raumkurve, tauchte diese in eine Seifenlösung und zog das Ganze vorsichtig wieder heraus. Der innerhalb des Drahtrahmens gespannte Seifenfilm ist dann als eine physikalische Darstellung der Minimalfläche für den gegebenen Rand anzusehen. Bei diesen Versuchen kam Plateau auf die Vermutung, dass eine beliebig geformte Drahtkurve stets eine geeignete Minimalfläche berandet.

Wenn Sie sich einmal vergegenwärtigen, auf welch verwickelte Art man einen Draht zu einer geschlossenen Raumkurve verbiegen kann, so wird klar, dass Plateaus Vermutung streng bewiesen werden muss (was Anfang der 1930-er Jahre J. Douglas auch tatsächlich gelang). Danach bleibt immer noch das Problem, sämtliche Minimalflächen zu finden, die eine gegebene geschlossene Raumkurve berandet. Auch zu diesem Problem wurden von Mathematikern, etwa von R. Courant, Seifenfilm-Experimente angestellt. Dabei entdeckte man, dass eine Minimalfläche durch ihre Randkurve keineswegs eindeutig bestimmt ist.



Figur 3a



Figur 3b

Zum Beispiel kann man einen kreisförmigen Rahmen so verbiegen, dass er eine einseitige Minimalfläche (Möbius-Band) ebenso berandet wie eine zweiseitige Fläche (Figur 3a). Bekannt ist auch die „Kopfhörer-Kurve“, in der sich drei ganz unterschiedliche Minimalflächen aufspannen können (Figur 3b). – Heutzutage werden bei der experimentellen Untersuchung, vor allem bei der Visualisation von Minimalflächen, mit großem Erfolg Computer-Programme eingesetzt.

Ein ganz anderer Typ von Experiment ist die sogenannte Monte-Carlo-Methode, die S. Ulam und J. von Neumann Mitte der 1940-er Jahre entwickelten. Monte-Carlo-Experimente sind rein explorativ: sie benutzen geeignete Zufallsprozesse zur näherungsweisen Lösung komplizierter Probleme. Das folgende Beispiel mag den Grundgedanken stark vereinfacht illustrieren. Um den Inhalt einer unregelmäßig berandeten Fläche zu bestimmen, schließt man sie zunächst in ein Quadrat ein und läßt auf dieses einen gleichverteilten Punkte-Regen niederprasseln; über die Flächentreffer führt man Statistik und erhält so einen brauchbaren Schätzwert. – Die Zufallszahlen, die man bei der Monte-Carlo-Methode benötigt, werden meistens mit Hilfe von Computer-Programmen gewonnen. Erst hierdurch wird das Verfahren wirklich effizient und praktisch bedeutsam.

Evidenz allein genügt nicht!

Explorative Experimente sind ein nützliches Werkzeug, das dem Mathematiker helfen kann, Vermutungen aufzustellen und zu untersuchen. Dass eine

Vermutung, wie die Plateaus, am Ende bewiesen wird, ist ein glücklicher Umstand; denn hier, wie in anderen Fällen, reicht die einem Experiment entspringende Evidenz allein nicht aus, um ein Ergebnis zu sichern. – Ich möchte Ihnen an einer drastischen Geschichte illustrieren, wie eine Vermutung trotz überwältigender experimenteller Evidenz zusammenbrechen kann. Das Beispiel stammt aus der Zahlentheorie und betrifft die Untersuchung von Primzahlen.

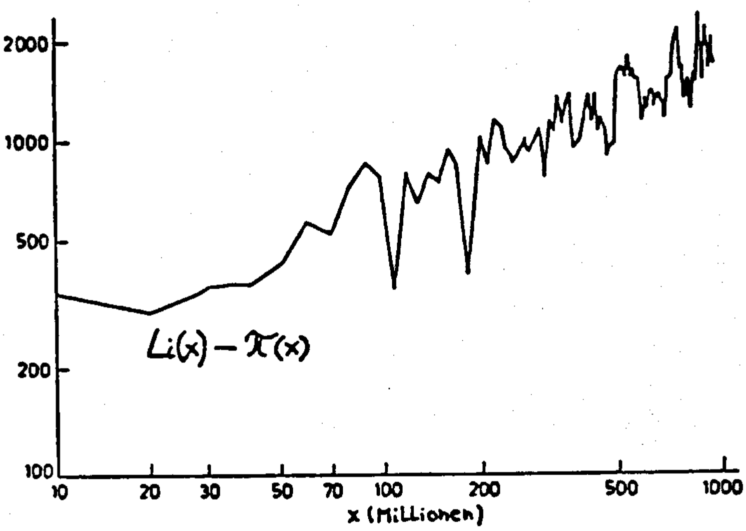
Primzahlen sind die natürlichen Zahlen $2,3,5,7,9,11,13,17,\ldots$, die genau zwei Teiler besitzen (1 und sich selbst). Ihre Verteilung in der Zahlenreihe birgt eine merkwürdige Mischung von Chaos und Ordnung. Primzahlen tauchen wie zufällig auf, kommen aber, größer werdend, regelmäßig seltener vor – obschon Euklid bewies, dass ihre Folge nicht abbricht. Im weiteren geht es um das klassische Problem, die Anzahl $\pi(x)$ der Primzahlen bis einschließlich x zu bestimmen. Hier hat man zunächst einmal gerechnet und gezählt (etwa Lehmers berühmte Tabelle bis 10 Millionen):

x	$\pi(x)$	$x/\pi(x)$
10	4	2,5
100	25	4,0
1000	168	6,0
10000	1229	8,1
100000	9592	10,1
1000000	78498	12,7
10000000	664579	15,0

Aus solchen Tabellen gewinnt man den Eindruck, dass $x/\pi(x)$ in der Nähe des natürlichen Logarithmus $\log x$ liegt. Aufgrund numerischer Beobachtungen kamen (zu Ausgang des 18. Jahrhunderts) Gauß und Legendre unabhängig voneinander zu der Vermutung, dass der Quotient $\pi(x)\log x/x$ für wachsendes x gegen 1 strebt. Dieser sog. Primzahlsatz musste rund hundert Jahre auf seinen Beweis warten (1896, Hadamard und de la Vallée-Poussin). Soweit hat diese Geschichte ein Happy-End.

Die im Primzahlsatz benutzte Vergleichsfunktion $x/\log x$ liefert keine sonderlich guten Näherungswerte für $\pi(x)$. Schon Gauß hat das logarithmische Integral

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t}$$



Figur 4

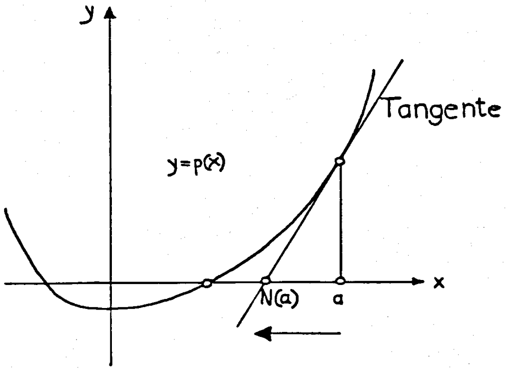
als eine weitaus bessere Approximation vorgeschlagen (die sich von $x/\log x$ lediglich um ein Korrekturglied unterscheidet). Betrachtet man nun die Differenz $\mathrm{Li}(x) - \pi(x)$ vor dem Hintergrund des vorhandenen Zahlenmaterials, so spricht alles dafür, dass $\mathrm{Li}(x)$ die Anzahl der Primzahlen bis x immer überschätzt und damit $\mathrm{Li}(x) - \pi(x)$ trotz aller Schwankungen positiv bleibt, ja sogar zunimmt (Figur 4). Diese Annahme wird zudem noch durch die Beobachtung untermauert, dass $\mathrm{Li}(x) - (1/2)\mathrm{Li}(\sqrt{x})$ die Funktion $\pi(x)$ besser zu approximieren scheint als $\mathrm{Li}(x)$ selbst.

Diese Vermutungen kamen im Jahre 1914 schlagartig zu Fall, als J. E. Littlewood wider allen Anschein bewies, dass die Differenz $\mathrm{Li}(x) - \pi(x)$ unendlich oft ihr Vorzeichen wechselt. Wo dies zum ersten Mal geschieht, weiß man nicht genau; es konnte jedoch gezeigt werden, dass an einer Stelle noch vor $1{,}65 \cdot 10^{1165}$ der Wert von $\pi(x)$ den von $\mathrm{Li}(x)$ übertrifft. Nicht immer geht es in der Mathematik so „heimtückisch“ zu.

Prozesse unter dem Mikroskop

Der Mensch ist ein Augentier, stets dankbar für ein Bild, in dem sich experimentell gewonnene Zahlenkolonnen zu einer Gestalt verdichten. Dem Mathematiker hilft heute dabei vor allem der grafische Computer. Wie durch ein Mikroskop lassen sich Objekte und Prozesse sichtbar machen, die bisher – wenn überhaupt – nur formal behandelt wurden. Die inzwischen weltweit popularisierten Abbildungen aus der Theorie komplexer dynamischer Systeme (nach Mandelbroit, Peitgen, Richter u. a.) sind dafür derzeit das beste Beispiel. Mit einem kurzen Einblick in diese Prozesse möchte ich Ihnen nun unter anderem auch die „ästhetische“ Seite mathematischer Experimente vor Augen führen.

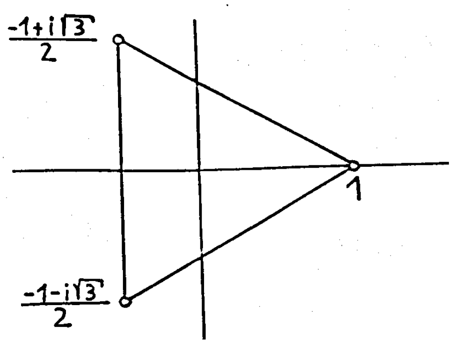
Das Lösen algebraischer Gleichungen $p(x) := x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ ist ein uraltes Problem. Im Schulunterricht behandelt man meist Algorithmen für einfache Sonderfälle, etwa bei $n \leq 3$, die aber *im Allgemeinen nicht* anwendbar sind. Um 1670 gab Newton ein Verfahren bekannt, das sich zur praktischen Berechnung reeller Nullstellen von $p(x)$ eignet. Es beruht auf der einfachen Idee, einen Punkt a durch Anlegen der Tangente im Punkt $(a, p(a))$ der zugehörigen Kurve näher an die Nullstelle heranzubringen (Figur 5).



Figur 5

Analytisch bedeutet dies, dass der Punkt a ersetzt wird durch $N(a) = a - {}^{p(a)}/_{p'(a)}$. Wiederholt man das Vorgehen für $N(a)$ (anstelle für a), so erhält man eine noch bessere Näherung, usw. Damit wird iterativ eine Folge $a, N(a), N(N(a)), \ldots$ erzeugt, die unter bestimmten Voraussetzungen gegen die Nullstelle konvergiert. – Eine algebraische Gleichung n-ten Grades $p(x) = 0$ besitzt nach einem fundamentalen Satz genau n (im allgemeinen komplexe) Lösungen $x_1, \ldots, x_n$.

Zum Beispiel hat die Gleichung $x^3 - 1 = 0$ die drei Lösungen:



Figur 6

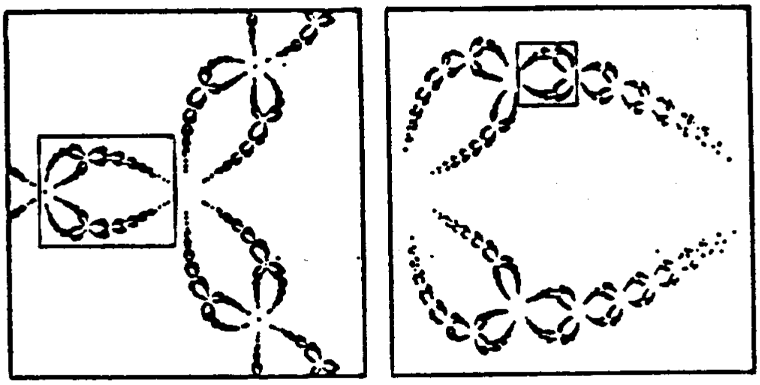
$$x_1 = 1,$$

$$x_2 = \tfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2},$$

$$x_3 = \tfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2},$$

wobei $\mathrm{i}^2 = -1$. Geometrisch werden solche Werte als Punkte der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ dargestellt (Figur 6).

Im Jahre 1879 machte A. Cayley den Vorschlag, einmal zu untersuchen, wie sich das Newtonsche Verfahren, das ursprünglich ja der Bestimmung reeller Nullstellen galt, in der komplexen Ebene auswirkt. Genauer heißt das: Von welchen Punkten aus konvergiert die Newton-Iteration gegen eine Nullstelle? Welches sind die Gebiete $A(x_k)$ aller Punkte a aus $\mathbb{C}$, deren Iterationsfolge gegen x_k strebt? Vor allem, wie sehen die Ränder solcher „Attraktionsgebiete“ aus? In unserem Beispiel wäre also zu klären, wie die zu $p(x) = x^3 - 1$ gehörige Funktion $N(x) = {}^{(2x^3+1)}/_{3x^2}$ bei wiederholter Anwendung auf die Punkte von $\mathbb{C}$ wirkt. Die systematische Analyse solcher Prozesse gelang erst 1918



Figur 7

G. Julia und P. Fatou mit ihrer Iterationstheorie rationaler Funktionen in der komplexen Zahlenebene.

Obwohl Iteration ein im Grunde einfacher Vorgang ist, besitzen so erzeugte Objekte zuweilen eine ungeahnt komplizierte Struktur. Wie teilt sich etwa bei unserem Beispiel die Zahlenebene in die Attraktionsgebiete $A(x_1)$, $A(x_2)$, $A(x_3)$ auf? Die drei Wurzeln sind gleichberechtigt und werden sich daher in ihrer Anziehungswirkung auf andere Punkte vermutlich nichts schenken. In der Tat: Wo immer zwei Attraktionsgebiete aufeinandertreffen, ist auch das dritte da. So entsteht ein ihnen gemeinsamer Rand, auf dem jeder Punkt Dreiländer-Eck ist – etwas, das man sich eigentlich, ohne die Hilfe computergrafischer Visualisierung, gar nicht recht vorstellen könnte.

Interessant sind die Ausnahmepunkte, die der iterative Prozeß nicht erfasst; sie bilden die Ränder der Attraktionsgebiete (nach ihrem Entdecker als Julia-Mengen bezeichnet), und die haben es in sich: Sie sind selbstähnlich, d. h. in ihren Teilen wiederholt sich verkleinert das Ganze (Figur 7). Ferner sind sie (mit dem Ausdruck Mandelbroits) Fraktale: Ihr „Längen“-Maß wächst bei Maßstabsänderung in einer höheren Potenz als ihre topologische Dimension 1, was natürlich heißt, dass ihre „Länge“ unendlich ist, oder: dass sie eine „fraktale Dimension“ (zwischen 1 und 2) besitzen.

Widerlegung der Wirklichkeit

Die bisherigen Experimente, heuristische wie explorative, sind im Prinzip real durchführbar. Wir können Körper auf die Waage legen, Drahtgestelle in Seifenlauge eintauchen, Papierflächen zerschneiden, Zahlenmengen auszählen, Iterationsprozesse sichtbar machen, usw. Und alles das dient der Erforschung von Sachverhalten, die noch nicht oder nur unvollständig verstanden werden.

Die Geschichte der Mathematik kennt aber auch eine andere Art von Experimenten, die sich nur gedanklich vollziehen lassen. Ich denke dabei vor allem an paradigmatische Versuche, die alte Denkmuster ins Wanken bringen und dabei die Grundbegriffe selbst verändern. In der Physik war Einstein ein Virtuose solcher Gedankenspiele[3], ich erinnere nur an sein „Experiment“ mit dem Mann im Kasten, das die Identität von schwerer und träger Masse einsichtig machen sollte. – In der Mathematik finden wir als ein Beispiel die Entdeckung inkommensurabler Strecken durch Hippasos von Metapont. Als Experiment nachvollziehbar wird dies durch den Versuch fortgesetzter Wechselwegnahme (Euklidischer Algorithmus) von Seite und Diagonale des Quadrats oder auch des regelmäßigen Fünfecks. Was uns heute als natürliche Erweiterung des Zahlbegriffs erscheint, wirkte damals – vor dem Hintergrund des pythagoräischen Bildes einer in ganzzahligen Verhältnissen aufgebauten Welt – wie eine Revolution.

Lassen Sie mich zum Abschluss ein noch älteres Gedankenexperiment schildern, das Mathematiker und Philosophen immer wieder beschäftigt hat. Es stammt von dem Eleaten Zenon, der damit (im 5. Jahrhundert v. Chr.) ein paradoxes Argument gegen die Realität der Erscheinungen und der Bewegung gefunden zu haben glaubte. Ihm zufolge könnte ein Stein niemals zu Boden fallen, denn: zunächst einmal muss er die erste Hälfte der Fallstrecke durchlaufen, also zuvor auch deren erste Hälfte, usf. So gesehen könnte eine Bewegung gar nicht erst beginnen.

Wenn Sie sich von Zenon erst einmal auf diesen gedanklichen Rücklauf schicken lassen, gibt es daraus kein Entrinnen mehr. In einer anderen, bekannteren Version des Paradoxons gelingt es, aus ähnlichen Gründen, dem schnellen Achilles nicht, eine vor ihm herkriechende Schildkröte zu überholen. Was wollte Zenon? Die uns vertraute Wirklichkeit als Schein entlarven. Was hat er tatsächlich bewirkt? Dem Wissenschaftshistoriker A. Szabó zufolge waren es seine Zweifel am Anschaulich-Evidenten, die Ursprung und Notwendigkeit des Beweisens in der altgriechischen Mathematik überhaupt erst verständlich werden lassen.

Übrigens stellt das rekursive Muster in Zenons Experiment eine Verbindung zu Objekten her, die man in unserem Jahrhundert entdeckt und erst in jüngster Zeit genauer studiert hat. Stellen Sie sich vor, zum Durchlaufen einer Strecke

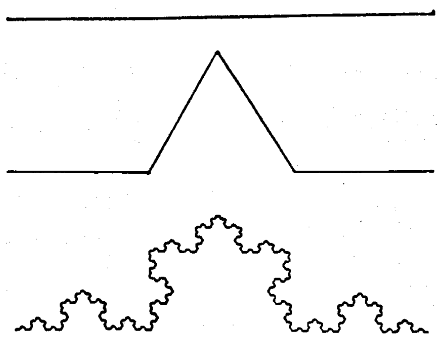
---

[3] Vgl. den klassischen Essay zum Begriff des Gedankenexperiments von E. Mach: *Erkenntnis und Irrtum*, 4. Auflage: Leipzig 1926, S. 183 f. – Monografische Untersuchungen neueren Datums zum Thema sind etwa R. A. Sorensen: *Thought Experiments*, Oxford University Press 1992 oder H. Genz: *Gedankenexperimente*, Weinheim 1999

wäre die folgende Umweg-Prozedur vorgeschrieben:

Gehe ein Drittel der Strecke nach vorne
Drehe um 60° nach links
Gehe ein Drittel der Strecke nach vorne
Drehe um 120° nach rechts
Gehe ein Drittel der Strecke nach vorne
Drehe um 60° nach links
Gehe ein Drittel der Strecke nach vorne

Einmaliges Durchlaufen dieser Umweg-Prozedur erzeugt einen viergliedrigen Streckenzug. Wird jedoch – in Analogie zu Zenon – jede der vier auftretenden Teilstrecken erneut der Umweg-Prozedur unterworfen und dann abermals alle bei Wiederholung des Verfahrens auftretenden Teilstrecken, so entsteht (als Grenzfigur) jene berühmte Kurve, die H. v. Koch im Jahre 1906 beschrieben hat (Figur 8).



Figur 8

Realisieren (im Sinne von Visualisieren!) läßt sich ein solches Gebilde natürlich erst, wenn man die Anwendung der Umweg-Prozedur auf Strecken mit einer vorgegebenen Mindestlänge beschränkt. Nur so läßt sich Zenons Rekursionsfalle umgehen und der unendliche Rücklauf in eine endliche Iteration umwandeln.

Die Kochsche Kurve wurde zu ihrer Zeit als „pathologisch“ empfunden: sie hat unendliche Länge, obwohl sie innerhalb eines beschränkten Gebiets verläuft, und besitzt, trotz ihrer Stetigkeit, in keinem ihrer Punkte eine Tangente. Die Auffassung davon, was als sinnvolles Objekt der Mathematik gilt, hat sich längst gewandelt, und man versteht die Kochsche Kurve heute einfach als Beispiel eines Fraktals.

Mathematik empirisch?

Soweit dieser kurze Streifzug durch altes und neues mathematische Gelände. Ich hoffe, er hat Ihnen vor Augen geführt, welche und wie unterschiedliche Wege es gibt, in der Mathematik experimentell zu denken und zu arbeiten. Vielleicht zeigte sich dabei auch die andere Qualität und Rolle der Erfahrung, welche die Mathematik von empirischen Disziplinen, wie etwa der Physik, gleichwohl unterscheidet.

Ein Experiment in der Mathematik ist keine gezielte Frage an die Natur. Es kann eine Vermutung stützen, es kann sie auch zu Fall bringen; aber es ergibt keinen Sinn, ein mathematisches System an einer externen Erfahrungswirklichkeit prüfen zu wollen. Nehmen Sie einmal die Gleichung $2+3=5$ und machen Sie dazu einen Versuch! Er wird gelingen, wenn Sie z. B. jeweils zwei und drei Streichhölzer zusammenlegen. Aber ist das ein Beweis der Gleichung? Angenommen, Sie machen den Versuch nicht mit Hölzern, sondern mit Wassertropfen, die am Ende zusammenfließen. Wird hierdurch die Gleichung widerlegt? – Weder das eine noch das andere ist der Fall. Es stellt sich lediglich heraus, dass die Gleichung auf die erste Situation anwendbar ist und auf die zweite nicht.

Gelegentlich hat man – so der Philosoph I. Lakatos – an eine Renaissance empiristischer Auffassungen der Mathematik geglaubt. Dazu dachte sich Lakatos die Mathematik in einen formalen und einen inhaltlichen Teil aufgespalten; dieser sollte das »quasi-empirische« Material liefern, an dem sich formale Theorien zu bewähren hätten. Die Erfahrungswirklichkeit liegt danach in der Mathematik selbst. Erkenntnisse über sie, d. h. Aussagen der inhaltlichen Theorien, können daher auch nicht anders gesichert werden als durch Beweise und damit innerhalb eines Systems.

Wenn es darum geht, mathematische Erkenntnisse zu gewinnen, brauchen wir das Experiment und die sich frei entfaltende »geistige Erfahrung«, von der P. Bernays einmal gesprochen hat. Geht es jedoch darum, die Erkenntnisse zu sichern, so bedarf es des Systems, in dem sie – denn was sonst heißt Beweisen – relativ zueinander geordnet werden. Ein Blick auf die Geschichte der Mathematik zeigt uns Blütezeiten des Systems und solche des Experiments. Die Diagnose zur Gegenwart stelle ich Ihnen anheim und bedanke mich für Ihre Aufmerksamkeit.

Anmerkungen zum Verhältnis von Mathematik und Empirie[1]

Im Folgenden möchte ich einige Aspekte der Frage erörtern: Wieweit lässt sich die mathematische Methode der Erkenntnisgewinnung und -begründung mit den Verfahrensweisen anderer, speziell empirischer Wissenschaften vergleichen? Ich erblicke in dieser Frage ein Thema, das nicht allein eine Brücke zwischen den Fächern Mathematik und Philosophie schlagen kann; es erscheint mir auch für fortgeschrittenere Schüler gut fassbar und motiviert zu sein, sofern sie außer der Mathematik wenigstens ein naturwissenschaftliches Fach durch den Unterricht kennengelernt haben.

Ich bin mir darüber im Klaren, dass die bisherigen Beiträge der Wissenschaftsphilosophie zu dem genannten Thema unübersehbar sind, und zwar auch dann noch, wenn man sich wie hier – was die Mathematik betrifft – auf die Rolle der Empirie im Erkenntnisprozess beschränkt. In letzter Zeit scheinen die Dinge zudem noch beträchtlich komplizierter geworden zu sein, wenn man die vielerorts diskutierte Theorie der Wissenschaftsgeschichte von Thomas Kuhn oder die unlängst von Imre Lakatos vorgetragenen methodologischen Ideen einbeziehen will. Insbesondere die sogenannte quasiempiristische Methodenlehre von Lakatos halte ich für eine mögliche Quelle unnötiger Verwirrung. Ihrer Revision sind meine kritischen Anmerkungen gewidmet.

Zunächst gehe ich auf den didaktischen Hintergrund ein und entwickele anschließend eine Analyse und kritische Bewertung der von Lakatos vertretenen Auffassung.

Didaktischer Hintergrund

Eine Behandlung von Fragen der Wissenschaftsmethode im Unterricht verlangt eine vergleichsweise starke Vereinfachung. Man kann sich nur schwer vorstellen, dass es mit Schülern möglich sein soll, die meist auch formal anspruchsvollen Texte der neueren Wissenschaftstheorie zu solchen Problemen

[1] Erstveröffentlichung in: *Materialien und Studien*, Bd. 12, IDM (Institut für Didaktik der Mathematik): Bielefeld 1978. – Wiederabgedruckt in: H.-G. Steiner (Hrsg.): *Mathematik – Philosophie – Bildung*, Köln 1982. – Die an einigen Stellen überarbeitete Fassung des Artikels, die ich hier vorlege, ist nach 2000 entstanden.

systematisch zu studieren und ohne krassen Dilettantismus zu diskutieren. Hier müssen vom Lehrer Hilfen und Vorgaben erwartet werden, die große Kompetenz voraussetzen, vor allem dann, wenn man es für wünschenswert hält, dass die Erarbeitung der Themen nicht vom Lehrer 'übersteuert' wird. Hinsichtlich der Realisierung solcher Wünsche bin ich allerdings eher skeptisch: Als notwendige Bedingung erscheint mir ein Studium der Mathematik; als vermutlich nicht hinreichende Bedingung erscheint mir das traditionelle Philosophicum für höhere Lehramtskandidaten (oder eine vergleichbare Stufe der Vorbereitung).

Kurzum: Der Lehrer sollte nicht mit zu komplizierten oder gar haarspalterischen Metatheorien auf die Schüler losgehen, er sollte sie aber auch nicht mit allzu simplen Schablonen abzuspeisen suchen. Ich beginne mit einer solchen Schablone, die sich (soweit ich mich auch persönlich recht erinnere) früher in der Schule großer Beliebtheit erfreut hat und gelegentlich auch heute noch erfreut. Es handelt sich um die These: *Die Methode der Mathematik ist deduktiv, die der Naturwissenschaften ist induktiv*. – Hier handelt es sich um eine typische Halbwahrheit. Richtig an ihr erscheint mir, dass überhaupt ein Unterschied zwischen Mathematik und empirischer Wissenschaft gesehen wird. Zu bemängeln ist jedoch, dass mit ihr meist nicht erklärt wird, *welche* Methode(n) man eigentlich meint.

Zunächst zum zweiten Teil der These. Man kann ihn nur sinnvoll diskutieren, wenn gesagt wird, was unter Induktion zu verstehen sei. Zumeist denkt man an einen Wissenschaftler, der aus einer Reihe von beobachteten Einzelfakten ein allgemeines Gesetz hypothetisch gewinnt. Popper hat zu Recht immer wieder hervorgehoben, dass in diesem „Übergang vom Besonderen zum Allgemeinen" *kein Schluss* zu sehen ist. Meines Erachtens ist dies eine einfache, aber wichtige Einsicht, die auch Schüler nachvollziehen (oder wiederentdecken) können. Mit ihr wird deutlich, dass das Aufstellen einer Theorie eine schöpferische Leistung des Wissenschaftlers darstellt. Die Schule wäre wohl überfordert, sollte sie an dieser Stelle die weitläufige Diskussion verarbeiten, die in der Wissenschaftstheorie über die Interpretierbarkeit sogenannter induktiver Regeln geführt wurde und immer noch wird.[2] Es wäre schon etwas gewonnen, wenn Schülern Experimente nicht als Naturereignisse vorgesetzt werden, deren Effekte nachträglich (!) mit Hilfe einer Theorie zu erklären sind.[3] Sicherlich wird man es aber auch nicht bei Popper bewenden lassen

[2] Vgl. etwa F. v. Kutschera: *Wissenschaftstheorie I*, München 1972.

[3] Den hartnäckigen Mythos, Experimente seien der eigentliche Anlass und Erzeugungsgrund von

können. Es ist wohl einsichtig, dass jede Art von theoretischer Konstruktion sich durch Erfolge bewähren muss. Andererseits ist dem Wissenschaftshistoriker klar, dass auch Popper die Dinge zu stark vereinfacht, wenn er an eine Verabschiedung von Theorien aufgrund falsifizierender Befunde glaubt. So hat schon James B. Conant[4] festgestellt, eine Theorie werde nur durch eine bessere Theorie abgelöst, niemals durch widersprechende Tatsachen allein. Conant war es dann auch, der Kuhn den Anstoß für seine gegenwärtig (in den 1970er Jahren) so einflußreiche Theorie wissenschaftlicher Revolutionen gegeben hat.

Der erste Teil der These läßt sich leichter entschlüsseln als der zweite. Wenn behauptet wird, die Methode der Mathematik sei deduktiv, so ist gemeint, dass ein Mathematiker seine Behauptungen von bestimmten Axiomen ausgehend durch logisches Schließen beweist. Die These bezieht sich demnach auf den *Begründungskontext* mathematischer Aussagen. Falls das nicht in aller Deutlichkeit gesagt wird, besteht die Gefahr einer Übertragung auf den *Entstehungskontext*. Bekanntlich hat es eine solche Konfusion nicht nur metatheoretisch, sondern auch in der Praxis des Mathematikunterrichts an Schule und Hochschule gegeben (Stichwort: deduktive Imitation im Unterricht). Ebenso bekannt sind aber auch die Gegenmittel: genetisches und heuristisches Vorgehen sollen und können mehr oder weniger wirksam die Zwänge »einer kalten, wissenschaftlich aufgeputzten Systematik« (Felix Klein) entschärfen. Vor allem Pólya hat die Didaktik viel auf diesem Gebiet zu verdanken. Von Poppers Bewährungstheorie herkommend und an Pólyas Heuristik inspiriert schrieb Lakatos Ende der 1950er Jahre ein imaginäres Klassenzimmergespräch rund um den Eulerschen Polyedersatz.[5] Zur gerechten Beurteilung dieser glänzenden Fallstudie hat man zwei Dinge auseinanderzuhalten: a) den mühelos einleuchtenden didaktischen Wert der von Lakatos rekonstruierten Genese, und b) das mit dieser Studie propagierte methodologische Programm. – Meine kritischen Überlegungen gelten einzig dem zweiten Punkt. Über ihn äußert Lakatos in seiner Einleitung eine zweiteilige These (deren Stoßrichtung er als »bescheidenes Ziel« bezeichnet):

Theorien, nährt die auf den Gymnasien seit langem praktizierte Didaktik der Physik. Kürzlich fand ich dies durch H. R. Post in seiner Antrittsvorlesung *Against Ideologies* (London, Chelsea College 1974) trefflich kritisiert: »The myth considers experiment to be a generator of theories. In fact the role of experiment … is solely to decide between two or more existing theories. … Experiment does not generate theories, but rather is suggested by them.«

[4] Vgl. *On understanding science*, New York 1953.

[5] Es erschien später unter dem Titel *Proofs and Refutations*. The logic of mathematical discovery, edited by John Worrall and Elie Zahar, Cambridge University Press 1976.

(a) Die inhaltliche, noch nicht formalisierte Mathematik ist eine quasi-empirische Wissenschaft, die (b) nicht durch Vermehrung um unbezweifelbar bewiesene Theoreme weiter wächst, sondern durch ständiges Verbessern von Vermutungen, durch Spekulation und Kritik, durch die Logik von Beweisen und Widerlegungen.

Lakatos wendet sich gegen ein formalistisches Verständnis von Mathematik. Wie Pólya und schon andere Mathematiker vor ihm appelliert er an die schlichte Tatsache, dass Mathematik *in statu nascendi* nicht deduktiv voranschreitet, dass es auch hier ein Verbessern früherer Problemlösungen und Konzeptionen gibt. Soweit teile ich Lakatos' Ansichten. Im Übrigen halte ich es nicht allein für sinnvoll, diese einfache Einsicht im Unterricht pädagogisch umzusetzen; sie kann und sollte Schülern auch beim Nachdenken über die Methode der Mathematik *bewusst* (gemacht) werden. Man könnte mutmaßen, dass Lakatos mit seinen beiden Thesen auch nicht mehr verfolge. Wie aber einige seiner späteren Äußerungen zeigen, geht seine Absicht durchaus weiter, und zwar in eine Richtung, die – wie ich im Folgenden darlegen möchte – einem adäquaten Verständnis von Mathematik nicht förderlich sein kann.

Kritik der quasi-empiristischen Methodenlehre

Nach Lakatos müsste man die eingangs erörterte Methoden-These folgendermaßen neu formulieren: *Die Methode der Mathematik ist im Prinzip die aller empirischen Wissenschaften.* – Lakatos spricht bewusst nicht von induktivem Vorgehen, weil er, wie Popper, eine Bewährungstheorie (später abgewandelt zu einer Theorie der Forschungsprogramme) zugrunde legt. In diesen Standpunkt ist die fundamentale Annahme eingeschlossen, es gäbe eine *„Logik" der Falsifikation sowohl für den Entstehungs- wie für den Rechtfertigungskontext der Mathematik.*

In der Folge von *Proofs and Refutations* wurde diese Auffassung erstmalig aktuell, als L. Kalmar auf dem internationalen Colloquium in the Philosophy of Science (London 1965) empfahl, die (teilweise) Fundiertheit der Grundlagen der Mathematik in »empirischer Evidenz«[6] einzugestehen. Kalmar gab zu bedenken, dass z. B. eine reine Existenzaussage, die durch Deduktion bewiesen wurde, niemals mit völliger Sicherheit gelte. Mathematische Behauptungen (auch etwa $2 \cdot 2 = 4$) seien in der Praxis testbar (etwa durch wiederholtes Vereinigen zweier disjunkter zweielementiger Mengen), ohne dass solche

[6] Vgl. I. Lakatos (ed.): *Problems in the Philosophy of Mathematics*, Amsterdam 1967, S. 187 ff, S. 203

Testreihen jemals eine endgültige Bestätigung erbringen könnten. Gegen Bedenken, die S. C. Kleene in der Diskussion vortrug, versicherte Kalmar jedoch, die mathematische Forschung könne wie bisher weitergehen.

Es war dann Lakatos, der Kalmars Ideen in abgeschwächter Form seiner Auffassung vom quasi-empirischen Charakter der Mathematik unterordnete. Dabei unterscheidet er zwei Arten von Theorien: solche nach Euklidischem Vorbild, deren Sätze durch Deduktion aus Axiomen begründet werden, und sogenannte quasi-empirische Theorien, in denen sich die Richtung des Wahrheitswertflusses umkehrt, genauer: in denen Aussagen an falsifizierenden Instanzen (Falsifikatoren) scheitern können. Sind die möglichen Falsifikatoren empirische Basissätze in dem Sinn, den Popper in seiner *Logik der Forschung* entwickelt hat, so ist die betreffende quasi-empirische Theorie empirisch. Der Unterschied zwischen Mathematik und Naturwissenschaften soll sich nach Lakatos also lediglich in der Natur ihrer möglichen Falsifikatoren erweisen.[7] Das Londoner Kolloquium brachte leider aber überhaupt keine Klarheit in der Frage, welche Art von Aussagen in der Mathematik die Rolle von Falsifikatoren übernehmen könnten.[8]

Einwände gegen den von Kalmar und Lakatos vertretenen Empirismus sind wenig später von R. L. Goodstein[9] veröffentlicht worden. Unter anderem wirft Goodstein den beiden Metatheoretikern vor, sie betrieben eine »Konfusion der Mathematik mit ihrer Anwendung«. Er betrachtet etwa drei Wassertropfen, die mit zwei weiteren zusammenfließen und dabei natürlich nicht fünf Wassertropfen ergeben. Wird nun ein Empirist hierin eine Widerlegung von $3+2=5$ erblicken? Kaum. Vielmehr handelt es sich hierbei um eine Situation, auf die sich $3+2=5$, wie überhaupt der Additionskalkül der Arithmetik, lediglich *nicht anwenden* lässt. Ebensowenig liefert ja das Zusammenzählen von jeweils drei und zwei Strichmarken eine Verifikation von $3+2=5$. Allerdings ist bei solchen Beispielen zu beachten, dass sich Lakatos bis einschließlich zum Zeitpunkt der Goodsteinschen Kritik alles andere als klar zur Frage der potentiellen Falsifikatoren geäußert hatte (was auch Goodstein bemängelt). Eine Präzisierung seines Quasi-Empirismus, auf dem Londoner Kolloquium für 1967 angekündigt, erschien erst postum 1976 (in dem in Fußnote 7 genannten

[7] I. Lakatos: A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics. *Brit. J. Phil. Sci.* 27 (1976)

[8] Vgl. A. Schreiber: *Theorie und Rechtfertigung*. Untersuchungen zum Rechtfertigungsproblem axiomatischer Theorien in der Wissenschaftstheorie, Braunschweig 1975, S. 16 f, besonders Anm. 6a

[9] Empiricism in mathematics. In: *Dialectica* 23 (1969)

Artikel). Sofern diese Darlegungen über die bereits geschilderten Gedanken hinausgehen, möchte ich hier etwas ausführlicher auf sie zu sprechen kommen.

Die im Titel seines Artikels behauptete 'Wiedergeburt des Empirismus' unterlegt Lakatos zunächst durch eine lange Reihe von Äußerungen mathematischer Autoritäten[10] von Russell bis Mostowski und bezeichnet sie daraufhin als »revolutionäre Wende in der Philosophie der Mathematik« (S. 205). Von einer Revolution muss in der Tat die Rede sein, da nach Lakatos jener Empirismus nicht bloß die Forschungsmethode oder Erkenntnisquelle der Mathematik betrifft, also den Entstehungskontext, sondern darüber hinaus die *Geltung* ihrer Resultate und damit ihren Rechtfertigungskontext. Ob diese Revolution zu recht ausgerufen wird, hängt nun aber ganz davon ab, wie ein Quasi-Empirist das Problem der potentiellen Falsifikatoren zu lösen vermag. Um es gleich vorwegzunehmen: In Lakatos' Beitrag dürfte sich eine befriedigende Lösung dieses Problems schwerlich finden lassen.

Zunächst eine Bemerkung zur formalen Struktur des Falsifikationsvorganges. Ist $\mathscr{F}$ eine Klasse von Formeln, die als 'potentielle Falsifikatoren' angesehen werden, so heiße eine mathematische Theorie T *falsifiziert* (bezüglich $\mathscr{F}$), falls in T eine Formel $\phi \in \mathscr{F}$ beweisbar ist. (Besteht das Axiomensystem von T aus einer einzigen Formel, so erhält man als Sonderfall dieser Definition einen Falsifikationsbegriff für Formeln.) Die Elemente von $\mathscr{F}$ teilt Lakatos in zwei Klassen ein: in *logische* und in *heuristische* Falsifikatoren. Logische Falsifikatoren sind Formeln der Gestalt $\phi \wedge \neg\phi$ (oder Gleichwertiges). An heuristische Falsifikatoren gelangen wir wie folgt: Wir betrachten die formale Theorie T als Formalisierung einer inhaltlichen Theorie (man kann sich diese als ein Standardmodell $\mathfrak{S}(T)$ von T vorstellen). Eine Formel $\neg\phi$ nennt Lakatos dann einen heuristischen Falsifikator für T, wenn sie in T bewiesen werden kann ($T \vdash \neg\phi$), jedoch in der inhaltlichen Theorie ungültig ist ($\mathfrak{S}(T) \models \phi$).

Logische Falsifikation im Sinne Lakatos' hat es bekanntlich in der Mathematik gegeben, etwa für das Schema der Mengenbildung durch uneingeschränkte Komprehension oder für die erste Fassung von Quines ML (= Mathematical Logic). Überdies ist es ja prinzipiell immer möglich, dass sich eine formale Theorie als widerspruchsvoll herausstellt. Gewöhnlich führt dies zu

[10] Es ist jedoch bei den meisten dieser Zitate höchst fraglich, inwieweit sie wirklich einem Empirismus im eigentlichen Sinn zuzurechnen sind. Umgekehrt fehlen in der Ahnenreihe 'echte' Empiristen wie Moritz Pasch oder Otto Hölder, vermutlich weil sich bei ihnen keine fallibilistischen Äußerungen finden. Vgl. etwa A. Heyting: *Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie*, Berlin 1934, S. 59 ff.

einer Modifikation oder Eliminierung gewisser Axiome, nicht dagegen zu einer substanziellen Verminderung des mathematischen Satzbestandes. In einem Nachweis der Inkonsistenz eines Systems verfügen wir vielmehr über eine neue mathematische Erkenntnis, die in der Regel wieder weitere Maßnahmen und Resultate nach sich zieht. Merkwürdigerweise erwähnt Lakatos im Zusammenhang mit Konsistenzfragen auch Hilberts finitistisches Grundlagen-Programm als Beispiel für den Fall einer Widerlegung. Sicherlich lässt der (später bewiesene) Gödelsche Unvollständigkeitssatz berechtigte Zweifel an der Durchführbarkeit des Programms aufkommen. Doch handelt es sich bei Hilberts Programm um einen Plan (verbunden mit Vermutungen über Beweisbarkeit) und nicht um eine bereits etablierte mathematische Behauptung, die nachträglich falsifiziert wurde. Trivialerweise können Pläne und Vermutungen scheitern! Alles in allem scheint mir daher die bisherige Philosophie der Mathematik durch die Betrachtung logischer Falsifikationen nicht um neue Einsichten bereichert, geschweige denn revolutioniert zu werden. Neu ist lediglich das Wortetikett „quasi-empirisch“.

Wenn wir uns der heuristischen Falsifikation zuwenden, wird diese Kritik ein weiteres Mal bestätigt. Lakatos betrachtet hier Arithmetik und Mengenlehre. Das heuristische Falsifizieren einer arithmetischen Theorie T vermag er nur als rein hypothetisches Gedankenexperiment zu schildern. Er nimmt dazu an, es gäbe eines Tages – zufällig von einer Maschine hervorgebracht – einen T-Beweis für die negierte Goldbach-Vermutung. Daneben sollen wir uns einen Zahlentheoretiker vorstellen, der einen inhaltlichen Beweis der Goldbach-Vermutung geführt hat. Könnte dieser Beweis in T formalisiert werden, so wäre in der Tat T eine widerspruchsvolle Theorie. Lässt sich hingegen der fragliche Beweis nicht in T formalisieren, so deutet Lakatos die Goldbach-Vermutung als heuristischen Falsifikator für T, an dem sich erweise, dass T – als arithmetische Theorie – *falsch* ist.[11] Die sich daran anschließenden Bemerkun-

[11] Lakatos behauptet loc. cit., S. 214: T als ω-widerspruchsvoll zu erweisen laufe auf eine heuristische Falsifikation von T hinaus. Dies ist aber fraglich. Es gibt nämlich im Fall der ω-Inkonsistenz eine arithmetische Formel $\phi(x)$ mit $T \vdash \neg\forall x\phi(x)$ und $T \vdash \phi(\overline{n})$ für jedes natürliche n. Die von Lakatos gemachte Annahme, dass $\forall x\phi(x)$ im Standardmodell der Zahlentheorie als wahr plausibilisiert wurde, soll zwar die Rolle eines heuristischen Falsifikators spielen, kann aber die Beweisbarkeitsaussage $T \vdash \neg\forall x\phi(x)$ nicht zur ω-Inkonsistenz ergänzen, weil es unklar bleibt, wie sich aus der vom Zahlentheoretiker nachgewiesenen Gültigkeit von $\phi(\overline{n})$ im Standardmodell der Zahlentheorie ergeben soll, dass $\phi(\overline{n})$ auch in T beweisbar ist (es sei denn, die Inkonsistenz von T steht bereits fest). Andererseits *scheint* aber eine diesbezügliche Fußnote zum Ausdruck bringen zu sollen, dass der „korrekte“ Begriff von ω-Widerspruchsfreiheit gerade derjenige ist, der aus einem Nachweis des Gegenteils eine „heuristische Falsifikation“ macht (wie Lakatos sie

gen zeigen, dass es Lakatos sichtlich schwer fällt, die Auswirkungen der geschilderten „Falsifikation" auch nur annähernd mit etwas zu vergleichen, was dem Scheitern einer physikalischen Theorie an (im echten Sinn) empirischen Fakten entspricht. Nach Lakatos ist die Theorie T »falsch« im Hinblick auf das ihr vermeintlich vorgegebene »*Explanandum*«(!). Der genauere Sinn von »falsch« ist dementsprechend »useless as an explanation of arithmetic«. Mutet es schon seltsam an, dass die Aufgabe einer mathematischen Theorie in der „Erklärung" von etwas liegen soll (eine hier wohl kaum zufällige Analogisierung zu den Naturwissenschaften), so ist andererseits die Situation in der Mathematik wohlbekannt. Widerspruchsfreie Systeme, die von gewissen „klassischen" Vorläufern abweichen, gehören längst zum mathematischen Gemeingut: nichteuklidische Geometrien, ultrareelle Zahlen, Non-Standard-Analysis, usw. Niemand käme auf die Idee zu behaupten, die hyperbolische Geometrie H werde durch einen (nur in der euklidischen Geometrie gültigen und daher in H nicht formal beweisbaren) Lehrsatz „heuristisch falsifiziert" oder gar unbrauchbar als „Erklärung" der Geometrie. Mit demselben Recht würde man eine (widerspruchsfreie) arithmetische Theorie T, in der die (anderweitig irgendwie inhaltlich verifizierte) Goldbach-Vermutung *nicht* gilt, auch nicht als „falsch", sondern eher als eine Art Non-Standard-Variante der Arithmetik betrachten. Wenn es etwas aus den Limitationstheoremen der Grundlagenforschung zu lernen gibt, dann gehört dazu gewiss die von Friedrich Waismann formulierte Einsicht: »Die Mathematik ist nicht *ein* System, sondern eine Vielheit von Systemen …«.[12]

Was endlich die Mengenlehre angeht, so ist die Situation hier nicht wesentlich anders. Ich beschränke mich auf das von Lakatos genannte Beispiel von Quines NF (= New Foundations). Wie Specker zeigen konnte, ist in diesem System das Auswahlaxiom widerlegbar. Ist dieses somit ein heuristischer Falsifikator für NF? Lakatos beantwortet die Frage keineswegs mit einem klaren Ja. Dazu müsste man nämlich, wie z. B. Gödel, das Auswahlaxiom für eine Aussage halten, die sich in einem Universum objektiv existierender Mengen als gültig erweist. Dennoch soll nach Lakatos hier ein Test oder eine Bewährungsprobe vorliegen. Aber worauf bezogen? Bekanntlich lässt sich mit dem Auswahlaxiom (und, wie Solovay gezeigt hat, nicht ohne das Auswahlaxiom) die Existenz nicht-meßbarer Mengen beweisen. Lebesgue, der jede Menge für

versteht).

[12] *Einführung in das mathematische Denken.* Die Begriffsbildung der modernen Mathematik (Wien 1936), München 1970, S. 111

meßbar hielt, erblickte in dieser Tatsache aber eher ein Argument *gegen das Auswahlaxiom* als gegen sein Meßbarkeitsaxiom. Lakatos selbst räumt ein, dass ein heuristischer Falsifikator lediglich eine »rivalisierende Hypothese« sein könne. Dennoch, meint er, »trennt dies die Mathematik nicht so scharf von der Physik wie man glauben mag«.[13] In diesem bis zur Unkenntlichkeit abgeschwächten „Empirismus" lässt nun aber die versprochene 'Logik' der heuristischen Falsifikation nicht mehr ausmachen. Niemand wird das Vorhandensein konkurrierender Theorien in der Mathematik bzw. die Koexistenz gewisser nicht-klassischer Systeme (s. o.) bestreiten. Was aber auf diesem Gebiet an (vermeintlicher) heuristischer Falsifikation geschieht, ist kaum etwas anderes als ein mehr oder weniger subjektives Präferenzspiel.

Genetisches Verständnis statt Grundlagen-Standpunkte

Die von Lakatos angestrebte dynamische Sicht auf die Mathematik kann dazu beitragen, das einseitig fundamentalistische Wissenschaftsbild zu überwinden, aus dem sich z. B. noch Hilberts beweistheoretisches Programm genährt hatte. Einen quasi-empiristischen Standpunkt setzt eine solche Sichtweise aber nicht notwendig voraus. Sie kommt sogar besser ohne ihn aus, denn das in ihr geforderte genetische Verständnis von Begriffen, Theorien und Anwendungen (durch Modellierung) hängt nicht davon ab, inwieweit die Frage nach der Geltung mathematischer Aussagen bereits geklärt bzw. beantwortet wurde.

Die quasi-empiristische Auffassung der mathematischen Erkenntnis beruht auf einem Falsifikationskonzept, das die Gültigkeit in einem Standardmodell gegen die Beweisbarkeit in einer formalisierten Theorie ausspielt. Wie schon Goodstein[14] betont hat, wäre es eine Selbsttäuschung, wollte man übersehen, dass der Nachweis von Gültigkeit wiederum in einem Beweis bestehen muss. Geht es um konkurrierende Axiome, so sind Falsifizierbarkeitsurteile überhaupt nur unter Berufung auf bestimmte Grundlagenpositionen möglich (wie 'Platonismus', Gödels mengentheoretischer Realismus oder Intuitionismus). Zumindest in dieser Hinsicht scheint sich der Quasi-Empirismus weniger als eine Alternative zu herkömmlichen Grundlagendoktrinen anzubieten als vielmehr vorauszusetzen, dass eine Falsifikation auf dem Boden einer derartigen Doktrin vollzogen (und somit dogmatisch) wird.

Was den Wissenszuwachs in der Mathematik betrifft, so haben wir es sicher nicht einfach mit einem additiven Vorgang zu tun. Andererseits würde das

---

[13] Loc. cit. S. 218
[14] Loc. cit. S. 57

Bild vom Fortschritt der Mathematik überzeichnet, wenn man ihn der Falsifizierbarkeit ihrer Theoreme (und den Wirkungen vollzogener Falsifikationen) zuschriebe. Die Fortschrittdynamik speist sich nicht einmal allein aus den Aktivitäten des Problemlösens. Ebenso bedeutsam sind das Ordnen und wiederholte Reorganisieren von alten und neuen Wissensbeständen. Dabei kann es durchaus vorkommen, dass Lehrsätze oder auch Theorien als ganze hinsichtlich ihrer systematischen Rolle zurückgedrängt werden oder in Vergessenheit geraten (Beispiel: Invariantentheorie). Im Unterschied zu empirischen Wissenschaften verringert dies jedoch nicht wirklich den Satzbestand. Der Fortschritt ist sehr wohl kumulativ (indem neue »unbezweifelbar bewiesene Theoreme« hinzugewonnen werden), aber eben im Zusammenspiel mit immer wieder stattfindenden Strukturveränderungen.

Bemerkungen über einige Argumente in Diskussionen zum Beweisen[1]

Anknüpfend an die seit längerem geführte Debatte über Rolle und Bedeutung von Beweisen und Beweisbegriff (1) werden einige der darin vorgebrachten Argumente kritisch kommentiert bzw. differenziert: die historische Relativierung der Beweisstrenge (2); die Fehlbarkeit bzw. der „quasi-empirische" Charakter von Aussagen (3); die behauptete Konstituierung von Geltung aufgrund von Akzeptanz durch die Forschergemeinschaft, letzteres kritisiert auf der Grundlage einer Unterscheidung von Pragmatik und Logik (4); die Gegenüberstellung inhaltlicher und formaler Beweise (5). In einem Fazit (6) wird der Standpunkt dargelegt, wonach Beweisen als Herstellen einer gemeinsamen Überzeugung eine regulative Idee von Geltung als objektiven Tatbestand voraussetzt.

1. — Das traditionelle Bild von Mathematik ist das einer Wissenschaft, die ihre Aussagen aus bestimmten Grundannahmen (Axiomen) logisch folgert. Gelten die Axiome als akzeptabel (etwa weil man sie für wahr hält), so muss sich diese Qualität auch auf die gefolgerten Aussagen übertragen. Das erste Lehrbuch der Mathematik, Euklids *Elemente*, war für dieses deduktive Verfahren über lange Zeit maßgebliches Vorbild, wenngleich die Prinzipien des Folgerns, vornehmlich in Gestalt von Beweisregeln, bis ins 19. Jh. hinein noch gar nicht explizit herausgearbeitet waren. Erst in der Logik seit Frege wurden brauchbare Regelsysteme aufgestellt, untersucht und – für die Logik erster Stufe – als vollständig nachgewiesen. Vor diesem Hintergrund hat dann Hilbert das »euklidische Paradigma«[2] in modernisierter Fassung als formal verstandene axiomatische Methode zur Geltung gebracht. Mit ihr gelingt es, Form

[1] Veröffentlicht in: Peter-Koop, A.; Bikner-Ahsbahs, A. (Hrsg.): *Mathematische Bildung – mathematische Leistung*, Hildesheim / Berlin, 2007.

[2] Den Ausdruck übernehme ich von Jahnke, jedoch eingeschränkt auf den deduktiven Aspekt ohne die bei ihm hergestellte Verbindung mit einer Grundlagendoktrin bezüglich der Natur mathematischer Gegenstände. Vgl. H. N. Jahnke: *Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik – Beweisen als didaktisches Problem*. Materialien und Studien, Band 10. Institut für Didaktik der Mathematik: Bielefeld 1978, S. 198 f.

und Inhalt mathematischer Erkenntnisse in einem Gebiet nachträglich – d. h. nachdem eine genügend substanzielle Wissensmenge erarbeitet worden ist – zu trennen und alle bis dahin eingeflossenen Annahmen explizit sichtbar und kritischen Untersuchungen zugänglich zu machen.

So wirksam und bedeutsam diese Methode für die Entwicklung der Mathematik im 20. Jh. war (und heute noch ist), so fragwürdig und schädlich haben sich mancherlei einseitige und gelegentlich zu Zerrbildern verfestigte Vorstellungen erwiesen, den schulischen Mathematikunterricht an althergebrachten oder modernen Spielarten des euklidischen Paradigmas auszurichten (zuletzt im Schwange der „New Math"-Bewegung). Ein solches Vorgehen verkennt die Bedingungen, die angemessenen Formen und Wege des Lernens Heranwachsender ebenso wie die tatsächliche Praxis mathematischer Erkenntnisgewinnung und -sicherung. In den letzten zwei Dekaden wurde diese Fehlorientierung, zumindest in der fachdidaktischen Diskussion, eingehend kritisiert. Dabei wurden (und werden) Sichtweisen und Argumente herangezogen, die auf neuere Tendenzen in der Philosophie der Mathematik[3] zurückgreifen sowie eine längere, zum Teil kontrovers (auch in Mathematikerkreisen) geführte Debatte, die auf den Beweisbegriff zielt bzw. die angemessene Auffassung davon, was ein Beweis sei und was er leiste. In diesen Diskussionen tauchen kritische Argumente zur Rolle und Bedeutung der Logik auf bis hin zu der Forderung, das euklidische Paradigma wesentlich zu modifizieren bzw. ganz abzulösen. Eine solche ins Grundsätzliche vertiefte Kritik halte ich im Hinblick auf den Zweck, den sie erfüllen soll, für problematisch. Was nämlich in der allgemeinen methodologischen Auseinandersetzung unsicher und unentschieden (weil an philosophische Standpunkte gebunden) bleibt, kann auch diese Kritik nicht wirklich klären, und es besteht die Gefahr, dass – bei eingleisiger Rezeption und Propagierung – abermals neue Fehlvorstellungen begünstigt werden. Außerdem geht es beim Thema Beweisen in der Fachdidaktik vor allem darum, formelhaften Routinen in der Unterrichtspraxis entgegenzuwirken und ein insgesamt sinnerfülltes Verständnis der im Klassenzimmer betriebenen Mathematik herbeizuführen – etwas, das sich am ehesten noch durch konkretes Arbeiten an den Inhalten erreichen lässt.

[3] Dies bereits in dem bemerkenswerten Beitrag von Jahnke (1978), loc. cit., der »Beweisen als didaktisches Problem« aus wissenschaftshistorischer und erkenntnistheoretischer Perspektive erörtert. Aktuellere Artikel enthält Teil III von T. Tymoczko (ed.): *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, revised and expanded edition: Princeton University Press 1998; vgl. ferner die skizzierten Trends in Hanna, G.; Jahnke, H. N.: Proof and Proving. Bishop, A. J. et al. (eds.): *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht 1996.

2. — In Frage gestellt wird die Idee eines strengen Beweises als eine ein für alle Mal feststehende Norm. Bekanntlich haben Newton und Euler für ihre Lehrsätze Beweise geliefert, die zu ihrer Zeit als streng und schlüssig galten und später dennoch kritisiert, revidiert und neu geschrieben wurden. Warum also sollte man glauben dürfen, die heutigen Standards seien in irgendeinem Sinne ‘absolut’ und gegen künftige (heute noch gar nicht vorwegnehmbare) kritische Revisionen gefeit? – Das Argument leuchtet ohne weiteres ein und führt uns die historische Relativität vor Augen, der selbstverständlich (auch) wissenschaftliche Ideen und Methoden unterliegen. Schließt dies aber auch eine forschungsmethodologische Egalisierung ein, wonach das Neuere nicht als besser, sondern lediglich als anders zu werten ist?

Eine wesentliche Funktion von Beweisen ist das Mitteilen. Beschränkt man sich dazu nicht auf reine Zeigehandlungen oder nicht-diskursives Appellieren an anschauliche Evidenzen oder Wahrnehmungserlebnisse, so muss ein Beweis in irgendeiner Form als Text objektiviert und fixiert werden. Der dazu benötigte Sprachrahmen – er möge hier *Beschreibungssystem* genannt werden – ist im Allgemeinen ein Gemisch aus mathematischer Umgangssprache, Formelsymbolik und unterschiedlichen Diagrammen (z. B. Planfiguren). Der in einem Beweis behandelte Sachzusammenhang kann nur in dem Maße aufgelöst werden, wie das zu Grunde liegende Beschreibungssystem dies erlaubt. So gesehen kann ein ‘historischer’ Beweis in sich (d. h. bzgl. des verfügten Sprachrahmens) stringent erscheinen und sich trotzdem zu einem späteren Zeitpunkt als revisionsbedürftig erweisen, z. B. dann, wenn ein neues Beschreibungssystem entwickelt wurde, das es gestattet, Ambiguitäten und Lücken aufzudecken und zu beseitigen oder sonstige Ungereimtheiten im System auszubessern. Das Moment des Fortschritts, das sich darin bekundet, wird häufig erzielt durch Verfeinerung bzw. Veränderung der Begriffe (als Ergebnis logischer Analysen), aber auch durch Erweiterungsprozesse oder Reinterpretation (z.B. bei der Nicht-Standard-Analysis). Dies erfordert die Fähigkeit, heuristische Ideen und Plausibilitätsüberlegungen von schlüssigen Beweisen zu unterscheiden. Um das Kugelvolumen herauszubekommen, können Wägungsversuche hilfreich sein (ohne dass damit schon etwas bewiesen wäre, was auch Archimedes wusste), und bisweilen können visuelle und physikalische Überlegungen (‘Gedankenexperimente’) das Aufdecken und Verstehen von Zusammenhängen anregen und befördern. Was aber aus einer »multiplicity of types of justification«[4] am Ende geeignet ist, stichhaltige Argumentatio-

[4] Vgl. Hanna & Jahnke 1996, loc. cit.; dazu zählen visuelle, holografische, physikalische und

nen zu liefern, bleibt im Einzelfall zu prüfen. Beispielsweise machen Hanna & Jahnke[5] geltend, der Mittelwertsatz könne unmittelbar (»directly«) aus der Beobachtung gefolgert werden, »that a car going from A to B must have had, at least at one point, the mean velocity as its actual velocity«. Hier werden Referenzen auf Prozesse der körperlichen Welt einbezogen, ohne das dazu maßgebliche Kriterium (Beobachtung) zu präzisieren oder im Sinne der Physik tatsächlich auch anzuwenden. Ich kann nicht erkennen, wie man auf diese Weise zu vollwertigen Beweisen kommen soll (im Unterschied etwa zu den „prämathematischen" Beweisen, die Kirsch[6] untersucht hat).

3. — Gelegentlich scheint man zu glauben, die prinzipielle Fehlbarkeit aller Beweise stelle die Brauchbarkeit des euklidischen Paradigmas als methodologische Leitidee substanziell in Frage. Mit an erster Stelle ist hier an die von I. Lakatos 1976 ausgerufene Renaissance des Empirimus in der Philosophie der Mathematik zu erinnern. Tatsächlich kommt man nicht umhin, diese Fehlbarkeit einzuräumen. Beweise hoher Komplexität (und damit verbunden enormer Textlänge) sind keine Seltenheit mehr; unübersichtliche oder (z. B. aufgrund computergestützter Berechnungen) nicht mehr zusammenhängend nachvollziehbare Passagen machen diese Fehlbarkeit ‘fühlbar'. Grundsätzlich ist aber jede Aussage, die an einem vorgelegten Beweistext eine bestimmte Beschaffenheit feststellt, eine empirische und somit fallible Behauptung. Allerdings ist hieraus nicht zu folgern, dass auch der Satz selbst, der durch den vorgelegten Text bewiesen werden soll, eine erfahrungsbegründete Erkenntnis darstellt. Das wäre erst dann der Fall (mit entsprechender Auswirkung auf das euklidische Paradigma), wenn diese an empirischen Gegebenheiten einer ‘äußeren' Realität prüf- und falsifizierbar wären. Eine Revision mathematischer Sätze und Beweise, wie sie von Zeit zu Zeit aufgrund neuer, schärferer Begriffsausprägungen und vergleichbarer Modifikationen am System stattzufinden pflegt, ist aber von anderer Natur als die experimentelle Prüfung physikalischer Hypothesen. Das räumt Lakatos ausdrücklich ein und spricht deshalb von »quasi-empirischen« Aussagen. Mehr noch: Die nicht-logische (nach

„inhaltlich-anschauliche" Beweise. Schon Wittgenstein hatte von einem »bunten Gemisch von Beweistechniken« gesprochen.

[5] In: Using arguments from physics to promote understanding of mathematical proofs. O. Zaslavsky (ed.): *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, Haifa 1999.

[6] In: Beispiele für „prämathematische" Beweise. Dörfler, W.; Fischer, R. (Hrsg.): *Beweisen im Mathematikunterricht*. Wien/Stuttgart 1979.

Lakatos »heuristische«) Falsifikation einer Aussage läuft letztlich darauf hinaus, sie in einer anderen Theorie zu widerlegen, d. h. es geht im Kern um eine Präferenz zwischen konkurrierenden Theorien. Somit bleibt als Fazit des „Quasi-Empirismus“ lediglich die Beobachtung, dass den inhaltlichen Diskussionen bzgl. der Annehmbarkeit bestimmer unanschaulicher Aussagen (im Allgemeinen solcher der Mengenlehre) herkömmliche statische Vorstellungen von mathematischer Erkenntnis nicht mehr gerecht werden.[7] Das euklidische Paradigma wird allerdings davon nicht berührt.

4. — Der Idee des ‘strengen Beweises’, die man zu Recht der Domäne der Logik zurechnet und als Kern des euklidischen Paradigmas ansieht, erwuchs seit den 1980er Jahren eine Opposition soziologisch argumentierender Kritik. In seinem Logikbuch (*A Course in Mathematical Logic*, New York 1977) hatte Yu. I. Manin treffend darauf hingewiesen, ein Beweis bedürfe stets des »sozialen Aktes, als Beweis anerkannt zu werden«. Nach Hanna (*Rigorous proof in mathematical education*, Toronto 1983) spielen für die Akzeptanz eines mathematischen Lehrsatzes die Kriterien Verstehbarkeit, Bedeutung, Verträglichkeit (mit dem übrigen Satzbestand), die »makellose Reputation« seines Urhebers und die (auf welchem Weg auch immer) »überzeugende« Argumentation sämtlich eine höherrangige Rolle als die (erfüllte) Forderung eines strengen Beweises. M. Neubrand[8] hat diese These mit einer Reihe von Theoremen (und Konjekturen) abgeglichen und dabei deutlich gemacht, dass Überzeugungskraft an einen peniblen Prüfvorgang mit hohen Standards gebunden ist: nicht zu vergleichen mit »common social disputes« und eben doch nahe an dem, was einen strengen Beweis im gewöhnlichen Verständnis ausmacht (dessen Schlüssigkeit keineswegs vom Grad seiner Formalisierung abhängt). Dass diese Prüfung von qualifizierten Experten – »competent judges« heißen sie bei R. Hersh[9] – vorzunehmen ist, wird kaum überraschen, umso mehr aber die vom selben Autor geäußerte Ansicht, die Geltung mathematischer Aussagen werde durch den fraglichen sozialen Prozess überhaupt erst konstituiert.[10] – Diese

[7] Vgl. I. Lakatos: A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics. *Brit. J. Phil. Sci.* 27 (1976), insbesondere den Abschnitt 4 über »‘potential falsifiers’ in mathematics« sowie meine Anmerkungen zum Verhältnis von Mathematik und Empirie in diesem Band.

[8] In: Remarks on the Acceptance of Proofs: the case of some Recently Tackled Major Theorems. *For the Learning of Mathematics* 9/3 (1989).

[9] In: Proving is Convincing and Explaining. *Educational Studies in Mathematics* 24 (1993).

[10] Für Hersh kommt es dadurch zu gültigen Argumentationsstandards, dass die Gemeinschaft der Mathematiker diese absegnet und akzeptiert (»sanction and accept«, S. 392 loc. cit.); für die Logik bleibt nur der deskriptive Nachvollzug.

radikalisierte Sichtweise erscheint mir methodisch ungereimt und im Ergebnis unzutreffend; sie spielt zwei Aspekte des Themas gegeneinander aus, die eigentlich friedlich und ergänzend nebeneinander bestehen (könnten): a) Pragmatik und b) Logik.

a) *Pragmatik* stellt einen Zusammenhang her zwischen dem Gegenstand der Betrachtung (hier: dem Beweis) und dem Handelnden bzw. den Handlungen in Bezug auf diesen Gegenstand. Insbesondere richtet sie sich auf die Ziele und die Funktionen, die mit der Tätigkeit des Beweisens (dem Suchen, Ausarbeiten, Prüfen etc.) verbunden sind. Zu nennen sind hier vor allem:

1. das Erkenntnisinteresse (Streben nach Einsicht und Evidenz),
2. die Kommunikation (das Herstellen einer gemeinsamen Überzeugung[11] und ihre Mitteilung),
3. Prozesse der Systembildung (z. B. Entwicklung passender Begriffe, logisches Ordnen bzw. Reorganisieren des Satzbestandes, historische Einordnung).

Auch didaktische Fragen lassen sich in den pragmatischen Zusammenhang eingliedern. Hier wird man z. B. die Gründe aufdecken, derentwegen ein Lehrsatz überhaupt unser Interesse verdient (und ein Beweis die Mühe lohnt). Ebenso gehört hierhin die (nicht immer erfüllbare) Forderung, ein Beweis solle den behaupteten Sachverhalt erklären, z. B. durch ein Modell oder Hintergründe, die ein 'plastisches' Verstehen ermöglichen. Ferner sind die Wege und heuristischen Ideen zu erwähnen, die zur Entdeckung, Vermutung oder zum Beweis des Sachverhalts führten. Alles in allem sollte so, aus der Perspektive der Pragmatik, ein lebendiges und facettenreiches Bild von mathematischer (Beweis-)Tätigkeit entstehen.[12]

b) Im Unterschied dazu fallen einer Behandlung des Themas aus logischer Sicht ganz andere Aufgaben zu. Die *Logik* entwickelt und untersucht Modelle

---

[11] Vgl. dazu die von Ch. S. Peirce in Betracht gezogenen und erörterten allgemeinen Methoden, eine Überzeugung festzulegen, in: The Fixation of Belief. *Popular Science Monthly* vol. 12 (1877), dt. unter dem Titel „Die Festlegung einer Überzeugung" abgedruckt in: *Schriften I* (hrsg. von K.-O. Apel), Frankfurt am Main 1967.

[12] Eine meisterhafte Kostprobe (und Fallstudie) dazu findet man im ersten Teil von G. Hessenbergs Abhandlung über Transzendenzbeweise: *Transzendenz von e und π*. Ein Beitrag zur Höheren Mathematik vom elementaren Standpunkt aus, 1. Auflage 1912; Nachdruck: Stuttgart 1965. – Grundlagenforschung und philosophische Standpunkte zur Mathematik werden aus soziologischem Blickwinkel erörtert in der monografisch angelegten Studie B. Heintz: *Die Innenwelt der Mathematik*. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin. Wien/New York 2000.

rationalen Räsonierens und Argumentierens; diese dienen unter anderem:

1. als Instrumentarium zur strukturellen Analyse und Prüfung von Schlüssen („ars iudicandi“) und
2. als Grundlage (meta-)theoretischer Untersuchungen formalisierter (axiomatischer) Theorien.

Es geht dabei keineswegs um die naive Empfehlung, Mathematiker sollten ihre Beweise mit Hilfe des Prädikatenkalküls verifizieren (wie dies Hersh suggeriert) und ebensowenig um den Versuch, den am Mathematikunterricht Beteiligten eine »formalistische Beweisauffassung«[13] überzustülpen.[14] – Mathematisches Denken geschieht stets auf der inhaltlichen Ebene. In der Logik werden Modelle entwickelt, welche die inferentielle Struktur dieses Denkens idealisierend abbilden – nicht anders als z. B. spieltheoretische Modelle Entsprechendes im ökonomischen Gebiet tun. Dass Modell und Realität nur in bestimmten (an ausgewählten Funktionszielen orientierten) Hinsichten übereinstimmen, ist Allgemeingut und gilt auch für die Modelle der Logik, die selbstredend das, was aus pragmatischer Perspektive sichtbar wird, nicht (jedenfalls nicht bevorzugt) wiedergeben. Eine Turing-Maschine hat wenig Ähnlichkeit mit realen Computern, ist dafür aber ein geeignetes abstraktes Modell für theoretische Untersuchungen über Berechenbarkeit. In analoger Weise liefert ein präzisierter Beweisbegriff ein Modell von dem, was die Stringenz einer Argumentation und damit ihre *Geltung* ausmacht. Nicht diese Geltung wird somit durch soziale Akte (wie Akzeptanz etc.) konstituiert, sondern die gemeinsame Überzeugung, dass eine vorliegende Argumentation Beweischarakter hat. Während Geltung besteht oder nicht, ist die auf pragmatischer Ebene gewonnene Überzeugung jederzeit revidierbar. Wie weit man sich bei der Herstellung einer gemeinsamen Überzeugung auf „inhaltlich-anschauliche“ Argumente verlassen kann, hängt nicht von der sozialen Gruppe ab, sondern vom Beweistext und -kontext (sowie der in Frage stehenden Aussage selbst). Bei Aussagen etwa, die sich später als unabhängig vom übrigen einschlägigen Satzbestand herausstellen (wie das Parallelenpostulat oder die Kontinuumshypothese), ist die »intuitive Kohärenz … begrifflicher Beziehungen«[15]

[13] Wittmann, E.; Müller, G.: Wann ist ein Beweis ein Beweis? In: P. Bender: *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis.* Festschrift für Heinrich Winter, Berlin 1988

[14] Dass nicht wenige praktizierende und angehende Lehrer(innen) vom „formalistischen“ Virus infiziert sind, welches dann rasch auch auf die Schülerschaft überspringt, ist eine immer wieder von Didaktikern beklagte Problemlage – merkwürdig genug, fällt sie doch in den Verantwortungsbereich der Fachdidaktik.

[15] Wittmann & Müller, loc. cit.

letztlich überhaupt nicht herzustellen (außer scheinhaft in Beweisen, die – bei hinlänglichem Erkenntnisinteresse – irgendwann falsifiziert werden). So verdeutlichen vor allem die Fälle, in denen Beweisbarkeit (unter bestimmten Annahmen) auszuschließen ist, dass Geltung ein objektiver, in logischen Beziehungen zu explizierender Sachverhalt ist.

5. — Zum Verständnis der Rolle und der Bedeutung der Logik erscheint es zweckmäßig, inhaltliche Beweise ihren formalen Pendants gegenüberzustellen. Unter einem *inhaltlichen* Beweis lässt sich ein gewöhnlicher Beweistext in mathematischer 'Umgangssprache' verstehen. Die Frage, ob die in ihm dargelegte Argumentation in irgendeinem Sinne „anschaulich“ gedeutet werden kann (z. B. durch Rückgriff auf geometrische Vorstellungen oder sprachliche Metaphern), ist dabei nicht ausschlaggebend. Man könnte einen Beweis *formal* nennen, wenn die Argumente in nennenswertem Umfang über explizite Anwendung logischer Schlussregeln dargeboten werden. Im Extremfall ist ein solcher Beweis (voll-)formalisiert, d. h. in eine Folge (oder Baumstruktur) einschlägiger wohlgeformter Formeln übersetzt, welche unter einen vorab präzisierten Beweisbegriff fällt.[16] Mit dem euklidischen Paradigma verträglich wäre auch eine abgeschwächte Fassung formaler Beweisdarstellung, die darauf verzichtet, evidente lokale Folgerungsbeziehungen zwischen Aussagen ausschließlich durch effektive Ableitungsregeln abzubilden (womit der übliche Rahmen der Logik erster Stufe überschritten werden könnte[17]).

In den Feldern von Forschung und Anwendung, Lehren und Lernen haben wir es grundsätzlich mit inhaltlichen Beweisen zu tun. Nur eine inhaltlich geführte Argumentation kann Bedeutungen vermitteln, über die sich Einsichten gewinnen lassen und durch die verstehbar wird, warum sich die Dinge so wie behauptet verhalten. Bedenkt man, dass sich derartige Zusammenhänge mit zunehmendem Formalisierungsgrad in ein Netz lokaler Inferenzen (bzw. Folgerungsbeziehungen) auflösen, aus denen sie (und die in sie hineingelegten Bedeutungen) nicht ohne weiteres wiederzugewinnen sind, so wird verständlich, weshalb formale Beweise in erster Linie als Gegenstände metatheoretischer Untersuchungen fungieren. Die Ergebnisse solcher Untersuchungen werden aber wiederum in üblicher Manier inhaltlich bewiesen; hierin unterscheidet sich die Logik nicht von anderen Gebieten der Mathematik. Ande-

---

[16] Einen solchen Beweis kennzeichnet Manin immerhin noch als »close approximation to the concept of an ideal mathematical proof«, loc. cit. S. 48.

[17] Vgl. etwa S. Shapiro: *Foundations without Foundationalism*. A Case for Second-Order Logic. Oxford 1991.

renfalls gliche das dem abwegigen Versuch, einen Schreibtischcomputer gegen eine Turing-Maschine zu tauschen.

Im Hinblick auf das euklidische Paradigma spielt es hingegen keine Rolle, ob man sich darin auf inhaltliche oder formal(isiert)e Beweise bezieht. Denn während diese sich in den aus Sicht der Pragmatik relevanten Aspekten unterscheiden, gilt das nicht bezüglich des in Geltungsfragen maßgeblichen Charakters der 'Strenge'. Strenge erlaubt Abstufungen allein in pragmatischer Sicht; hingegen sind, logisch betrachtet, formale Beweise nicht strenger als inhaltliche. Für die Gültigkeit eines Beweises ist es (außer in Zweifelsfällen) unerheblich, ob die in ihm gebildeten und verwendeten 'Ganzheiten' (Definitionen, Lemmata, Diagramme, etc.) bis hinein in letzte logische Feinschritte zergliedert werden oder nicht. Seit langem verfolgt die Beweistheorie selbst das Ziel, geeignete Beschreibungssysteme samt zugehöriger Modelle 'natürlichen' Schließens und Argumentierens zu entwickeln, die enger an inhaltlichen Beweisen und Fragen ihrer Verständlichkeit orientiert sind. Darin drückt sich die Überzeugung aus, ein inhaltlich dargebotener (fehlerfreier) Beweis lasse sich – jedenfalls im Prinzip – auch formal darstellen.

Gegen diesen (wenn man so will) logischen Kern des euklidischen Paradigmas wird gelegentlich vorgebracht, die Annahme einer Im-Prinzip-Formalisierbarkeit sei nichts anderes als ein »Glaubensakt«[18]. Allerdings wird überall, wo Modelle entwickelt und eingesetzt werden, unterstellt, die als wesentlich erachteten Sachverhalte, Prozesse etc. würden zwar vereinfacht, aber noch hinlänglich treu abgebildet. Unter komplexeren Realbedingungen ist eine solche Annahme nur begrenzt testbar, und ein Modell muss sich in immer neuen Situationen bewähren. Nach Hersh wäre das entsprechende Bewährungsfeld der Logik die schiere Masse inhaltlich bewiesener Lehrsätze.[19] Natürlich kann deren Formalisierung nicht einmal im Ansatz gelingen, zumal bereits einzelne Formalisierungen extreme Länge erreichen können. G. Boolos[20] gibt ein einfach gebautes Beispiel einer gültigen inhaltlichen Folgerung (aus einigen wenigen Formeln in der Sprache der Arithmetik erster Stufe), zu welcher ein korrespondierender Beweis innerhalb der Prädikatenlogik erster Stufe (aufgrund des hier gültigen Vollständigkeitssatzes) existiert. Obwohl der Beweis nicht sonderlich kompliziert ist, lässt sich zeigen, dass seine Mindestlänge – bedingt durch einen im Beweisverlauf sehr schnell wachsenden Term – die

[18] Bei Hersh, loc. cit., heißt es dazu: »To accept that a formal proof could be written, without seeing it written, is an act of faith.«

[19] »all the vast collections of accepted [sic!] theorems«, loc. cit. S. 391.

[20] A curious inference. *Journal of Philosophical Logic* 16 (1987)

Anzahl der Teilchen des bekannten Universums übertrifft. – Liefert dieses Beispiel nun ein Argument gegen die Formalisierbarkeit inhaltlicher Beweise? In der Tat ist der fragliche Beweis (erster Stufe) als konkretes Zeichengebilde nicht herstellbar. Doch besitzt er als gedankliches Objekt ein vergleichbares Hausrecht in der Mathematik wie Zahlen oder ideale geometrische Figuren. Eine große Zahl, z. B. 100^{100}, als Summe von lauter Einsen darzustellen, ist in Raum und Zeit ebenfalls ein Ding der Unmöglichkeit, ohne dass deswegen der theoretische Sachverhalt (die Darstellung $100^{100} = 1 + 1 + \ldots\ + 1$) bezweifelt würde. Und ähnlich wie die Potenz 100^{100} den Summenterm in abstrakter Weise repräsentiert, steht im Beispiel von Boolos der kurze Beweis zweiter Stufe stellvertretend für sein ‘unrealisierbares’ Pendant erster Stufe.

Die Formalisierung eines (inhaltlichen) Beweises kann auch aus anderen Gründen scheitern, z. B. weil sich bestimmte Begriffsbildungen oder Schlussweisen nicht in das zugrundeliegende Beschreibungssystem übersetzen lassen oder weil er schlicht fehlerhaft ist. Spricht man (wie Hersh es tut) dem logischen Räsonnement normative Kraft ab und gesteht der Logik nur die deskriptive Nachbereitung der von Mathematikern praktizierten Denkweisen zu, so käme – trotz des entstandenen Verdachtsmoments – der betreffende inhaltliche Beweis ungeschoren davon. Von dieser Warte aus ist es nicht einmal denkbar, dass eine Kritik an problematischen Prinzipien – wie sie z. B. Brouwer an der uneingeschränkten Anwendung des Tertium-non-datur geübt hat – aufrechterhalten und auf logischem Boden in ein anderes (konkurrierendes) Beweiskonzept umgesetzt wird.[21] In dem Maße, in dem die Bedeutung der Logik zurückgenommen wird, verliert auch der soziologische Akzeptanzbegriff sein inneres Regulativ (nämlich die Überprüfung der Beweise auf Folgerichtigkeit). Hersh krönt seine Variante von Akzeptanz gar mit einer Art von ästhetischem Kriterium, das es – ebenso vage wie dezisionistisch – ‘erlaubt’, korrekte Beweise zugunsten von schönen (aber inkorrekten) Beweisen zu verwerfen: Hat ein inhaltlicher Beweis schwerwiegende Mängel und ist gleichwohl schön, so werden ihn Mathematiker (laut Hersh) einem fehlerfreien, aber langweiligen Beweis vorziehen, und zwar aufgrund des Gefühls [sic!] »that if an idea is truly beautiful, it will somehow attain valid mathematical expression« (loc. cit. S. 394).

6. — Im Fazit der vorangegangenen Bemerkungen bleibt, in meinen Augen, das euklidische Paradigma als methodologische Leitidee der Mathematik un-

[21] Vgl. dazu die Empfehlung Manins, loc. cit. S. 48 f, bzgl. der von ihm so bezeichneten »degrees of proofness«.

beschadet bestehen. Die Geltung mathematischer Sätze ist nicht Ausdruck ihrer Plausibilität oder Schönheit und verdankt sich auch nicht dem Umstand, bisher noch nicht falsifiziert worden zu sein. Vielmehr ist sie in erster Linie an einen *objektiven Tatbestand* (und ihn sichernde rationale Argumentationsstandards) gebunden: auf inhaltlicher Ebene (semantisch) mittels logischer Folgerungsbeziehungen oder – beschränkt auf die semiotische Ebene eines Beschreibungssystems – durch mehr oder weniger formalisierte Deduktionen. – Diese logisch geprägte Sicht der Dinge ist nicht zwingend, aber doch *sinnstiftend und gut verträglich mit der mathematischen Praxis*. Einige Kritiker betrachten sie als fiktiv und richten ihr Augenmerk stattdessen beinahe ausschließlich auf die Pragmatik und die dort in Erscheinung tretenden „sozialen Prozesse" und Bedingtheiten der mathematischen Arbeitspraxis. Doch so bedeutsam und anregend diese Perspektive, u. a. in pädagogischer, psychologischer und soziologischer Hinsicht, auch sein mag, das in „Akzeptanz" gipfelnde Herstellen einer gemeinsamen Überzeugung wäre ohne die Ausrichtung auf objektive Geltung lediglich ein Insich-Übereinstimmen, das sich schon durch bloße Machtverhältnisse innerhalb einer Gruppe herbeiführen und (vorübergehend) stabilisieren lässt (»Methode der Autorität« bei Peirce). Demgegenüber benötigt wissenschaftliche Forschung eine Idee von objektiver Realität, nicht als ihr Ergebnis (d. h. als etwas, das sie nachweisen könnte), sondern als ihr Regulativ. – Schließlich gilt dies auch für den Mathematikunterricht, soweit er sich an das Bildungsziel hält, rationales Argumentieren bei Schülern in Gang zu setzen und zu entwickeln. Dabei stehen nicht Evidenzerlebnisse oder Konsensbildung im Vordergrund, sondern Zweifeln, Prüfen, schlussfolgerndes Begründen und gegenseitiges Mitteilen der Argumente, kurzum: das weite und offene Feld der Logik.

Auf der Suche nach der verlorenen Wirklichkeit[1]

Zu Herkunft und Bedeutung des Konstruktivismus in der Mathematik

O speculatore delle cose, non ti laldare di conoscere le cose che ordinariamente per se medesima la natura conduce. Ma rallegrati di conoscere il fine di quelle cose che son disegnate dalla mente tua.

LEONARDO DA VINCI

Über welche Dinge redet die Mathematik?

Um die Frage nach den Dingen (im Allgemeinen) und ihrer Erkennbarkeit kümmert sich seit je die Philosophie. Sie fragt erkenntniskritisch nach der Möglichkeit von Vorstellungen, die auf etwas verweisen, das in der (naiven) Meinung des Vorstellenden unabhängig von ihm („an sich") besteht, ebenso wie nach den allgemeinsten Gesetzlichkeiten dieser als „objektiv" vorgestellten Welt. Diese scheint uns ohne unser Zutun als Wirklichkeit gegeben. Daneben – oder besser: darin – gibt es „Welten", die vom Menschen gemacht wurden.

Leonardo da Vinci denkt in seinen Tagebüchern[2] über die Erkennbarkeit des dem Menschen Gegebenen und des von ihm Gemachten explizit nach und rät allen Wissbegierigen zur Bescheidenheit (vgl. die im Motto zitierte Passage, hier ins Deutsche übersetzt):

> O Erforscher der Dinge, rühme dich nicht, die Dinge zu kennen, welche die Natur gewöhnlich durch sich selbst vollbringt. Freue dich dagegen, den Zweck jener Dinge zu kennen, die von deinem Geist entworfen sind.

---

[1] Vortrag im Rahmen einer Ringvorlesung unter dem Titel *Konstruktivismus in den Wissenschaften. Neues Paradigma oder alter Wein in neuen Schläuchen?* an der Universität Flensburg (Winter 2001/2002), veröffentlicht in der *Zeitschrift für Kultur- und Bildungswissenschaften*, Heft 14 (2003), herausgeg. von A. von Prondczynsky.

[2] Ash. G. 47 r.

Sind nun die Dinge, über welche die Mathematik redet, jene *cose che son disegnate dalla mente tua*, von denen Leonardo spricht? Dies wäre schon eine ziemlich moderne, dem Konstruktivismus nahestehende Auffassung. Ihren Gegenpol bildet die auf Platon zurückgehende Ansicht, nach der die Realien der Mathematik zu einer objektiven Sphäre gehören: unabhängig von den Menschen, die sich mit ihnen beschäftigen.

Die Frage nach der mathematischen Gegenstandswelt ist nicht leicht zu beantworten. Als einzige unter den Wissenschaften untersucht die Mathematik Objekte von idealer Beschaffenheit (z. B. geometrische Geraden: nach beiden Seiten hin unbegrenzte, zudem „unendlich dünne" Gebilde); auch geht sie mit nicht-endlichen Prozessen um (z. B. Grenzübergänge der Analysis). Wie ist es möglich, Erkenntnisse über solche Dinge nicht nur zu gewinnen, sondern auch noch streng (in einem „zwingenden" Diskurs) zu beweisen, der ihnen zeitlose Gültigkeit verleiht (oder zu verleihen scheint)? – Diese Frage ähnelt offenbar wenig einem typischen innermathematischen Problem, und bis heute haben alle Versuche, die Mathematiker und Philosophen zu ihrer Beantwortung unternommen haben, nicht zu eindeutigen und stabilen Ergebnissen geführt. Vielmehr sehen wir uns in eine unabschließbare Sinndebatte versetzt, die im Laufe der Zeit immer neue Ismen hervorgebracht hat; sie liefert den geistesgeschichtlichen Hintergrund, vor dem im Folgenden die Idee der Konstruktivität und die Rolle des Konstruktivismus in der Mathematik verständlich gemacht werden sollen.

Überblick: Geschichte einer Enttäuschung

Ausgangspunkt ist Platons Auffassung, das mathematische Wissen sei zunächst verborgen, könne aber jedem Menschen mit etwas Hilfe (Mäeutik, Hebammenkunst) bewusst gemacht werden. Berühmt ist sein Dialog *Menon*, in dem er Sokrates mit einem Sklaven über die Aufgabe sprechen lässt, ein gegebenes Quadrat zu verdoppeln. Schließlich gelangt der Sklave über eine wohlinszenierte Reihe von Stützfragen – Platon meint: durch eine Art von Erinnerung (Anamnesis) – zur gewünschten Einsicht in die Lösung. Erkennen heißt hier: Teilhabe an einer Welt reiner Gedankendinge (Ideen) *hinter* den wechselnden Erscheinungen.

Eine solche statische Sicht – mag sie der Mathematik auch zu höheren Weihen verhelfen – verfehlt gleichwohl die reale, gar nicht kontemplative Praxis. Die wenigsten mathematischen Resultate fallen geradewegs vom Platonischen Ideen-Himmel; vielmehr entstehen sie durch mühevolle Arbeit, Irrtümer und ihre Beseitigung eingeschlossen, und haben sich im gemeinschaftlichen Diskurs aller am Erkenntnisprozess Beteiligten zu behaupten. Die geschichtliche Entwicklung der Mathematik belegt denn auch deutlich, dass die Inanspruchnahme von Anschauung („Wesensschau“, „Evidenz“, u. ä.) immer mehr zurückgedrängt wurde zugunsten von Prozessen der Versprachlichung und Formalisierung – Erkenntnismittel, die im mathematischen Diskurs (und das heißt vor allem: beim *Beweisen*) benötigt werden. Damit geht der Verlust gegenständlicher Bedeutungen einher, die – zuvor als gleichsam naturgegeben den Begriffen hinterlegt – nun nicht länger gebraucht werden. Ihren Höhepunkt erreicht diese Entwicklung im *Formalismus*. Nach dieser Auffassung ist die Mathematik ein formales (axiomatisches) System, in das man „von außen“ nicht hineinargumentieren kann (schon gar nicht philosophisch). David Hilbert pries es als »Cantors Paradies«, aus dem man sich nicht vertreiben lassen wolle. Die Anspielung gilt konstruktivistischen (und intuitionistischen) Kritikern des Formalismus, die glaubten, bestimmte mathematische Gegenstandsarten (Zahlen, Kontinua, etc.) sollten aus einem anschaulichen Substrat heraus konstituiert werden. Dieser Vorstoß hatte letztlich keinen nachhaltigen Erfolg. Triumphierte noch in der Mitte des 20. Jahrhunderts eine strukturalistische Spielart des Formalismus (die französische Gruppe ‘Bourbaki’), so waltet heute, in den postmodernen Werkstätten allseitig einsetzbarer Modellschreiner, ein pragmatisch gemäßigter, pluralistischer und instrumentalistischer Formalismus.

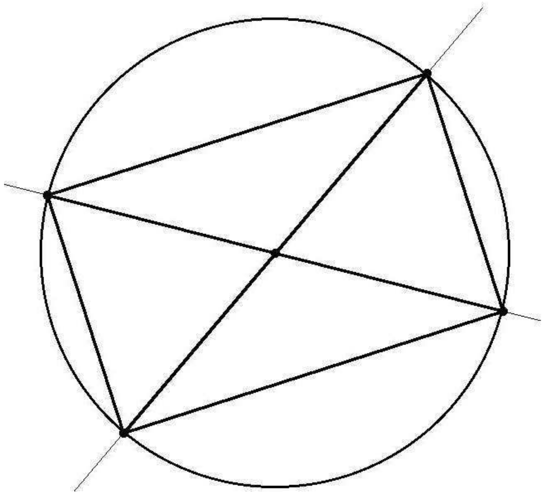
Philosophische Betrachter mögen die hier angedeutete Geschichte als insgesamt enttäuschend empfinden, ist sie doch ein desillusionierender Abstieg von der Höhe des platonischen Himmels hinab in die Niederungen eines Formalismus, der auf Praktikabilität Wert legt und Grundlagenfragen weitgehend ausklammert. Konstruktivistische Gegenentwürfe vermochten diesen Prozess nicht aufzuhalten, allenfalls zu verlangsamen. Hermann Weyl, der 1930 Nachfolger Hilberts wurde und zunächst intuitionistischen Ideen nahestand, zog in späteren Jahren das (auch die Physik einbeziehende) Fazit: »We are left with our symbols.«

In der Tat, am Ende hat man etwas anderes erreicht als ursprünglich beabsichtigt. Gleichzeitig zeigen sich darin aber auch Stärke und Erfolg der Mathematik, denn *Ent-täuschung* (jetzt mit Bindestrich) heißt ja auch: Befreiung von täuschenden Bestandteilen. Und eben dies ist ein wesentlicher Zug mathematischer Erkenntnisfindung und -fixierung: Man beseitigt solange Falsches, Unsicheres, Undeutliches und Vages, bis alle am Erkenntnisprozess Beteiligten das Ergebnis annehmen können.

Es sollen nun einige Episoden und Facetten dieser Geschichte verdeutlichen, inwiefern Anschauung als Erkenntniskategorie durch Prozesse der Enttäuschung und die damit einhergehende Formalisierung von Begriffen und Argumentationen zu relativieren oder außer Kraft zu setzen war. In einem historisch späten Stadium dieser Entwicklung treten konstruktivistische Ideen als Gegenspieler auf den Plan – mit bescheidenem Erfolg.

Anschauung als Erkenntnisquelle

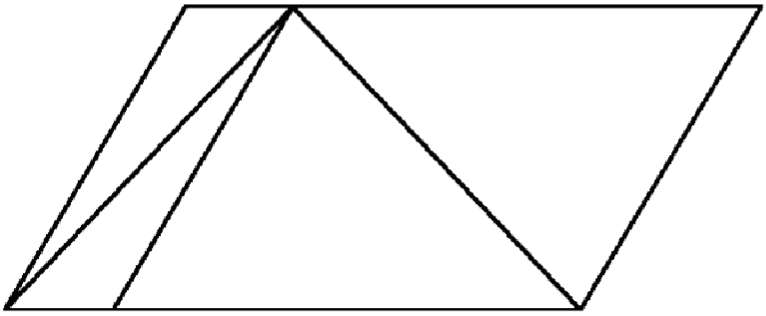
Die Geometrie des Thales (um 600 v. Chr.) war noch nicht deduktiv. Ihre Erkenntnisse entspringen naiver (zum Teil aber schon „gereinigter") anschaulicher Evidenz. Als Beispiel diene die klassische Figur 1, in der zwei beliebige Geraden durch den Mittelpunkt eines Kreises führen. Durch die Schnittpunkte auf dem Kreis entstehen allerlei Teilfiguren: zwei Paare (deckungs)gleicher gleichschenkliger Dreiecke, vier gleiche rechtwinklige Dreiecke, ein Rechteck. Man überzeugt sich unschwer davon, dass bloßes Beobachten, d. h. Vergegenwärtigung in der Anschauung, keineswegs genügt, um einzusehen, dass an den Ecken auf dem Kreis stets rechte Winkel entstehen (dies der Inhalt des allen Schülern bekannten Satz des Thales).



Figur 1

Dass wir uns darüberhinaus auf die naive Beobachtung (sinnliche Wahrnehmung allein) nicht verlassen können, erfahren wir bei vielen, auch alltäglichen Gelegenheiten. Die Gestalt- und Wahrnehmungspsychologie illustriert das Problem durch eindrucksvolle Täuschungsfiguren, z. B. das bekannte Parallelogramm nach Sander (Figur 2). Es enthält zwei (diagonale) Strecken, die wir fälschlicherweise, bedingt durch die Umgebung, als verschieden lang wahrnehmen.

Schon Zenon von Elea (5. Jahrhundert v. Chr.) ist über eine Kritik der sinnlichen Wahrnehmung weit hinausgegangen, als er sich anschickte, den Raum, das anschauliche Kontinuum, in dem wir uns bewegen und Bewegungen anderer Körper wahrnehmen, hinsichtlich seines Realitätsgehalts ein für allemal verdächtig zu machen. Scharfsinnig ist sein keineswegs leicht aus dem Weg



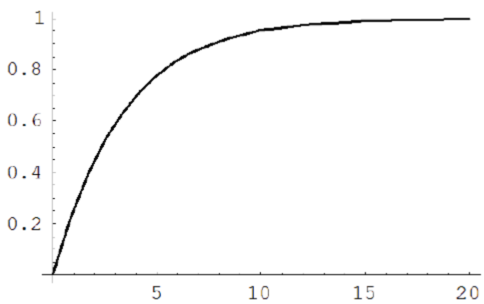
Figur 2

zu räumendes Paradoxon von der Unmöglichkeit der Bewegung. Danach kann ein Stein nicht zu Boden fallen, ja nicht einmal seine Fallbewegung beginnen, weil er ja immer schon zuvor den Mittelpunkt der als nächstes zu durchlaufenden Fallstrecke erreichen muss.

Folgen wir dem Mathematikhistoriker Szabó (*Anfänge der griechischen Mathematik*, München/Wien 1969), so darf in Zenons Anschauungskritik eine treibende Kraft gesehen werden, die weg vom anschaulich-empirischen Erkennen (dem die thaletische Geometrie noch verhaftet war) hin zum *diskursiven* und dann *deduktiv begründenden* Denken (Argumentieren und Beweisen) geführt hat.

Monster: das ursprünglich nicht Gemeinte

Die mathematische Begriffsbildung hat immer wieder systembedingt mit so genannten *Monstern* zu tun: Objekten oder Sachverhalten, die man eigentlich nicht unter einen Begriff bzw. unter einen allgemeinen Satz fassen möchte, die aber gewissermaßen ungewollt als „pathologische" Grenz- und Sonderfälle auftauchen. Am Begriff der „stetigen Kurve" lässt sich das gut verdeutlichen. Seit dem 17. Jahrhundert hat sich die Analysis mit vielerlei stetigen Veränderungen in der unbelebten Natur befasst und deren Verläufe analytisch-algebraisch durch Funktionen (graphisch durch ebene Kurven) dargestellt. Ein einfaches Beispiel dafür bietet der Geschwindigkeitsverlauf eines Körpers, der in einer Flüssigkeit unter dem Einfluss der Schwerkraft gleichmäßig beschleunigt nach unten sinkt (Figur 3).

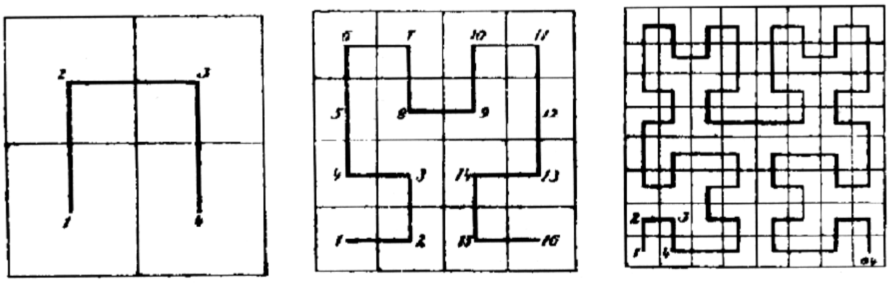


Figur 3

Ein solche glatte Kurve mag anfangs zu der Vorstellung geführt haben, den Graphen einer stetigen Funktion könne man „in einem Zug" mit der Hand zeichnen: *libero manu ductu* heißt es noch bei Euler. In dem Moment jedoch, da man beweisbare Einsichten über Stetigkeit benötigt, gibt eine solche anschaulich-deskriptive (und zudem auf außermathematische Mittel wie eine „Hand“ zurückgreifende) Erläuterung nichts her.

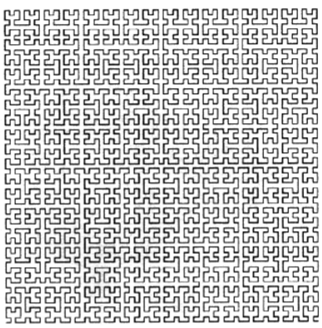
Für die genaue Analyse – das ist typisch für die Mathematik – benötigt man eine Definition, die ausschließlich *Sprachmittel* verwendet. Die lag keineswegs nahe; man musste ja zunächst eine neue intuitive Idee von der Stetigkeit entwickeln (etwa die, dass der Funktionsverlauf ein vorgebbares Wertintervall nicht verlässt, wenn man ihn in einem geeignet kleinen Zeitintervall untersucht – Cauchy und Bolzano haben schließlich im 19. Jahrhundert daraus eine exakte Definition gewonnen).

Nach der Ent-täuschung im positiven Sinn folgt nicht selten auch eine Enttäuschung im negativen Sinn, hier: das Auftauchen von Beispielen („Monstern“), die zwar unter die exakte Definition fallen, jedoch in anderen Hinsichten nicht mehr dem intuitiven Bild entsprechen, das man sich ursprünglich von der Sache gemacht hat. Kann man sich beispielsweise vorstellen, dass eine stetige Kurve ein Quadrat vollständig ausfüllt? – Eigentlich nicht. Dennoch ist dies möglich, wie eine von Hilbert ersonnene Kurve zeigt (Figur 4a).



Figur 4a (aus Hilberts Originalarbeit von 1890)

Nach ein paar weiteren Wiederholungsschritten erhält man das in Figur 4b gezeigte Bild.

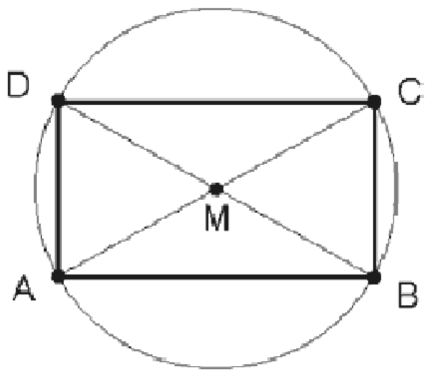


Figur 4b

Die eigentliche „Kurve“ entsteht schließlich als Grenzgebilde der hier gezeigten Mäander. Es sieht aus wie ein schwarzes Quadrat – wohlgemerkt: es sieht so aus, aber es *ist* kein schwarzes Quadrat! – Hier wird gleich mehrfach das Alltagsverständnis von „Kurve“, „Stetigkeit“ und „Dimension“ herausgefordert.

Papier-und-Schere-Geometrie?

Auch scheinbar einfache Sachverhalte können bei genauer Betrachtung paradoxe Ergebnisse an den Tag bringen. Kehren wir noch einmal zurück zu unserer Thales-Figur (Figur 5) und lenken das Augenmerk auf die beiden rechtwinkligen Dreiecke ACD und CAB. Diese sind kongruent, d. h. in moderner Abbildungssprache ausgedrückt: eine Halbdrehung um M bringt die beiden Dreiecke zur Deckung.



Figur 5

Wenn man will, kann man diese Einsicht auf einer visuell-materiellen Stufe nachvollziehen, etwa indem man ein Rechteck aus Papier entlang seiner Diagonalen mit der Schere durchschneidet und die beiden Teildreiecke übereinanderlegt. Soweit ist alles in Ordnung. Allerdings nur, wenn wir nicht genau danach fragen, inwieweit die Deckungsgleichheit der Dreiecke und die Papier-und-Schere-Operation einander entsprechen. Von Flächenstücken, die sich durch eine Bewegung zur Deckung bringen lassen, kann in der Thales-Figur keine Rede sein. Vielmehr liegen die beiden Dreiecke, um die es geht, nicht als getrennte Stücke (und schon gar nicht als papierdicke Körper materialisiert) übereinander, sondern verharren als *abgegrenzte Teile innerhalb eines statischen Ganzen*, stehen lediglich in einer über die Symmetrie in der Gesamtfigur ausgedrückten Beziehung zueinander.

Tatsächlich hält die durch die Papier-und-Schere-Operation suggerierte Evidenz, ein Rechteck zerfalle durch einen diagonalen Schnitt in zwei kongruente Teile, einer begrifflichen Analyse nicht stand. In der Endlage (Deckung) liegen entsprechende Punkte der beiden Dreiecke übereinander. Das lässt sich etwa mit Hilfe einer Nadel demonstrieren, die beide Papierdreiecke durchsticht. In der *Praxis* der „Papier-und-Schere-Geometrie“ ist das kein Problem, solange wir mit unseren Papierfiguren hantieren. In der *Theorie* jedoch, d. h. in der Betrachtung der reinen Formen, treffen wir auf eine Schwierigkeit: Was ist mit dem Teil der Figur, entlang dessen wir den Schnitt getätigt haben? Gehört die gemeinsame Hypotenuse zum Dreieck ACD, so fehlt sie dem Dreieck CAB (dem damit auch die Ecken A und C abhanden gekommen wären). In der Papierwelt kann ein streckendicker Überstand an einer Figur natürlich nicht entdeckt werden.

Aber vielleicht lässt sich das Problem so lösen, dass die Halbdiagonale AM zu dem einen, das übrig bleibende Stück MC zum anderen Dreieck hinzugenommen wird? In der Tat entsprechen sich diese beiden Hälften in der endgültigen Passlage: Der Punkt C liegt auf A – aber welcher Punkt des Dreiecks CAB liegt auf M (wenn wir annehmen, dass die ganze Strecke AM zu Dreieck ACD gehört)? Es könnte nur der Punkt M selbst sein, der jedoch nicht zum Dreieck CAB gehört. Ausgerechnet am (nicht weiter aufteilbaren) Symmetriezentrum der Thales-Figur scheitert also der Versuch, die scheinbar konkret-anschauliche Demonstration der Zerlegung eines Rechtecks in zwei deckungsgleiche Teile gedanklich-begrifflich nachzuvollziehen. In der Form ist sie denn auch unmöglich.

Die hier praktizierte Mengengeometrie, die Figuren als die Gesamtheiten ihrer Punkte auffasst, kennt noch weitere Paradoxa von ganz anderem Kaliber. Zum Beispiel kann eine (dreidimensionale) Vollkugel so in endlich viele Teile zerlegt werden, dass sich aus ihnen zwei Vollkugeln zusammensetzen lassen, die beide denselben Radius haben wie die Ausgangskugel (Banach-Tarski-Paradoxon).

Es gibt nicht nur eine Geometrie

In allen (ebenen) Dreiecken hat die Winkelsumme denselben konstanten Wert (180°). In der Schule zeigt man dies, indem man durch eine Ecke des Dreiecks eine (die einzige!) Parallele zur gegenüberliegenden Seite zieht und die so entstehenden Wechselwinkel betrachtet. Und woher weiß man, dass es (in der Ebene) zu einer Geraden und einem beliebigen Punkt durch ihn genau eine parallele Gerade gibt? Dieses Parallelenaxiom hat schon Euklid beweisen wollen; jedenfalls führt er es unter seinen Postulaten für geometrische Konstruktionen auf. »Zwei Jahrtausende und mehr« – so meinte einmal ein bekannter Mathematikhistoriker – »haben an dieser zähen Speise gekaut«. Am Ende war klar: Das Parallelenaxiom ist unabhängig von den übrigen Axiomen der Geometrie, was heißt: es kann nicht aus ihnen abgeleitet werden (und auch nicht seine Negation). Zunächst entdeckten Anfang des 19. Jahrhunderts unabhängig voneinander N. I. Lobatschewski und J. Bolyai, dass man eine sog. absolute Geometrie aufbauen kann, in der alle Axiome außer dem Parallelenaxiom erfüllt sind. Später kamen dann Systeme hinzu, bei denen mehr als eine Parallele existiert.

Die sog. nicht-euklidischen Geometrien wurden erst möglich, nachdem man so weit war, sich im geometrischen Denken nicht mehr auf den Raum der Erfahrungswelt oder einen vermeintlich objektiven (physikalisch gedachten) Anschauungsraum zu beziehen. Stattdessen erlaubt man sich eine Uminterpretation der geometrischen Grundbegriffe, z. B. auf der Kugel: Punkte sind auch dort Punkte, Geraden hingegen Großkreise um das Kugelzentrum. Da zwei Großkreise sich immer in antipodischen Punkten schneiden, ist das Parallelenaxiom verletzt. (Natürlich muss noch nachgewiesen werden, dass im übrigen die absolute Geometrie gilt.)

Neue Bedeutungen, die nicht willkürlich, aber im Prinzip *frei* zugewiesen werden können, ersetzen auf diese Weise das frühere anschauliche Substrat der Grundbegriffe. Der nächste, radikalere Schritt besteht darin, eine Theorie von jeglicher Bedeutungszuweisung (Interpretation) abzulösen. Ihren Sinn erhalten die Begriffe dann lediglich durch das, was man *Gebrauchsverstehen* nennen könnte. Euklid hatte noch zu erklären versucht, was ein Punkt, was eine Gerade eigentlich, d. h. ihrem Wesen nach sei: *Ein Punkt ist, was keine Teile hat*, und dgl. mehr. Um 1900 wird diese Form essentialistischer Axiomatik endgültig fallengelassen. Werden Sätze in der Mathematik bewiesen, dann muss man höchstens von der Tatsache (Annahme) Gebrauch machen, dass durch zwei Punkte genau eine Gerade verläuft oder dass es drei Punkte gibt, die nicht auf einer Geraden liegen, usw. Was man nicht wissen muss, ist, was ein Punkt ist oder gar wie Punkte, Geraden, Ebenen etc. „aussehen“.

In seinen *Grundlagen der Geometrie* (1899) beginnt Hilbert folgerichtig mit der Erklärung: »Wir denken uns drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des *ersten* Systems nennen wir *Punkte* und bezeichnen sie mit $A, B, C, \ldots$; die Dinge des *zweiten* Systems nennen wir *Geraden* … « usw. Im Wartesaal eines Berliner Bahnhofs soll Hilbert das so ausgedrückt haben: *Man muss jederzeit an Stelle von ‘Punkte, Geraden, Ebenen’ ‘Tische, Stühle, Bierseidel’ sagen können* (nach der Hilbert-Biografie von O. Blumenthal). – Für mathematische Objekte wird auf die Forderung verzichtet, sie müssten anschaubar sein. Mehr noch, es wird nicht einmal vorausgesetzt, dass es das, worüber Sätze ausgesagt und bewiesen werden, überhaupt gibt.

Abstraktion & Co.

Die vorangegangenen Schilderungen, die sich mühelos um weitere Beispiele ergänzen ließen, illustrieren, wie sehr das mathematische Denken durch *Rück-*

zug aus der Realität geprägt ist. Das bedeutet nicht, die Funktionen der Anschauung, etwa als Anstoß und Leitfaden mathematischer Erkenntnis, sollten bestritten werden; die Zeugnisse der Vergangenheit belegen ihre unentbehrliche heuristische Rolle zur Genüge. Allerdings relativiert sich die erkenntnistheoretische Stellung der Anschauung durch die sich im 20. Jahrhundert immer mehr herausschälende Einsicht, dass *Mathematik in ihrem Kern abstraktes Wissen* ist. So meint A. N. Whitehead: »Das Wesentliche an der Mathematik ist, daß wir uns in ihr immer vom besonderen Beispiel und sogar von den einzelnen Arten von Dingen entledigt haben« (*Wissenschaft und moderne Welt*, Zürich 1949).

Abstraktion ist ein zentrales Instrument mathematischer Erkenntnis, das gerade durch die mit seiner Hilfe vollzogene *Distanzierung* vielfältig anwendbare Theorien entstehen lässt. Dazu gesellen sich aber auch andere Arten von Handlungen, die eine konstitutive Rolle im mathematischen Erkenntnisprozess spielen: das Eindeutig-Machen (Desambiguierung), die Reinigung (Purifikation der Anschauung), das Aufstellen von Forderungen (Idealisierung), die Formalisierung (Beschreiben in symbolischer Sprache), die Systematisierung (Beweisen, Vereinheitlichen durch Systembildung) – wenn man so will: alle Zutaten, die für Ent-täuschung im doppelten Wortsinn sorgen.

Axiomatische Methode, Formalismus und Cantors Paradies

Hilbert hat die axiomatische Methode zu dem geschmeidigen und erfolgreichen Werkzeug gemacht, das sie bis heute geblieben ist. Der Grundgedanke ist einfach, auch wenn er sich im Einzelfall erst nach oft langen und mühevollen Vorarbeiten umsetzen lässt:

1. Man legt bestimmte Begriffe als *Grundbegriffe* fest, die undefiniert bleiben, und führt alle anderen Begriffe auf die Grundbegriffe zurück.
2. Man legt bestimmte Aussagen als *Axiome* fest, die unbewiesen bleiben, und leitet alle anderen Aussagen aus den Axiomen her.

Grundbegriffe und Axiome haben nun jegliche Emphase verloren: In einem Grundbegriff zeigt sich nicht mehr das „Wesen“ einer Sache, und Axiome müssen nicht mehr „evident“ sein. Die einzige Forderung, die Hilbert an ein Axiomensystem richtet, ist die Widerspruchsfreiheit.

Die Geometrie ist eine axiomatische Theorie *par excellence*. Daran erinnert der alte Ausdruck „more geometrico“, der sich verallgemeinernd auf jedes axiomatische Vorgehen nach dem Vorbild der Geometrie bezieht. Eben dies wollte Hilbert: die axiomatische Methode auf alle Wissensbereiche anwenden, z. B. auch auf die Mechanik und andere Gebiete der Physik.

Bis etwa 1920 gab es neben der Geometrie eine Reihe weiterer axiomatischer Ansätze in der Mathematik, z. B. die *Principia Mathematica* (Mathematik als System der Klassenlogik: Russell und Whitehead), die Arithmetik (nach Peano, aber auch Teile der *Principia Mathematica*), die Mengenlehre (nach Zermelo, Fraenkel, von Neumann).

Man wundert sich zunächst darüber, dass es sinnvoll sein soll, die Arithmetik (Lehre von den Zahlen, insbesondere den natürlichen Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots$) zu axiomatisieren. Sind die natürlichen Zahlen denn nicht das Einfachste und Klarste, was die Mathematik zu bieten hat? Dem Mathematiker L. Kronecker wird der Ausspruch zugeschrieben: »Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk«.

Tatsächlich stellt die Axiomatisierung der Arithmetik eine theoretisch interessante Aufgabe dar. Dies hängt mit dem Induktionsprinzip zusammen (auch bekannt als Methode der „vollständigen Induktion"). Es wird bei Aussagen verwendet, deren Gültigkeit für alle natürlichen Zahlen bewiesen werden soll. Dabei zeigt sich, dass sich die Induktion nicht durch ein einzelnes Axiom symbolisieren lässt, es sei denn, man erlaubt in den Sprachmitteln den Bezug (nicht nur auf Zahlen, sondern – auf der sog. zweiten Stufe – auch) auf *Eigenschaften* bzw. *Mengen* von Zahlen. Dies hat dann sogar den Vorteil, dass das Axiomensystem seinen Erfüllungsbereich (= semantisches Modell) bis auf Isomorphie eindeutig festlegt. Der Nachteil der zweiten Stufe: Es steht kein effektiver, d. h. durch ein Regelsystem beschreibbarer Folgerungsbegriff zu Verfügung. – So wie Hilbert sein formalistisches Programm verstanden haben wollte, ist diese Option unakzeptabel.

Auch die Mengenlehre wurde erst spät axiomatisiert. Ähnlich wie bei der Arithmetik ist man hier genötigt, ein *unendliches* Axiomensystem aufzustellen: endlich viele Axiome plus mindestens ein sog. Axiomenschema, in das beliebige einschlägige Formeln (erster Stufe) eingesetzt werden können. Die mathematische Grundlagenforschung, die sich mit diesen Fragen beschäftigt, hat der Mengenlehre eine ausgezeichnete Stellung eingeräumt. Der Grund dafür liegt in der Möglichkeit, eine Theorie auf eine andere zurückzuführen: Die Geometrie kann auf die Arithmetik zurückgeführt werden; die Arithmetik (und die Analysis) kann auf die Mengenlehre zurückgeführt werden.

Lässt sich sagen, was eine Menge ist? Georg Cantor, der Begründer der Mengenlehre in ihrer „naiven" (d. i. nicht-axiomatisierten) Gestalt, hatte anfänglich essentialistische Begriffsbestimmungen versucht, etwa der Art: »Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten unseres Denkens zu einem Ganzen«. Doch aus späterer Zeit berichtet eine Anekdote von einer Unterhaltung zwischen Cantor und Dedekind, in der beide über ihr intuitives Verständnis von Mengen gesprochen haben. Dedekind meinte, er stelle sich eine Menge wie einen Sack mit Dingen darin vor. Daraufhin soll Cantor sich erhoben haben mit der pathetisch ausgebrachten Bemerkung, eine Menge sei für ihn ein Abgrund.

Vielleicht gilt ähnliches für die ganze Mathematik: Je mehr wir uns ihren Gründen nähern, desto mehr erweisen sich diese als wahre Abgründe.

Um nicht in die Abgründe der Mathematik schauen zu müssen, hatte Hilbert sich das folgende *formalistische Rechtfertigungsprogramm* zurechtgelegt: Die gesamte Mathematik (etwa in Gestalt einer hinlänglich starken Theorie wie der Mengenlehre, auf die sich „alles Übrige" zurückführen lässt) wird der axiomatischen Methode unterworfen, d. h. durch ein Axiomensystem (mit undefinierten Grundbegriffen und unbewiesenen Axiomen) *in nuce* dargestellt. Dieses axiomatische Gesamtsystem der Mathematik wird konsequent formalisiert, genauer: in der Sprache der elementaren Prädikatenlogik (erster Stufe) wiedergegeben, für die seit der Wende zum 20. Jahrhundert ein vollständiges und effektives System von Ableitungsregeln (zur Gewinnung aller Folgerungen aus den Axiomen) verfügbar ist. Alle philosophischen oder sonstigen von außen an die Mathematik herangetragenen Fragen werden in einer sog. Metamathematik behandelt, d. i. ein inhaltlich aufgefasster, gleichsam residualer Teil der Mathematik, dessen Gegenstand das zuvor hergestellte semiotische Abbild der „klassischen" Mathematik ist. Die einzige noch zulässige, aber auch entscheidende Rechtfertigungsfrage ist die nach der Widerspruchsfreiheit des Gesamtsystems. Eine eigens dazu geschaffene Beweistheorie hat die Aufgabe, diesen Nachweis der Widerspruchsfreiheit zu erbringen.

Während Cantor selbst sich im platonischen Himmel heimisch gefühlt haben dürfte, ist »Cantors Paradies«, das Hilbert so nennt, ein virtuelles Gehege für die gesamte klassische Mathematik – virtuell, weil wir es lediglich mit einem semiotischen Abbild zu tun haben: Über die realen Zeichen kann man sich verständigen, das Abgebildete jedoch, d. h. „die Mathematik" selbst, bleibt dem allgemeinen Diskurs entzogen.

Diese zugespitzte Grundlagendoktrin, die Hilbert mit seiner Metamathematik verband, scheiterte, wie wir sehen werden, gleich mehrfach. Sie ist jedoch nicht ineins zu setzen mit der formal-axiomatischen Methode, die nicht davon abhängt, dass „die Mathematik" als ein monolithisches Gesamtsystem formalisierbar ist.

Vertreibung aus dem Paradies

Die beiden berühmten Unvollständigkeitssätze, die Kurt Gödel im Jahre 1931 veröffentlichte, bedeuteten zunächst einmal, dass Hilberts Rechtfertigungsprogramm in seiner ursprünglichen Form nicht aufrechtzuerhalten war. Das zweite dieser Resultate besagt nämlich: Die Widerspruchsfreiheit eines hinreichend ausdrucksstarken Systems S (wie Arithmetik oder Mengenlehre) kann nicht mit den Mitteln von S bewiesen werden. Eine Möglichkeit, dies etwa für die Arithmetik (oder die Analysis) zu umgehen, besteht darin, die Widerspruchsfreiheit in einer stärkeren Metatheorie nachzuweisen, die sich dennoch inhaltlich rechtfertigen lässt (etwa aufgrund ihrer Konstruktivität, so 1936 geschehen durch G. Gentzen). Und schließlich: Abgesehen von der Frage, ob ein Widerspruchsfreiheitsbeweis möglich ist, bleibt immer noch das *Problem seiner Sinnhaftigkeit*: Was würde es am Ende bedeuten, wenn man ein Axiomensystem als konsistent nachgewiesen hat?[3] – Was wäre, umgekehrt, eigentlich so schlimm daran, einen Widerspruch abzuleiten? Man könnte so argumentieren: Mit der Zeichenreihe '$0 \neq 0$' sind alle Formeln beweisbar, und damit würde die Analogie (!) zu einer inhaltlichen Theorie zerstört, in der man zwischen Wahr und Falsch unterscheiden kann. Es gäbe dann nicht einmal die *logische* Möglichkeit einer solchen Theorie. Das scheint für Hilbert schwerer zu wiegen als der Mathematik ihre Inhaltlichkeit abzusprechen.

Die formalistische Axiomatik hat ihre ganz spezifischen Monster: sogenannte Non-Standard-Theorien. Man darf sich das ungefähr so vorstellen: Mit einer formalisierten Theorie (wie der euklidischen Geometrie, Arithmetik oder Mengenlehre) sollen durch die Axiome die Grundbegriffe in ihrem wechselseitig verflochtenen Gebrauch so festgelegt werden, dass – abgesehen von Umbenennungen der zugehörigen Objekte – nur *ein* Erfüllungsbereich (semantisches Modell) möglich ist, in dem sämtliche Axiome (und damit auch alle logischen Folgerungen aus ihnen) gültig sind. Eine solche Theorie heißt kategorisch.

Auch in dieser Hinsicht wurde das formalistische Wissenschaftskonzept der Mathematik enttäuscht und eingeschränkt. Schon seit den Untersuchungen von Löwenheim und Skolem (in den 1920-er Jahren) weiß man, dass Arithmetik und Mengenlehre in ihren Formalisierungen erster Stufe nicht-kategorisch

[3] Vgl. dazu A. Schreiber: *Theorie und Rechtfertigung*. Braunschweig 1975.

sind, d. h. eine Erfüllung in Bereichen erlauben, deren Struktur und Eigenarten als Nicht-Standard (weil „ursprünglich so nicht gemeint“) anzusehen sind.

In der axiomatischen Mengenlehre ergibt sich dabei eine paradox anmutende Situation. Cantors klassische Theorie war ursprünglich angetreten, unendliche »Mannigfaltigkeiten« zu erforschen und darzutun, in welcher bis dahin für nicht möglich gehaltenen Differenzierung das Unendliche sich entfaltet. Aus dem einfachen Zählprozess $0, 1, 2, 3, \ldots$ ist uns das sog. abzählbar Unendliche vertraut (hier aktual, d. h. als abgeschlossene Gesamtheit aufgefasst). Das Kontinuum, etwa in Gestalt einer aus Punkten zusammengesetzt gedachten Strecke, ist hingegen nicht-abzählbar (überabzählbar). Darüber hinaus potenzieren sich (im wahrsten Sinn des Wortes) diese sog. Mächtigkeiten dadurch, dass man von einer Menge zu der Menge ihrer Teilmengen, der sog. Potenzmenge mit nachweislich höherer Mächtigkeit, übergeht. Tatsächlich ist es (mit einigen Abstrichen zur Vermeidung von Widersprüchen) möglich, den soweit skizzierten Bestand der Mengenlehre in eine axiomatische Form zu gießen. Die dabei benutzte Formalsprache kommt mit abzählbar vielen Symbolen aus. Thoralf Skolem hat nun gezeigt, dass das Axiomensystem der Mengenlehre, wenn es überhaupt erfüllbar ist, sogar einen abzählbaren (!) Erfüllungsbereich besitzt. Damit tritt eine merkwürdige *Relativität der mengentheoretischen Begriffe* zutage. Einerseits wird *innerhalb* der Theorie von überabzählbaren Mengen gesprochen; andererseits entsprechen *außerhalb*, d. h. im Erfüllungsbereich des Axiomensystems, eben diesen überabzählbaren Mengen ausschließlich Gesamtheiten, die aus den Elementen eines abzählbaren Grundbereichs gebildet werden. Einem Begriff wie „abzählbar“ scheint demnach eine absolute Bedeutung nicht zuzukommen.

Zurück zu den Inhalten?

Während des 20. Jahrhunderts haben einzelne Mathematiker und Philosophen mehr oder weniger entschlossen versucht, der fortschreitenden Sinnentleerung der Mathematik, die ihr durch die formalistische Axiomatik und die mit ihr verbundene Distanzierung von einer wie auch immer beschaffenen Wirklichkeit drohte, Einhalt zu gebieten. Der Höhepunkt dieser Gegenwehr kann als eine konstruktivistische Doktrin angesehen werden, die über fünf oder sechs Dekaden die Erkenntnistheorie der Mathematik, aber auch die Mathematik selbst beeinflusst hat.

Die Doktrin ist fundamentalistisch in folgendem Sinne: Sie geht davon aus, dass es Grundlagen der Mathematik gibt, die in bestimmter Weise zu sichern sind bzw. den Aufbau der Mathematik gewährleisten als Ausgangspunkt bzw. Quelle mathematischer Erkenntnis. Sie ist aber auch essentialistisch, d. h. sie glaubt die als grundlegend erachteten Dinge und Sachverhalte in ihrem Wesenszusammenhang ausmachen zu können: im Feld einer unmittelbaren Anschauung oder eines Systems von Operationen oder Konstruktionen.

Werfen wir nun einen Blick auf einige markante Entwürfe, die im Rahmen dieser Doktrin unternommen wurden.

Luitzen E. J. Brouwer: Intuitionismus

Der revolutionärste Beitrag dieser „Gegenmoderne“ stammt von dem bedeutenden niederländischen Mathematiker (und Philosophen) Brouwer. Die Basis seiner intuitionistischen Mathematik hat er bereits in seiner Dissertation *Over de grondslagen der wiskunde* (1907) gelegt. Eine Philosophie, welche die Mathematik von außen betrachtet, kann es für Brouwer nicht geben. Vielmehr führt er die Revision der Grundlagen dahin, die Mathematik mit abgeänderten Regeln – zumeist Einschränkungen, von Hilbert als »Verbotsdiktatur« geschmäht – neu aufzubauen. Begriffe wie „Kontinuum“, „Funktion“ und „Stetigkeit“ haben in der intuitionistischen Mathematik eine völlig andere Bedeutung als in der klassischen Mathematik (Brouwer würde sagen, dass sie nun überhaupt erst eine Bedeutung haben). Zum Beispiel gilt in der intuitionistischen Funktionenlehre der Satz, dass jede in einem abgeschlossenen Intervall überall definierte Funktion in diesem Intervall gleichmäßig stetig ist (was ein herkömmlich ausgebildeter Mathematiker erstaunlich finden dürfte).

Brouwers Ansatz lässt sich grob durch folgende Leitgedanken kennzeichnen: Aktual-unendliche Gesamtheiten, von denen die Cantorsche Mengenlehre reichlich Gebrauch macht, werden als Gegenstände der Mathematik nicht anerkannt. Das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten (tertium non datur) wird nur auf endliche Gesamtheiten angewendet. Grundlage jeder Mengenbildung ist die (zeitgebundene) Ur-Intuition des Zählens (durch Einführung sogenannter Wahlfolgen für die Konstruktion des Kontinuums umgesetzt). Die mathematische Anschauung ist eine unmittelbare Erkenntnis, die nicht durch Sprache vermittelt wird. Mathematik ist von der Sprache prinzipiell unabhängig.

Brouwer hat einen Großteil seines Lebenswerks dem Aufbau einer intuitionistischen Zahlenlehre und Mengenlehre (als Grundlage der Analysis) gewidmet. Bedingt durch die Kritik am Tertium non datur entwickelt der Intuitionismus auch eine abgewandelte Logik.

Hugo Dingler: Operativismus

Dinglers philosophisches Interesse galt vor allem dem methodischen Aufbau der Naturwissenschaften. Durch Fundierung auf Handlungen (Operationen, Konstruktionen) werden die begrifflichen Schemata der Wissenschaft auf die Realität bezogen. In zahlreichen Studien widmet sich Dingler dem Aufbau und der inhaltlichen Deutung der Geometrie. Sein 1933 erschienenes Werk *Die Grundlagen der Geometrie* spielt dabei schon im Titel auf die Hilbertsche Axiomatik an, der Dingler in seinem Verständnis von „Grundlagen“ nicht folgt. Tatsächlich fasst Dingler die Geometrie und ihre Grundbegriffe nicht formal auf, sondern als einen apriorischen Teil der Physik (vergleichbar dem Versuch Kants in seinen *Metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft* von 1786).

Die Idee seines Vorgehens ist diese: Bestimmte Grundbegriffe wie Punkt, Gerade, Ebene sind als ideenhafte (normative) Ziele einzuführen, die technischen Operationen zugeordnet sind. Ebene Flächen denkt sich Dingler durch ein wechselseitiges Aneinanderschleifen dreier Platten realisiert (Dreiplattenverfahren). Schnittkanten ebener Flächen sind dann Realisate von Geraden und Schnittecken gerader Kanten Realisate von Punkten. Immerhin hat man damit eine Art *Urzeugung von Formen*, die sich als gegenständliches Substrat den Begriffen der Geometrie unterlegen lassen. Auch rechte Winkel und Parallelität (als die Eigenschaft eines Ebenenpaars, eine bestimmte Ebene im rechten Winkel zu schneiden) kann man auf diese Art gewinnen.

Dingler glaubte fest daran, die von ihm beschriebenen formerzeugenden Handlungen (»in den Fabriken«) erzwängen die Geltung der euklidischen Geometrie im Realraum und widerlegten damit insbesondere Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie. Er übersah dabei, dass seine Formen-Herstellung nur lokal, d. h. in kleinen Raumgebieten stattfinden kann und damit über die geometrische Struktur des Universums im Ganzen noch nichts entschieden ist. Es ist selbstredend ausgeschlossen, eine Ebene oder Gerade als unendlich ausgedehntes Gebilde im Sinne der euklidischen Geometrie zu fertigen.

Nichtsdestoweniger ist der Ansatz interessant. Bis zu einem gewissen Grade mag er als Antwort gelten auf die Frage nach der „prästabilierten Harmonie“, d. h. der Frage, weshalb mathematische (geometrische) Begriffe und Theorien so gut auf die Wirklichkeit passen. Immerhin manipulieren wir über begriffliche Normung diese Wirklichkeit in gehörigem Maße. Ob dies allerdings soweit geht, dass wir der Natur ihre Gesetze vorschreiben können, bleibe einmal als zumindest sehr fraglich dahingestellt.

Paul Lorenzen: Konstruktivismus

Dinglers Methodologie, speziell die der Geometrie, wurde später von Lorenzen und seiner „Erlanger Schule“ aufgegriffen und auf verschiedene Weise zu präzisieren versucht.[4] Die Beiträge Lorenzens zum Konstruktivismus gelten daneben aber auch dem Aufbau der Logik, Arithmetik und Analysis. Hier steht das konstruktive Handeln in und mit Kalkülen im Vordergrund. In seiner *Metamathematik* (1962) sucht Lorenzen einen Standpunkt, der zwischen Formalismus (»Axiomatizismus«) und Konstruktivismus vermittelt. In *Differential und Integral* (1965) geht es darum, die klassische Analysis als eine konstruktive Theorie aufzubauen. Der Ansatz der dialogischen Logik schließlich (z. B. in dem mit Wilhelm Kamlah gemeinsam verfassten Werk *Logische Propädeutik* von 1967) hat mit seiner methodischen Einführung in das logische Sprechen und in die effektive Logik auch breitere philosophische Kreise erreicht.

Die logische Propädeutik heißt im Untertitel *Vorschule des vernünftigen Redens* und verweist damit auf etwas für die Erlanger Schule Typisches: den Anspruch, der Wissenschaft einen konstruktiv bzw. operativ geprägten Vorbereich zu sichern (womit an Dingler und Kant angeknüpft wird). Zu diesen Proto-Wissenschaften gehören z. B. Protogeometrie, Chronometrie und Hylometrie.

Die Aufsatzsammlung *Methodisches Denken* (1968) gibt dazu einen programmatischen Überblick, führt dann aber in den »Grundlagenstreit der Mathematiker« auch »moralische Argumentationen« ein. In der Forschung tätige Mathematiker, die mit voller Absicht oder nur aus »Gewohnheit« die klassischen Formalismen verwenden, die ein Konstruktivist als sinnlos ablehnen würde, werden eindringlich aufgefordert sich zu rechtfertigen. Vermeintliche Rechtfertigungsgründe der „Formalisten“ – Lorenzen konzentriert sich auf Gewohnheit, Notwendigkeit, Schönheit und Freude – werden einer normativen Kritik unterzogen und scharf zurückgewiesen. Gewohnheit gibt keinen »Rechtsgrund« her, sondern fußt nur auf der Macht des Faktischen. Notwendigkeit liegt nach Lorenzen auch nicht vor, weil seitens der Formalisten noch nicht dargelegt wurde, welche Formalismen (die etwa in der Physik Verwendung finden) unentbehrlich sind und nicht durch konstruktive Verfahren ersetzt werden könnten. Schönheit anzuführen verwischt die Grenze zwischen Wissenschaft und Kunst, ist subjektiv, Moden unterworfen und allenfalls als

[4] Für eine kritische Darstellung und didaktische Umdeutung dieser Teilansätze vgl. man Bender, P.; Schreiber, A.: *Operative Genese der Geometrie*, Wien/Stuttgart 1985.

zusätzliche (nicht jedoch einzige) Rechtfertigung zu gebrauchen. Dass Mathematiker Freude an der klassischen Mathematik, mehr als an der konstruktivistischen, empfinden, rekurriert nur auf das Privatvergnügen einer Minderheit oder geht, bei Beanspruchung öffentlichen Interesses, an dem vorbei, was den meisten Menschen Freude bereitet. Lorenzen meint sogar: »Wäre es im öffentlichen Interesse nicht besser, die Parfumherstellung zu fördern als die formalistische Mathematik, da doch viel mehr Leute Freude an schönen Gerüchen als an schönen Formalismen haben?«[5]

Misserfolge

Hat sich die konstruktivistische Doktrin in wenigstens einigen ihrer diversen Ausprägungen durchgesetzt? Diese Frage muss man wohl mit Nein beantworten. Gleichwohl hat die Mathematik und vor allem die mathematische Grundlagenforschung viele Anregungen erhalten. So schmerzlich dies aus konstruktivistischer Sicht auch erscheinen mag, es haben vor allem solche Vorschläge Beachtung gefunden, die sich auch in herkömmliche Mathematik haben umsetzen lassen. So wurde der Intuitionismus von der Fachwelt erst verstanden und wahrgenommen, nachdem Arend Heyting, der wichtigste Schüler Brouwers, die intuitionistischen Ideen in eine formal-axiomatische Gestalt gebracht hatte. Zudem war vielen Fachvertretern nur schwer zu vermitteln, weshalb sie ein Theorem, das sich „klassisch" ganz einfach beweisen lässt, nun plötzlich durch komplizierte konstruktivistisch annehmbare Methoden sichern sollten. – Auch wenn Hilberts Position erkenntnistheoretisch nicht sonderlich stringent ist, so hat sie sich in der Praxis wissenschaftspolitisch am Ende doch durchgesetzt. Intuitionistische Mathematik fristet ihr Dasein heute als Spezialgebiet der Grundlagenforschung. Die meisten Mathematiker halten am klassischen Rahmen der Mathematik fest, und die von Brouwer intendierte Erneuerung ist ausgeblieben.

Hilbert und Brouwer – zu ihrer Zeit unerbittliche Widersacher – stimmten aber immerhin darin überein, dass die Mathematik mit dem exakten Teil unseres Denkens identisch ist. Daher ist die immer wieder zu erlebende Enttäuschung für alle, die sich der Mathematik von der philosophischen Warte aus nähern, am Ende das Erfordernis, die in Frage stehenden Ideen durch Exaktifizierung – und das heißt gewöhnlich: Formalisierung – verständlich zu machen, zumindest wenn sie von der institutionalisierten Mathematik rezipiert und be-

[5] *Methodisches Denken*, S. 160

achtet werden wollen. Aus dieser Sicht erscheinen nicht wenige Ursachen für den schwachen Stand der konstruktivistischen Doktrin als hausgemacht. Man brachte sich in eine ungünstige Ausgangslage, indem einerseits beansprucht wurde, Mathematik als sinnhafte Rede (über etwas) rekonstruieren zu können, ja überhaupt erst verstehbar zu machen, andererseits aber eben diese Rekonstruktion nicht in völliger Klarheit und Explizitheit durchgeführt wurde bzw. nachzuvollziehen war.

Die immanenten Defizite der Dinglerschen und dann der prototheoretischen Ansätze Lorenzens wurden von der Erlanger Schule lange Zeit nicht thematisiert, nicht selten verschleiert oder gar durch eine nach außen getragene Apodiktizität überspielt. Dies hat der Sache letztlich nicht genützt.[6] Auch der hohe moralische Ton, in dem ein Verfügungsanspruch auf normative Rationalität geltend gemacht wurde, hat sich auf die Rezeption der Lorenzenschen Philosophie vermutlich nicht günstig ausgewirkt.

Anschauung und Diskurs

Brouwer verstand Intuition nicht als sinnliche, sondern als eine von kontingenten Bestandteilen (etwa der Wahrnehmung) gereinigte Anschauung, darin der reinen Anschauung (von Zeit) verwandt, die Kant in seiner Ästhetik namhaft gemacht hat. Im Intuitionismus ist diese Anschauung eine Quelle *unmittelbarer* (begriffsloser) Erkenntnis.

Sich auf die Anschauung als *Erkenntnisquelle* zu berufen, bedeutet, dass ich ein singuläres intentionales Evidenzerlebnis eines anderen nachvollziehe (nachvollziehen muss, wenn ich die behauptete Erkenntnis mit ihm teilen möchte). Das mag, bei moderatem Gebrauch, noch angehen und ist in einem gewissen Sinn sogar unvermeidlich. In gesteigerter Form wird die Berufung auf Anschauung aber leicht zur Sache von Visionären, autoritären Wahrheitsverkündern und Hohepriestern. Bei Kant heißt so etwas vornehm »vornehme Philosophie«. Dagegen stellt ein Beweis sich erst einmal der Überprüfung, der Kritik, dem öffentlichen Diskurs. Äußeres Anzeichen dafür ist bereits seine spezifische sprachliche und begriffsgebundene Form, in der auf appellative Gesten verzichtet wird. Ein Beweis soll sich prinzipiell allen mitteilen, die am Erkenntnisprozess beteiligt sein wollen; er löst für die Allgemeinheit das Recht ein auf Einsichtnahme und Einsicht, auf verstehenden Nachvollzug des

[6] Vgl. z. B. die 1998 erschienene Konstanzer Dissertation L. Amiras: *Protogeometrica* mit ihrer ins Detail gehenden Kritik der gesamten »protophysikalischen Geometriebegründung«.

Verstehbaren.[7]

Natürlich trifft dieser Hinweis die intuitionistische oder konstruktivistische Mathematik nicht in dem Sinn, dass man dort etwa auf Beweise glaubt verzichten zu können. Im Gegenteil, es geht ja um Axiome (und Grundbegriffe), deren inhaltliche Begründung gerade der Formalismus ausspart. In dieses Vakuum können fundamentalistische Auffassungen stoßen. Die Frage ist, ob dies in dogmatischer Weise geschieht. Tatsächlich haben wir nicht nur eine, sondern eine Vielzahl konkurrierender Sichtweisen, die für sich bestenfalls Plausibilität beanspruchen können. Diese letztlich mangelnde Verbindlichkeit mag den überzeugten Konstruktivisten ärgern, doch ist sie unvermeidlich und in meinen Augen eine Stärke. Das „Zwingende“, die „Härte“ mathematischer Schlüsse und Theoreme werden auf diesem Feld eben nicht erreicht, sondern nur da, wo wir formalisieren und beweisen.

Der inwendige und appellative Charakter der Anschauung macht sie darüberhinaus ambivalent, im Extremfall sogar anfällig für Missbrauch. Dies gilt besonders dann, wenn man sie dazu benutzt, sich emphatisch gegen angeblich trockene Abstraktion und dürren Formalismus abzugrenzen. Schlimmstenfalls verkommt die Berufung auf Anschauung – wie im ‘Dritten Reich’ geschehen – zu einem ideologischen Eigentlichkeitsjargon. Wenn Nationalsozialisten „Formalismus“ sagten, meinten sie typischerweise pejorativ „jüdisch“, „lebensfern“, „degeneriert“ und damit – horribile dictu – echtem, angeblich in der Anschauung wurzelndem Deutschtum entgegengesetzt. Der bekannte Mathematiker L. Bieberbach liefert ein Beispiel dafür. Schon 1926 polemisierte er in einer Rede über das Wissenschaftsideal der Mathematiker wider den Formalismus und lobte die »anschauliche Gegenständlichkeit« der Mathematik F. Kleins. Im Jahre 1934 erschien dann in Band 40 der Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften ein Artikel, in dem es (wiederum unter Bezug auf Klein) deutlicher heißt: »So denkt ein deutscher Geist, der zum Sehen geboren, zum Schauen bestellt, der klaren Stimme seiner Sinne traut und für wahr nimmt, was klarer Überlegung standhält.«[8]

In der Mathematik werden anschauliche Vorstellungen, vor allem aber konstruktive Verfahren (aus guten Gründen) allgemein geschätzt. Konstruktive Er-

[7] Dies gilt unbeschadet der Tatsache, dass der Diskurs in mathematischen Denk- und Erkenntnisprozessen zuweilen hohe, ja höchste fachliche Anforderungen an die Diskursteilnehmer stellt. Diese gegenüber einer größeren Allgemeinheit bestehende Hürde ist aber prinzipiell und ausschließlich in der Natur der Sache begründet.

[8] Zitiert nach H. Mehrtens: *Moderne – Sprache – Mathematik*, Frankfurt am Main 1990, Kap. 4.

kenntnisse haben einen höheren Informationsgehalt. Ein Verfahren, mit dem sich die Lösungen einer Gleichung berechnen lassen, enthält mehr Information als die bloße Existenzaussage, dass die betreffende Gleichung lösbar sei. Daneben bleiben der Anschauung, je nach Praxiszusammenhang, noch eine Reihe residualer Funktionen.

In Forschungsprozessen spielt die Anschauung nach wie vor eine heuristische (und damit erkenntnisleitende) Rolle. In Lernprozessen übernimmt sie zusätzlich eine Funktion als Verständnishilfe und Plausibilisierungsmittel.

Der Aufbau formaler Kalküle (Systeme) verlangt grundlegende und nicht-eliminierbare semiotisch-arithmetische Evidenzen, die konstruktiv zu verstehen sind. Sie betreffen nämlich das Hantieren mit Zeichenreihen, den induktiven Aufbau von Termen und Formeln sowie das mathematische Erfassen auch infiniter Sachverhalte (z. B. der Tatsache, dass jede Formel einen Term enthält, und dgl. mehr).

Modellkonstruktionen, wie sie heute in mathematischen Anwendungen entwickelt werden, nutzen eine pragmatische Form von Anschaulichkeit. Diese beruht auf einem empirischen Verständnis, das zugleich begrenzt ist durch das „aufgeklärte“ Bewusstsein der Vorläufigkeit und Zweckgebundenheit im ökonomischen Verwertungszusammenhang. Modelle sind sozusagen im Nebeneffekt anschaulich; in erster Linie sind sie Hypothesenkomplexe, die in der Praxis getestet werden.

Auch bei formaler Hochzüchtung mathematischer Techniken oder in weitreichenden Abstraktionen spielen Anschauungsmomente – dann wieder – eine Rolle, meist als eine das Denken begleitende Bildsprache, die sich durch den längeren und intensiven Umgang mit mathematischen Begriffen und Theorien entwickelt. Wenn man sich in ein Fachgebiet vertieft, sich auf seine Begriffsbildungen und Denkweisen einlässt, entsteht am Ende eine Art Vertrautheit, ja Selbstverständlichkeit. Ist es die »Erfahrung des Gelingens«, von der Paul Bernays einmal gesprochen hat, oder einfach nur die allmähliche Gewöhnung an einen bestimmten Geisteszustand? Mathematiker wissen, dass man „in einer Sache drin sein“ muss. Das indische Mathematikgenie Ramanujan ist ein Beispiel dafür, wie weit sich solche Intuitionen entwickeln lassen. Es klingt vielleicht ein wenig simpel, wenn man sagt, Ramanujan habe „auf Du und Du“ mit den Zahlen gestanden. Andererseits ist es aber sehr viel, wenn man so etwas behaupten kann. Von Ramanujan selbst ist übrigens die Bemerkung überliefert: »Eine Gleichung hat für mich keine Bedeutung, wenn sie nicht einen göttlichen Gedanken ausdrückt.« – Er wird dabei kaum auf Platons Ideenreich angespielt haben. Schließlich gibt es das Göttliche auch anderswo, und vermutlich sucht mehr als eine Mathematikerseele danach, selbst die von Formalisten. Unverträglichkeiten und Nebenwirkungen sind nicht bekannt.

II

Universelle Ideen im mathematischen Denken: ein Forschungsgegenstand der Fachdidaktik[1]

Die didaktische Bedeutsamkeit „fundamentaler“ (oder universeller) Ideen wird in Anknüpfung an Whitehead und Bruner herausgestellt. Ausgehend von einer ersten begrifflichen Bestimmung dieses Konzeptes werden eine Reihe von Leitideen sowie einige wichtige Begriffsbildungsverfahren erörtert. Ferner geht es um deren Rolle beim epistemologischen Verständnis und beim Unterrichten von Mathematik. Abschließend werden zentrale Ideen als gebietsspezifische Spezialisierungen universeller Ideen thematisiert.

Die logischen Exerzitien, die man zu früheren Zeiten gelegentlich im Mathematik-Unterricht veranstaltete, rechtfertigten sich weitgehend aus der trügerischen Vorstellung, das Betreiben von Mathematik bestehe im formalen Herleiten von schwierigen Lehrsätzen aus einfachen und einleuchtenden Grundsätzen. Wenn sich heute die ‘gefährliche’ Halbwahrheit dieser Auffassung bereits herumgesprochen hat, so bedeutet das allerdings noch nicht, dass man ihre pädagogischen Folgen im Besitz besserer Konzepte vollständig überwunden hätte. Zweifellos lassen sich Fortschritte verzeichnen, was die heuristische Auflockerung und damit den Abbau falsch verstandener Deduktivität angeht. Dennoch ist mit solchen Erfolgen noch nicht der alte Hauptfeind gebannt: die Gefahr, sich in Stofffülle und Stoffisolierung zu verlieren. Bereits Whitehead sprach in vollem Ernst von einer »Anfälligkeit für Esoterik« als dem charakteristischen Übel der Mathematik.[2] Esoterik soll hier bedeuten: Umgehen mit Begriffen und Erkenntnissen, die selbst lebensfern und bedeutungsarm sind oder deren Beziehungshaltigkeit, Sinnfülle und geistiges Gewicht dem Lernenden nicht angemessen vermittelt werden. »Die Schüler stehen ratlos vor einer Unmenge von Einzelheiten, die weder zu großen Ideen noch zu alltägli-

---

[1] Veröffentlicht in *math. did.* 2 (1979), S. 165-171

[2] A. N. Whitehead: The Mathematical Curriculum. In: *The Aims of Education and other Essays*. New York/London 1929. Zit. nach der dt. Übers. in: *Neue Sammlung* 2 (1962), S. 257-266.

chem Denken eine Beziehung erkennen lassen.«[3] Whitehead schlägt deshalb vor, »sich offenkundig auf unmittelbare und einfache Weise mit einigen wenigen allgemeinen Ideen von weitreichender Bedeutung« zu beschäftigen.

Mit diesem Vorschlag stehen wir mitten im Bereich der Aufgabe, mathematisches Denken, d. h. Mathematik als geistiges Tun, adäquat didaktisch zu verstehen. Es kann sich dabei nicht darum handeln, dem alltäglichen Denken (von dem Whitehead spricht) die unbeeinflußte Suche nach mathematischen Grundideen zu überlassen. Vielmehr geht es um eine angemessene Verbindung von Lebenswelt und vorgegebener fachlicher Struktur. Mit E. Wittmann[4] erblicke ich in der didaktischen Theorie J. S. Bruners[5] einen wesentlichen Beitrag zu der Auffassung, dass Wissensgenese nicht allein von den „natürlichen" Voraussetzungen des Individuums abhängt, um deren Erfassung es z. B. Piaget zu tun ist, sondern nicht minder von einem Milieu allgemeiner sowie fachspezifischer Unterweisung. Je größeren Einfluß man diesen sozialen und instruktionellen Vermittlungsvorgängen auf die geistige Entwicklung zuzugestehen bereit ist, desto dringender stellt sich die Frage nach deren bewusster Gestaltung aufgrund allgemeiner Prinzipien. Nach Bruner hilft dabei unter anderem ein *Prinzip der Strukturorientierung*, wonach der Unterricht, ganz im Sinne von Whiteheads Vorschlag, hauptsächlich anhand der für das Fach »*fundamentalen Ideen*« zu konstruieren ist. Die (wenig glückliche) Bezeichnung „fundamental" zielt dabei weder auf das psychogenetisch Frühe (im Sinne Piagets) noch auf „Grundlagen" der Mathematik (etwa im Sinne der Mengenlehre). Wir haben eher an *allgemeine Schemata* zu denken, die im *Prozess* der Mathematik eingesetzt werden, die diesen Prozess in Gang setzen oder weitertreiben (wichtige Methoden, Beweisideen, Theoreme, Begriffskonstruktionen etc.). In letzter Zeit sind Versuche unternommen worden, eine Reihe zentraler Ideen für gewisse Teilgebiete der Mathematik herauszuarbeiten, so für die Stochastik[6] und für die reellen Funktionen[7]). Diese Untersuchungen legen die Frage nahe, ob und wie sich allgemein-mathematische (nicht mehr nur teilgebietsspezifische) *universelle* Ideen finden lassen. Mein Beitrag soll einen

[3] Loc. cit S. 260

[4] *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Braunschweig 1974, S. 66

[5] *The Process of Education*. Cambridge, Mass. 1960. Dt. Übs. *Der Prozeß der Erziehung*, Berlin/Düsseldorf 1970, 3. Aufl. 1973

[6] D. Heitele: An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Ed. Stud. Math.* 6 (1975), S. 187-205

[7] R. Fischer: Fundamentale Ideen bei den reellen Funktionen. *Zentralblatt f. Did. Math.* 3 (1976), S. 185-192

Ansatz zur Beantwortung dieser Frage aufzeigen, der vorläufig noch auf die Formulierung von Teilproblemen beschränkt bleibt.

Eine didaktisch ausgerichtete Untersuchung universeller Ideen (oder Schemata) hat es im Wesentlichen mit den folgenden Aufgaben zu tun:

1. Das Konzept der universellen Idee (des universellen Schemas) ist zu präzisieren. Wünschenswert wäre dabei eine Art Kriterium der Universalität.
2. Ein Katalog geeigneter Ideen ist aufzustellen und auf seine internen und externen Beziehungen hin zu studieren.
3. Die Rolle muss geklärt werden, die universelle Ideen beim Aufbau eines adäquaten Bildes von der Mathematik spielen können (möglichst im Anschluss an Punkt 2).
4. Der Einsatz universeller Ideen im Unterricht ist zu untersuchen sowie damit verbunden die Frage zu beantworten, durch welche Stoffe bestimmte Ideen am geeignetsten repräsentiert werden.
5. Repräsentation und Kombination universeller Ideen in bestimmten Teilgebieten führen auf gebietsspezifische zentrale Ideen und sind für möglichst viele Bereiche der Mathematik herauszuarbeiten und zu analysieren.

Im Folgenden beschränke ich mich auf einige Andeutungen zu den genannten Punkten.

Zu 1 (Konzept/Kriterium): Eine allgemeinverbindliche Explikation des Begriffs des universellen Schemas ist vermutlich nicht möglich. Allein der hier verwendete Begriff „Schema“ erlaubt kaum mehr als eine relativ vage Umschreibung. Bei Wittmann[8] findet man die folgende psychologisch gefärbte Erläuterung: »Ein Schema ist ein flexibel organisiertes, kohärentes, adaptierbares Reflex-, Denk-, Beschreibungs- oder Erklärungsmuster, das in die kognitive Gesamtorganisation eines Individuums integriert ist und die Aktivitäten des Individuums steuert«. Die *Universalität* eines Schemas (einer Idee) beruht nicht bloß auf häufiger, sondern auf vielseitiger fruchtbarer Verwendung in unterschiedlichen Teildisziplinen. Wichtig erscheint mir eine Unterscheidung mathematischer Schemata in *Leitideen* und *Verfahren* und eine Unterscheidung letzterer in *Findungsverfahren* (im Sinne Pólyas) sowie *Begriffsbildungsverfahren*.

---

[8] Mutterstrategien der Heuristik. In: *Die Schulwarte* 26 H. 8/9 (1973), S. 53-65; s. auch *Grundfragen des Mathematikunterrichts*, S. 45

Zu 2 (Katalog): Bei dem Terminus „Leitideen“ denkt man vielleicht sofort an die Bourbakischen Mutterstrukturen (Verknüpfung, Ordnung, Topologie). Allerdings liegt bei diesen der Akzent von vornherein zu sehr auf der fertigen (oder nach Fertigbauweise herzustellenden) Mathematik. Im Unterschied dazu sind Leitideen in meinem Verständnis begrifflich noch nicht scharf umgrenzte Anhaltspunkte der eigentlichen mathematischen Theorienbildung; sie haben zwar oft in einer Theorie präzisierte Entsprechungen, gehören aber ursprünglich einem vorwissenschaftlichen (nicht unwissenschaftlichen) Denken an. Zugespitzt gesagt, bilden sie gerade Orientierungsmarken auf dem Weg zur Wissenschaft; sie werden in allen Stadien des Fortschrittes immer wieder sichtbar und damit wirksam.

Für die Mathematik möchte ich folgenden (provisorischen und unvollständigen) Ideenkatalog zur Diskussion stellen:

1. *Algorithmus* („mechanisches“ Rechenverfahren; Idee des Kalküls; Berechenbarkeit; Programmierung)
2. *Exhaustion* (Approximation; angenähertes Herstellen von Formen; Modellieren)
3. *Invarianz* (Erhaltung von Eigenschaften an Objekten, die bestimmten Operationen unterworfen werden)
4. *Optimalität* (Eigenschaft von Formen, Größen, Zahlen etc., einer vorgegebenen Bedingung bestmöglich zu genügen)
5. *Funktion* (funktionale Abhängigkeit; Zuordnung; Abbildung)
6. *Charakterisierung* (Kennzeichnung von [Klassen von] Objekten durch Eigenschaften; Klassifikation von Objekten und Strukturen)

Bei der Zusammenstellung in dieser Liste halte sich der Leser vor Augen, dass es mir um Leitgedanken geht, die nicht von Begriffen einer speziellen Disziplin wie Stochastik oder Geometrie abhängig sind. Ich bin mir aber darüber im Klaren, dass es auch ganz andere Möglichkeiten gibt, an allgemeine mathematische Ideen heranzugehen.[9] Insbesondere kann die Ideen-Liste selbst ganz unterschiedlich ausfallen.[10] Natürlich verlangen die von mir aufgeführten Begriffe eingehend jeder für sich erörtert zu werden (worauf ich hier verzichten muss), und zwar auch im Hinblick auf die Frage, ob und inwiefern andere allgemeine Ideen (wie z. B. Symmetrie) sich nach noch herauszuarbeitenden

[9] Vgl. etwa H.-J. Vollrath: Rettet die Ideen! In: *MNU* 31/8 (1978), S. 449-455

[10] Beispielsweise erwähnt Vollrath, loc. cit. S. 450, die bekannte Trias Menge – Struktur – Abbildung, ferner Atiyahs Diskussion von Symmetrie, Stetigkeit und Linearität auf dem Karlsruher Kongreß für Mathematikerziehung 1976.

Prinzipien aus ihnen gewinnen lassen. Möglicherweise lässt sich auf solche Weise eine gewisse Hierarchisierung der Ideen erreichen.

Die genannten Leitideen enthalten wichtige Aspekte mathematischen Denkens, nicht etwa dessen systematische Fundamentierung. Man findet sie in der Mathematik (als Vorrat von Grunddenkweisen bei forschenden Mathematikern) ebenso wie im mathematischen Vorfeld und alltäglichen Leben. Lernprozesse um sie zu zentrieren, bildet daher ein wirksames Mittel gegen »Esoterik«, Stoffatomisierung und Bedeutungsarmut.

Beispielsweise bedeutet die Idee der Exhaustion keineswegs bloß das in der Mathematik seit Eudoxos vielgeübte Verfahren der sukzessiven Approximation. Der Begriff besitzt wenigstens zwei Spielarten: eine *ideelle* Exhaustion, bei der das Annähernde gedanklicher Natur ist (Polygone approximieren den Kreis, Polynome eine analytische Funktion, Dezimalbrüche die Lösung einer algebraischen Gleichung, aber auch das mathematische „Modell" eine bestimmte Realsituation); ferner eine *reelle* Exhaustion, bei der das Annähernde dem Bereich der physischen Wirklichkeit entstammt (z. B. architektonische Modelle in der Stadtplanung, Maßstäbe zur Längenmessung, flach geschliffene Platten als Ebenenstücke). Zweifellos ist die Idee der Exhaustion universell. Sie ist aber vor allem deswegen bedeutsam, weil wir sie auch „lebensweltlich" verstehen können. Etwas vereinfacht gesagt heißt das: Im Prinzip benutzen wir dasselbe Schema, wenn wir eine Wurzel durch einen Dezimalbruch annähern, eine Funktion in eine Potenzreihe entwickeln oder wenn wir andererseits einen Punkt durch das Anspitzen eines Bleistiftes immer besser erzeugen oder Wohnungsmobiliar durch formgleiche Pappscheiben annähern, um das wirkliche Umstellen auf einem Grundrißplan simulieren zu können. Das erste ist lediglich eine gedankliche Hochstilisierung des zweiten.

Auch an der Invarianz mag kurz die vielfältige Bedeutung universeller Konzepte aufgezeigt werden; ich erinnere nur an ihre Bedeutung in der Algebra (Galoissche Theorie, Gruppenbegriff, strukturerhaltende Abbildungen), in der Geometrie (Invariantentheorie, Erlanger Programm F. Kleins), in der Physik (Erhaltungssätze, Invarianz der Theorien als Strukturprinzip), sowie schließlich auch ganz allgemein bei der Herausbildung von „Formen" (z. B. Gestalten der Wahrnehmung, bedingt durch Konstanzleistungen, oder logische Formpartikel, gekennzeichnet durch Invarianzforderungen).

Zwischen universellen Leitideen und universellen Verfahren bestehen natürliche Entsprechungen, die auch Wittmann bei der Analyse heuristischer »Mutter«-Strategien thematisiert. Derartige Korrespondenzen finden sich auch zu universellen Begriffsbildungsverfahren wie *Rekursion*, *Abstraktion* oder *Ideation* („Idealisierung“). Grundsätzliche methodologische Untersuchungen, die universelle Verfahren auch unter didaktischen Gesichtspunkten zum Gegenstand haben, sind noch keineswegs in wünschenswertem Ausmaß angestellt worden.

Ob die genannten Verfahren der Begriffsbildung wirklich erschöpfend sind, ist fraglich. Es wäre aber schon einiges erreicht, wenn man sich von ihnen auf der Basis einer logischen und genetischen Analyse mathematischen Arbeitens ein hinreichend deutliches Bild machen könnte. Hier müssen einige wenige Hinweise genügen.

Zur Rekursion: Viele arithmetische Operationen (Funktionen) sind nicht anders als rekursiv zu definieren. In die Rekursion geht so etwas ein wie eine Grundanschauung vom Zählprozess (von diskreter Unendlichkeit, vom Und-so-weiter). Ihr formales Schema ist allgemein bekannt; informell benötigt man es aber auch zur Einführung „höherer“ (etwa metalogischer) Begriffe wie „Formel“, „semantisches Modell“ etc.

Zur Abstraktion: Da praktisch alle mathematischen Objekte „abstrakt“ sind (nämlich im Sinne von nicht-konkret, gedanklich), dominieren traditionell die Untersuchungen zur Abstraktion (mit einem allerdings oft recht vagen Begriff von der Sache, um die es hier geht). Psychologen betrachten zumeist nur das Klassifizieren innerhalb endlicher Gesamtheiten, während sich die mathematische Abstraktion in der Regel auf infinite Bereiche bezieht, z. B. bei Restklassen, Richtungen (Vektoren), Figurentypen etc. Grundlegend für *diesen* Vorgang ist offenkundig die Konzeption Freges. Ich erläutere sie hier kurz am Beispiel des Funktionsbegriffs. Wir betrachten etwa arithmetische Terme, in denen genau die Variable ‘x’ vorkommt. Zwei Terme ‘a’, ‘b’ heißen gleichwertig, wenn die Gleichung ‘$a = b$’ allgemeingültig ist. Gilt nun mit einer Aussage $A(a)$ und einem zu ‘a’ gleichwertigen Term ‘b’ immer auch die Aussage $A(b)$, so wird in $A(.)$ nicht über einen Term gesprochen, sondern (in Abstraktion!) von der Funktion $f : B \to B$, die durch die zu a (und b) gleichwertigen Terme dargestellt wird (wobei B der Bereich ist, in dem ‘x’ läuft). Dies ist z. B. in der Aussage der Fall: „Die Ersetzung von ‘x’ in ‘a’ durch ‘0’ liefert einen Term, der in B die Zahl ‘3’ bezeichnet“, nicht jedoch bei der Aussage „Die Ersetzung von ‘x’ in ‘a’ durch ‘0’ liefert einen Term, in dem ‘0’ insgesamt 5-mal vorkommt.“ – In solcher Weise werden Funktionen aus Termen abstrahiert.

Zur Ideation: Im Unterschied zur Abstraktion ist das Idealisieren ein eher prospektives (und weniger ein reproduktives) Verfahren. Ausgangspunkt sind dabei stets irgendwelche Erfüllungsnormen oder Zielvorstellungen (N), die in einen bereits „bekannten" Bereich (E) eingeführt werden, z. B. Lösbarkeit algebraischer Gleichungen über einem Zahlbereich oder Eigenschaften geometrischer Gebilde im realen Raum. Meist ist N+E ein inkonsistentes System, so dass zur Aufrechterhaltung von N der Bereich E „ausgedünnt" werden muss. Als Endprodukt solcher Prozesse erscheinen dann Begriffe mit neuen Eigenschaften (z. B. ein teils erweiterter, teils zurückgenommener Zahlbegriff).[11]

Zu 3 (Rolle): Der Beitrag, den Untersuchungen der gerade (in 2.) genannten Art für ein angemessenes Mathematikverständnis leisten sollten, liegt a) in der Abkehr von fundamentalistischen Auffassungen jedweder Art und b) in der Berücksichtigung operativer und prozesshafter Züge der Mathematik. Beides ist für das Hintergrundwissen von Lehrern von großer Bedeutung, wenn man nur an die Folgen denkt, die durch einseitige Einstellungen entstehen können (wie sie z. B. ein vulgarisierter Bourbakismus und zu Starrheit neigendes axiomatisches Systemdenken erzeugt haben). Insbesondere sind universelle Ideen ihrerseits nicht wiederum als Fundament der Mathematik aufzufassen. Dennoch ist allein mit der Verlegung methodologischer (grundlagenkritischer) Inhalte in das „Hintergrundwissen" bei weitem noch nicht genug getan. Ein eigenes didaktisches Problem liegt nämlich in der Frage, auf welche Weise solches Wissen anzueignen sei, damit überhaupt ein Einfluss auf Vermittlungsvorgänge möglich und förderlich ist.

Zu 4 (Einsatz im Unterricht): Mit diesem Problem hat sich Bruner vorwiegend unter der Prämisse auseinandergesetzt, dass die Aufgabe 2 durch die besten Fachleute bereits gelöst sei. Was die Mathematik angeht, so halte ich diese Annahme zumindest für nur teilweise erfüllt. Damit wird zweifellos das Problem der Repräsentation universeller Ideen durch bestimmte Stoffe des Mathematik-Unterrichts bis zu einem gewissen Grade relativiert. Gleichwohl sollte man bei der Stoffauswahl den Nutzen der selbstverständlich klingenden Frage nicht aus dem Auge verlieren, welche allgemeinen Ideen im Zusammenhang mit dem betreffenden Unterrichtsgegenstand stehen. Beim Lernen übernehmen diese Ideen allerdings erst dann eine sinnvolle Funktion, wenn sie als Instrumente zur Erreichung bestimmter (vom Lernenden akzeptierter) Zwecke eingesetzt werden (teleologisches Prinzip). Eine Reihe anderer didaktischer Funktionen erörtert Vollrath (siehe Fußnote 9).

Zu 5 (Gebietsspezifische Ideen): Nicht alle universellen Ideen leiten in

[11] Eine genauere Analyse zu solchen Beispielen findet der Leser in meiner Studie *Idealisierungsprozesse*: in diesem Band.

gleichem Ausmaß die Genese mathematischer Wissensgebiete. Vielmehr gibt es gebietsspezifische Schwerpunkte und damit auch jeweils typische zentrale Begriffe. Zum Beispiel spielt die Idee des Algorithmus eine hervorragende Rolle in der gesamten Mathematik, besonders jedoch in Gebieten wie Numerik, Informatik oder Grundlagentheorie, wo wir sie im jeweils anderen Gewand zentraler Ideen antreffen: als iteratives Näherungsverfahren, als Programm bzw. als Rekursivität (oder Konstruktivität). In der Geometrie wiederum wirken sich andere Ideen viel stärker aus ((2), (3), (4)); Bender & Schreiber[12] haben genauer beschrieben, wie damit aus einer operativen Sicht geometrischer Begriffsbildung *zentrale Begriffe* wie Symmetrie (Homogenität) oder Passen von Formen (und speziell: Messen, starrer Körper, Kongruenz) zu gewinnen und zu vermitteln sind.

Die zentralen Ideen der Algebra haben sich im Laufe der Geschichte wohl stärker als die anderer Disziplinen gewandelt, eine die Epochen überspannende Herausarbeitung fällt daher auch schwerer. Während früher ein algorithmischer Zug vorherrschte (Gleichungslösen), hat die (im übrigen auch daraus erwachsene) Behandlung abstrakter Strukturen in neuerer Zeit eine verstärkte Orientierung an (3), (5) und (6) mit sich gebracht. Die Genese der Algebra erscheint so als ein Weg „von der Gleichung zur Struktur"; auf diesem Weg sind wohl auch ihre zentralen Ideen zu suchen, und zwar insbesondere im Zusammenhang mit den (abstraktiven und ideativen) Prozessen der Zahlbegriffsbildung.[13]

Für die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat Heitele (loc. cit.) eine Liste von zehn »fundamentalen stochastischen Ideen« zusammengestellt und diskutiert, darunter die Ideen »Unabhängigkeit«, »Symmetrie«, »Simulation« und »Prinzip der großen Zahl«. Als zentral erscheint auch der (speziell auf stochastischer Unabhängigkeit beruhende) kombinatorische Kalkül mit Wahrscheinlichkeiten.

Zentrale Ideen der Differentialrechnung analysiert Fischer (loc. cit.); neben dem Approximationsgedanken wird dabei unter anderem auch an die Bedeutung des Rechnens mit Funktionen sowie zielgerichteten Aufsuchens von Funktionen mit vorgegebenen Bedingungen (etwa durch Datenvorgabe, Funktional- oder Differentialgleichungen) erinnert. Vielleicht mehr als andere anwendungsorientierte Bedingungen können (auch einfachste) Differentialglei-

[12] The Principle of Operative Concept Formation in Geometry Teaching. In: *Ed. Stud. Math.* 11 (1980), S. 59-90

[13] Vgl.dazu H. Freudenthal: *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Bd. 1, Stuttgart 1973, S. 203 ff.

chungen etwas vom Geist der alten Infinitesimalrechnung vermitteln – nicht umsonst begann diese statt bei Stetigkeit, Konvergenz und Existenzfragen mit dem Versuch, eine mechanistisch vorgestellte Natur durch „differentielle Gesetze“ und das algorithmisch betriebene Lösen zugehöriger Differentialgleichungen zu beherrschen und nutzbar zu machen. Die letzte Bemerkung soll auch darauf hinweisen, in universellen oder zentralen Ideen nicht bloß fachinterne Komponenten zu erblicken; ihre eigentliche Bedeutung und ihr geistiges Gewicht sind an geschichtliche und kulturelle Tradition gebunden, und dieser anthropologische Rahmen gehört mit zum Verständnis der Mathematik.

Bemerkungen zur Rolle universeller Ideen im mathematischen Denken[1]

Die mathematischen Probleme der sogenannten Grundlagen liegen für uns der Mathematik so wenig zugrunde, wie der gemalte Fels die gemalte Burg trägt.

LUDWIG WITTGENSTEIN

Most likely, logic is capable of justifying mathematics to no greater extent than biology is capable of justifying life.

YURI I. MANIN

Im Folgenden skizziere ich ein 'Arbeitsprogramm' zur Rolle universeller Ideen im mathematischen Denken und erläutere der Reihe nach: worum es sich dabei handelt (Probleme), wie man bei ihrem Aufweis verfahren kann (Methoden), was schließlich entstehen soll (Produkte), was sich damit erreichen lässt (Ziele) und in welcher Beziehung das Thema zur Philosophie steht. Ein Supplement und ein aus der Rückschau entstandenes Postskriptum bilden den Abschluss.

Probleme

Mehr als alle anderen Disziplinen hat es die Mathematik mit einem allgemeinen Sinnproblem zu tun: Worin liegt der Sinn der mathematischen Tätigkeit? Zu dieser Frage hat kürzlich J. Ewing[2] einen amüsanten Vergleich angestellt zwischen Mathematik und Alchimie. Er findet weitgehende Übereinstimmung in der Technik und in der Hintergrundphilosophie beider Disziplinen. Die technische Devise lautet: Mische vorhandene Dinge, sieh nach, was dabei herauskommt, und mische dann weiter mit den entstandenen Produkten.

[1] Veröffentlicht in: *math. did.* 6 (1983), S. 65-76. Der Aufsatz schließt sich an „Universelle Ideen im mathematischen Denken . . . " an (in diesem Band).

[2] Mathematics and Alchemy. *The Math. Intelligencer* 3 (1981), S. 146

In der Philosophie greift Ewing bis auf Empedokles zurück, der glaubte, alles Seiende bestünde aus Feuer, Wasser, Erde und Luft. Von etwa dieser Art scheint der Glaube zu sein, Mathematik bestehe aus Sätzen und Beweisen (allenfalls noch Definitionen und Bemerkungen). Allerdings gibt es nach Ewing auch einen gravierenden Unterschied zwischen Mathematik und Alchimie: die Alchimisten wussten zwar auch nicht so recht, was sie taten, aber immerhin wussten sie, was sie wollten: nämlich Gold herstellen.

Ist die Mathematik also sinnlos? Diese Frage klingt pessimistisch, und im Grunde sind es auch die meisten Versuche, sie zu beantworten. Bei einer Ehrung durch die Akademie der Wissenschaften in Göttingen äußerte I. R. Schafarewitsch die Ansicht, die Mathematik leite ihren Sinn nicht aus einer relativ zu ihr niedrigeren Sphäre (z. B. des Nutzens) ab, sondern aus einer höheren, nämlich religiösen Sphäre menschlicher Tätigkeit. Hingegen bin ich optimistisch genug zu glauben, dass sich der Sinn des mathematischen Tuns nicht erst außerhalb der Mathematik konstituiert, sondern schon auf der Ebene zeigt, innerhalb der sich das mathematische Wissen nach und nach entwickelt, als Prozess entfaltet. Etwas Entsprechendes ließe sich wohl auch gut über den ‘Sinn des Lebens’ sagen.

Einige ‘wunde Punkte’, die eher oberflächlich in Erscheinung treten, mögen hier genügen, das Sinnproblem der mathematischen Erkenntnis zu illustrieren:

- Der traditionellen Philosophie der Mathematik (die sich eng an die mathematische Grundlagenforschung anschließt) erscheint das Sinnproblem vorwiegend als eines der Rechtfertigung axiomatischer Theorien.
- Der Pädagogik erscheint es zweifach: als Problem der begründbaren Auswahl mathematischer Inhalte für den Unterricht, und als Problem ‘adäquaten’ Vermittelns und Verstehens.
- Die Mehrzahl der Menschen hat, wenn überhaupt, ein recht bruchstückhaftes Bild von Mathematik als einer esoterischen Wissenschaft. Ferner ist kaum zu leugnen, dass der Mathematik selbst eine Neigung zu Esoterik (spezialistischer Wirklichkeitsferne) innewohnt.

Wenig brauchbare Gegenmittel wären: der Rückgriff auf Fundamentalismen irgendwelcher Art (Axiomatizismus mit Widerspruchsfreiheitsdoktrin, Bourbakismus), rigorose ‘Elementarisierung’ (oder gar ‘Atomisierung’) mathematischer Inhalte, Popularisierung im Sinne herkömmlicher Unterhaltungsmathematik, und auch nicht der pauschale Hinweis auf die Anwendbarkeit der Mathematik, insbesondere auf ihre Unentbehrlichkeit für moderne Technologien. Vielleicht wird durch die genannten Argumente das Sinnproblem umgekehrt sogar noch verschärft. Zum Beispiel wird »esoterisches« Wissen, mit dem man Raketen auf den Mond schicken kann, möglicherweise dadurch noch esoterischer (nämlich für Schüler und andere Laien, die nicht dahinkommen können, das wirklich nachzuvollziehen).

Was könnte aber nun Abhilfe schaffen? Der Grundgedanke dazu ist alt und nicht im mindesten originell; er lautet: Richte dich auf das Wesentliche! – Doch was ist „wesentlich“? Vielleicht die Axiome? die Mutterstrukturen? die Anwendungen? Die Fragen sind rhetorisch. A. N. Whitehead gab den Hinweis, das Verständnis und der Erwerb mathematischen Wissens müsse sich an *Begriffen* vollziehen, die auch *für das Alltagsdenken* der Menschen weittragende *Bedeutung* haben. H. Weyls Philosophie verlangt eine *Interpretation* der Mathematik im Zusammenhang der *allgemeinen wissenschaftlichen Tätigkeit*.

Ich meine, dass die Lösung der Sinnprobleme in dieser Richtung zu suchen ist. Seit Bruners Konzept der *fundamentalen Ideen* assimilieren auch Mathematikdidaktiker diesen Gedanken. Nach Bruner machen ein Wissenschaftler und ein Kind im Prinzip dasselbe, wenn sie sich mit den Aufgaben eines Fachgebiets auseinandersetzen. Das tertium comparationis liegt ihm zufolge dabei in den fundamentalen Ideen des Fachs.

Es sollte nicht als terminologische Willkür aufgefasst werden, wenn ich stattdessen von *universellen Ideen* spreche. Unter anderem soll damit ein fundamentalistischer Anstrich vermieden werden (wie er z. B. in der Reform des Mathematik-Unterrichts nach strukturellen Leitvorstellungen Mode war). – Gelegentlich bezeichnet man die Empfehlung, universelle Ideen in Lernprozessen wirksam werden zu lassen, als das didaktische Prinzip der *Wissenschaftsorientierung* oder *Strukturorientierung*. Das klingt so, als sei hier Wissenschaft und ihre Struktur ein unveränderbarer Maßstab. Tatsächlich sollte aber wohl gemeint sein, dass wir uns im wissenschaftlichen Tun an die darin eingeschlossenen Kategorien des Alltagsverstandes erinnern. Insbesondere in der Mathematik ist dies nötig, denn dort wird das Vergessen oder Verwischen von Spuren oft geradezu als Kunst geübt.

Wenn man sich diesem (zunächst noch vagen) Prinzip anschließt, so bleibt natürlich noch eine Menge zu tun: Universelle Ideen sind zu suchen; ihr Kontext (Spektrum) ist zu erarbeiten, ihre pädagogische und sonstige Verwendung ist zu definieren und zu realisieren.

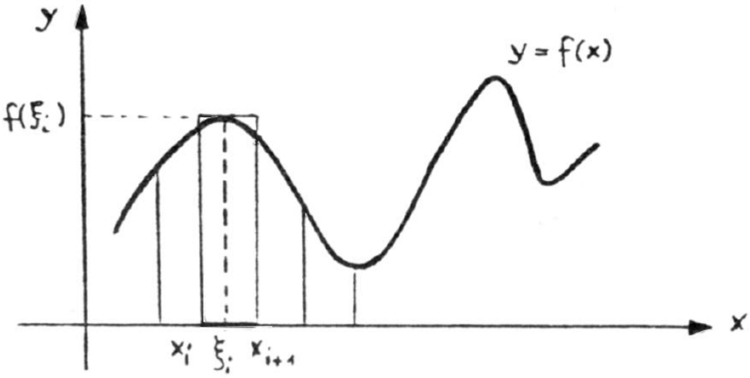
Methoden

Die Mathematik enthält eine unübersehbare Fülle wichtiger Begriffe, die sich als die gesuchten Ideen anbieten; sie lassen sich schon mittels einer logisch-strukturellen Analyse gewinnen. Dabei entstünde freilich eine ziemlich uferlose und beliebige Begriffsliste von beschränktem Wert.

Aber noch aus einem anderen Grund schwebt mir so etwas nicht vor. Mathematische Begriffe sind festgelegt durch *scharf abgrenzende* Gebrauchsregeln. Das kann man von einer *Idee* nicht erwarten: ihr Kontext ist vortheoretisch und gehört zur Sphäre des Alltagsdenkens, der „Lebenswelt“. Die Bildung zu einem Begriff im engeren Sinne steht ihr noch bevor. Ein solches Verhältnis sehe ich z. B. zwischen dem Begriff der Gruppe und der Idee der Invarianz, oder zwischen dem Begriff (oder den Begriffen von) Approximation und der Idee der Exhaustion.

Als konkretes Beispiel sei hier der einfache Grundgedanke skizziert, den H. Lebesgue zur Erklärung des von ihm geschaffenen Integralbegriffs verwendet hat.

Beim Riemann-Integral misst man die Fläche unterhalb einer Kurve $y = f(x)$ durch Summen „kleiner“ Rechteckstreifen $f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$ (s. Figur 1).

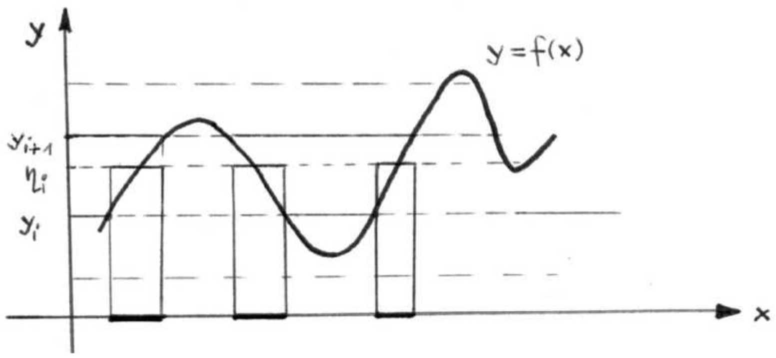


Figur 1

Lebesgue vergleicht das mit dem Vorgehen eines Kaufmanns, der seine Einnahmen in der zufälligen Reihenfolge ihres Eingangs summiert. Für das Integral kann dies bei starken Schwankungen der Funktion f zur Folge haben, dass es nicht existiert. – Demgegenüber steht das systematische Summieren: Der Kaufmann stapelt die Einnahmen nach Münzsorten, misst jeden Stapel und bildet erst abschließend die Summe. Das entspricht einer Zerlegung der Wertmenge (y-Achse) und einer Summierung der Größen

$$\eta_i \cdot \text{Maß}\,\{x \mid y_i \leq f(x) \leq y_{i+1}\}\,.$$

Das nach Lebesgue benannte Integral entsteht gerade als Limes solcher Summen $\sum \eta_i \text{Maß}\,\{\ldots\}$ (s. Figur 2). Für den hieraus exaktifizierten Integralbegriff ist die geschilderte intuitive Idee aber keineswegs eine äußerliche oder



Figur 2

nachträgliche Zutat, sondern eine wesentliche inhaltliche, Bedeutung stiftende Komponente. Das wird auch dadurch nicht eingeschränkt, dass später, bei Aufbau und Weiterentwicklung der Theorie, die Eigenschaft des Integrals, lineares Funktional zu sein, als der wichtigere mathematische Aspekt in den Vordergrund rücken mag.

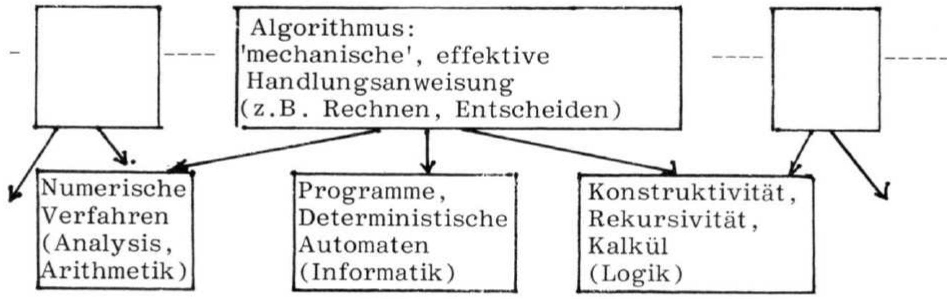
Soviel zur vorläufigen Unterscheidung zwischen Begriff und Idee.

Ich möchte jetzt zu der Frage Stellung nehmen, unter welchen Gesichtspunkten unter den Ideen, die sich im Zusammenhang mit der Mathematik anbieten, universelle Ideen gesucht werden könnten. Hier nenne ich drei Gesichtspunkte:

(1)	*Weite*:	logische Allgemeinheit
(2)	*Fülle*:	vielfältige Anwendbarkeit und Relevanz in mathematischen Einzelgebieten
(3)	*Sinn*:	Verankerung im Alltagsdenken, lebensweltliche Bedeutung

Es handelt sich hierbei nicht um exakte Kriterien, sondern um vorläufige Anhaltspunkte bei der Suche. Sie sollen wenigstens das von P. R. Halmos beklagte Gefühl mildern, dass man sich vorkommt wie ein tastender Schüler des Empedokles, der allgemeine Ideen (»Elemente« nach Halmos) eher zufällig gerade da aufliest, wo sie ihm in der eigenen Erfahrung und persönlichen Anschauung begegnen. Offenbar ist dazu neben *logisch-analytischen* Verfahren ein breit angelegtes *historisch-anthropologisches* Vorgehen erforderlich, aus dem sich überdies ergibt, dass die fraglichen Ideen nicht als absolute Invarianten menschlichen Denkens gelten können (wie etwa Kant seine Kategorien als apriorische Stammbegriffe der Vernunft verstanden haben wollte).

Der zweite Aspekt (Fülle) lässt übrigens eigentlich nur solche Ideen als universell zu, die in mehreren Gebieten eine tragende Rolle spielen, sozusagen als



Figur 3

zentrale Ideen gebietsspezifisch verkörpert. Die besten Beispiele dafür liefern Ideen wie die der Invarianz, der Abbildung oder des Algorithmus. Sie haben für die gesamte Mathematik Bedeutung, bilden aber auch gebietsspezifische Schwerpunkte (s. Figur 3).

Kürzlich kam ein ähnlicher Vorschlag von S. Mac Lane[3] mit dem Ziel, ein erneuertes Studium der Philosophie der Mathematik anzuregen. Die Ursprünge der Mathematik sucht er im Umgang mit Aspekten allgemeiner menschlicher Erfahrung. Einer Vielfalt von Tätigkeiten (wie Zählen, Messen, Formen, Schätzen, Rechnen etc.) entspricht eine Vielfalt von Modellen. Mac Lane bevorzugt daher die von ihm mitgegründete kategorielle Beschreibung mathematischer Konstruktionen (insbesondere sog. universeller Objekte) gegenüber einer „Grand Set Theoretic Foundation" (wie etwa ZF als formale Theorie der kumulativen Hierarchie). Durch eine kategorielle Beschreibung kommen nämlich insbesondere allgemeine Ideen der Mathematik zum Vorschein, die Mac Lane anhand dreier Kriterien charakterisiert: »breadth«, »clarity«, und »depth«. Es ist nicht so sehr entscheidend, inwieweit diese Kriterien sich mit den von mir vorgeschlagenen in Übereinstimmung oder in Beziehung bringen lassen. Viel wichtiger scheint mir die Tatsache zu sein, dass auch mit solchen Überlegungen eine Abkehr von einer unter Mathematikern sonst weitverbreiteten Form des Vulgärpragmatismus gegenüber den Sinnproblemen ihres Faches vollzogen wird.

Ernster genommen wird jetzt die mathematische Tätigkeit mit ihrer operativen, logischen (formalen) sowie ästhetischen (intuitiven) Komponente, nämlich als ein anthropologisches Faktum. Die Tage des Fundamentalismus sind gezählt.

Unabhängig von solchen allgemeineren Überlegungen haben in den letzten Jahren einige Autoren mit der lokalen Analyse einzelner Teilgebiete begon-

[3] Mathematical Models: A Sketch for the Philosophy of Mathematics. In: *Amer. Math. Monthly* 88 (1981), S. 462-472

nen.[4] Dieses Herausarbeiten zentraler Ideen bildet die unentbehrliche *stoffbezogene Komponente* des hier zu schildernden Konzeptes. Sie ist nach und nach zu erweitern durch den Aufweis *allgemeiner Strategien*, wie sie sich anhand phänomenologischer (deskriptiver) Fallstudien heuristischer Arbeit (etwa im Anschluß an Pólya oder auch Lakatos) ergeben.

Produkte

Ich möchte nun skizzieren, welche Produkte aus dem Vorhaben hervorgehen könnten. Es lassen sich drei Bereiche unterscheiden:

- der konzeptionelle Bereich
- der dokumentarische Bereich
- der materiale Bereich.

Im *konzeptionellen* Bereich geht es zunächst einmal darum, eine mehr oder weniger provisorische (weil stets revidierbare) Ideen-Kollektion zustande zu bringen. Diese Kollektion lässt sich schrittweise strukturieren, indem man die internen Beziehungen und die Spezialisierungen in zentralen Ideen betrachtet. Gegenwärtig favorisiere ich folgende Sammlung:

Exhaustion	Quantität	Ideation
Iteration	Kontinuität	Abstraktion
Reduktion	Optimalität	Repräsentation
Abbildung	Invarianz	Raum
Algorithmus	Unendlich	Einheit

Die Ideen der ersten Spalte haben den Charakter von Prozeduren, die der zweiten von Eigenschaften, und in der dritten finden sich wesentliche Komponenten bzw. Aspekte von Begriffsbildungsprozessen.

Eine ausführlichere Kommentierung muß einer anderen Gelegenheit vorbehalten bleiben.[5] Möglicherweise ist die Liste sowohl unvollständig als auch

[4] Zur Stochastik: D. Heitele: An Epistomological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Ed. Stud. Math.* 6 (1975) und H. Steinbring: *Zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs*, Bielefeld 1980; zur Analysis: R. Fischer: Fundamentale Ideen bei den reellen Funktionen. *ZDM* 3 (1976) und M. Klika: Fundamentale Ideen im Analysisunterricht. *math. did.* 4 (1981); zur Analytischen Geometrie: U.-P. Tietze: Fundamentale Ideen der linearen Algebra und analytischen Geometrie. *math. did.* 2 (1979)

[5] Vereinzelte Vorarbeiten dazu habe ich bereits vorgelegt, etwa zur Ideation und Exhaustion: Die operative Genese der Geometrie nach Hugo Dingler und ihre Bedeutung für den Mathematikun-

mit ‘unsicheren Kandidaten’ besetzt. Nach allem bisher Gesagten ist klar, dass diese Ideen nicht als mathematische Begriffe zu verstehen sind; z. B. ist die Idee der Kontinuität noch nicht der elaborierte Begriff der Stetigkeit oder des Kontinuums.

Als Antwort auf die Frage »Does Mathematics Have Elements?« hat unlängst Paul R. Halmos[6] ebenfalls eine Kollektion von Ideen vorgelegt, die sicherlich zum Interessantesten gehört, was über dieses bislang gar nicht so recht wahrgenommene Thema gesagt worden ist. Halmos geht es keineswegs um den lebensweltlichen Hintergrund seiner Ideen, er betrachtet sie vielmehr in ihrer unmittelbaren Wirkung beim Betreiben von Mathematik. Dazu wählt er drei Betrachtungsebenen (»computational«, »categorical«, »conceptual«). Auf jeder dieser Ebenen findet er dann spezifische Ideen in einer zumeist noch vage gehaltenen ‘Arbeitsform’. Der von ihm gewählte Ausdruck »Element« erscheint mir dabei passend (trotz der eventuellen Assoziationen mit Euklidischer Axiomatik), denn die Halmosschen Elemente lassen sich meist gut deuten als Katalysatoren in der mathematischen Tätigkeit. Das gilt vor allem für die von ihm bevorzugten ‘handfesten’ Elemente wie der geometrischen Reihe, den Eigenwerten, dem Schubfach-Prinzip, oder der Exponentialfunktion. Es gilt aber auch für die begrifflich weiter gespannten und vageren Ideen, etwa der Einheit (Primheit), Dualität, Iteration, Kommutativität, Symmetrie oder Stetigkeit.

Da ich hier lediglich ein Arbeitsprogramm und nicht etwa eine Theorie auseinandersetze, sollte eine weitere Analyse und auch ein Vergleich zwischen unterschiedlichen Konzepten (und Ideen-Kollektionen) erst im Zuge einer breiteren Diskussion erfolgen. Denkbar ist überdies eine fruchtbare Synthese.

Dem konzeptionellen ist der *dokumentarische* Bereich unmittelbar angeschlossen. In ihm soll die mathematische Begrifflichkeit ergänzt werden durch das Spektrum der Ideen. Darunter verstehe ich die *potentielle Gesamtheit geeigneter relevanter Daten aus dem Gebrauchskontext einer Idee*. Als Daten kommen Texte, Bilder, Bibliografien und dgl. mehr in Frage; der Gebrauchskontext umfasst außer Mathematik selbst u. a. Technik, Künste und Philosophie.

---

terricht, *Der Mathematikunterricht* 24/5 (1978) (auch in diesem Band) sowie: Idealisierungsprozesse – ihr logisches Verständnis und ihre didaktische Funktion, *Journ. f. Math.-Did.* 1 (1980) (ebenfalls in diesem Band); ferner zur Iteration: Iterative Prozesse, *Math. Semesterberichte* 31 (1984).

[6] In: *The Math. Intelligencer* 3 (1981), S. 147-153

Schließlich baut sich hierauf ein *materialer* Bereich auf, in dem es u. a. um geeignete Realisationen von Ideen sowie um die Erstellung konkreter Lernmittel und Unterrichtsvorlagen geht. Besonders erwähnen möchte ich in diesem Zusammenhang einen Lieblingsgedanken A. I. Wittenbergs: das *Lesebuch* zur Mathematik. Anders als ein Lehrbuch kann ein Lesebuch die Spektren der betreffenden Ideen frei und in geeigneter Breite entfalten. Auch richtet es sich allgemeiner an Laien und nicht allein an Schüler. Andererseits ist damit zugleich angedeutet, dass das Konzept der universellen (und zentralen) Ideen im schulischen Mathematikunterricht nur in Teilbereichen wirksam werden kann.

Ziele

Entwicklung und Verwendung von Materialien sind erst dann sinnvoll, wenn sie von Zielvorstellungen geleitet werden, die dem soweit geschilderten Rahmenkonzept angemessen sind. Im Folgenden nenne ich Ziele bezüglich der Philosophie der Mathematik und des Mathematik-Unterrichts.

Die *Philosophie der Mathematik* hat ihre traditionellen Schwerpunkte in ontologischer und metalogischer Reflexion. Dementsprechend liegt das größte Gewicht auf der Erörterung fundamentalistischer Auffassungen (Logizismus, Intuitionismus, Formalismus, etc.). Es scheint vorstellbar, dass das Konzept der universellen Ideen kraft des ihm innewohnenden Verständnisses von Begriffsbildung eine genuin didaktische Philosophie der Mathematik impliziert. Eine solche Philosophie wird gute Dienste leisten, wenn es darum geht, einem breiten Laien-Publikum den Sinn der mathematischen Tätigkeit zu erschließen. Dazu hat sie über das Studium universeller Ideen Verbindungen herzustellen zur allgemeinen Kultur- und Ideengeschichte und ferner darin Mathematik als einen Prozess bewusst zu machen und zu kennzeichnen. Insofern werden die Sinnprobleme der Mathematik nicht durch eine Theorie zu beantworten sein.

Was den *Mathematik-Unterricht* betrifft, so können universelle (zentrale) Ideen auf zweifache Weise wirksam werden:

1. Sie können das Lernen der Schüler *lokal strukturieren*. Vermutlich eignen sie sich nicht als Leitfaden für größere Unterrichtssequenzen oder ganze Kurse. An geeigneten Stellen leisten sie hingegen Übersicht und Bedeutungskonzentration.

2. Sie erscheinen mir als geeignete *Komponente im Metawissen* des Lehrers. Ihre Philosophie ist zugleich inhaltsbezogen (genetisierend) und inhaltsüber-

steigend (synthetisierend), letzteres freilich nicht im Sinne einer feiertäglichen Überwölbung der Lerngegenstände, sondern im Sinne einer Analyse und Einordnung in den allgemeinen Zusammenhang des Betreibens von Mathematik mit dem sozialen und kulturellen Leben.

Schon einem flüchtigen Blick auf die allgemeinen und speziellen Zielsetzungen, die das Lern- und Unterrichtsgeschehen faktisch bestimmen, erscheint deren Abhängigkeit von einem mehr oder weniger bewussten Gesamtbild von und Habitus gegenüber der Mathematik. Dass ein solches Gesamtbild nicht schon deshalb angemessen sein muss, weil es gewisse Tendenzen vermeintlicher Modernität hätschelt, ist in der Vergangenheit allgemeiner bekannt geworden (man denke nur an Schlagworte wie „Mathematik ist Mengenlehre“ oder „Mathematik ist die Wissenschaft von formalen Systemen“).

Ein vielleicht nicht unerwünschter Nebeneffekt könnte es auch sein, dass universelle Ideen die Fachdidaktik gelegentlich ein wenig von einer allzu ausschließlichen Beschäftigung mit den Fragen zwangsmäßigen, institutionellen organisierten Lernens befreien.

Philosophie

Hier möchte ich, was bisher zur Philosophie gesagt wurde, noch durch zwei Anmerkungen ergänzen. Die erste richtet sich an den Mathematik-Didaktiker, die zweite an den Philosophen.

1. Möglicherweise fühlen sich einige Fachdidaktiker durch die Rolle irritiert, die ich der Philosophie im Rahmen der geschilderten Konzeption zukommen lasse. Damit möchte ich lediglich den Umstand kontrapunktieren, dass man üblicherweise die Mathematik zu den ‘Bezugswissenschaften’ der Mathematik-Didaktik rechnet, oft in einem Atemzug mit Pädagogik und Psychologie. Die Ausdrucksweise ‘Bezug’ enthält allerdings eine Äquivokation. Denn während eine didaktische Aussage sich sehr wohl auf eine pädagogische oder psychologische Erkenntnis stützen kann (die entsprechende Disziplin also die Rolle eines Hilfsmittels übernimmt), spielen mathematische Erkenntnisse für sie in erster Linie die Rolle von Gegenständen. Mathematik ist ein Thema der Mathematik-Didaktik, nicht jedoch ihr Forschungsinstrument. Wenn dennoch eine andere Vorstellung gelegentlich verbreitet zu sein scheint, so hängt dies vermutlich mit bestimmten restriktiven Formen herkömmlicher ‘Stoffaufbereitung’ zusammen, bei denen das lehrtextmäßige Darbieten elementarer mathematischer Sachverhalte im Vordergrund steht.

Will man überhaupt Philosophie ins Bezugsfeld der Fachdidaktik aufnehmen, so kann man dem Konzept einer geeigneten didaktischen Philosophie als einem Bestandteil der Didaktik nicht mehr ausweichen.

2. Die Suche nach universellen Ideen erinnert bis zu einem gewissen Grad an das alte Vorhaben der Philosophie, die grundlegenden Kategorien menschlichen Denkens ausfindig zu machen. Hierfür stehen vor allem die Namen Aristoteles, Kant oder Peirce. Kant hat in seiner *Kritik der reinen Vernunft* die Befürchtung geäußert, es käme, wie schon bei Aristoteles, zu einer bloß »rhapsodistischen« Auflistung, wenn das Verfahren der Kritik nicht in besonderer systematischer Weise abgesichert werde. Bedeutsam ist in diesem Zusammenhang die *anthropologische Wende*, die dann Fries und seine Schüler (später vor allem L. Nelson) der von Kant letztlich unentschieden gelassenen Methodenfrage gegeben haben. Nach Fries sind zwar die durch die Kritik zu findenden (zu »deduzierenden«) Vernunftprinzipien apriorisch, das Vorgehen der Kritik selbst aber empirisch (nämlich psychologisch). Nelson hat dies verglichen mit dem Verhältnis von axiomatisierter Mathematik und inhaltlicher Metamathematik.[7] Die anthropologische Wende vollzieht sich also lediglich auf der Ebene der Metatheorie. Parallel dazu ist aber wohl auch eine Relativierung der Apriorität auf der Objektebene (der Vernunftprinzipien, Kategorien, Ideen) angezeigt. Denn erstens ist die Vorstellung unbedingter Invarianten nicht ohne Einschränkungen hinzunehmen; und zweitens kann auch die „Lebenswelt" nicht als ein universaler Boden für die Genese wissenschaftlicher Begriffe gelten, der, anstatt seinerseits geschichtlichem Werden zu unterliegen, diesem immer schon vorgängig ist. Es ist ja auch keineswegs so, dass die Theorie, die schrittweise in jene Lebenswelt hineingetragen wird, aus ihr wieder herauszuholen wäre.

SUPPLEMENT

Der folgende Text über „Allgemeine Ideen und Grundvorstellungen" ist ein kurzer Auszug aus meiner Vorlesung *Grundzüge der Mathematik-Didaktik* (Winter 2002, Universität Flensburg). Es sind nur solche Passagen exzerpiert, von denen ich mir eine

[7] Vgl. dazu meine Monografie *Theorie und Rechtfertigung. Untersuchungen zum Rechtfertigungsproblem axiomatischer Theorien in der Wissenschaftstheorie*, Braunschweig 1975.

Ergänzung und Verdeutlichung der beiden hier vorangehenden früheren Artikel über »Universelle Ideen« verspreche.

Ein grundlegendes Thema der Mathematik-Didaktik ist die Beziehung zwischen dem lernenden Subjekt, das sich mit Mathematik beschäftigt, und dem mathematischen Wissen, das sich in der Fachdiziplin und ihren Strukturen verkörpert. Unterrichtskonzepte sollten nicht einseitig nur einem der beiden Pole verpflichtet sein. Für das Entdeckungslernen gilt dies ebenso wie für das nun zu betrachtende Konzept der „fundamentalen Ideen“. Es zielt nicht auf die systematische Form mathematischer Begrifflichkeit, sondern auf ihre ursprünglichere (vorsystematische) Gestalt und Wirkungsweise, die häufig noch subjektive und in Alltagserfahrungen verankerte Momente aufweist.

Zwei komplementäre Ansätze werden im Folgenden erörtert: a) Durch die Betonung allgemeiner grundlegender Ideen und Begriffe soll eine Konzentration auf das Wesentliche des stofflichen Kanons bewirkt, der Überblick gewahrt, das Verständnis vertieft und das Behalten verbessert werden. b) Im Zusammenhang damit ist darauf zu achten, dass Lernende zu den Begriffen, die sie sich aneignen, angemessene (sachadäquate) Grundvorstellungen entwickeln.

„Fundamentale“ Ideen. – Situationen, in denen man „den Wald vor lauter Bäumen nicht sieht“, sind dem Lernen abträglich. In der Mathematik ist das nicht anders; gerade hier kommt es darauf an, den Kern eines Sachverhalts aus oft verwirrenden Einzelheiten herauszuschälen. Lernpsychologisch ist es ratsam, sich immer wieder die große Linie, die allgemeinen Hauptgedanken, die grundlegenden Aspekte bewusst zu machen. Das gilt nicht weniger für das Erkennen und das Verstehen der Sache selbst. Wir begreifen einen Gegenstand besser, wenn wir ihn unter eine bündelnde allgemeine Idee fassen. Vollzieht dies ein lernendes Kind, so nutzt es auf seiner Stufe ein Prinzip echter Forschungsarbeit.

Das Konzept der fundamentalen (universellen oder ähnlich bezeichneten) Ideen wird heute als ein Mittel anerkannt, aus der Fülle möglicher Unterrichtsstoffe eine Auswahl zu treffen. Zugleich soll damit ein Wesenszug der mathematischen Tätigkeit auch im schulischen Mathematikunterricht zur Geltung kommen. Für die Mathematik klar ausgesprochen findet sich das Prinzip schon bei Whitehead (1929), allgemeinpädagogisch ausgearbeitet wurde es von Bruner (1960). Geeignete fundamentale Ideen wurden zunächst zu einzelnen Gebieten der Mathematik herausgearbeitet (zur Stochastik, Analysis oder zu den Anwendungen der Mathematik[8]). Parallel dazu hat man das Konzept selbst immer wieder diskutiert und weiterentwickelt.[9]

Die Ausdrücke „Idee“ und „Begriff“ bedeuten in unserem Zusammenhang nicht dasselbe, sondern verweisen auf unterschiedliche Bereiche. Ideen sind weniger klar festgelegt als Begriffe; sie gehören zur prämathematischen Erfahrung, zum intuitiven, von der Anschauung geleiteten Denken. Begriffe sind hingegen schärfer umrissen und zumindest in der Mathematik meist durch eine exakte Definition gegeben. Aus einigen Ideen (z. B. Symmetrie) lässt sich durchaus ein abstrakter mathematischer Begriff gewinnen. Vor allem aber in ihrem ursprünglichen, formal noch nicht ausgearbeiteten Stadium eignen sich Ideen für didaktische Zwecke.

Wann ist eine Idee als „fundamental“ anzusehen? – Gewiss lassen sich allerlei plausible Forderungen aufstellen, u. a. die folgenden (nicht immer überschneidungsfreien) Kriterien:

- *Weite* (Bündelung von Vor-Erfahrungen aus unterschiedlichen Bereichen, Allgemeinheit und Ausbaufähigkeit);
- *Fülle* (vielfältige Anwendbarkeit, Beziehungshaltigkeit zu mathematischen und außermathematischen Themen);
- *Sinn* (Zugänglichkeit ohne formale Begriffbildung, Verankerung im Alltagsdenken, lebensweltliche Bedeutung).

Zum Aufweis geeigneter Ideen-Kandidaten bedarf es einer eingehenden Analyse des mathematischen Denkens unter historischen, erkenntnistheoretischen und didaktischen Gesichtspunkten. Hierbei sind recht unterschiedliche Akzentsetzungen möglich, und es wundert nicht, dass bisher noch keine Ideenliste allseitige Zustimmung gefunden hat. Die folgende (mit Sicherheit unvollständige) Kollektion enthält denn auch nur einige der am häufigsten genannten Ideen, deren überragende (und zentrale) Rolle im mathematischen Denken weitgehend anerkannt wird:

1. Approximation (Annäherung, sukzessives Ausschöpfen)
2. Iteration (Wiederholung von Aktionen oder Elementen)
3. Abbildung (funktionaler Zusammenhang, eindeutiges Zuordnen)

[8] Humenberger, J.; Reichel, H. Ch.: *Fundamentale Ideen der angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht*. BI-Wissenschaftsverlag: Mannheim 1995

[9] Für eine bewertende Übersicht vgl. F. Schweiger: Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik. *Journ. f. Math.-Did.* 13 (1992).

4. Algorithmus (mechanische, effektive Handlungsvorschrift)
5. Quantität (Zählen, Vergleichen, Messen)
6. Optimierung (eine kleinste, größte, beste Lösung suchen)
7. Symmetrie (Ebenmaß, Gleichgestaltigkeit, Invarianz)

Neben „fundamentalen“ (universellen) Ideen in dieser Allgemeinheit spielen auch ihre Ausprägungen in bestimmten Gebieten der Mathematik (wie Geometrie, Analysis, Wahrscheinlichkeit) eine bedeutende Rolle; man könnte diese eingeschränkteren spezialisierten Varianten *zentrale* Ideen nennen. Eine scharfe Abgrenzung ist allerdings nicht immer leicht möglich, weil ja in einer gebietsspezifischen Ausformung einer „fundamentalen“ Idee nicht unbedingt immer auch ein wesentlich neuer Aspekt in Erscheinung tritt.

Didaktischer Nutzen. – Der didaktische Nutzen solcher Allgemeinheiten liegt nicht ohne weiteres auf der Hand. Wie lässt er sich erkennen und zur Geltung bringen? Gewiss nicht durch eine einmalige Begegnung, z. B. mit dem Abbildungsgedanken oder der Idee des Algorithmus. Soll das Konzept im Unterricht wirksam werden, so muss das Wesen einer zentralen oder fundamentalen Idee an den einzelnen Lerngegenständen immer wieder herauspräpariert werden.

Beispiel 1. – Babylonisches Wurzelziehen (Berechnung der Quadratwurzel nach Heron). Bei diesem Thema treten wenigstens drei fundamentale Ideen zugleich auf den Plan: Approximation, Iteration, Algorithmus. Der Heronsche Algorithmus berechnet eine Folge von rationalen Zahlen, die der gesuchten Quadratwurzel beliebig nahe kommen. Die Näherungsgüte steigt mit der Anzahl der Iterationsschritte. Das wiederholte Durchlaufen derselben Rechenprozedur ist typisch für viele Algorithmen, vor allem bei approximierenden Verfahren. Dass man Näherungen berechnet, darf nicht als Nachteil oder Verlegenheitslösung bewertet werden; es gehört zum Wesen der Sache.

Beispiel 2. – Die Idee der Abbildung hat viele Facetten; die funktionale Abhängigkeit ist nur eine von ihnen (allerdings eine sehr bedeutende). Eine andere Anwendungsart von Abbildungen ist das Codieren bzw. die Darstellung von Dingen mit geänderten Namen. Um z. B. die Teiler einer ganzen Zahl – sagen wir 600 – zu zählen, betrachten wir ihre Primfaktorzerlegung ($600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$). Da irgendein Teiler von 600 höchstens diese Primfaktoren enthält, hat er die Form $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$. Man kann ihn also durch ein Tripel (a,b,c) beschreiben, für das $0 \leq a \leq 3$, $0 \leq b \leq 1$ und $0 \leq c \leq 2$ gilt. Die Anzahl aller Teiler beträgt somit 24 ($= 4 \cdot 2 \cdot 3$, d. h. das Produkt der Wahlmöglichkeiten jeweils für a,b,c). Den Kern dieser Überlegung bildet die „neue“ Darstellung eines Teilers durch die ihn codierende Exponentenfolge. Die Kombinatorik benutzt dieses Abzählprinzip in Form einer allgemeinen Gleichheits- oder Zuordnungsregel.

Beide Beispiele beziehen sich zwar auf einen innermathematischen Sachverhalt, benutzen dabei aber Ideen, die auch in der Alltagswirklichkeit eine Rolle spielen. Dass man eine Handlung (z. B. einen Arbeitsgang) solange wiederholt, bis das Ergebnis nahe genug an die Zielvorstellung herankommt, ist nichts Ungewöhnliches. Auch Codierungen, mit denen Dinge (anders als ursprünglich gegeben) repräsentiert werden, sind im Alltag gebräuchlich (Identifizierung eines Kfz-Halters durch das Kennzeichen seines Fahrzeugs; Benennung eines Planquadrats, in dem eine Straße liegt, durch ein Koordinatenpaar wie D7, usw.). Im Unterricht sollte schrittweise darauf hingewirkt werden, die Analogie zwischen dem vertrauten lebensweltlichen Aspekt einer Idee und ihrer raffinierteren Anwendungsform in der Mathematik bewusst zu machen. Bei weitverbreiteten, tiefsitzenden und direkt aufweisbaren Ideen – etwa Quantität (Zahl), Iteration, Optimierung, Symmetrie – mag dies leichter gelingen als bei vielschichtigen, meist schon mathematisch vorgeprägten Konzepten (Abbildung, Algorithmus, Approximation).

Es ist nicht leicht, präzise zu beschreiben, wie das hier nur knapp umrissene Unterrichtskonzept über seine Funktion als Stoffauswahlkriterium hinaus methodisch umgesetzt werden kann. Gewiss darf es nicht darauf hinauslaufen, Lernenden bei jeder sich bietenden Gelegenheit eine allgemeine Vokabel aus dem Arsenal der fundamentalen Ideen unterzuschieben. Das würde den Aufwand an unverstandener Begrifflichkeit vermehren anstatt ihn zu verringern. Vielmehr gilt: Unterrichtsthemen und Lerngegenstände sollten in ihrer Struktur und Darstellungsform von denjenigen zentralen Ideen von vornherein (mit)geprägt werden, die von der Sache her in ihnen angelegt sind. – Ein Routineverfahren bietet sich dazu nicht an. Zentrale Ideen wirken eher implizit, gehören mehr zum Hintergrundwissen des Lehrers als zum Vordergrundwissen des Schülers; sie kommen vor allem dann zur Geltung, wenn man an der richtigen Stelle die richtigen Akzente setzt (nicht anders als beim Vorlesen eines Satzes, den die Zuhörer auch erst durch sinnvolle Betonung verstehen). Aus dieser Sicht können sie den Mathematikunterricht davor schützen, zu einer Nonsens-Veranstaltung auszuarten.

Angemessene Grundvorstellungen. – Fundamentale Ideen sind relativ allgemein und übergreifend. Sie sind nicht spezifisch für ein einzelnes Gebiet, sondern treten – immer wieder anders ausgeprägt (als zentrale Ideen) – in mehreren Gebieten auf. Die Idee der Abbildung spielt z. B. in der Analysis, Algebra, Geometrie oder in der Kombinatorik eine wichtige Rolle, hat aber in jedem dieser Gebiete spezifische Besonderheiten, die für das Verständnis seiner Begriffe und Methoden maßgeblich sind. Man kann das Herausarbeiten zentraler Ideen zu Einzelgebieten daher auf zwei Arten deuten: einmal als einen Weg, überhaupt geeignete Ideen-Kandidaten auszumachen; dann aber auch als den Versuch, die bereichsspezifischen Grundbegriffe im Hinblick auf die in ihnen angelegte sachliche Intention zu deuten. Mit diesem zweiten Teil stehen wir vor einer Aufgabe eigenen Rechts: die Vermittlung und das Verständnis mathematischer Begriffe durch geeignete *Grundvorstellungen* zu fördern, die beim Schüler zu entwickeln und zu festigen sind.

Was ist eine Grundvorstellung? – Als eigenständiges (zu den zentralen Ideen komplementäres) Unterrichtskonzept wird dieser Ansatz z. B. bei P. Bender[10] vorgestellt und in zahlreichen Einzelheiten erläutert. Im Folgenden soll das Konzept zwar daran angelehnt, jedoch in freier Auslegung und nur soweit skizziert werden, wie gegenüber den zentralen Ideen neue Facetten hervortreten.

Grundvorstellungen sind (ähnlich wie zentrale bzw. fundamentale Ideen) nicht als formal definierte mathematische Begriffe misszuverstehen. Vielmehr handelt es sich um inhaltliche Vorstellungen, die vom Lernenden mit bestimmten Begriffen assoziiert werden. Was stellt ein Schüler sich vor, wenn von Variablen, Funktionen, Gleichungen, Grenzwerten etc. die Rede ist? Die inneren Anschauungsbilder dazu können sehr individuell, subjektiv gefärbt, gelegentlich auch inadäquat sein. Sie entwickeln sich im Umgang mit mathematischen Dingen oft wildwüchsig und geradezu zwangsläufig, als müsse ein Vakuum im Hintergrund gefüllt werden. Es scheint berechtigt, wenn Didaktiker davor zurückscheuen, solche subjektiven Vorstellungen einfach falsch zu nennen. Die Tatsache, dass ein Begriff im Kopf eines Schülers nicht mit der Definition im Kopf des Lehrers übereinstimmt, bedeutet ja noch nicht, dass die Schüler-Vorstellung keinen Eigenwert besitzt, von vornherein unbrauchbar und deshalb durch eine von außen aufgezwungene, oberflächlich antrainierte „offizielle“ Version zu verdrängen sei. Gleichwohl kann die Alternative nicht die sein, einen Schüler mit seinen evtl. schief aufgefassten Grundbegriffen bzw. den dahinter liegenden unangemessenen Grundvorstellungen sich selbst zu überlassen. *Mathematisches Wissen muss intersubjektiv geteilt werden können*, wenn Mathematik als erkenntnisgewinnende Tätigkeit und als eine Quelle allgemeiner Bildung möglich sein soll. Somit ist es unerlässlich, auf die Entwicklung angemessener Grundvorstellungen einzuwirken.

[10] Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht, erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen. In: Postel, H.; Kirsch, A.; Blum, W. (Hrsg.): *Mathematik lehren und lernen*. Festschrift für Heinz Griesel, Hannover 1991, S. 48-60

Wann darf eine Grundvorstellung als angemessen bzw. sachlich adäquat gelten? Auch wenn eine Antwort auf diese Frage zwangsläufig vage bleibt, erscheint doch der Versuch zweckmäßig, zumindest eine Richtung anzupeilen und folgende Kriterien in Betracht zu ziehen:

- fachsystematische Kompatibilität
- Verträglichkeit mit zentralen Ideen
- psychologische Plausibilität
- lebensweltliche Verankerung
- Erweiterbarkeit, Ausbaufähigkeit

Eine Grundvorstellung sollte mit der Begrifflichkeit des Faches verträglich sein, um Verstehensprozesse nicht durch widersprüchliche Ausrichtung zu erschweren. – Der positive Effekt zentraler Ideen sollte nicht unterlaufen werden. – Das lernende Subjekt muss eine Grundvorstellung von seinem Standpunkt aus annehmen können sowie nach und nach verinnerlichen. Sie sollte daher psychologisch plausibel sein (d. h. innere Stimmigkeit besitzen); außerdem sollte sie für den Lernenden zugänglich sein (z. B. durch vertraute Elemente aus lebensweltlichen Situationen). Zu diesem Punkt äußert sich Bender wie folgt: »Hierfür sprechen sich viele Didaktiker aus [...]; jedoch wird schon in den meisten didaktischen Entwürfen und erst recht in der Unterrichtspraxis weltweit diese Forderung kaum erfüllt.« (Loc. cit. S. 49).

Mit Grundvorstellungen, die „unbeaufsichtigt" entstehen – E. Fischbein[11] nennt sie »tacit models« –, füllen Schüler auf eigene Faust die inhaltliche Leere, den Hohlraum hinter einer mathematischen Vokabel. Das Ergebnis ist oft ebenso simpel wie resistent gegen jede Form der Korrektur oder Weiterentwicklung. Eine Grundvorstellung ist aber nur dann angemessen, wenn sie sich als ausbaufähig erweist und mit den Einsichten in die Sachstrukturen eines Gebiets wachsen kann.

Unterrichtspraktische Hinweise. – Wie schon bei den zentralen bzw. fundamentalen Ideen liegt auch beim Konzept der angemessenen Grundvorstellungen die praktische Umsetzung, insbesondere die methodischen Möglichkeiten, auf die Vorstellungswelt der Lernenden einzuwirken, keineswegs auf der Hand. Welche Instrumente, welche Regulative bieten sich an?

Fischbein hat vorgeschlagen, dass Schüler ihre Grundvorstellungen gemeinschaftlich einer sog. metakognitiven Analyse unterziehen. Hier ist allerdings

[11] Vgl.: Tacit Models and Mathematical Reasoning. *For the Learning of Mathematics* 9/2 (1989), S. 9-14

(mit Bender) auf die Gefahr der Überforderung hinzuweisen. Gerade bei den betroffenen Schülern, die primär um ein Verständnis des Stoffs ringen, können solche Meta-Betrachtungen leicht noch größere Verwirrung stiften. Stattdessen empfiehlt Bender, a) die diagnostischen Erkenntnisse zu Fehlvorstellungen konsequenter für die Schulpraxis auszuwerten, und b) rechtzeitig (von der Primarstufe an) »die unweigerlich entstehenden Vorstellungen [...] gleich in die 'richtigen' Bahnen zu lenken«. (Loc. cit. S. 55). Dazu müssen die Begriffe dann aber von vornherein veranschaulicht und in lebensweltliche Situationen eingebettet werden. Eine wichtige Rolle spielen dabei Fehler (einmal abgesehen von Flüchtigkeitsfehlern). Das Gros der systematischen Fehler wird durch „schiefe" Grundvorstellungen oder falsch gemerkte bzw. unzulässige Regeln im Kopf des Schülers erzeugt. Leider besteht die gängige Unterrichtspraxis darin, Fehler eilfertig zu bekämpfen, von vornherein zu vermeiden oder notfalls schlicht zu übertünchen. Auf diese Weise erfährt man nur noch wenig oder nichts darüber, welche Vorstellungen beim Schüler zu einem Fehler geführt haben.

Im Mathematikunterricht ist ein *flexibler, produktiver und realistischer Umgang mit Fehlern* anzustreben und insbesondere ein Verhalten, das einseitig auf Fehlervermeidung ausgerichtet ist, unbedingt zu vermeiden. Dass man aus seinen Fehlern lernen können soll, ist ein Grundsatz, der im Klassenzimmer keineswegs seine Gültigkeit verliert.

Beispiel 3: Ein Umkehrfehler. – Die Bedeutung von Fehlvorstellungen wird besonders drastisch durch das folgende prominente Beispiel von Rosnick und Clement beleuchtet[12]: Im Rahmen einer empirischen Untersuchung[13] hat man Studierenden verschiedenen Alters Aufgaben folgenden Typs vorgelegt: „Es sei Z die Anzahl der Ziegen und K die Anzahl der Kühe auf einer Weide. Es sind dort fünfmal so viele Ziegen wie Kühe. Drücken Sie das durch eine Gleichung mit Hilfe von Z und K aus!" – Die Aufgabe haben nur ca. 60 % der Befragten richtig gelöst. Spätere Untersuchungen, die andere Autoren mit anderen Personengruppen durchgeführt haben, ergaben ein ähnliches Bild. Stets trat dabei am häufigsten der Fehler auf, dass die Gleichung $5Z = K$ hingeschrieben wurde. Dieser Fehler hielt sich hartnäckig (in ca. 80 % der Fälle) auch dann, nachdem den Versuchspersonen ausführliche Hilfen und Belehrungen gegeben worden waren.

---

[12] Hier geschildert nach Fischer, R; Malle, G.: *Mensch und Mathematik: Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln*. Mannheim 1985, S. 33-38

[13] Rosnick, P.; Clement, J.: Learning without Understanding: The Effect of Tutoring Strategies on Algebra Misconceptions. *Journal of Mathematical Behavior* 3/1 (1980), S. 3-27

Offenbar handelt es sich um ein tiefsitzendes Phänomen. Manches deutet auf ein unzulängliches Verständnis des Gebrauchs von Variablen, Termen und Gleichungen hin. So scheint der Buchstabe ‘Z’ als Abkürzung für den Begriff Ziege und der Term ‘5Z’ als eine Art Ansammlung von fünf Ziegen missverstanden zu werden. An der Entstehung und Festigung solcher Fehlvorstellungen ist nicht selten ein Unterricht beteiligt, in dem formelhafte Verfahrensroutinen zu sehr betont und auf Kosten der Entwicklung sinnhafter Assoziationen eingeübt werden.

Dass Grundvorstellungen sich in der Praxis spürbar auswirken können, mögen die folgenden beiden Beispiele illustrieren.

Beispiel 4: Division durch $1/3$. – Dividieren ist ursprünglich ein Aufteilen. Sollen 24 Plätzchen unter 6 Personen gerecht aufgeteilt werden, so erhält jede von ihnen 4 Plätzchen. Wie kann man mit dieser Grundvorstellung verstehen, was es heißt, durch den Bruch $1/3$ zu dividieren? Die Antwort ist einfach und lautet: überhaupt nicht. Eine gedrittelte Person oder ähnliches, was sonst noch in dieser Lage herhalten mag, ist doch meist eine arge Zumutung. Ebenso unsinnig wie didaktisch gefährlich wäre die Flucht nach vorn in den Verfahrenskalkül: „Man teilt durch einen Bruch, indem man mit dem Nenner malnimmt, usw.“ – Stattdessen sollte zuallererst eine andere Grundvorstellung entwickelt werden, z. B. die des Passens, des Aufgehens eines Teils in einem Ganzen. In gewissem Sinn kehrt sie die Idee des Aufteilens um. Wie oft kann man 4 Plätzchen in eine Schachtel für 24 hineinlegen? Wie oft passt $1/3$ einer Torte in den Platz für eine ganze? Damit verliert die Division durch rationale Zahlen viel von ihrem „Geheimnis“.

Beispiel 5: Preis ohne Mehrwertsteuer. – Eine angemessene Vorstellung von prozentualer Zu- und Abnahme ist im Alltag unentbehrlich, bei vielen Menschen aber nicht hinreichend ausgebildet. Kostet eine Ware 64 Euro zzgl. der gesetzlichen Mehrwertsteuer (Stand Herbst 2002: 16 %), so wird vor allem der *additive* Aspekt hervorgekehrt: $64 + 10,24 = 74,24$. Damit fällt es z. B. schwer, aus einem Endpreis die Mehrwertsteuer herauszurechnen. Typischer Fehler: Da keine andere Angabe als 74,24 Euro vorliegt, werden von ihr die 16 % ermittelt und anschließend abgezogen: $74,24 - 11,88 = 62,36$. – Das sich darin ausdrückende Fehlverständnis verursacht noch größere Schwierigkeiten, wenn Zunahme und Abnahme beide ins Spiel kommen, etwa wie folgt: Auf einen Listenpreis werden 3 % Rabatt (Skonto bei Sofortzahlung) gewährt, aber auch 16 % Mehrwertsteuer aufgeschlagen. Wer additiv überlegt, fragt sich dann meist, ob erst der Rabatt und dann die Mehrwertsteuer zu berechnen sei oder umgekehrt. Solchen Verwirrungen lässt sich vorbeugen, indem man von vornherein die (hier angemessene) *multiplikative Grundvorstellung* entwickelt; es ist also $64 \cdot 1,16 = 74,24$ zu verinnerlichen. Das Herausrechnen der Mehrwertsteuer läuft dann einfach auf eine Division durch 1,16 hinaus. Ebenso leicht einsehbar wird damit aus einem Listenpreis

x der Endpreis $x \cdot 1,16 \cdot 0,97$, und die Frage nach der Reihenfolge von Abzug und Aufschlag stellt sich erst gar nicht.

Die Liste derartiger Beispiele ließe sich noch beträchtlich erweitern, etwa um Fragen zu geometrischen Grundvorstellungen. Welchen Vorstellungsinhalt soll man z. B. mit dem Begriff „Gerade“ verbinden? Ist es immer sinnvoll, an eine gespannte Schnur zu denken? Oder: Sind eine glatte Wasseroberfläche, eine Tafel, ein Blatt Papier wirklich adäquate ‘Vorlagen’ für den Begriff „Ebene“?[14] – Ist es sinnvoll und angemessen, sich die Deckabbildungen, mit denen die Abbildungsgeometrie umgeht, als (stetige) Bewegungen einer Figur in ihre kongruente Kopie vorzustellen?[15]

POSTSKRIPTUM

1. – Die nun schon vor einem halben Jahrhundert begonnene Diskussion um Bruners Prinzip der „fundamentalen Ideen“ hat, wenn überhaupt, letztlich wohl nur bescheidene Auswirkungen auf den tatsächlichen Mathematik-Unterricht gezeitigt. Wir treffen gegenwärtig im gesellschaftlichen und bildungspolitischen Umfeld, in der Pädagogik und in den Didaktiken der Schulfächer auf ganz anders ausgerichtete Kräfte und Tendenzen und *last not least* in der Lehrerschaft auf praktische Sorgen und Nöte, angesichts derer ein so diskursives und ideenarchäologisch tief grabendes Unternehmen zwangsläufig in den Hintergrund tritt. Kann überdies die Mathematik-Didaktik (zumal in den seit einiger Zeit erneuerten Curricula) angehenden Lehrer(inne)n wirklich mehr vermitteln als gerade einmal den Hinweis auf das nämliche Thema samt einiger Beispiele? Die im ursprünglichen Ansatz des Prinzips geforderte Durchdringung des mathematischen Stoffs, mehr noch: dessen an allgemeinen („fundamentalen“, „universellen“, „zentralen“) Leitideen orientierte Entfaltung, ist – wie mir scheint – heute doch eher die Ausnahme als die Regel.

2. – Die ursprünglich geäußerte Hoffnung, anhand universeller Leitideen eine genuin didaktische Philosophie der Mathematik entwickeln zu können, hat sich in meinen Augen letztlich nicht verwirklicht. Die damit verknüpfte Vorstellung nämlich, die fraglichen Ideen könnten als echte *konstituierende Momente* der mathematischen Begriffsbildung fungieren und darin eine Art Leitbild-Rolle übernehmen, erscheint mir nach

[14] Ausführliche didaktische Begriffsanalysen dazu enthält die Monografie Bender, P.; Schreiber, A.: *Operative Genese der Geometrie*, Wien und Stuttgart 1985.
[15] Vgl. P. Bender: Abbildungsgeometrie in der didaktischen Diskussion. *ZDM* 14 (1982), S. 9-24.

allen damit gemachten unterrichtspraktischen Erfahrungen als ein nur sehr schwer erreichbares Ziel. Wie ich die Dinge gegenwärtig (2011) sehe, besteht die Leistung allgemeiner Leitideen (ob nun „fundamental“ oder „universell“ genannt) weniger in erkenntniskonstitutiven Beiträgen als vielmehr darin, eine *nachträgliche* Heuristik des Begriffsverständnisses zu ermöglichen (und auch das natürlich nur nach Maßgabe einer vom Lernenden bereits vorgängig erarbeiteten Minimalbasis, wenn diese Heuristik nicht nur ein oberflächliches Rubrizieren bleiben soll).

Es verhält sich in dieser Hinsicht ein wenig so wie mit der Naturphilosophie. Trat diese in früheren Zeiten mit dem Anspruch auf, die grundlegenden und allgemeinsten Eigenschaften der belebten und der unbelebten Natur aufweisen und erkennen zu können, so ist sie heute allenfalls eine kritische Disziplin, die von den Naturwissenschaften schon erarbeitete bzw. gesicherte Erkenntnisse in ein möglichst kohärentes Gesamtbild zusammenführt und dabei nachgeordnete („metaphysische“) Qualifizierungen und Bewertungen vornimmt. Natürlich kann eine derart reduzierte Funktion immer noch sinnvoll und nützlich sein. Man kann sie umgekehrt sogar wieder anheben, indem man über fachdidaktische Gesichtspunkte hinausgehend den Blick auf weitergefasste Ideen richtet, die sich von vornherein als Kategorien *ex post* zu erkennen geben. Hierzu gehören etwa polare Spannungsfelder wie „diskret – kontinuierlich“, „endlich – unendlich“ oder „lokal – global“. Gegensatzpaare wie diese liefern in der Tat mancherlei Ansatzpunkte für ideengeschichtliche Ausdeutungen mathematischer Denkoperationen. „Lokal“ z. B. sind die differenziellen Gesetze der mathematischen Physik im ‘Kleinen’, während das „globale“ Gegenstück dazu das daraus integrierte (zusammengestückelte) Ganze darstellt. Lokal hat man es mit dynamischen *Prozessen* zu tun, global hingegen mit einer statisch vorgestellten *Form*. Die entwickelte Mathematik kennt eine Fülle vergleichbarer Beispiele, und es ist zweifellos nicht ohne Reiz, sie unter ein so allgemeines Schema zu bringen.

Heuristische Strategien[1]

Heuristik und „entdeckendes Lernen“

Heuristik ist die »Untersuchung der Mittel und Methoden des Aufgabenlösens« (Georg Pólya); sie will uns also beim Problemlösen helfen. Es ist nicht sicher, ob dies am Ende wirklich gelingt – ob also Schüler zu besseren Ergebnissen kommen, wenn sie diese oder jene heuristische Strategie bewusst anwenden. Einzelne empirische Studien (z. B. Allan H. Schoenfeld, *Mathematical Problem Solving*, London 1985) scheinen dafür zu sprechen. Die heuristischen Verfahren – das hat Pólya in seinen grundlegenden Schriften überzeugend dargelegt – sind der praktischen Arbeit abgeschaut: der Art und Weise, in der Mathematik als Prozess stattfindet und von Menschen betrieben wird (zu unterscheiden von der standardisierten und zumeist stark verkürzten Mitteilung „fertiger“ Mathematik). Zumindest diejenigen, die sich gerne mit mathematischen Dingen beschäftigen, erhalten damit die Gelegenheit, ihr Können als Aufgabenlöser noch weiter zu steigern.

Wie kann nun das Studium der Heuristik aussehen? Selbstredend geht es hierbei nicht darum, sich neuen Lernstoff einzuprägen. Es gibt auch nur weniges, was dafür in Frage käme: eine kleine Übersicht über die Stadien einer Problembearbeitung und ein Dutzend knapper Faustregeln. Dies auswendig zu können, ist beinahe nutzlos. Auch sind heuristische Regeln keine Rezepte, nach denen sich Lösungen „wie von selbst“ ergeben. Hingegen läuft alles auf den beherzigenswerten Ratschlag hinaus, die zugrundeliegenden Ideen nach und nach aufzunehmen und durch *fortgesetztes eigenes Tun* (sprich: Problemlösen) zu verinnerlichen. „Nach und nach“ bedeutet dabei nicht eine Woche, auch nicht ein Semester, sondern eher: solange bis sich ein Gefühl für die Sache einstellt.

[1] Es handelt sich um einen zusammenfassenden Auszug aus Kapitel 5 meiner Vorlesung *Grundzüge der Mathematikdidaktik* (Universität Flensburg). Die hierin eingeflossenen Überlegungen gehören thematisch zu dem Vorhaben, „fundamentale“ („universelle“) Ideen als Leitvorstellungen in Prozessen mathematischer Begriffsbildung wirken zu lassen.

Bei vielen mathematischen Aufgaben soll eine vorgelegte und bereits bekannte Behauptung bewiesen werden. Versteht man Heuristik als *ars inveniendi* (lat. Kunst des Findens oder Erfindens), so umfasst sie natürlich auch das Finden von Begründungen. Doch bevor man daran denken kann, etwas zu beweisen, muss es erst einmal entdeckt und vermutet werden. Dieser im Allgemeinen (trotz heuristischer Unterstützung) weitaus weniger geradlinige Prozess gehört zu den fesselndsten Aspekten der Mathematik. Man muss kein Mathematiker im Hauptberuf sein, um eine Ahnung hiervon zu gewinnen und Freude an eigenem Entdecken zu haben. Die Möglichkeit dazu gibt es auf allen Niveaus, auch im Bereich der Schulmathematik und der sich dort anbietenden elementaren Kontexte.

Der mathematische Unterricht kann übrigens auch dann von der Heuristik profitieren, wenn er dem Konzept des entdeckenden Lernens nicht durchgängig folgt. Heuristische Ideen sind freilich dort am wirksamsten, wo ein freier und produktiver Umgang mit Problemen angestrebt und angemessener Spielraum für eigenes Entdecken offengehalten wird.

Stadien des Problemlösens

Das Lösen einer Aufgabe geschieht in den seltensten Fällen in einem „Ruck". Dementsprechend hat man immer wieder versucht, Prozesse des Entdeckens oder Problemlösens in natürliche Stadien zu gliedern. Auch wenn es kaum möglich ist, dabei scharfe Begrenzungen auszumachen, so lassen sich doch einige Schwerpunkte fixieren. Unter der Überschrift »Wie sucht man die Lösung?« hat Pólya in seiner bekannten *Schule des Denkens* (engl. Orig. *How to Solve It*, 1949) ein *vierstufiges Verlaufsschema* beschrieben. Ähnliche Einteilungen findet man später auch bei anderen Autoren.

Es folgt hier (daran angelehnt) eine kompakte Darstellung von ebenfalls vier Stadien des Problemlösens, die auch psychologische und wertende Momente einschließt:

1. Verstehen der Aufgabe

Im Stadium der Vorbereitung (Präparation) geht es darum, das Problem, das gelöst werden soll, möglichst gut zu verstehen. Was genau ist gegeben (Daten, Voraussetzungen, Bedingungen, etc.)? Was ist gesucht? Kann man sich von der Situation eine anschauliche Vorstellung machen (z. B. durch eine Figur, ein Modell, eine Analogie)? Außer dem sachlichen Gehalt mag auch (noch einmal) die Beziehung zum Aufgabenlöser auf den Prüfstand gestellt werden:

Zieht mich die Aufgabe an, verdient sie mein Interesse? Wird sich die Mühe lohnen, nach einer Lösung zu suchen?

2. Entwicklung einer Lösungsidee

Wenn man weiß, worum es in der Aufgabe geht, wird man nach einer Lösungsidee suchen. Gewöhnlich gehen einem Gedankenblitz (einer „Erleuchtung") Phasen intensiver Beschäftigung mit dem Problem voraus. Dabei kann der bewusste Einsatz heuristischer Strategien bis zu einem gewissen Grad die Lösungssuche erleichtern und beschleunigen. Wenn sich die ersten Ideen, auch nach mehreren Anläufen, als nicht tragfähig erwiesen haben, ist es zweckmäßig, eine Pause einzulegen und abzuschalten, damit sich das Problem „setzen" und in einer tieferliegenden Bewusstseinsschicht weiterverarbeitet werden kann. Eine erfolgversprechende Idee wird in einen Lösungsplan umgesetzt.

3. Ausarbeitung einer Lösung

Die Lösung wird ausgearbeitet. Dazu folgt man dem zuvor entwickelten Lösungsplan und kontrolliert jeden Schritt. Pólya fragt: »Kannst Du deutlich sehen, daß der Schritt richtig ist? Kannst Du beweisen, daß er richtig ist?« – In der Mathematik wie im Leben müssen sich Problemlösungen bewähren. Eine glänzende Idee nützt wenig oder nichts, wenn sie nur skizziert und hingeworfen wird. Wir müssen sie anderen auch mitteilen und erklären, warum das Problem durch die Idee gelöst wird. Das dritte Stadium hat also nicht nur eine sichernde, sondern auch eine kommunikative Funktion.

4. Rückschau und Einordnung

Die Rückschau auf das ausgearbeitete Ergebnis ist eine lohnende, oft jedoch nicht konsequent genug betriebene Tätigkeit. (Besonders dann, wenn das Problem nur oberflächlich oder gar lieblos „abgearbeitet" wurde, geht man schnell zu anderem über.) Zum einen sollte man das Resultat einer letzten Prüfung (z. B. auf Plausibilität) unterziehen. Subjektiv mag es befriedigend sein, die eigene Leistung als Ganzes noch einmal zu betrachten. Der wertvollste Teil einer Rückschau besteht aber darin, die Lösung zu anderen, eventuell weiterführenden Sachverhalten oder Problemen in Beziehung zu setzen.

Vier übergeordnete Gruppen von Heurismen

In den Stadien des Problemlösens (vor allem den ersten beiden) kann es sich als vorteilhaft erweisen, von bestimmten methodischen Hilfen systematisch

Gebrauch zu machen. Dabei handelt es sich nicht um strenge oder gar formal handhabbare Regeln (etwa in der Art logischer Schlussformen), sondern um meist intuitive Techniken und Faustregeln zur Unterstützung der Gedankenarbeit, etwa: Generieren von Hypothesen, Aufdecken von Zusammenhängen, Symmetrien, usw. Diese Hilfsmittel sind mehr oder weniger präzise fassbar, was durch ihre landläufige Bezeichnung als heuristische „Strategien“ zum Ausdruck gebracht wird (hier auch als *Heurismen* bezeichnet). – Es werden vier Gruppen von Heurismen vorgestellt: *Induktion – Variation – Interpretation – Reduktion*. [2]

Induktion	**Ausprägungen**
Probiere systematisch	Einzelne Fälle überprüfen (z. B. Einsetzen spezieller Werte)
	Fallmengen systematisch untersuchen; Beobachtungen sammeln
Arbeite vorwärts	Aus dem Gegebenen Folgerungen ziehen (divergent, in verschiedene Richtungen gehend)
Versuche zu verallgemeinern	Eine oder mehrere Bedingungen (Annahmen) fallen lassen
	Aus konstanten Vorgaben variable Parameter machen
	Vollständige Induktion (bei arithmetischen Aussagen)

Induktion umfasst alle Arten von Prozeduren, die es gestatten, von den besonderen Eigenschaften des Gegebenen ausgehend zu allgemeineren Einsichten zu gelangen. Es handelt sich hierbei keinesfalls um ein sehr genau beschreib-

[2] In jeder Gruppe sind Strategien mit gemeinsamen Merkmalen zusammengefasst. Ihre Formulierung ist möglichst allgemein gehalten; oft existieren jedoch bereichsspezifische Ausprägungen (z. B. das Pappos-Prinzip als eine Variante des Rückwärtsarbeitens in der Elementargeometrie), die einen wesentlichen Anwendungsaspekt enthalten und daher erst anhand gut gewählter Beispiele verständlich werden. Es sei daran erinnert, dass Pólya allein der Induktion den gesamten ersten Band (400 Seiten) seines bedeutenden Werks *Mathematik und plausibles Schliessen* (1969) gewidmet hat. Die Auflistung heuristischer Strategien bietet lediglich eine Übersicht. Beispiele werden im Anschluss an eine Gruppe nur genannt und allenfalls angedeutet ausgeführt. Man beachte, dass Heurismen bei der Arbeit an einem Problem selten isoliert oder in Reinform einwirken. Typisch ist vielmehr ihr Ineinandergreifen (etwa induktives Vorgehen im Zusammenspiel mit der Variation des Gegebenen).

bares Vorgehen; insbesondere ist es nicht gleichzusetzen mit dem sogenannten Induktionsprinzip für die natürlichen Zahlen. Als eine Methode, von Anfangswerten ausgehend die Allgemeingültigkeit einer Aussage nachzuweisen, mag in letzterem aber ein bereichsspezifischer Sonderfall gesehen werden.

Probieren und Experimentieren sind zwar keine tauglichen Beweisverfahren; sie sind aber ebenso nützliche wie legitime Heurismen und können wertvolle Daten liefern, aus denen sich dann weitere Vermutungen oder Einsichten ergeben.[3]

Variation	**Ausprägungen**
Variiere das Gegebene	Gegebene Elemente verändern und Auswirkungen untersuchen (funktionale Abhängigkeit)
	Welche Teile (einer Figur) bleiben unter einer Transformation unverändert? (Symmetrie)
Variiere den Allgemeinheitsgrad	Spezialfälle betrachten, insbesondere Extremalfälle (z.B. Grenzlagen einer Figur)
	Zusätzliche Annahmen einführen, durch die sich die Aufgabe vereinfacht
Variiere die Exaktheitsstufe	Größenordnungen abschätzen (zu Kontrollzwecken oder um ein Gesamtbild der Situation zu gewinnen)
	Näherungslösungen suchen (anstelle einer exakten Lösung)
	Exakte Lösungen durch ein Näherungsverfahren „einfangen“ oder aufbauen (Exhaustion, Approximation)

Die Variation ist so etwas wie der Motor des heuristischen Aufgabenlösens. Mit ihr wird die Problemsituation aufgelockert und auf neue Weise betrachtet.

[3] Zum Beispiel untersucht Pólya [*Mathematik und plausibles Schliessen*, Bd. 1, Kap. III] die Frage, in welchem Zusammenhang bei einem Polyeder (räumlichen Vielflach) die Anzahlen f der Flächen, e der Ecken und k der Kanten stehen. Er beginnt mit Beobachtungen an einer Reihe bekannter Körper (Würfel, Pyramide, Prisma, usw.) und sammelt die Ergebnisse in einer Tabelle. Schon bald kann die berühmte Eulersche Formel $f + e = k + 2$ vermutet und – am Ende des sich daran anknüpfenden Entdeckungsprozesses – auch bewiesen werden.

Häufig entstehen auf diese Weise Vermutungen (Hypothesen), die in der Folge geprüft (eventuell widerlegt) werden und so den Problemlöseprozess in Gang halten. – Gelegentlich wird die *Umorganisation der Problemstruktur* selbst als Heurismus angesehen. Das meistzitierte Beispiel ist die „Gauß-Aufgabe“ $1+2+\ldots+1000$, die ihre elegante Lösung durch geschicktes Umstellen der Summanden findet: $(1+1000)+(2+999)+\ldots = 1001\cdot 500$. Für ein solches Variieren der Aufgabenstruktur lässt sich in der Algebra hin und wieder ein Ansatz finden, z. B. bei einer Rechnung wie $31\cdot 29 = (30+1)\cdot(30-1) = 30^2-1^2 = 899$. Im allgemeinen verbirgt sich freilich in dem *Gestaltwechsel*, der die Reorganisierung eines Problems begleitet, die Problemlösung selbst. Dies als heuristische Strategie zu formulieren bzw. zu *empfehlen*, hieße also genau genommen nur, die Aufforderung zu wiederholen, man möge das betreffende Problem – sozusagen „kreativ“ – lösen.

Interpretation	**Ausprägungen**
Übersetze in einen anderen Kontext	Den Gegenstandsbereich des Problems in einen anderen Gegenstandsbereich abbilden
Verfertige ein Modell	Eine ebene Figur zeichnen (Konstruktion, Funktion, binäre Relation, etc.)
	Ein physisches (räumliches) Modell anfertigen
	Kinematisch oder mechanisch veranschaulichen
Suche ein Analogon	Nach ähnlichen (verwandten) Aufgaben Ausschau halten
	Entsprechungen zwischen ebenen und räumlichen Gebilden ausnutzen

Der wörtliche Sinn von „Interpretation“ ist die Übertragung von einem System (z. B. einer Sprache und ihrem Gegenstandsbereich) in ein anderes. Ein Beispiel von wissenschaftsgeschichtlicher Tragweite ist die Repräsentation geometrischer Objekte und Beziehungen in einem arithmetisch-algebraischen System (Analytische Geometrie). Geometrische Probleme werden darin mittels eines Koordinatensystems in algebraische Relationen übersetzt und so häufig direkt und einfach(er) rechnerisch behandelbar.

In engem Zusammenhang damit steht das bei Pólya [*Vom Lösen mathematischer Aufgaben* (1966), Bd. 1, Kap. II] so genannte *Descartessche Schema*. Es geht zurück auf den französischen Philosophen und Mathematiker René Descartes (1596-1650), der in seinen *Regeln zur Anleitung des Geistes* die Idee entwickelte, Probleme aus ihrer Wortfassung in eine Gleichung zu übersetzen. Auch wenn dies für viele (wenn nicht die meisten) Probleme nicht funktioniert, so ist damit doch ein Heurismus gewonnen, der für die Mathematik und zahlreiche Anwendungen eine große Bedeutung besitzt:

1. Reduziere die Aufgabe auf die Bestimmung unbekannter Größen.
2. Beschreibe die Beziehungen, die der Bedingung entsprechend zwischen den Unbekannten und den Daten bestehen müssen.
3. Trenne von der Bedingung einen Teil ab, demzufolge man diesselbe Größe auf zwei verschiedene Arten ausdrücken kann (was eine Gleichung ergibt oder – bei Fortsetzung dieses Verfahrens – ein Gleichungssystem).

Analogie-Beziehungen zwischen zwei Systemen S und S' beruhen auf dem Vergleichen von Teilen, die jeweils in S und S' eine „entsprechende“ Rolle spielen. Es ist recht schwierig, in voller Allgemeinheit zu erklären, worin eine Analogie besteht. Zum Beispiel lässt sich leicht präzisieren, inwiefern der Zahl 0 im System $(\mathbb{Z},+)$ die Zahl 1 im System $(\mathbb{Z},\cdot)$ entspricht, oder dass den Seiten eines Quadrats (in der Ebene) die Seitenflächen eines Würfels (im Raum) entsprechen. Aber nicht immer liegen Entsprechungen in so einfacher Weise auf der Hand. Es kann dann eine heuristisch produktive Tätigkeit sein, eine sich noch vage darstellende Analogie genauer zu fassen und zu rechtfertigen.

Hier einige geometrische Beispiele: 1. Was entspricht einem ebenen Dreieck auf der Kugeloberfläche? – 2. Welches ist das Analogon eines Winkels im Raum? Wie groß wäre danach der Raumwinkel in einer Quaderecke? – 3. Wie kann man die Analogie zwischen Kreis und Kugel ausnutzen, um aus dem Umfang und Flächeninhalt eines Kreises vom Radius r und dem (als bekannt angenommenen) Volumen einer Kugel vom Radius r auf den Oberflächeninhalt der Kugel zu „schließen“?

	Kreis	**Kugel**
Flächen- bzw. Rauminhalt	πr^2	$\frac{4}{3}\pi r^3$
Umfang bzw. Oberfläche	$2\pi r$	**?**

Das Analogisieren ist ein gebräuchliches Vorgehen in der Mathematik. Durch Analogien erzeugt man vielfach Verallgemeinerungen und Abstraktionen, die sich als Keimzelle neuer Begriffe und nicht selten sogar ganzer Theorien erweisen.

Reduktion	**Ausprägungen**
Unterscheide Fälle	Eine Behauptung oder Vermutung auf bekannte Fälle zurückführen
	Lösung aus einfacheren Fällen zusammensetzen (Superposition)
Arbeite rückwärts	Von der Behauptung ausgehend eine wahre Aussage folgern (um anschließend von ihr aus wieder zurück zur ursprünglichen Behauptung zu gelangen)
	Die Aufgabe als gelöst annehmen und die sich ergebenden Bedingungen analysieren (Pappos-Prinzip)
Argumentiere durch Widerspruch	Die Antithese einer Behauptung oder einer Vermutung ad absurdum führen

Reduktive Verfahren haben logischen Charakter: Man sucht mit ihnen nach Voraussetzungen oder nach falschen Konsequenzen.

1. Die Fallunterscheidung wird benutzt, um eine komplexe Aufgabe in einfachere Teilaufgaben zu zerlegen. Manchmal wird dadurch die Lösung aus den Teillösungen regelrecht aufaddiert. Zum Beispiel lassen sich alle ganzzahligen Lösungen einer linearen Gleichung wie $x + 2y = 5$ so berechnen: Zunächst ermittelt man eine spezielle Lösung, etwa $x = 3$, $y = 1$. Anschließend stellt man alle Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung $x+2y=0$ auf und addiert diese zu der speziellen Lösung hinzu: $x = 3 + 2m$, $y = 1 - m$ (dabei durchläuft m alle ganzen Zahlen).

Diese Art der Superposition funktioniert nicht nur bei wichtigen Typen von Gleichungen, sondern auch in ganz anderen Situationen. So kann man den Umfangswinkelsatz auf den Spezialfall zurückführen, dass ein Schenkel durch den Kreismittelpunkt geht (eines der Musterbeispiele Pólyas, loc. cit., Bd. 1, S. 157 f).

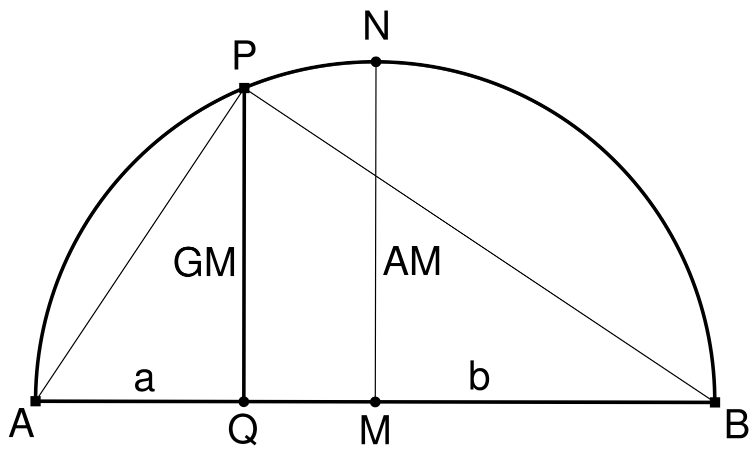
2. Beim Rückwärtsarbeiten geht man von einer Behauptung oder einer Ver-

mutung aus und folgert aus ihr eine Aussage, von der man weiß, dass sie wahr ist. Soll z. B. die Ungleichung

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$$

bewiesen werden, so lässt sich durch schrittweises Umformen (Quadrieren, Multiplikation mit 4, Ausklammern, usw.) die für alle a, b gültige Beziehung $(a-b)^2 \geq 0$ ableiten. Tatsächlich zeigt eine sorgfältige Betrachtung der einzelnen Umformungsschritte, dass man auf demselben Weg wieder zurück zum Ausgangspunkt gelangen kann. Ohne diesen Rückweg wäre ja auch gar nichts bewiesen, da sich aus falschen Voraussetzungen alles folgern lässt (z. B. aus $-1 = 1$ durch Quadrieren sofort die gültige Gleichung $1 = 1$).

Die obige Ungleichung zwischen dem geometrischen Mittel (GM) und dem arithmetischen Mittel (AM) lässt sich durch eine einfache Konstruktion veranschaulichen (siehe Figur 1): Das Dreieck ABP im Halbkreis (Thaleskreis) über dem Durchmesser $a+b$ (mit $AQ = a$, $QB = b$) ist rechtwinklig und seine Höhe QP daher gleich dem geometrischen Mittel (GM) von a und b. Wandert der Scheitel P des rechten Winkels auf dem Halbkreis, so erkennt man den Fall der Gleichheit GM = AM als eine *symmetrische Extremallage*, in der die Dreieckshöhe ihren größten Wert MN (das arithmetische Mittel von a und b) annimmt (*Variation*, Heurismus 1 und 2).



Figur 1

Das Pappos-Prinzip – so genannt nach dem antiken Kommentator der *Elemente* des Euklid – beruht auf der Analyse einer angenommenen Lösung. In der Geometrie bedeutet dies in vielen Fällen, dass man eine Figur skizziert und an ihr geeignete Bedingungen abliest, welche die Lösung (z. B. ein zu konstruierender Punkt) erfüllen muss. Typischerweise wird ein Punkt durch den Schnitt von Geraden oder Kreisen festgelegt, weshalb Pólya den zugehörigen Heurismus als »Schema zweier geometrischer Örter« bezeichnet. Ein einfaches Beispiel ist die Aufgabe, den Umkreis eines Dreiecks zu konstruieren. Man benötigt dazu dessen Mittelpunkt, und der liegt auf den Mittelsenkrechten der Dreieckseiten (genauer: wird durch zwei von ihnen bereits bestimmt).

3. Das Argumentieren durch Widerspruch hieß in der älteren Logik *reductio ad absurdum* und ist nichts anderes als das indirekte Beweisen. Das „Absurde“ kann dabei als negierte Antithese auftreten – d. h. Widerspruch zwischen der indirekten Annahme und der aus ihr abgeleiteten Verneinung – oder in Gestalt einer Aussage, von der man anderweitig weiß, dass sie falsch ist.

Typische Anwendungsfälle sind Beweise, in denen das Gerade- und Ungeradesein (die sog. Parität) zur Erzeugung von Widersprüchen benutzt wird.

Ein Beispiel ist die Behauptung: Die Summe $S = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n$ ist für keine ganze Zahl $n \geq 1$ ein Quadrat. – Beweis: Wir nehmen indirekt an, es sei $S = k^2$ für eine natürliche Zahl k. Dann gilt: $S - 1 = k^2 - 1 = (k+1)(k-1)$. Offenbar ist $S - 1$ stets gerade. Ist k gerade, dann ist aber $(k+1)(k-1)$ ungerade, was einen Widerspruch ergibt. Bleibt noch der Fall, dass k ungerade ist: $k = 2m+1$, m ganz. Es ergibt sich $(k+1)(k-1) = 4m(m+1) = S-1 = 2+2^2+\ldots+2^n$. Dividiert man beide Seiten der Gleichung durch 2, so ergibt sich erneut ein Widerspruch gegen die Parität: $1+2+2^2+\ldots+2^{n-1} = 2m(m+1)$.

POSTSKRIPTUM

Die Überlegungen zur Heuristik habe ich seit Mitte der 1990-er Jahre in meinen fachdidaktischen Vorlesungen an der Universität Flensburg entwickelt und wiederholt vorgetragen (zuletzt im Winter 2007/08). Der Text war von 2002 bis Mitte 2011 im Internet frei zugänglich.

Die heutige Form dieses Gebiets ist ohne die fundamentalen Arbeiten Pólyas undenkbar und entscheidend durch diese geprägt. In meiner Heuristik-Vorlesung habe ich u. a. daran anknüpfend ein allgemeines differenziertes kategoriales System von Heurismenklassen aufgestellt und begründet. Es lassen sich darin die meisten „heuristischen Strategien“, die man in der einschlägigen Literatur findet, einordnen und sinnentsprechend beschreiben. Für *diese* konzeptionelle und methodologische Arbeit (in ihren Grundzügen dargestellt) beanspruche ich Priorität.

Ich würde das hier nicht betonen ohne den Anlass der mir 2007 bekannt gewordenen Schrift von Wolfgang Schwarz: *Heuristische Strategien des Problemlösens*, Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, Münster 2006. Diese (aus einer Habilitationsschrift hervorgegangene) Arbeit bietet Beispiele auf verschiedenen mathematischen Niveaus. Der Untertitel fixiert als Ziel: »Eine fachmethodische Systematik für die Mathematik«. Tatsächlich greift Schwarz auf den von mir entwickelten konzeptionellen Rahmen zurück. Sein Literaturverzeichnis führt zwar unter [65] die Internet-Quelle (A. Schreiber: *Heuristik*...) auf, jedoch betreffen die insgesamt 5 darauf bezogenen Zitationen im Text lediglich marginale Aspekte. Für *solche* Verknüpfungen hätte es eines Quellenbelegs wohl nicht bedurft. Umso mehr beschweigt Schwarz dafür die Beziehung des von ihm präsentierten Ordnungsschemas zu der in [65] geleisteten Arbeit. Im letzten Absatz seiner Einleitung heißt es sogar bescheiden: »Die hier elaborierte [sic!] Systematik erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit ...«.

III

Methodenkritische Überlegungen zu Merleau-Pontys Phänomenologie der Raumerfahrung[1]

Einleitung

Es gibt keine einheitliche Wissenschaft vom Raum, denn die Rede vom Raum hat verschiedene Bedeutungen. R. Carnap unterscheidet in seiner Dissertation[2] drei Gefügearten: den formalen, den physischen und den Anschauungsraum. In allen drei Fällen interessiert den Wissenschaftstheoretiker allein die jeweilige Struktur der Raumgebilde, soweit sie mathematisch (formal, begrifflich) oder physikalisch zum Ausdruck gelangen kann. Ganz bewusst bleibt die psychologische Frage nach der Entstehung raumhafter Vorstellungen ausgespart, ebenso die Reflexion auf das nur erlebnismäßig gegebene »besondere Sosein« des Anschauungsraumes[3].

Im Folgenden steht nun nicht direkt eine solche objektivistische Auffassung des Raumkonzeptes zur Diskussion, sondern vielmehr der komplementäre Versuch, den Raum in seinem Bezug zum Subjekt zu verstehen. Der erste bedeutende Vorstoß in dieser Richtung ist Kants Lehre vom Raum als der reinen Form der Anschauung äußerer Dinge. Allerdings ist das in Kants Lehre gemeinte Subjekt ein empfindungsloses transzendentales Ego[4]. Die ihm zugehörige reine Form äußerer Anschauung ist zwar verantwortlich für den apodiktischen Charakter geometrischer Erkenntnis, gewährt jedoch kein Verständnis raumgebundener Wahrnehmungsstrukturen.

Ein Verständnis des Raumes in bezug auf das leibhaftige Subjekt der Wahrnehmung setzt sich außer der Psychologie erst die Phänomenologie zur Auf-

[1] Veröffentlicht in *Philosophia Naturalis* 18/4 (1981), S. 423-437.

[2] R. Carnap: *Der Raum*. Ein Beitrag zur Wissenschaftslehre. Kant-Studien, Erg.heft Nr. 56, Berlin 1922.

[3] Vgl. Carnap: *Der Raum*, S. 22 f.

[4] Vgl. dazu I. Kant: *Kritik d. r. Vernunft* B 34 sowie B 44.

gabe. Die Überlegungen Husserls, vor allem in ihrer Ausarbeitung durch O. Becker[5], gelten dabei in erster Linie dem Ziel, die geometrische Idealität über die Beschreibung von Stufen und Vorstufen der Raumkonstitution bis auf eine hyletische Schicht zurückzuverfolgen.

Zu einer gegenüber Husserl eigenständigen phänomenologischen Behandlung des Raumproblems kommt es in der Folgezeit vor allem durch M. Merleau-Ponty. In seiner *Phénoménologie de la Perception*[6] geht es nun nicht mehr vorrangig um eine ‘Begründung’ der Geometrie, sondern um eine *Sinndeutung* der sinnlichen Wahrnehmung. Insbesondere wollen die zahlreichen Einzelanalysen zur Raumerfahrung deren existentiellen Sinn »vor aller begrifflichen Ausarbeitung«[7] aufweisen. Im Weiteren soll die Frage behandelt werden, ob und inwiefern in solch vorbegrifflicher Rede über Phänomene überhaupt Erkenntnisse mitteilbar und zu rechtfertigen sind. Zur Diskussion steht insbesondere also die von Merleau-Ponty geübte Methode zur Diskussion, ursprüngliche Erfahrung zu beschreiben und zu interpretieren.

Wir gehen im Einzelnen dabei wie folgt vor: Zunächst wird die phänomenologische Methode *in abstracto* sowie anhand verschiedener Auffassungen des Raumes im allgemeinen charakterisiert, und zwar gemäß den von Merleau-Ponty entwickelten Vorstellungen. Sodann folgt eine nachvollziehende Analyse des Phänomens der Raumtiefe, die zur geplanten Kritik phänomenologischer Erkenntnisansprüche überleitet. Im Lichte dieser Kritik wird abschließend Merleau-Pontys Sinndeutung der geometrischen Erkenntnis erörtert.

Diesseits von Konstruktion und Konstitution

Merleau-Ponty erläutert sein phänomenologisches Verfahren mit Vorliebe vor dem Hintergrund zweier Auffassungsweisen, die er Empirismus und Intellektualismus nennt. Damit sind keine bestimmten philosophiehistorisch belegbaren Doktrinen gemeint, sondern lediglich gewisse allgemeine Denkweisen in den Naturwissenschaften bzw. der idealistischen Philosophie.

Als Methode des Empirismus gilt Merleau-Ponty die einzelwissenschaftliche Objektivierung. Für ihn ist eine Untersuchung dann empiristisch, wenn sie

---

[5] O. Becker: Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie und ihrer physikalischen Anwendungen. In: *Jahrb. f. Phil. u. Phän. Forsch.*, Bd. 6, 1923, S. 385-560.

[6] M. Merleau-Ponty: *Phénoménologie de la Perception*, Paris 1945. – Im Folgenden wird zitiert nach der deutschen Übersetzung: *Phänomenologie der Wahrnehmung* (Phänomenologisch-psychologische Forschungen, Bd. 7), Berlin 1966.

[7] Phän. d. W., S. 285

sich nur auf vergegenständlichte Inhalte unserer Erfahrung richtet. In diesem Sinne ist also die gesamte neuzeitliche Naturwissenschaft (einschließlich der Psychologie) empiristisch ausgerichtet.

Im Gegensatz dazu steht der Intellektualismus; seine Methode ist die reflexive Analyse. Sie besteht im wesentlichen darin, dass das Erkenntnissubjekt sich in einer Reflexion auf seinen Weltbezug als die für das Dasein und Sosein dieser Welt verantwortliche Instanz entdeckt. Ziel aller intellektualistischen Philosophie ist es, die tatsächliche Erfahrung auf dem Boden einer universalen Synthesis zu rekonstruieren. Das Vermögen zu dieser Synthesis gründet dabei in einer transzendentalen Subjektivität, die nicht der Welt angehört, der kein durch »Aufgabe und Situation bestimmter … virtueller Leib«[8] eignet. Auf solche Weise glaubt ein Intellektualist den Bezug allen Wissens auf ein einiges Bewusstsein erklären zu können. Der Empirist stützt sich, vom intellektualistischen Standpunkt aus gesehen, zwar auch auf dieses Bewusstsein, vergisst es aber im Zuge der Objektivierung, indem er nicht bemerkt, dass diese selbst nur durch die synthetische Leistung des Bewusstseins zustande kommt.

Beide Denkweisen werden von Merleau-Ponty verworfen. Der Empirismus thematisiert das Subjekt nur als faktisches Ding im objektiven Raum, der Intellektualismus thematisiert es nur als leibloses denkendes Wesen. Beides verfehlt den Sinn der Wahrnehmung, denn die so verstandene Wirklichkeit ist nicht die Wirklichkeit leibhaftiger Individuen. Anstatt sie zu konstruieren (Empirismus) oder zu konstituieren (Intellektualismus), fordert Merleau-Ponty ihre Beschreibung. Die Methode der Beschreibung umfasst das phänomenologische Verfahren des Rückgangs auf vorbegriffliche (‘lebensweltliche’) Erfahrung. Hierdurch sollen Erkenntnisse zutage gefördert werden, die einer empiristischen oder intellektualistischen Sicht verborgen bleiben müssen. Was bedeuten nun diese methodischen Differenzen angesichts des Raumbegriffs im allgemeinen?

Wenn ein Empirist über Dinge spricht, so handelt es sich stets um räumlich lokalisierte Gegenstände, nur solche lassen sich nämlich in einer objektiven Betrachtung erfassen. Für den Empirismus ist so gesehen der Raum eine Art leerer Außenwelt, das Milieu, in welchem die Dinge als Naturdinge einen Ort einnehmen. Selbst wenn die darauf beruhende naive Behältervorstellung des Raumes aufgegeben wird (wie etwa in Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie), so bleibt doch grundsätzlich die Ansicht des Raumes als eines »extensiven

[8] Phän. d. W., S. 291.

Mediums der Außenwelt«[9]. Demgegenüber ist für den Intellektualismus der Raum nichts Gegebenes, welchen Umstand Kant als transzendentale Idealität[10] angesprochen hat. Vielmehr ist der Raum nur die Form der äußeren Anschauung, d. h. werden Dinge nur als im Raum befindliche angeschaut, weil diesem Anschauen von sich aus das Beziehungsmoment des Innen-Außen zueigen ist. Merleau-Pontys Phänomenologie schließlich sucht einen Standpunkt diesseits der Unterscheidung von Form (Intellektualismus) und Inhalt (Empirismus)[11]. Vom »verräumlichenden«[12] bzw. objektiven Raum will sie zurückgehen auf den Raum, wie er ursprünglich erfahren wird. Das führt uns nun aber nicht wieder auf eine reine Anschauungsform: der Raum wird ja nicht als eine Form äußerer Anschauung erfahren, sondern seine Konstitution wird allenfalls im Rückgang auf eine solche Form gedacht. Auch das empiristisch konstruierte Medium der Außenwelt ist nicht der Raum in der primordinalen Erfahrung des Individuums. Der Phänomenologe sieht hier eine Lücke, für ihn gibt es eine »dritte Räumlichkeit«[13]. Wir haben ihm dabei zuzusehen, wie er den Raum in dieser Rolle als ursprünglichen Zugang zur Welt sieht, ohne in dieser Reflexion die von Empirismus und Intellektualismus verfehlte Erlebnisimmanenz zu zerstören.

Die Erfahrung der räumlichen Tiefe

Wir verfolgen nunmehr das Vorgehen Merleau-Pontys zur Interpretation der erlebten Raumtiefe. Die räumliche Tiefe eignet sich als Beispiel besonders gut, da sie für Merleau-Ponty (aus gleich zu ersehenden Gründen) die »unter allen Dimensionen … gleichsam … existentiellste«[14] darstellt.

Welches Problem stellt sich demjenigen, der das räumliche Tiefensehen verstehen will? Das Nebeneinander der Dinge im Raum erscheint als eine Relation zwischen den Dingen, die in die Wahrnehmung eintritt und dabei sichtbar wird. Anders verhält es sich mit der Tiefe. Sie wird nicht als solche sichtbar, sondern wirkt als ein Moment der Sichtbarkeit selbst, als »ein gewisses unlösliches Band zwischen mir und den Dingen«[15]. Durch das räumliche Tiefense-

---

[9] H. Weyl: Das Raumproblem. In: *Jahresber. d. Deutschen Math. ver.* 30 (1921).
[10] Kr. d. r. V.,B 44
[11] Phän. d. W., S. 289.
[12] Phän. d. W., S. 289.
[13] Phän. d. W., S. 289.
[14] Phän. d. W., S. 299.
[15] Phän. d. W., S. 299.

hen scheint der Betrachter in eine Dimension des Raumes selbst einbezogen, und zwar dadurch, dass die Tiefe seinem Blick niemals begegnet, wie etwa die Breite, sondern ihn gleichsam in sich aufnimmt. Für Merleau-Ponty gilt es nun, die Erfahrung des Tiefensehens so zu beschreiben, wie sie sich ohne Substruktion eines objektiven Naturganzen oder eines reinen Geistes darbietet. Seiner Meinung nach verdrängen nämlich Intellektualismus und Empirismus beide diese unsere tatsächliche Erfahrung durch eine solche Substruktion.

So weiß der Empirist nur von der ebenen Projektion zu reden, welche die räumlichen Ereignisse auf der Netzhaut entwerfen. Die Tiefe bleibt ihm unerfahrbar, da sie sich nicht vor seinen Augen ausbreitet. Auch für den Intellektualisten ist die Tiefe, wenn auch aus anderen Gründen, prinzipiell nicht erfahrbar. Denn einem denkenden Subjekt resultiert die Tiefe nur in einer »Aufreihung simultaner Punkte«[16], also in Wahrheit gar nicht als jenes raumeröffnende Moment seiner Wahrnehmung, sondern als bereits realisierte »Tiefe unter dem Blickwinkel eines seitlichen Zuschauers«[17]. Intellektualismus und Empirismus deuten demnach die Tiefe des Raumes gleichsam als »im Profil gesehene Breite«[18]. Dem Subjekt scheint bei dieser Deutung eine »Art Allgegenwart«[19] angedichtet, die es befähigt, alle Richtungen des Raumes simultan einzunehmen. Jedenfalls ist dieses Subjekt eine (wenn auch vielleicht naheliegende) Fiktion, niemals jedoch das Subjekt der Wahrnehmung. Um dessen ursprüngliche Erfahrung der Raumtiefe zu beschreiben, unterzieht Merleau-Ponty die empiristische Auffassung einer genauen Kritik. An dieser Kritik entwickelt er dann seine eigene phänomenologische Interpretation.

Zwei Momente des räumlichen Tiefensehens scheinen einen empiristischen Standpunkt zu stützen. Das erste Moment ist die scheinbare Größe eines Dinges in Abhängigkeit von seinem Abstand zum Beobachter. Das zweite Moment ist die Fixierwinkelschrumpfung, die zunimmt, wenn der fixierte Gegenstand sich nähert. Im richtigen Entziffern beider Momente liegt nach den klassischen Wahrnehmungstheorien die Erfahrung der räumlichen Tiefe[20]. Augenbewegungen und scheinbare Größe des Gegenstandes fungieren demnach als Zeichen, die nur gelesen werden müssen, um nach Einordnung in den »Kon-

[16] Phän. d. W., S. 298.
[17] Phän. d. W., S. 298.
[18] Phän. d. W., S. 298.
[19] Phän. d. W., S. 298.
[20] Vgl. dazu H. Weyl: *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, 3. Aufl., München-Wien 1966, S. 164 ff.

text der sie erklärenden objektiven Beziehungen«[21] die Erfahrung der Tiefe hervorzurufen.

Dieser Auffassung gegenüber macht Merleau-Ponty folgende Einwände geltend: Die scheinbare Größe ist nur dann ein Zeichen für räumliche Tiefe, wenn die Existenz unverzerrbarer Dinge bereits vorausgesetzt wird, wenn es also möglich ist, eine absolute Größe der Gegenstände mit einer nur in ihrem Abbild erscheinenden Größe in Beziehung zu denken. Ebenso bedeutet die Konvergenz der Augen nur Tiefe, wenn der Körper des wahrnehmenden Subjekts in einen objektiven Raum gedanklich hineinverlegt wird. Der Interpretation beider Momente unterliegt somit schon das Bild eines bekannten Raumes, in welchem die für die Dechiffrierung der vermeintlichen Tiefenzeichen notwendigen Konstruktionen nachvollzogen werden. Unmöglich kann also diese Dechiffrierung eine Erfahrung mit sich bringen, welche die Tiefe des Raumes allererst eröffnet.

Eine zweite auf empiristischem Boden vorgenommene Deutung sucht der soeben aufgewiesenen Aporie zu entgehen. Vornehmlich die Gestaltpsychologie hat darauf hingewiesen, dass scheinbare Größe und Konvergenz der Augen beim räumlichen Tiefensehen selbst gar nicht objektiviert werden. Sie sind keineswegs explizite Momente der Wahrnehmung und können daher auch nicht als Zeichen räumlicher Tiefe in Frage kommen. Der Eindruck räumlicher Tiefe wird nach dieser Auffassung überhaupt nicht als ein angezeigter, sondern vielmehr als ein verursachter begriffen. Die fraglichen Momente sind danach ursächliche Bedingungen für das Zustandekommen des Tiefensehens und streng genommen in einer gehirnlichen Tiefenorganisation verankert, die zu erforschen Aufgabe einer fortgeschrittenen Hirnphysiologie wäre.

Angesichts dieser Interpretation stellt sich Merleau-Ponty die Frage: Welcher Art ist die Erfahrung, die von einer solchen naturwissenschaftlichen Theorie erklärt werden kann? Die Antwort liegt für ihn auf der Hand: Bei ihr kann es sich nur um ein System von Oberflächenrelikten einer Erfahrung, um eine objektivierte Erfahrung ohne immanenten Sinn handeln. Die in ihr eröffnete Tiefe ist nur eine faktische Tiefe. Das der Erfahrung zugeordnete Subjekt ist nur ein Organismus und kein die Tiefe erlebendes leibliches Individuum. So verfehlt auch dieser empiristische Ansatz den eigentlichen Sinn der Raumerfahrung. Wie der erste begeht auch er den Hauptfehler, das Zustandekommen der Erfahrung mittels eines Hineinversetzens in die objektive Welt zu erklären. Erklärt wird aber damit nicht die Erfahrung *in statu nascendi*, sondern die

[21] Phän. d. W., S. 300.

Erfahrung für einen anderen als den sie Vollziehenden, eben für den objektivierenden Naturwissenschaftler.

Nach dieser kritischen Prüfung des empiristischen Standpunktes ist es für Merleau-Ponty klar, dass die Suche nach Zeichen oder Ursachen für das Erfahren räumlicher Tiefe überhaupt sinnlos ist. Vielmehr liegt es nahe anzunehmen, die Momente der Konvergenz und der scheinbaren Größe lägen unausdrücklich im Tiefensehen selbst beschlossen. Wären sie nämlich nicht in der Erfahrung gegenwärtig, so könnten sie auch niemals als deren Momente thematisiert werden. Andererseits werden sie selbst aber nicht thetisch erfahren, wie es etwa bei Zeichen der Fall wäre. Welcher Art ist aber dann ihre Beziehung zum Sehen räumlicher Tiefe, wenn sie nicht signitiv und nicht kausal sein kann? Zur Beschreibung dieser Beziehung bedient sich Merleau-Ponty einer *Analogie*, und zwar des Verhältnisses von Motiv und Motiviertem in einem Entschluss[22]. Ein Motiv bedarf nicht unbedingt einer eigenen Artikulation, um in einem Entschluss wirksam zu sein. Andererseits ist es aber auch nicht Ursache für die durch den Entschluss zustandekommende Haltung, denn seine gesamte Wirkung beruht auf seinem Sinn. Überdies ist »das Verhältnis von Motivierendem und Motiviertem … ein wechselseitiges«[23]. Das Motiv kann durch seinen Sinn nämlich nur deshalb wirken, weil der Motivierte es durch seinen Entschluss geltend macht, was jedoch umgekehrt wieder unmöglich wäre ohne die stillschweigende Präsenz jenes Motivs. So verstanden fasst nun Merleau-Ponty das Verhältnis zwischen der unausdrücklichen Erfahrung der Konvergenz oder der scheinbaren Größe und der Tiefe als eine *Motivationsbeziehung*.

Am Moment der scheinbaren Größe lässt sich dies am besten verdeutlichen. Die Redeweise von einer scheinbaren Größe legt zunächst das Missverständnis nahe, als besäße ein wahrgenommenes Ding neben einer absoluten (etwa physikalisch messbaren) Größe eine weitere Größe relativ zu der Wahrnehmung, durch die es zur Erscheinung kommt. Entfernt sich nun das Ding in der Tiefe des Raums, so möchte man im Sinne dieser Auffassung sein scheinbares Kleinerwerden damit erklären, dass seine Größe im ‘psychischen Bild’ sukzessiv abnehme. Dies ist der empiristische Standpunkt. Er geht fälschlicherweise von der Annahme aus, die Wahrnehmung beziehe sich überhaupt auf einen Bewusstseinsinhalt, hier das psychische Bild eines Dinges. Doch bezieht sich die Wahrnehmung auf die Dinge selbst. Deren scheinbare Größe

[22] Vgl. dazu Phän. d. W., S. 301 f.

[23] Phän. d. W., S. 302.

ist nicht sichtbar und daher auch nicht vergleichbar mit anderen ‘scheinbaren Größen’. Erst wenn wir einen Gegenstand aus seinem Wahrnehmungskontext herauslösen und ihn isolieren, können wir seine scheinbare Größe messen. Im Wahrnehmungskontext selbst ist sie nichts mehr als eine »Ausdrucksweise«[24] unseres Tiefensehens, ein Modus, in welchem der Gegenstand in der räumlichen Tiefe ist. Insofern bedürfen nach Merleau-Ponty die verschiedenen ‘scheinbaren Größen’ eines sich entfernenden Dinges auch keiner Verknüpfung durch eine Synthese, denn keine von ihnen wird Gegenstand einer These[25]. Die scheinbare Größe ist so gesehen Bestandteil einer Situation und verleiht unserem Blick eine bestimmte Weise des Anhaltes an den Gegenstand. Eben in dieser Weise des Anhaltes an ihn ist unser Blick motiviert, ihn so und nicht anders zu sehen. Merleau-Ponty bezeichnet daher den Blick selbst als »jenes dem denkenden Subjekt noch zugrundeliegende Genie der Wahrnehmung, das den Dingen die rechte Antwort gibt, die sie erwarten, um vor uns existieren zu können«[26]. Worin liegt also die ursprüngliche Eigenart der Tiefe? Sie liegt darin, dass im Wahrnehmungsakt jene Tiefenmotive der Wahrnehmung zu einer Wahrnehmung kontrahiert werden, in der sie gleichsam zugunsten des wahrgenommenen Gegenstandes verschwinden. Gerade dadurch, dass sie nicht ausdrücklich in der Wahrnehmung liegen, bringen sie den Gegenstand zur Geltung.

Wortmalerei contra Hirnalchimie?
Zur Kritik phänomenologischer Rede

Wer die Beschreibungen Merleau-Pontys mit einiger Geduld nachvollzieht, wird sicherlich an vielen Stellen das Gefühl haben, dass in ihnen Dinge zur Sprache kommen, die durch Methoden der Naturwissenschaften nicht zu erfassen sind. Dieser Eindruck würde dem Anspruch der Phänomenologie entsprechen. Vielleicht entsteht daneben aber auch der Eindruck, dass eine solche Deskription von Phänomenen, auch eine sprachlich so glänzende wie die Merleau-Pontys, mit der Schwierigkeit belastet ist, mehr als eine Ahnung unvordenklicher Gegebenheiten, nämlich mitteilbare Erkenntnisse zur Sprache zu bringen. Diese Schwierigkeit finden wir nicht allein bei Merleau-Ponty, sie tritt immer dann auf, wenn eine Untersuchung im Aufweisen und Aufzeigen von (oft nicht einmal konkreten) Phänomenen gründet. Ein beliebig herausge-

[24] Phän. d. W., S. 302/303.
[25] Phän. d. W., S. 304.
[26] Phän. d. W., S. 307.

griffenes weiteres Beispiel ist der Versuch O. Beckers, die »Eigenart der Limesbildung im präspatialen Feld« im »Phänomen des Verschwindens« aufzuzeigen[27]. Becker gibt eine phänomenologische Beschreibung, der zufolge die nach und nach sich mindernde Ausdehnungsgröße eines Farbflecks keinerlei Veränderung der Qualität bedingen kann: »Er nähert sich vielmehr unbegrenzt einem gewissen Limes, der aber ein positives Etwas ist«[28]. Dem Psychologen C. Stumpf, der das offensichtlich nicht anzuerkennen bereit war, hält Becker entgegen, es sei »eben nicht richtig, daß, wenn die Ausdehnungsgröße allmählich verschwindet, dasselbe mit der Qualität geschieht«[29]. Bezeichnend für das phänomenologische Vorgehen ist hier, dass einer abweichenden Ansicht nur durch wiederholten Verweis auf das vermeintliche Phänomen zu begegnen ist. Ähnlich müsste mit einer Person verfahren werden, die nicht begreift, wieso nach der bereits zitierten Ansicht Merleau-Pontys die räumliche Tiefe »sich in keiner Weise am Gegenstand selbst abzeichnet, vielmehr ganz offenbar der Perspektive, nicht den Dingen Zugehört«[30]. Vielleicht wird man daraufhin das Gemeinte in anderen Formulierungen und leicht variiertem Kontext darbieten, im übrigen bleibt aber nicht viel anderes als der Appell, sich doch noch einmal des Nachvollzugs der behaupteten Erkenntnis zu befleißigen.

Wir wollen nun untersuchen, inwiefern dieses Dilemma in der Natur phänomenologischer Studien begründet ist, d. h. auf dem Anspruch der phänomenologischen Methode beruht, ein verstehendes Erkennen von Sachverhalten ohne deren Herauslösung aus ihrem situativen Kontext zu leisten. Mit diesem methodischen Problem setzt sich, gerade auch im Zusammenhang mit der räumlichen Tiefenerfahrung, E. Ströker in ihrer Habilitationsschrift[31] ausführlich auseinander. Zunächst haben wir nach Ströker den Anspruch der psychologischen und physiologischen Spezialforschung als gerechtfertigt anzuerkennen, »solange sie eben nichts weiter sein will als erklärende Wissenschaft, systematisches Bemühen um die organismischen Bedingungen des Sehens«[32]. Dieser Aufforderung kommen wir umso leichter nach, als ein anders lautender Anspruch von Seiten der Naturwissenschaften sicher die Ausnahme von der Regel sein dürfte. Wer jedoch nicht nach organismischen Bedingungen des Sehens, sondern wie Merleau-Ponty »nach dem Sinn des Sehens für das

[27] Vgl. O. Becker: Beiträge …, S. 463.
[28] Loc. cit., S. 465.
[29] Loc. cit., S. 464.
[30] Phän. d. W., S. 299.
[31] E. Ströker: *Philosophische Untersuchungen zum Raum*, Frankfurt am Main 1965.
[32] Ströker: Untersuchungen, S. 110.

Subjekt«[33] sucht, wird mit spezialwissenschaftlichen Methoden bald eine Enttäuschung erleben, insofern diese »notwendig den Leib der Situation entkleiden, ihn in beliebig wiederholbare Sach-Lagen bringen«[34] und ihn daher nicht als »Seinsweise des Subjekts ... begreiflich machen«[35] können. In Ergänzung der kausal erklärenden Methode will Ströker diese Aufgabe der Phänomenologie, die »eine verstehende Betrachtung ist«[36], überantworten. Damit ist das Verhältnis von Naturwissenschaft und Phänomenologie auf den Gegensatz von erklärender und verstehender Betrachtung gebracht. Wie sehr jedoch hier und auch bei anderen Autoren einschließlich Merleau-Ponty dieser Unterschied in den Betrachtungsweisen beansprucht wird, so wenig findet man ihn über allgemeine Schablonen wie ‘Objektivierung’ oder ‘Sinnergründung’ hinausgehend wirklich expliziert. Wie wir schon beim Referieren des Merleau-Pontyschen Standpunktes bemerken konnten, wird die besondere Eigenart des phänomenologischen Vorgehens am leichtesten durch Negation bestimmt: indem man es von transzendentalphilosophischen Bemühungen oder von den empiristisch verstandenen Verfahren der Naturwissenschaften abhebt. Jedoch darf bei dieser Abgrenzung nicht die Frage übersehen werden, wie in phänomenologischer Rede selbst sich Behauptungen als Erkenntnisse legitimieren. Die Frage bietet einem Kritiker mindestens zwei aufschlussreiche Teilaspekte. Erstens ist zu fragen, ob phänomenologische Rede überhaupt Mitteilung sein will oder kann. Zweitens ist zu überlegen, ob sie da, wo sie Mitteilung anstrebt, nicht doch stillschweigend der verschmähten »objektivierenden Untersuchungsschema(ta)«[37] sich bedient.

Wie wir bereits am Beispiel O. Beckers sahen, soll zwar die Mitteilung eines Sachverhaltes intendiert werden, hat aber die ‘Verteidigung’ des Behaupteten einen gewissen Appellcharakter. Bei Merleau-Ponty ist es eine faszinierende Beredsamkeit, die auch da nicht halt macht, wo es für andere Autoren nach strengen Maßstäben eigentlich nichts mehr zu sagen gäbe. Hier sei nur daran erinnert, dass die Einheit von Leib und Bewusstsein in einem Wahrnehmungssubjekt von Ströker als »Paradigma einer streng wechselseitigen Implikation« gesehen wird, das »sich im Grunde jedem Bemühen, seine Struktur sprachlich adäquat zu fassen« widersetzt[38]. Zugegebenermaßen bewegt sich an solchen Stellen die Rede der Phänomenologie am Rande der Sprachlosigkeit. Der Mo-

[33] Ströker, loc. cit., S. 109.
[34] Loc. cit., S. 109.
[35] Loc. cit., S. 110.
[36] Loc. cit., S. 109
[37] Loc. cit., S. 110.
[38] Ströker, loc. cit., S. 110.

dus der auf das Unvordenkliche (Präreflexive) gerichteten Reflexion ist lediglich der des Dass: Wir haben eine Ahnung von einer vorpersönlichen Verbindung mit den Dingen, wir glauben, *dass* diese Verbindung unserem Denken vorgängig ist und es bestimmt. Aber dabei bleibt es; die Erläuterung dieses Glaubens kann kaum mehr beanspruchen als Wortmalerei zu sein. Es wäre sicherlich lohnend, einmal der Frage nachzugehen, ob nicht Malerei überhaupt die dem in phänomenologischer Rede Gemeinten angemessenere Äußerungsform darstellt. Dasjenige, was ein Maler und ein Phänomene Beschreibender schließlich zu 'sagen' hätten, beträfe dann nurmehr und vor allem die Sicht der Wahrnehmungsdinge. Man kann sich kaum vorstellen, dass ein Maler etwas dagegen hätte, wenn seine bildliche Ausdrucksweise einer nicht-diskursiven Auslegung der Welt zugerechnet würde. Ebensowenig kann sich Merleau-Ponty dagegen wehren; es müsste ihm sogar gerade recht sein, wenn gemessen an gängigen wissenschaftlichen Maßstäben, die er ohnehin nicht teilt, seine Deskription einer ursprünglichen Erfahrung nicht anders aufzufassen ist als eine Art verbalen Malens, eine Mischung aus Sehen, Zeigen und Darstellen.

Wortmalerei *contra* Hirnalchimie? Damit würde eine falsche und gänzlich unsinnige Kontroverse heraufbeschworen. So wenig die Legitimität, Phänomene gleich wie zum Vorschein kommen zu lassen, durch die Möglichkeit angetastet wird, die organismischen Grundlagen der Wahrnehmung zu untersuchen, so wenig kann das phänomenologische Reden den Anspruch der Objektivität liquidieren oder die 'wahre' Weltsicht für sich in Anspruch nehmen. Wir dürfen nämlich von einem 'Phänomenologen' eine Unterscheidung erwarten zwischen dem im Grunde stummen, meist aber in Sprache verkleideten Verweisen und Zeigen einerseits und einem Behaupten von Tatsachen andererseits. Allein im Behaupten vermögen wir einen Anspruch auf Erkenntnis, auf Äußerung von Wahrheit zu sehen. Eine bildhaft dargestellte Sicht der Wahrnehmungsdinge dagegen kann zwar den Sinn des Sehens für das Subjekt *thematisieren*, doch bleibt es für das Subjekt bei einer gefühlhaften, durch Hineinversetzen in den Phänomenkontext zu erzielenden Teilhabe an den Sinnverweisen. Man fühlt sich angesprochen, betroffen von wahrhaftiger Darstellung, doch gibt es strenggenommen – wie Sartre einmal in einem Fernsehinterview freimütig bekannte – keine Diskussion, keine Auseinandersetzung von Meinungen in einer so verstandenen Philosophie.[39]

[39] Es muss einschränkend angemerkt werden, dass Sartre sich gegen das *mündliche* Gespräch über philosophische Fragen verwahrt hat, und zwar wegen der vermeintlichen Vielschichtigkeit dieser Fragen. Diese Haltung werte ich als Ausdruck des Wunsches (sowie der von Sartre tatsächlich geübten Praxis), rationale Argumentation durch *persuasive Momente* zu ersetzen, die dem

Freilich dürfte die Mehrheit der phänomenologisch artikulierenden Philosophen im Gegensatz zu der Ansicht stehen, ihre Äußerungen seien im Grunde nichts als Wortmalerei und könnten schwerlich Anspruch auf Erkenntnis erheben. Sofern diese Äußerungen eben Phänomeno*logie* sein sollen, hat man den ihnen mitgegebenen Erkenntnisanspruch auch zu begrüßen. Gleichwohl scheint er uns auf einer Selbsttäuschung der im phänomenologischen Verfahren Befangenen zu beruhen. Den Grund hierfür sehen wir in der Unterscheidung zwischen primordinaler und objektivierter Erfahrung, genauer in der Weise, wie diese Unterscheidung von Phänomenologen methodisch gehandhabt zu werden pflegt.

Zur Vermeidung unnötiger Allgemeinheit wollen wir die Diskussion dieser Frage wieder auf die Ansichten Merleau-Pontys lenken.

Objektivierte Erfahrung ist für Merleau-Ponty überhaupt keine Erfahrung im eigentlichen Sinn, sondern nur ein durch Objektivation handhabbar gewordenes Oberflächenrelikt von Erlebniskomplexen. Richtig daran ist sicherlich dies, dass naturwissenschaftliche Erkenntnis niemals die inneren, nur durch unmittelbares Haben wirklichen Qualitäten primordinaler Erfahrung zum Gegenstand hat. Was übrig bleibt, ist ein Geflecht physisch-organismischer Beziehungen, das bestenfalls dem immanenten Geschehen des jeweiligen Erlebens in gewisser Weise korrespondiert. Nun erklärt Merleau-Ponty das Aufsuchen derartiger Entsprechungen für null und nichtig, da er primordinale Erfahrung für schlechthin nicht verursachbar hält. Wenn sie aber tatsächlich nicht in Kausalzusammenhängen steht, dann doch wohl deshalb, weil sie überhaupt nicht thematisierbar ist und jeglichen Gesetzescharakters entbehrt. Dies ist ja auch der Grund dafür, dass ein Naturwissenschaftler immer nur Oberflächenrelikte dieser Erfahrung vor Augen hat, niemals aber ihre inneren Qualitäten. Nun ist hierin aber noch kein Nachteil zu sehen. Ein Nachteil wäre dies nur, wenn überhaupt auf *anderem* Wege das ‘Innere’ der primordinalen Erfahrung aufzudecken wäre. Die Phänomenologie verweist uns auf die Beschreibung dessen, was ein ‘innerer Blick’ zu erkennen vermöchte. Doch ist ein solcher Blick nicht ganz schlicht eine naiv ausgeübte Wahrnehmung eigener psychischer Zustände? *Gerade durch die methodische Naivität unterscheidet sich diese Wahrnehmung und die aus ihr resultierende Beschreibung von naturwissenschaftlicher Erkenntnis*. Man denke nur an die von Merleau-Ponty strapazierte Analogie von Motiv und Motiviertem für das Verhältnis zwischen

Leser (nur einen solchen gibt es ja nach Sartre in der Philosophie) das Gefühl des existentiellen Betroffenseins vermitteln sollen.

den Momenten der Tiefenwahrnehmung und der Erfahrung der räumlichen Tiefe. Sicher ist die Situation nicht so einfach, dass jene Momente schlicht Ursachen für die entsprechende Raumerfahrung wären. Aber die Momente haben ihren organismischen Ausdruck und würden sich auch zweifellos durch Störung der physischen Struktur ändern. Dabei stünden dann Störung und Strukturänderung in einem Kausalzusammenhang, und die entsprechende Raumerfahrung wäre nichts weiter als der Ausdruck der veränderten Situation im Erleben des Individuums. Sie ist also nicht verursacht im strengen Sinne des Wortes, sondern die Übersetzung einer ursächlich verknüpften Struktur. Unsere extreme Unwissenheit über Einzelheiten in diesen Zusammenhängen wird aber nur scheinbar beseitigt, wenn man stattdessen *per analogiam* von einer Motivationsbeziehung spricht. Die Verwendung einer solchen Analogie dokumentiert die Ansicht, es gäbe zwar keine naturwissenschaftliche, wohl aber eine eigenständige phänomenologische Erfassung primordinaler Erfahrung. Auf der einen Seite ist klar, dass nur das aktuale Haben eines Erlebnisses seine Realität ausmacht, dass also primordinale Erfahrung für einen Zuschauer lediglich *negativ* bestimmbar ist, nämlich als das, was gerade ein anderer vollzieht oder er selbst vollzogen hat, bevor er sich zu beobachten begann. Auf der anderen Seite muss es verwundern, mit welcher Hartnäckigkeit diese prinzipielle Einsicht im phänomenologischen Vorgehen verharmlost wird, indem man durch Einfühlung, Hineinversetzen, ‘inneren Blick’ etc. dennoch zu einer *positiven* Bestimmung und Beschreibung des ursprünglichen Erfahrens im Sinne einer unmittelbaren, doch mitteilbaren Erkenntnis seiner spezifischen Eigenschaften und Strukturen gelangen zu können glaubt. Es ist dies ein anachronistischer und naiver Glaube, wir könnten uns der Dinge der Wahrnehmung so versichern wie sie sind. Die Wahrnehmungsdinge bleiben aber nur dann unverfälscht, wenn wir sie in der Wahrnehmung belassen; nur ergibt sich hieraus noch keine Phänomenologie. Jedes Thematisieren, auch das den Sinn der Wahrnehmung vermeintlich aussprechende phänomenologische Reden, kann nicht anders als die Wahrnehmung aus einer sei es auch noch so kleinen Distanz zu betrachten und damit zum Objekt zu machen. Welchen anderen Sinn könnte denn Objektivität von Erkenntnis haben als diesen? Worin soll sich demnach prinzipiell noch phänomenologische von naturwissenschaftlicher Erkenntnis unterscheiden? Es wäre eine Verkennung eigenen Tuns, wenn hier Unterschiede von Seiten der Phänomenologie konstruiert würden, die faktisch überhaupt nicht zur Geltung kommen. Wenn die Phänomenologie beansprucht, worauf auch immer gegründete Erkenntnisse mitzuteilen, so hat sie sich in die Reihe der (gelegentlich abschätzig so genannten) positiven Wissenschaften einzugliedern, d. h. als eine Disziplin zu etablieren und zu legitimieren, deren Aufgabe in der Erfassung und methodischen Untersuchung abgrenzbarer Gegenstandsbereiche besteht.

Zur Sinndeutung der geometrischen Erkenntnis

Abschließend seien hier noch einige Bemerkungen zu Merleau-Pontys Versuch angeführt, das geometrische Denken durch eine phänomenologische Beschreibung zu deuten[40]. Ein Grundlagentheoretiker, der diese interessanten Ausführungen liest, kann einer gewissen Irritation von vornherein dadurch entgegenwirken, dass er *nicht* etwa eine Begründung der Geometrie erwartet, sondern sich auf eine *Interpretation der geometrischen Anschauung* einstellt. Diese erfolgt vermöge einer Beschreibung, und zwar des Vollzugs einer Konstruktion innerhalb eines geometrischen Beweises (Merleau-Ponty wählt als Beispiel eine Konstruktion, die zum Nachweis der Winkelsumme im Dreieck dient).

Merleau-Ponty beginnt mit der alten Frage, worauf sich die Gewissheit der geometrischen Erkenntnis gründe. Hier vergleicht er zunächst die Möglichkeiten, einen geometrischen Sachverhalt aus Axiomen durch logisches Schließen abzuleiten und ihn mit Hilfe einer geeigneten Konstruktion intuitiv einzusehen. Er hält an der Meinung fest, dass »der Ort, in dem die Gewißheit gründet und eine Wahrheit erscheint, stets das intuitive Denken«[41] sei. Dieser Standpunkt wird daraufhin erläutert, indem das Konstruieren von Beweisfiguren als »Bewegungsentwurf«[42], als »Akt der produktiven Einbildungskraft«[43] aufgefasst wird. Eine Konstruktion, z. B. am Dreieck, hat Merleau-Ponty zufolge nicht deshalb beweisende Kraft, weil sie »letztlich getragen wäre von einem alle seine Eigenschaften in sich schließenden Begriff des Dreiecks und ich, das WahrnehmungsBewusstsein hinter mir lassend, mich zum Eidos erhöbe, sondern weil ich die Synthese der neuentdeckten Eigenschaft leiste durch das Mittel des Leibes, der mich mit einem Schlage in den Raum versetzt und dessen autonome Bewegung mir durch eine Reihe wohlbestimmter Schritte den Zugang zu dieser umfassenden Sicht des Raumes eröffnet«[44].

---

[40] Vgl. Phän. d. W., S. 437-442.
[41] Phän. d. W., S. 439
[42] Phän. d. W., S. 441
[43] Phän. d. W., S. 440
[44] Phän. d. W., S. 442

Zu dieser Deutung ist zunächst anzumerken, dass sie einen alten, aber richtigen und wichtigen Gemeinplatz enthält. Es ist dies die jedem Mathematiker geläufige Tatsache, dass deduktive Begründungen, Beweise nach euklidischem Muster in der Regel an vorgängigen intuitiven Überlegungen ausgerichtet sind. Auch der tragende Charakter der Anschauungsbasis ist anzuerkennen. Leider werden diese zutreffenden Einsichten in das geometrische Denken nun aber radikal verallgemeinert, wenn es heißt, geometrische Erkenntnis erhalte ihren Notwendigkeitscharakter allein durch eine virtuelle »autonome Bewegung« des Leibsubjekts. Selbst wenn man zugestehen wollte, dass solche Bewegungsentwürfe im konstruierenden Beweisen eine hervorragende Rolle spielen, so erschöpfen sie doch bei weitem nicht den 'Sinn' des Geometrietreibens. Das lässt sich an verschiedenen Gesichtspunkten deutlich machen.

1. – Die geometrische Erkenntnis geht wesentlich weiter als die Sichtmöglichkeiten eines anschauenden Bewegungssubjekts überhaupt zulassen. Merleau-Pontys Beschreibung bezieht ihre Überzeugungskraft aus einem sehr einfachen Beispiel. Mathematische Aktivitäten, die nicht an solchen überschaubaren Fällen ausgerichtet sind (und das sind weitaus die meisten), entziehen sich dann aber der phänomenologischen Sinndeutung. Ein umfassenderes Konzept von 'Sinn' entwickelt Husserl in seinen Untersuchungen zur formalen und transzendentalen Logik[45].

2. – Die Fähigkeiten des »perzeptiven Bewusstseins«[46] sind aber schon viel früher erschöpft, z. B. bei der virtuellen Bewegung, die eine Einsicht in die globale Eigenschaft ermöglichen müsste, die das Parallelenpostulat ausspricht. Die phänomenologische Beschreibung bleibt hier kurzsichtig; Merleau-Ponty benutzt schlicht etwas unanalysierte Schulgeometrie, deren Evidenz nach einer gewissen Zeit auf dem Papier herzustellen ist. Die tieferliegenden Probleme der 'Gewissheit' werden durch phänomenologische Beobachtungen keineswegs gelöst. Wer nur mit den Bewegungen eines Leibsubjekts argumentiert, trivialisiert diese Probleme sogar beträchtlich.

3. – Schließlich hat es auch einen Sinn, wenn auch keinen an das Wahrnehmungsbewusstsein gebundenen, ein geometrisches Theorem streng formal aus Axiomen zu deduzieren. Die dadurch erzeugte 'Gewissheit' ist etwas anderes als die Überzeugtheit durch anschauliche Konstruktion, sie ist auch nicht – wie das bei Merleau-Ponty anklingt – ein sekundärer Effekt von dieser. Eine Be-

---

[45] Formale und transzendentale Logik. In: *Jahrb. f. Philos. u. phän. Forschung*, Bd. 10, Halle (Saale), 1929, S. 1-298.

[46] »So wenig überschreitet das geometrische Denken das perzeptive Bewusstsein …«, Phän. d. W., S. 442.

schreibung geht an der Natur des mathematischen Denkens vorbei, wenn sie das Faktum übersieht, dass gerade umgekehrt Gewissheit durch anschauliche Einsicht erst durch formales Denken ihre eigentliche Bedeutung erhält. Ohne formales, begriffliches Denken bestünde nämlich die Mathematik aus den zufälligen Funden eines Bewegungssubjekts; insbesondere bliebe die Geometrie, bei bloß anschaulicher Entwicklung, eine ungeordnete und höchst begrenzte Sammlung von Vorurteilen.

POSTSKRIPTUM

Die erste Fassung der *Methodenkritischen Überlegungen* war im Winter 1969/70 entstanden, als mir Friedrich Kaulbachs kurz zuvor (1968) im Böhlau-Verlag (Köln und Graz) erschienene Abhandlung *Philosophie der Beschreibung* noch nicht bekannt geworden war. Erst viel später habe ich dann in diesem umfangreichen Werk (von 470 Seiten) nach einer Konzeption von „Beschreibung“ gesucht, die sich meiner Kritik des Wissenschaftsanspruchs phänomenologischer Rede entgegenhalten ließe. Auf gerade einmal dreieinhalb Seiten (S. 391-395) geht Kaulbach auf die spezifische Problematik ein, und zwar anknüpfend an die dazu von Husserl vorgetragene Auffassung.[47] Dabei hat Husserl die »fundamentalen und noch ungelösten Probleme einer prinzipiellen Klärung des Verhältnisses von „Beschreibung“ mit ihren „deskriptiven Begriffen“« und »„eindeutiger“, „exakter Bestimmung“ mit ihren „Idealbegriffen“« sehr wohl gesehen. Geklärt wird freilich dieses »Verhältnis« weder bei ihm noch bei Kaulbach. Stattdessen wird in lediglich wiederholter Abgrenzung das Feld der Phänomenologie als Erkenntnisgebiet eigenen Rechts dem Gegenstandsbereich mathematisch-naturwissenschaftlichen Erkennens antithetisch gegenübergestellt. Auf der einen Seite haben wir »morphologische Wesen« als ein »Produkt bildender Kräfte der Natur« bzw. »als Erscheinung der freien Natur« (Physis im Aristotelischen Sinn); sie sind Funktionen des Leibes und besitzen Bewegungs- und Ausdruckscharakter. Auf sie ist die »deskriptive Wesenslehre der transzendental reinen Erlebnisse in der phänomenologischen Einstellung« (Husserl) gerichtet. Auf der anderen Seite treffen wir als dazu konträren Gegenpart alles, was »exakter Bestimmung« fähig ist, was als »Ergebnis bewegender Kräfte« entsteht und somit »in den Panzer der mathematischen Festlegungen und Konstruktionen eingezwängt werden« kann (was für Kaulbach auf eine Funktion nicht des Leibes, sondern des Körpers hindeutet).

Mit Vorliebe beansprucht der Philosoph, nach dem Vorbild Goethes, für sich die »freien Phänomene« der Natur. Die deskriptive phänomenologische Rede und ihre

[47] Edmund Husserl: *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie*, Den Haag–Tübingen 1950, Erstes Buch, S. 168 ff.

Vagheitsspielräume entsprechen in vielen Fällen dem, was der philosophische Diskurs üblicherweise bietet. Demgegenüber wird eine mathematisch disziplinierte Überlegung als »Panzer« diffamiert, was umso leichter fällt, wenn man meint, »Gestaltcharaktere« mit einer naturgegebenen Unschärfe entzögen sich der mathematischen Beschreibung: z. B. ein materielles Rad, das keinen präzisen Kreis realisiert, oder Gebilde, die in »schlichter, verständlicher, völlig angemessener Weise mit den Worten: gezackt, gekerbt, linsenförmig, doldenförmig« zu kennzeichnen sind. »Vagheit ... deutet die Freiheit der Erscheinung an« heißt es bei Kaulbach (S. 394). Ob und inwieweit die Mathematik über geeignete (z. B. topologische) Beschreibungsmittel verfügt, die dieser Freiheit – wider Erwarten – gerecht werden könnten, hat Kaulbach nicht geklärt. Überhaupt erscheint hier im ganzen Kontext Mathematik nicht als hochentwickelte wissenschaftliche Disziplin, sondern als ein schlichtes Schulfach, an dessen Dreieckskonstruktionen man sich noch (vage) erinnert.

Kaulbach ist aber Recht zu geben, wenn er darauf hinweist, dass der »Gestaltcharakter« einer »über den Fluß führenden Brücke als „kühn geschwungen“ ... nicht durch ein Punkt für Punkt erfülltes, festgelegtes Konstruktionsgesetz bestimmt wird«. Hier kann der Philosoph sich vor der Mathematik in Sicherheit fühlen. Allerdings muss er sich fragen lassen, weshalb es denn gleich eine philosophisch (als deskriptive Wesenslehre) hochgerüstete Phänomenologie erforderlich machen soll, um eine bildliche Redeweise dieser Art zustande zu bringen. Geht es hier überhaupt noch um Wissenschaft? Beim Bau der Brücke gewiss – die Kühnheit ihres Schwungs einzufangen wäre aber eher doch wohl eine Sache der Kunst oder der Dichtung.

Homogene Ränder[1]

Wo in Städten größere zusammenhängende Areale auf einen Schlag geplant und bebaut wurden, verlaufen die Straßenzüge häufig in schnurgeraden Parallelen von Süd nach Nord und senkrecht dazu von West nach Ost. Ein wenig streng und kühl wirken solche Raster, doch machen sie in ausgedehnten Stadtzentren, wie in New York oder Buenos Aires, die Orientierung zu einem Kinderspiel mit Koordinaten. Auch die Ränder einiger großer Territorien sehen wie mit dem Lineal gezogen aus: bei einigen Bundesstaaten der U.S.A. etwa oder, besonders ausgeprägt, beim ägyptischen Staatsgebiet, das von Libyen und vom Sudan durch fast senkrecht aufeinander stehende Strecken geschieden ist.

Außer der Geraden gilt auch der Kreis seit alters her als eine vollkommene Form. Warum sind die meisten Münzen kreisförmig? Ihre Symmetrie wirkt gefällig, erfüllt aber auch einen praktischen Zweck: Münzen sollen gut in der Hand liegen, und ein gleichmäßiger Rand trägt dazu bei. „Gesichtskreis" und „Wirkungskreis" sind gebräuchliche sprachliche Metaphern; sie spielen auf ein Zentrum an, von dem aus wir uns in alle Richtungen gleich weit bewegen – getreu der klassischen Definition, derzufolge ein Kreis aus genau den Punkten (einer Ebene) besteht, die von einem gegebenen Punkt denselben Abstand haben.

In der rauhen Wirklichkeit der Dinge finden sich Geraden und Kreise allenfalls angenähert realisiert. Von einer Geraden, die nach beiden Seiten unbegrenzt zu denken ist, lassen sich überhaupt nur (kleine) endliche Stücke verkörpern, wie die Kante eines Lineals, die zudem niemals wirklich vollkommen „glatt" sein kann. Geradenstücke entstehen meist unter dem Einfluss einer dominierenden Kraft. Das gilt für die in kolonialer Willkür gesetzten Grenzen auf dem afrikanischen Kontinent ebenso wie für ein zwischen zwei Händen

[1] Es handelt sich um einen von mir verfassten (leicht umgearbeiteten) Textabschnitt aus einem gemeinsam mit H. Wellstein veröffentlichten Artikel: Rand als mathematische Idee, *Zeitschrift für Kultur- und Bildungswissenschaften* Heft 13 (2002).

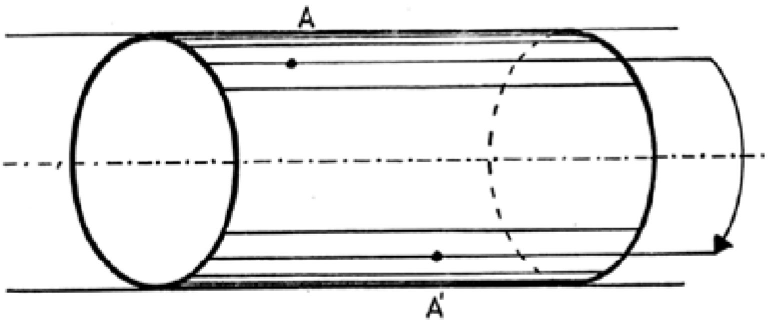
gespanntes Seil. Auch die geraden Kanten, die an naturwüchsigen Kristallen auftreten, sind im Prinzip so zu erklären.

Im Raum haben Gerade und Kreis naheliegende dreidimensionale Entsprechungen: Ebene und Kugel. Hinzu tritt hier noch der Zylinder als ein aus Gerade und Kreis aufgebautes Zwitterwesen: Der Rand (Mantel) eines geraden unendlichen Kreiszylinders – von dem ausschließlich hier die Rede sein soll – besteht aus allen Punkten, die von einer Geraden, der Zylinderachse, gleichen Abstand haben. Der Mantel besteht somit aus sämtlichen Geraden (Mantellinien), die parallel zur Achse und in festem Abstand zu ihr verlaufen. Ein ebener Schnitt senkrecht zu den Mantellinien erzeugt einen Kreis.

Ebene, Kugel und Zylinder begegnen uns zwar in natürlichen Phänomenen, jedoch meist nur in grober Näherung. Die Oberfläche eines Sees – Windstille vorausgesetzt – scheint eine Anschauungsvorlage abzugeben, aus der sich die Idee der Ebene kraft Abstraktion gewinnen lässt. Abstrahieren bedeutet, von unwesentlichen und störenden Eigenschaften abzusehen, hier: von allen Eigenschaften, in denen die Wasseroberfläche von einer idealen Ebene abweicht. Aber ist das möglich, ohne nicht schon zu wissen, was eine Ebene ist? Um Abweichungen zu identifizieren, die nicht direkt wahrnehmbar sind, braucht man im Allgemeinen etwas physikalische Theorie, mindestens aber eine entwickelte Geometrie, in der Grundbegriffe wie „Ebene“ oder „Gerade“ längst eingeführt sind. Dabei erweisen sich Wasseroberflächen als kugelförmig (wenn auch mit unmerklich kleiner Krümmung), denn sie sind Äquipotentialflächen im Schwerefeld der Erde. Auch hier verursacht eine dominierende Kraft das Entstehen der Form.

Das vielfache und variantenreiche Vorkommen geometrischer Grundformen in unserer Lebenswelt ist allerdings nicht kausal, sondern überwiegend final, d. h. als Ergebnis bewussten und zielgerichteten Handelns zu verstehen. Die betreffenden Objekte entstehen in technischer Praxis, durch zweck- und funktionsgerechte Formgebung. Tatsächlich verkörpern schon einfache Alltagsgegenstände grundlegende Ideen (Formen, Formbeziehungen) der Geometrie. Zum Beispiel finden wir Punkte, Geraden- und Ebenenstücke, rechte Winkel und Parallelen an Ziegelsteinen, Tischplatten, Wandtafeln oder an einem Blatt Papier. Beispiele für Objekte, die Eigenschaften von Kugel oder Zylinder ausnutzen, sind Bälle, Billardkugeln, Kugellager, Walzen, Räder, der Kolben im Kolbenmotor, u. v. a. m.

Ebene, Kugel und Zylinder weisen eine besondere Spielart der Symmetrie auf: eine *freie Beweglichkeit im Lager*[2], die sie mit keiner anderen Fläche teilen. Im Unterschied zur Achsensymmetrie oder der ganzzahligen Symmetrie von Bandornamenten oder Rosetten handelt es sich um eine spezielle Art von kontinuierlicher Symmetrie. Wir denken uns den betreffenden Körper so bewegt, dass er das von ihm eingenommene Raumgebiet nicht verlässt. Mit einer Kugel ist dies ohne weiteres möglich, wenn sie in beliebiger Weise um ihren Mittelpunkt gedreht wird; mit einem Würfel hingegen beansprucht die entsprechende Transformation dessen komplette Umkugel. Ebenen und Zylinder können ebenfalls frei „in sich" bewegt werden. Entscheidend ist dabei der Zusatz „frei"; er besagt, dass sich zwei beliebige Punkte A, A' auf dem Rand des Körpers durch eine geeignete Bewegung im Lager ineinander überführen lassen. Um dies bei dem in Figur 1 abgebildeten Zylinder(abschnitt) zu erreichen, ist eine geeignete Drehung um seine Achse sowie eine passende Verschiebung zu vollführen. Drehung und Verschiebung hat man sich dabei als eine einzige (zusammengesetzte) Symmetrietransformation vorzustellen. Beim Zylinder ist sie zu vorgegebenem Randpunktepaar eindeutig bestimmt, für Ebene und Kugel gilt das nicht.



Figur 1

Die freie Beweglichkeit im Lager dient einer Vielzahl praktischer Zwecke in Alltag und Technik. Ein Schrank soll sich an einer Wand, ein Buch auf einem Tisch ungehindert verlagern lassen. Beim Zylinder kommt bevorzugt eine Bewegungsart zum Tragen, etwa die freie Beweglichkeit in Richtung seiner Mantellinien beim Kolbenmotor. Geläufige Beispiele für die Kugel sind die Kugelschreiberspitze, die sich beim Schreiben beliebig in ihrem Lager bewegt und dabei die Minenflüssigkeit zum Papier befördert, oder das Kugelgelenk, mit dem sich eine Kamera auf ihrem Stativ, ein Rückspiegel in seiner Halterung frei justieren lassen.

[2] Vgl. Bender, P; Schreiber, A.: *Operative Genese der Geometrie*, Wien und Stuttgart 1985, Abschn. 2.3 und 7.6.

Offensichtlich sind auch Geraden und Kreise in ihrem Lager frei beweglich. Eine weitere (die einzige, zudem wesentlich räumliche) Kurve, für die das ebenfalls gilt, ist die Schraubenlinie. Sie entsteht auf dem Mantel eines Kreiszylinders, wenn man diesen gleichmäßig schräg auf einer geraden Kante abrollt (siehe dazu die Figur 2 auf S. 145). – Dass eine Schraubenlinie in ihrem Lager frei bewegt werden kann, erfährt jeder, der einen Korkenzieher in den Korken einer Weinflasche einschraubt. Bei der Schraubbewegung wird gleichzeitig eine Rotation und eine Translation ausgeführt. Ist daher ein Korkenzieher erst einmal in einen Korken eingeschraubt, so kann er durch bloßes Ziehen (Translation) aufgrund von Reibungswiderständen, die den Korken an einer Rotation hindern, nicht wieder herausgelangen, außer eben mit diesem gemeinsam.

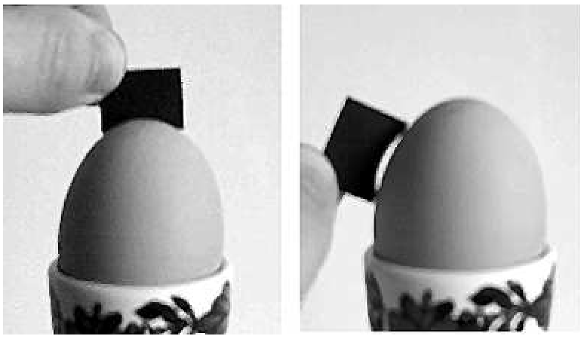
Die freie Beweglichkeit im Lager ist ein Sonderfall kontinuierlicher Symmetrie und lässt sich daher mathematisch in der Sprache der Transformationsgruppen beschreiben. Sie lässt sich aber auch elementarer dadurch kennzeichnen, dass man – wie Hugo Dingler in seinen *Grundlagen der Geometrie* (1933) – die Ununterscheidbarkeit der Stellen (Punkte) auf dem Rand des betreffenden Körpers fordert. Dieses Postulat wurde später von Paul Lorenzen wieder aufgegriffen und als „Prinzip der Homogenität" formuliert.[3] Die Grundidee klingt vage schon bei Euklid an, der eine Gerade als eine Linie definiert, »die gleich liegt mit den Punkten auf ihr selbst«. Um dies allgemeiner und präziser zu fassen, denken wir uns eine Fläche F (Rand eines Körpers bzw. Raumgebiets) sowie irgendeine Aussage, in der von F und einem Punkt P auf F die Rede ist. Ändert sich dann die Gültigkeit dieser Aussage nicht, wenn P durch einen beliebigen anderen Punkt P' von F ersetzt wird, so heißt die betreffende Fläche F *homogen* (im Sinne von Dingler/Lorenzen). Kurzum, alle Erkenntnisse, die wir mit unseren Sprachmitteln über eine Stelle auf F ausdrücken können, gelten von *sämtlichen* Stellen auf F. Ist nun Homogenität tatsächlich gleichbedeutend mit freier Beweglichkeit im Lager? Zumindest lässt sich dies zeigen: Als homogene Flächen kommen einzig die Ebene, die Kugelfläche und der Mantel eines (unendlichen) Kreiszylinders in Frage.[4]

Das Prinzip der Homogenität gestattet eine technisch-praktische Deutung: Von einem Randpunkt samt einer kleinen Umgebung fertigen wir einen mas-

[3] P. Lorenzen: Das Begründungsproblem der Geometrie als Wissenschaft der räumlichen Ordnung. *Philosophia Naturalis* 6 (1961), S. 415-431

[4] Für einen Beweis unter sehr allgemeinen Voraussetzungen vgl. P. Bender: A logical characterization of the Euclidean plane, sphere and cylinder. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* 27/6 (1996), S. 849-854.

siven Abdruck an, etwa in Form eines Stempelchens. Auf einem homogen berandeten Körper muss dieser Stempel an sämtlichen Stellen passen, d. h. so aufgesetzt werden können, dass alle Punkte der Stempelfläche den Rand des Körpers berühren. Andernfalls ließen sich Randpunkte unterscheiden, wie z. B. auf einem Hühnerei, wo ein von den stärker gekrümmten Kappen genommener Abdruck an den seitlichen Stellen der Eierschale nicht vollständig aufliegt (Figur 2).



Figur 2

Wir gehen nun einen Schritt weiter und denken uns den Abdruck so zu einer Passform vergrößert, dass der ganze Rand des betreffenden Körpers bedeckt wird. Die oben genannte Passbedingung drückt dann gerade die freie Beweglichkeit des Körpers in dem Lager aus, das von seinem Abdruck gebildet wird.

Fertigt man von einer homogenen Randfläche F – in der Praxis genügt ein endliches Stück von F – zwei (gleiche) Passformen F_1 und F_2, so fällt auf: Bei einer Ebene passen F_1 und F_2 aufeinander, d. h. F_1 ist Passform von F_2 und umgekehrt. Ist F hingegen Rand(stück) einer Kugel oder eines Zylinders, so gilt dies offensichtlich nicht. Der Sachverhalt ist somit ein Charakteristikum, das die Ebene unter den homogenen Flächen auszeichnet. Auf ihm beruht ein technisches Verfahren, mit dem sich Ebenenstücke an drei grob vorgeebneten Platten a, b, c durch wechselseitiges Schleifen realisieren lassen. Durch Schleifen kann man eine Oberfläche homogen machen. Schleift man dabei abwechselnd a an b, b an c und dann wieder a an c, so ist am Ende jede Platte eine Passform der übrigen beiden, kann also nur eine *ebene* Randfläche besitzen. Der historische Ursprung der Methode ist nicht völlig sicher; im 18. und 19. Jahrhundert wurde sie aber wohl von englischen Konstrukteuren (wie H. Maudslay) verwendet, um plankonvexe Linsen und Stahlebenen höchster Präzision herzustellen.

Dingler hielt dieses Dreiplatten-Schleifverfahren für das maßgebliche Bindeglied zwischen technischer Praxis und theoretischer Geometrie. In der Tat wird der grundlegende Formtyp „Ebene“ urerzeugt, d. h. ohne Rückgriff auf bereits vorhandene Muster technisch realisiert. Das ist erstaunlich und scheint darauf hinzudeuten, dass sich ein Wissen darüber, was eine Ebene ist, in dem Verfahren verbirgt. Die formale Axiomatik, die nach dem Vorbild David Hilberts mathematische Grundbegriffe lediglich durch Gebrauchsregeln fixiert, verzichtet auf derartige Wesensbestimmungen. Im Unterschied dazu ging es Dingler darum, die Geometrie von vornherein als einen inhaltlichen (nämlich durch Handlungsvorschriften interpretierten) apriorischen Teil der Physik aufzubauen. Ob dies in der Folge, etwa mit Lorenzens verschiedenen Fassungen einer „Protogeometrie", gelungen ist, mag an dieser Stelle offen bleiben. Begrifflich noch zu wenig geklärt ist z. B. das folgende Eindeutigkeitsproblem: Passen Ebenenexemplare, die aus unabhängigen Schleiftripeln hervorgehen, ihrerseits zueinander? Man wird dies erwarten; allerdings steht eine schlüssige protogeometrische Begründung noch aus.

Die operative Genese der Geometrie nach Hugo Dingler und ihre Bedeutung für den Mathematikunterricht[1]

Die Gedanken, die ich im Folgenden über das Geometrielernen oder allgemeiner: über die Genese des geometrischen Denkens darlegen werde, bilden einen summarischen Überblick über das, was gemeinsam von P. Bender und mir in einer Monographie *Operative Genese der Geometrie*[2] ausführlicher entwickelt und begründet wird. Ich habe mich daher naturgemäß auf Umrisslinien zu beschränken, versuche aber gleichwohl dabei die wesentlichsten Punkte zu durchlaufen. Zunächst zu den das Studium der operativen Geometriegenese leitenden Vorsätzen. Ich nenne hier nur zwei. Erstens: das Dinglersche Programm zum Aufbau der Geometrie wiederaufzugreifen und wiederzubeleben. Zweitens: einen theoretischen und einen praktischen Beitrag zu leisten zu den gegenwärtig in der Fachdidaktik spürbaren und gerechtfertigten Bestrebungen nach Wirklichkeitsbezug im mathematischen Lernprozess. – Vorsichtshalber möchte ich zum ersten Vorsatz bemerken: Wiederbelebung des Dinglerschen Programms soll keineswegs bedeuten: Renaissance der Dinglerschen Wissenschaftsphilosophie – die wäre vermutlich eine Totgeburt. Nichtsdestoweniger hat Dingler konkrete Einsichten gewonnen, die sich gut verwenden lassen, wenn man geometrisches Denken und Erschließung der Umwelt einander näher bringen will.

Ich berichte darüber in drei Schritten:

- Zunächst gebe ich eine kurze, für den hier verfolgten Zweck stilisierte Schilderung des Dinglerschen Programms und berücksichtige dabei

[1] Veröffentlicht in: *Der Mathematikunterricht*, Jg. 24 (1978), Heft 5 (Hrsg. H. Winter): Umwelterschließung im Geometrieunterricht.

[2] Das Buch erschien unter diesem Titel 1985 bei Hölder-Pichler-Tempski und Teubner, Wien/Stuttgart, als Band 12 der *Schriftenreihe Didaktik der Mathematik*, herausgeg. von W. Dörfler und R. Fischer.

auch die Verbesserungsvorschläge, die Paul Lorenzen und sein Erlanger Kreis hierzu seit 1961 unterbreitet haben.

- Dann skizziere ich einige Schwierigkeiten, die sich aus einer systematischen Analyse dieses Programms ergeben. Dabei beschränke ich mich auf Sortierung und Übersicht der wichtigsten Kritikpunkte.
- Die Kritik zwingt zu Konsequenzen: insbesondere legt sie nahe, die didaktischen Aspekte des Programms hervorzukehren. Für diese steht der Begriff der operativen Geometriegenese, dessen Intention und Inhalt ich im dritten Teil auseinandersetzen werde.

1. Kurze Schilderung des Dinglerschen Programms

Die Prinzipien seiner Wissenschaftsmethodik hat Hugo Dingler bereits während seiner Assistentenzeit an der TH München, also etwa ab 1905, entwickelt und von da ab mit beachtlicher Konsequenz verbessert und ausgebaut (übrigens später, ab 1912, im Rahmen einer der ersten Dozenturen für Didaktik der mathematischen Wissenschaften an deutschen Hochschulen). Um die Zeit waren gerade Hilberts *Grundlagen der Geometrie* erschienen, und zu ihren Bewunderern zählte auch Dingler. Gelegentlich wird Dingler als Kronzeuge aufgerufen, wenn man dem Hilbertschen Programm den Prozess machen will. Doch betrifft das eher die philosophische (nämlich formalistische) Interpretation der axiomatischen Methode als diese selbst. Mit der Axiomatik war Dingler durchaus einverstanden. Was er gegenüber Hilbert anders machen wollte, würden wir heute mit dem Wort ‘Umaxiomatisierung’ bezeichnen. Das bedeutet: Die Axiome der Geometrie (etwa die Hilbertschen) sollen durch andere (in den Augen Dinglers natürlich bessere) ersetzt werden, aus denen sich dieselben Folgerungen ziehen lassen. Nun sind Umaxiomatisierungen nichts Ungewöhnliches, weder in der Geometrie noch sonstwo in der Mathematik. Dingler schwebte aber eine Axiomatisierung vor, die er in seinen *Grundlagen der Geometrie* von 1933 »epistemologisch optimal« nennt (S. 28). Was wir gut oder sogar optimal nennen, richtet sich natürlich nach bestimmten Kriterien. Dinglers Leitvorstellungen für ein Axiomensystem A der Geometrie möchte ich knapp wie folgt zusammenfassen:

1. A ist widerspruchsfrei.
2. Jeder Satz der euklidischen Geometrie ist aus A ableitbar (insbesondere ist damit A kategorisch, d. h. alle Modelle von A sind isomorph).
3. A ist in hinreichendem Umfang ‘operativ interpretierbar’, genauer: A

zerfällt in zwei disjunkte Teilklassen E und N, für die gilt:
a) die Axiome von N sind Wiedergabe geometrischer Ideen (Ebene, Gerade, ...) in Form von Handlungsvorschriften (ideativen Normen) zur Realisierung dieser Ideen;
b) die ideativen Normen sind exhaurierbar, d. h. sie lassen sich beliebig oder doch hinreichend genau durch Bearbeitung realer Körper annähern;
c) die Axiome aus E gründen sich auf Evidenzen evtl. unterschiedlicher Art – und zwar ist ihre Evidenz von einer gewissen Stufe an unabhängig von der Güte der dabei erreichten Realisierung, an der die Evidenz nachvollzogen wird.

Ein Unterschied (nicht ein Gegensatz!) zu Hilbert besteht offenbar nur vermöge Punkt 3, und zwar vor allem in den Teilen a) und b). Allerdings ist dies ein wesentlicher Unterschied, von dem sich Dingler entscheidende Vorteile für das *Verständnis der Geometrie und für den Erwerb geometrischen Wissens* verspricht. – Worin bestehen diese Verbesserungen nach Dingler im einzelnen? Ich nenne hier die zwei hauptsächlichen Gebiete:

- die normative Funktion der geometrischen Ideen (vgl. 3a),
- die Beziehungen zwischen Geometrie und Realität (vgl. 3b).

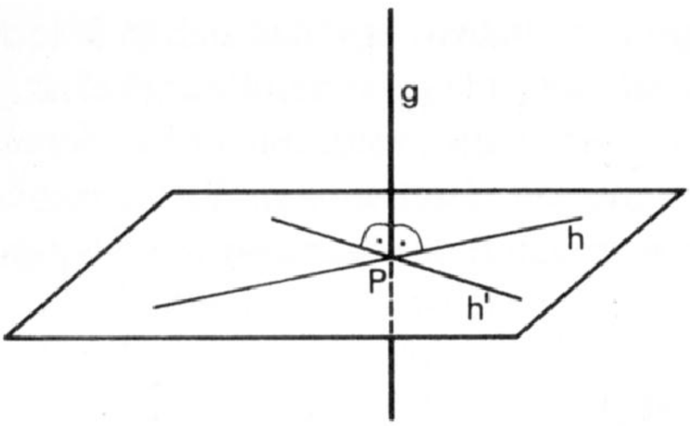
Zunächst zu den Ideen. Wir gelangen nach Dingler zu ihnen nicht durch ein Verfeinern unserer Anschauung oder durch Abstraktion aus Erfahrungsdaten. Z. B. die Idee der Ebene: Sicher finden wir sie an allerlei Dingen mehr oder weniger gut verwirklicht; man denke nur an eine stille Wasseroberfläche, an Türen, Buchdeckel, Tischplatten, Fensterscheiben und ähnliches mehr. Aber schon an diesen Beispielen wird deutlich: Wir gewinnen die Idee nicht abstraktiv aus den Dingen, sondern wir schreiben sie diesen normativ vor. Nicht die Wahrnehmungssphäre bringt sie hervor, sondern die Sphäre der Bedürfnisse und Zwecke. Im Grunde ist es sogar gleichgültig, ob wir Ideen abstraktiv gewinnen oder nicht – entscheidend ist allein ihre normative Funktion, ihre Rolle als *Zielvorschriften praktischen Handelns*.

Hier stellen sich sofort die Fragen: Welches sind denn nun die Ideen der Geometrie? Und: Wie hat man sie formal zu präzisieren? – Dinglers Antwort auf die erste Frage lautet: Die zentralen geometrischen Ideen (Begriffe) sind die der Ebene und des starren (deformationsfreien) Körpers. Aus Ebenen gewinnt man durch Schnitte Geraden und Punkte; auf die Deformationsfreiheit gründet sich der Begriff der Kongruenz. P. Lorenzen[3] wählt einen etwas anderen Weg: er definiert geometrische Starrheit durch Kongruenz und führt den Kongruenzbegriff in bekannter Weise (über Parallelogramme und Rhomben mit lotrechten Diagonalen) auf die Begriffe ‘parallel’ und ‘orthogonal’ zurück. Wie man es auch macht, am Ende bleiben zwei oder drei Ideen übrig, die nunmehr formal-begrifflich als Axiome zu präzisieren sind.

Dazu greift Dingler auf den grundlegenden Gedanken der *Ununterscheidbarkeit* zurück. Eben nennt er eine Fläche, deren einzelne Stellen und deren Seiten im ganzen ununterscheidbar sind. Lorenzen hat dies durch Formelschemata präzisiert, die er *Homogenitätsforderungen* nennt und die die Rolle von Axiomen übernehmen können. Für die Ebene sind dies

$$P \mid \varepsilon \wedge P' \mid \varepsilon \wedge \mathfrak{A}(\varepsilon, P) \longrightarrow \mathfrak{A}(\varepsilon, P') \quad \text{(innere Homogenität)}$$
$$P \nmid \varepsilon \wedge P' \nmid \varepsilon \wedge \mathfrak{A}(\varepsilon, P) \longrightarrow \mathfrak{A}(\varepsilon, P') \quad \text{(äußere Homogenität)}$$

wobei $\mathfrak{A}(\varepsilon, P)$ eine Formel in der Sprache der Geometrie darstellt, in der außer ε (Ebene) und P (Punkt) keine freien Variablen und keine Individuenkonstanten vorkommen dürfen.
Hier sei einzig noch die Orthogonalität erwähnt: Bei ihr wird verlangt, dass alle Geraden, die innerhalb einer Ebene durch einen gemeinsamen Punkt verlaufen, bezüglich des Lots auf die Ebene in diesem Punkt ununterscheidbar seien (s. Figur 1).



Figur 1

Nach Lorenzen ist das so zu formulieren:

$$g \perp \varepsilon \wedge h, h' \subset \varepsilon \wedge P \mid g, h, h' \wedge \mathfrak{A}(\varepsilon, g, h) \longrightarrow \mathfrak{A}(\varepsilon, g, h')$$

[3] In: Das Begründungsproblem der Geometrie als Wissenschaft der räumlichen Ordnung. *Philosophia Naturalis* 6 (1961), S. 415-431. Hier zit. nach P. Lorenzen: *Methodisches Denken*, Frankfurt am Main 1968, S. 120-141.

Ich möchte die Homogenitätsschemata hier nicht im Einzelnen (kritisch) unter die Lupe nehmen, sondern nur dies festhalten: Dem Dinglerschen Programm zufolge bilden sie den Inhalt des in Unterpunkt 3a erwähnten Systems N.

Wesentlich ist ferner der Programmpunkt 3b: die Exhaurierbarkeit der ideativen Normen. Mit ihrer Hilfe soll der Wirklichkeitsbezug, die Anwendbarkeit der Geometrie verständlich werden. Das Schema ist in seinen Grundzügen auch aus anderen Anwendungen mathematischer Theorien zur Genüge bekannt: Man konstruiert ein Modell, das eine reale Situation approximiert; dann überträgt man die Verhältnisse der Situation ins Modell, behandelt sie dort in entsprechender Vereinfachung und wendet das Resultat schließlich wieder auf die reale Ausgangssituation an. – Wenn wir dabei genau hinsehen, so wird hier die Wirklichkeit in Ideen nachgeschaffen: es handelt sich um eine *ideelle Exhaustion*. In Dinglers Programm verhält sich die Sache umgekehrt: Geometrische Anwendungen sind meist konstruktiver Natur – wir schaffen erst durch manuelle und instrumentelle Arbeit die Objekte und Verhältnisse, auf die dann schließlich die geometrischen Ideen und Sätze passen. Die Geometrie verlangt eine *reelle Exhaustion*.

Typ	Exhaustion
ideell	Idee $\rightarrow$ Realität Ideelle Gebilde werden vorgegebenen realen Gebilden angeglichen: z. B. mathematische Modellbildung in den Naturwissenschaften. Es entstehen ‘Idealisate’.
reell	Realität $\rightarrow$ Idee Reale Gebilde werden vorgegebenen ideellen Gebilden angeglichen: z. B. angenäherte Herstellung geometrischer Grundformen. Es entstehen ‘Realisate’.

Zumindest für die Axiome, die ideative Normen darstellen, gilt: Sie beschreiben die Natur nicht, sondern schreiben gewisse Grundformen vor, die erst noch vom Menschen zu realisieren sind. Anders als in der Axiomatik Hilberts wären damit jene Bindeglieder unmittelbar sichtbar und verfügbar, in denen Theorie und Wirklichkeit (durch Handlungen) aneinandergekoppelt sind.

Als Beispiel für eine exhaurierende Operation erwähne ich das sog. Dreiplattenschleifverfahren, das auch über eingeweihte Kreise hinaus bekannt geworden ist.[4] Das Verfahren dient der Urerzeugung von Ebenen. Drei grob vorgeebnete Flächen werden wechselweise zu je zweien aneinander abgeschliffen. Zweifellos ist die Dreizahl der Platten nicht unbedingt notwendig, sofern man durch unregelmäßiges Schleifen das Entstehen von Mulden verhindern kann.

2. Einwände und Schwierigkeiten im Überblick

Postulate machen noch keine Wissenschaft – diese Binsenwahrheit gilt es zu beachten, wenn ein kritisches Urteil über das Dinglersche Programm sowie die Beiträge der Erlanger Schule gefällt werden soll. Man kann alle möglichen Optimalitätsforderungen an eine Theorie stellen – das ist eine Sache für sich; eine andere Frage ist es, ob eine den Forderungen genügende Theorie auch wirklich existiert und aufgebaut werden kann. Um es gleich vorwegzunehmen: Das Dinglersche Programm, so sehr sein Ansatz und seine Stoßrichtung auch zu begrüßen sind, lässt sich nur eingeschränkt in die Tat umsetzen; das gilt nicht weniger für das sogenannte protophysikalische Forschungsprogramm, die Erlanger Variante des Dinglerschen Vorhabens. Vieles spricht dafür, dass es angemessener wäre, den ganzen Ansatz im Sinne einer operativen Geometriegenese *didaktisch umzudeuten*.

Um einen Überblick über Einwände und Schwierigkeiten zu erhalten, unterscheide ich solche grundsätzlicher Natur von einer Kritik, die auf eher temporäre Mängel und Kinderkrankheiten des Vorhabens abzielt. Wichtig sind natürlich prinzipielle Einwände. Sie können sich gegen Inhalt und Absicht des Programms richten, sie können aber auch bei eventuellem Einverständnis bloß dessen Durchführbarkeit betreffen. Insgesamt ergeben sich drei Kategorien von Kritikpunkten:

1. Kritik durch Aufweis möglicherweise nur temporärer Mängel.
2. Prinzipielle Kritik am Dinglerschen Programm
   (a) hinsichtlich Inhalt und Absicht;
   (b) hinsichtlich seiner Durchführbarkeit.

Zu 1. – Es sind vor allem zwei Umstände, unter denen nach meiner Einschätzung das Dinglersche Programm von Anfang an und leider auch heute immer

[4] Einer Anekdote zufolge soll Dingler so oft davon gesprochen haben, dass man sich in Münchener Hörsälen imitierend die Hände aneinanderrieb, wenn Dingler den Raum betrat.

noch am meisten leidet: sein stark *fragmentarischer Charakter* und eine gewisse *Fixiertheit hinsichtlich seiner epistemologischen Ansprüche*. Man sollte meinen, dass sich Zurückhaltung auferlegt, wer versprochene Vorhaben nur zu Bruchteilen einzuhalten vermag. Gerade das Gegenteil ist der Fall – bei Dingler kaum weniger als bei den Erlanger 'Protophysikern'. Diese Haltung hat dem Dinglerschen Programm vermutlich nicht genützt.

Die Bruchstückhaftigkeit ist in der Tat nicht zu übersehen. Bei Dingler finden sich wertvolle Gedanken, aber nicht in hinreichender Präzisierung und damit in Annäherung an die gewohnte Axiomatik. Lorenzen sucht dem durch seine Homogenitätsschemata abzuhelfen. Aber die Schemata werden im protophysikalischen Schrifttum praktisch nur wiederholt, nicht jedoch mathematisch untersucht und ausgewertet. Inzwischen gibt es eine Vielzahl verschiedener, miteinander keinesfalls verträglicher Darstellungen, deren Variationen dem Leser nicht erklärt werden und die daher in seinem Kopf insgesamt ein mittleres Chaos anzurichten drohen. Das bessert sich auch dadurch nicht, dass immer wieder und mit aller Schärfe gewisse Grundpositionen des Programms bezogen werden. Ich wähle stellvertretend die Frage der Eindeutigkeit als Beispiel. Soweit ich sehe, sind die ideativen Normen für die Eindeutigkeit der durch sie bestimmten Grundformen verantwortlich, außerhalb ebenso wie innerhalb der Axiomatik. Zwei unabhängig voneinander hergestellte Flachen müssen aufeinander „passen"; durch drei nicht-kollineare Punkte darf höchstens eine Ebene gehen. Nun ist von Eindeutigkeit viel die Rede (in unterschiedlichen, nicht immer klar ersichtlichen Bedeutungen); Janich hat sie zur »methodologischen Norm« für Protophysiker erklärt[5], und schon Dingler hat in seinen *Grundlagen der Geometrie* von 1933 einen Beweis aufgrund der Idee der Ebene zu geben versucht (der allerdings mathematisch kaum zufriedenstellt). Wollte man Mathematiker und Physiker von der Durchführbarkeit des Programms überzeugen, was läge näher als ein paar geläufige Sätze der Geometrie aus Homogenitätsforderungen herzuleiten. Doch ist dieses Feld bislang praktisch unbeackert geblieben. Für die eindeutige Bestimmtheit der Ebene durch drei ihrer nicht-kollinearen Punkte hat 1976 A. Kamlah (ein dem Erlanger Kreis nicht zugehöriger Wissenschaftstheoretiker) ein vorläufiges Ergebnis erzielt.[6] Wenn man dieses Resultat noch weiter zu vertiefen sucht, so stellt

[5] P. Janich: Eindeutigkeit, Konsistenz und methodische Ordnung: normative versus deskriptive Wissenschaftstheorie zur Physik. In: Kambartel/Mittelstraß (Hrsg.): *Zum normativen Fundament der Wissenschaft*, Frankfurt am Main 1973, S. 131-158, hier: S. 136.

[6] A. Kamlah: Zwei Interpretationen der geometrischen Homogenitätsprinzipien in der Protophysik. In: G. Böhme (Hrsg.): *Protophysik*, Frankfurt am Main 1976, S. 169-218.

sich heraus, dass man dabei und allgemein zum Aufbau der Inzidenzgeometrie wahrscheinlich noch mehr verlangen muss als die gewöhnlichen Homogenitätsforderungen samt einiger harmloser Existenzaxiome. Einiges darunter läuft auf das Postulat hinaus, wonach alle Ebenen im Raum „gleichberechtigt" seien. Eine solche Art von „Raumhomogenität" ist wohl nicht mehr operativ interpretierbar.

Auch zum zweiten Kritikpunkt, der Fixiertheit der Ansprüche, möchte ich nur ein Beispiel erwähnen, ohne es näher auszuführen: das Sinnlosigkeitsverdikt über bestimmte Arten metatheoretischer Untersuchungen des Dinglerschen Programms. Einer solchen Ablehnung sah sich A. Kamlah gegenüber, nachdem er in seiner schon erwähnten Arbeit eine »physikalische Interpretation« der Homogenität vorgeschlagen hatte. (Dabei werden auch physikalische Vorgänge als Unterscheidbarkeitskriterien von Flächenstellen eingesetzt.) Sicherlich kommt auf diese Weise ein Stück physikalische Theorie und damit wohl auch Geometrie ins Spiel; die Interpretation lässt sich also kaum dazu verwenden, jene Theorie 'protophysikalisch' allererst zu begründen. Für Janich ist dies schon ein »forcierter Verzicht auf einen Platz ... in einem sinnvollen ... Handlungs- oder Argumentationszusammenhang«.[7] Ich möchte hier aber nur zu bedenken geben, dass dann auch die formale Fassung der Homogenitätsforderungen einen solchen Verzicht bedeuten würde, insofern nämlich in ihnen die Unterscheidbarkeit von Punkten in geometrischen Termini ausgedrückt ist, also in Begriffen, deren Gebrauch erst durch Einführung der Homogenitätspostulate gerechtfertigt werden soll.

Zu 2a. – In der prinzipiellen Kritik am Dinglerschen Programm hinsichtlich dessen Inhalt und Absicht sollen hier zwei Einwände kurz erörtert werden.

Erstens: Man hält die operative Deutung der geometrischen Grundsätze für unwesentlich und setzt an ihre Stelle etwa die These, die Begriffe der Geometrie entstünden durch Abstraktion aus anschaulich erfassbaren Gegebenheiten. – Dazu möchte ich nur dies bemerken: Auch im Dinglerschen Programm muss der Anschauung und anschaulichen Evidenz eine gewisse Rolle zugestanden werden (vgl. 3c in Abschnitt 1). Allerdings wäre die Gegenthese, wonach Anschauung und Abstraktion zum Verständnis der geometrischen Begriffsbildung ausreichen oder allein angemessen sind, ihrerseits auch erst einmal zu präzisieren und zu erhärten. Fortschritte in dieser Streitfrage (falls

[7] Vgl. P. Janich: Zur Protophysik des Raumes. In: G. Böhme (Hrsg.): *Protophysik*, Frankfurt am Main 1976, S. 83-130, hier S. 347. Ferner: Zur Kritik an der Protophysik, ebda. S. 300-350.

es überhaupt eine ist) kann man nur erwarten, wenn beide Teile, die operativen Anfänge sowie die Abstraktionsthese, genauer analysiert worden sind als das bisher geschehen ist.

Zweitens: Man vertritt die Ansicht, das Programm sei anachronistisch; es sei nicht ratsam, die Geometrie mit Inhalten und (operativen) Deutungen zu befrachten, die Hilbert doch so erfolgreich über Bord geworfen hat. – Dieser Einwand ist selbst vom formalistischen Standpunkt aus nicht haltbar. Selbst Hilbert hatte bei seiner Axiomatisierung der euklidischen Geometrie mit deren Kategorizität auch ihre zumindest relative inhaltliche Bestimmtheit im Auge. Es braucht außerdem kein Konflikt zu bestehen zwischen der Tatsache, dass ein Axiomensystem vielfältig interpretierbar ist, und dem Versuch, eine ganz bestimmte Deutung aufgrund metatheoretischer Erwägungen auszuzeichnen.

Zu 2b. – Triftige Bedenken hinsichtlich der Durchführbarkeit des Dinglerschen Programms gibt es einige; aber hier, wie so oft bei vergleichbaren Vorhaben, steckt der Teufel im Detail. Ich nenne an dieser Stelle zwei Schwierigkeiten allgemeiner Natur.

Die erste betrifft die Frage, ob sich die Programmpunkte 2 (Euklidizität) und 3 (operative Interpretierbarkeit) gleichzeitig erreichen lassen. Bei Dingler wie bei Lorenzen herrscht eine Fixierung auf 2 vor, d. h. ein Glaube daran, dass eine vom operativen Standpunkt aus entwickelte Geometrie notwendigerweise euklidisch sein muss. Allerdings lassen die Untersuchungen von W. Büchel[8] und A. Kamlah (loc. cit.) berechtigte Zweifel hieran aufkommen.

Eine weitere Schwierigkeit liegt in Programmpunkt 3, wonach eine disjunkte Aufteilung der geometrischen Axiome in N (ideative Normen) und E (anschaulich evidente oder empirisch gültige Sätze) gelingen soll. Damit ist wohl kaum zu rechnen. So gehören die Stetigkeitsaxiome zu keiner dieser Klassen; zumindest sind sie nicht in offenkundiger Weise operativ zu deuten. Lorenzen gibt denn für sie auch nur eine konventionalistische Rechtfertigung.[9] Entsprechendes gilt für die bereits unter Kritikpunkt 1 erwähnte Raumhomogenität, sofern man sie zur Gewinnung der Inzidenzaxiome einzusetzen hat.

Erwähnt sei schließlich auch noch das Problem des starren Körpers, dessen kritische Bedeutung für Dinglers Geometriekonzept bereits E. Bopp[10] her-

[8] Zur „Protophysik" von Raum und Zeit. *Philosophia Naturalis* 12 (1970), S. 261-281.

[9] Loc. cit., S. 137.

[10] Vgl. die beiden Aufsätze: Starrer Körper und euklidische Geräte. *Philosophia Naturalis* 3 (1955/56), S. 383-391, und: Die Entwicklung geometrischer Begriffe aus dem Urbegriff des starren Körpers. *Der Mathematikunterricht* 15/1 (1969), S. 29-43.

ausgestellt hat. Vermutlich kann auf geometrische Starrheit (bzw. gleichbedeutend damit Kongruenz) als Grundidee nicht verzichtet werden. Die Möglichkeit, diese Idee aus Orthogonalität und Parallelität zu gewinnen, ändert daran allerdings kaum etwas, da z. B. die Orthogonalität (wenn man einmal ihre problematische Einführung über die in Abschnitt 1 genannte Homogenitätsforderung außer Betracht lässt) entweder undefinierter Grundbegriff bleibt oder wiederum an den Kongruenzbegriff anzuschließen ist. Andererseits bereitet eine operative Interpretation von geometrischer Starrheit im strengen Sinne (nämlich in Analogie zu den Homogenitätsvorschriften für die Ebene) erhebliche Schwierigkeiten.

3. Die didaktische Interpretation des Dinglerschen Programms durch den Begriff der operativen Geometriegenese

Die genannten Schwierigkeiten und Einwände wiegen nur wenig oder gar nicht mehr, wenn man das Dinglersche Programm *didaktisch umdeutet*, nämlich als Konzept einer operativen Geometriegenese. Allein angesichts des Gebrauchs der Wörter „operativ" und „Genese", mit denen unweigerlich an Piaget erinnert zu werden scheint, bedarf es hier einiger begrifflicher Vorklärungen.

Was zunächst Piaget anbelangt, so haben in dem hier zu schildernden Zusammenhang die Ausdrücke „operativ" und „Genese" einen anderen Sinn als in Piagets entwicklungspsychologischer Theorie. Ich möchte aber darauf hinweisen, dass es dabei nicht um eine Sinnkontroverse, sondern eher um eine Sinnergänzung geht, die ich hier nur so kurz wie möglich andeuten will.

Von Genesen (der Begriffe, Theorien, Denkweisen etc.) ist bei Piaget fast ausnahmslos die Rede als von Entwicklungsvorgängen, die sich tatsächlich abspielen: im Leben intelligenter Individuen oder in der Geschichte der Wissenschaft. Piaget redet damit über *faktische Genesen*. Für die Didaktik, die ja von der Lehr- und Lernbarkeit bestimmter Wissensinhalte handelt, ist dieser Begriff von Genese aber noch zu ergänzen durch den der *konstruktiblen Genese*. Hierunter sollen alle Entwicklungen und Darstellungen von Wissensinhalten fallen, die als möglich oder sinnvoll konstruiert werden können. Beispiele sind Lehrbuchdarstellungen, Unterrichtsstunden, Entwürfe von Lernsequenzen und dgl. mehr.

Zwischen beiden Typen von Genese wird in didaktischer Literatur zumeist nicht deutlich genug unterschieden. Eine solche Unterscheidung ist jedoch grundlegend. Sie verhindert nicht nur gedankliche Konfusionen und Vagheiten (wie sie z. B. im Zusammenhang mit Piagets Theorie anzutreffen sind) – sie kann und soll auch mit Nachdruck darauf aufmerksam machen, dass es nicht zuletzt konstruktible Genesen sind, die das Interesse der Didaktiker verdienen. Einen der Gründe dafür hat man in dem Umstand zu suchen, dass – zumindest beim Individuum – faktische Entwicklungen keine bloß eigengesetzlich ablaufenden Prozesse darstellen, sondern in mehr oder weniger hohem Maße dem Eingreifen konstruktibler Genesen unterliegen. So trivial und allgemein bekannt dieser Sachverhalt auch erscheinen mag, gelegentlich ist es notwendig und nützlich, an ihn zu erinnern, vor allem angesichts naiv empiristischer Strömungen in der didaktischen Forschung. Didaktisch besonders bedeutsam sind solche konstruktiblen Genesen, die vor dem Hintergrund einer bestimmten Interpretation konzipiert sind, und zwar einer zumeist an der historischen Genese ausgerichteten Interpretation. Beispiele dafür wären eine Genese der Algebra anhand der Problemstellungen, die im Umkreis des Lösens von Gleichungen auftreten, ein Entwickeln der Integralrechnung am Leitfaden der Probleme aus dem Bereich der Maßbestimmung, oder eine Genese der Geometrie, die von Dinglers operativem Standpunkt aus durchzuführen ist.

Was hat es nun mit diesem operativen Standpunkt im Hinblick auf die Didaktik auf sich? Aus Piagets Theorie kennt man eine Auffassung des „Operativen“, die an die zwei folgenden Annahmen anknüpft: (1) die Abkunft begrifflichen Denkens von Handlungen (Operationen) durch deren schrittweise Verinnerlichung; (2) die Organisation der verinnerlichten Handlungen in einem flexiblen Gesamtsystem (Gruppierung). – Auch Dingler hat immer wieder betont, dass Begriffe und theoretisches Denken nur im Zusammenhang mit praktischem Handeln denkbar und entwickelbar sind. Ein Unterschied entsteht aber dadurch, dass es nun um konstruktible (interpretierende), nicht jedoch um faktische Genesen geht. Denken und Handeln in faktischer Genese unterliegen nach Piaget einem *Kausalnexus*, der in seiner Lehre von der Konvergenz zum Gleichgewicht („Äquilibrationstheorie“) untersucht wird. In konstruktibler Genese tritt an dessen Stelle aber ein *Finalnexus*, innerhalb dessen Operationen vor allem Mittel zur Erreichung bestimmter Zwecke sind. Dementsprechend könnte ein in Anlehnung an Dingler formuliertes *Prinzip der operativen Begriffsbildung* (in der Geometrie) folgendermaßen lauten:

> *Geometrische Begriffe sind operativ zu bilden, d. h.: von bestimmten Zwecken ausgehend werden Normen zur Herstellung von Formen entwickelt, die jene Zwecke erfüllen. Die Normen, meist Homogenitätsforderungen, werden in Handlungsvorschriften zu ih-*

rer exhaustiven Realisierung umgesetzt und sind damit inhaltliche Grundlage der ihnen entsprechenden Begriffe.

Zweifellos ist die Herausbildung geometrischer Begriffe (Ideen) nichts, was sich durch Hinweis auf eine einzige Art von psychischem Vermögen oder von Erkenntnisprozessen angemessen verstehen ließe. Unter den wichtigeren Bedingungen der Begriffsgenese möchte ich aber dem operativen Standpunkt gemäß diejenigen hervorheben, die menschlichen Individuen Anlaß zu zielgerichtetem Handeln geben. Ich deute dies zum weiteren Male am Beispiel des Ebenenbegriffs an. Bedeutsam bei der Aneignung dieser Idee ist der Umstand, dass die meisten und wichtigsten Realisate ebener Flächen von Menschen hergestellt sind. Mindestens ebenso wichtig wie bloß anschaulich illustrierende Beispiele („stille Wasseroberfläche" und ähnliches), wahrscheinlich aber wesentlich aufschlussreicher sind Überlegungen, die sich an Fragen wie z. B. die folgenden anknüpfen lassen: Welche Oberfläche soll ein Feld zwecks optimaler Bestellung haben? Wie muss die Eßstatt beschaffen sein, damit Gegenstände auf ihr nicht kippen? Wie muss ein Gerät aussehen, in dem man sein Spiegelbild unverzerrt sehen kann?

Ich möchte nun die didaktische Funktion des soweit skizzierten operativen Ansatzes etwas näher umreißen. Dazu sage ich zunächst kurz, was er nicht leisten soll, und behandele daran anschließend ausführlicher seine möglichen und wünschenswerten Auswirkungen auf die Didaktik sowie den Unterricht der Geometrie und die Art und Weise, diesen in Gang zu bringen.

Folgendes soll der operative Ansatz *nicht* leisten: Neue geometrische Inhalte in den Unterricht einführen; die Geometrie an der Schule auf ein bestimmtes Axiomensystem festlegen; eine lückenlose Geometriegenese liefern, die den herkömmlichen Geometrieunterricht vollständig ablöst.

Demgegenüber möchte ich die didaktische Funktion des operativen Ansatzes in fünf Bereiche zergliedern:

1. Realitätsverbundenheit
2. Zentrale Ideen
3. Fächerintegration
4. Lernziele
5. Organisationsaufgaben

Der Charakter und der Stellenwert dieser Teilfunktionen wird weiterhin dadurch verdeutlicht, dass man sich das Eingreifen des operativen Ansatzes in *drei Stadien* unterteilt denkt: (I) Situationen, Phänomene; (II) Begriffe, Anwendungen; (III) Beweise, Rechtfertigungen. – Diese Stadien umschreiben gewisse Bereiche des Mathematikunterrichts, die allerdings nicht immer scharf voneinander zu trennen sind. Die Einteilung ist daher nur heuristischer Natur; sie soll helfen, gewisse Schwerpunkte beim Einsatz operativer Aspekte zu markieren, und zwar angenähert bezogen auf die drei Schulstufen.[11] Ich erläutere nun der Reihe nach die oben genannten fünf Teilfunktionen und beziehe mich dabei, je nach Bedarf, auf das angedeutete Drei-Stadien-Schema.

Zu 1. – Seit jeher gibt es in der Geometrie eine gewisse Tendenz zur Ablösung von der Wirklichkeit und zu selbständiger Theorieausbildung. Dem versucht Dingler einen Entwicklungsgang entgegenzusetzen, »in dem dessen Zusammenhang mit der Realen unmittelbar gegeben ist«.[12] Ein solcher Versuch dient nicht nur dem metatheoretischen Verständnis der Geometrie, er dürfte auch für den Erwerb geometrischen Wissens und Denkens von beträchtlichem Nutzen sein, und das letztere ist hier natürlich die Hauptsache.

Um die Realitätsverbundenheit der Geometrie zu gewährleisten, wird immer wieder und sicherlich mit Recht auf das anschauende Erfassen räumlicher Strukturen zurückgegriffen. Vom operativen Standpunkt aus ist dieses Verfahren aber noch zu erweitern und zu vertiefen, indem man nach und nach bewusst macht, dass die intuitiv erfasste Wirklichkeit der geometrischen Formen *zu großen Teilen eine vom Menschen planmäßig hergestellte Gegenstandswelt* bildet. Das gilt in hohem Maße für den Bereich der Umwelterfahrung und der alltäglichen Gebrauchsobjekte. Hier sind die geometrischen Phänomene zum größten und wichtigsten Teil bereits Ergebnisse von Handlungen, die durch Anforderungen in bestimmten *Situationen* veranlasst wurden (Stadium I). Realitätsverbundenheit im Sinne des operativen Ansatzes bedeutet also nicht nur, dass wir unsere Theorien der Wirklichkeit anpassen (ideelle Exhaustion). Im selben Maße und gerade in der Geometrie schaffen wir umgekehrt zu geometrischen Ideen durch gedankliche und manuelle Operationen erst die Domäne ihrer unmittelbaren Anwendung (reelle Exhaustion). Wohl nur beides zusammen kann Einsichten in der Frage fördern, weshalb Geometrie und Realität so gut zueinander „passen“. Das mündet nicht in einen vermeintlichen „Idealismus“ oder in „Willensmetaphysik“; vielmehr wird so (im Unterschied

[11] Eine genauere Kennzeichnung der erwähnten Stadien, insbesondere vor dem Hintergrund konkreter Beispiele, ist dem Aufsatz von P. Bender zu entnehmen: Umwelterschließung im Geometrieunterricht durch operative Begriffsbildung, *Der Mathematikunterricht* Jg. 24 (1978), Heft 5, S. 25-87.
[12] *Grundlagen der Geometrie*, S. 5.

zu den Spielarten der sogenannten Widerspiegelungslehre) erst recht die vorrangige Rolle der Realität sichtbar, insofern nämlich die theoretischen Ideen zwischen realen Anforderungen sowie Bedürfnissen auf der einen und den sie beantwortenden zielgerichteten Operationen auf der anderen Seite vermitteln.

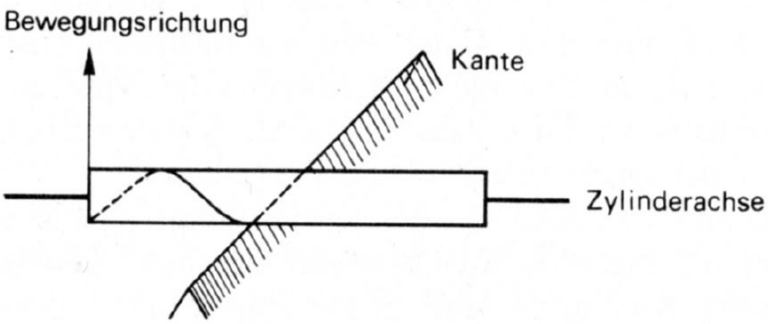
Bevor ich den Prozess dieser Vermittlung wenigstens an einer wichtigen Gruppe von Beispielen illustriere, nämlich den Formen mit innerlich homogenen Oberflächen(teilen), sei allgemein bemerkt: Es ist zu beachten, dass in der Regel *die funktionale Forderung des Passens von Oberflächenstücken* Ausmaß und Art der Homogenität bestimmt. In vielen Fällen geht es insbesondere um das *Passen bei bestimmten Bewegungen*. Während des ersten Stadiums kommt es dabei vor allem darauf an, mit Homogenitäten behaftete Phänomene zu entdecken, die sie bedingenden Situationen zu erfassen und damit die den jeweiligen Zwecken entsprechenden geometrischen Ideen herauszuarbeiten. Im zweiten Stadium sollte die begriffliche Seite dieser Vorgänge stärker hervortreten, insbesondere die vielfältigen Aspekte zielgerichteten Modellierens (konstruktives Zeichnen, handwerkliches Hantieren u. a. mehr). Schließlich bleiben nach längst vollzogener Begriffsbildung noch einige Möglichkeiten auf deduktivem Niveau: die Ausnutzung von Homogenitäten (nicht nur in Form von Symmetriebetrachtungen) bei Beweisen sowie die Rechtfertigung von Axiomen aufgrund von Homogenitätsforderungen an die geometrischen Grundbegriffe.

Zu (innerlich) homogenen Formen (Ebene, Kugel, Zylinder) lassen sich eine Fülle von Phänomenen als Beispiele beibringen. Ebene Flächen finden sich an zahllosen Gebrauchsgegenständen oder Teilen der Umwelt: an Tischplatten, Spiegeln, Wänden, Büchern, Feldern, Straßen, usw. Jedes dieser Beispiele gehört zu einer bestimmten Umweltsituation und hat seine eigene Funktionalität. Aufschlussreich ist in vielen Fällen der jeweilige Bewegungsaspekt. Weshalb sind Tische, Böden, Straßen und Felder eben, oder besser: was ist die charakteristische Aufgabe dieser Formen? Auf Tischen und Böden etwa will man an allen Stellen Objekte plazieren können, die selbst eine ebene Unterseite haben. Überdies sollen sie innerhalb der Unterlagenfläche frei in jede Richtung verschiebbar sein. Hieraus entsteht die Forderung nach durchgehender Homogenität (Ununterscheidbarkeit der Flächenstellen). Eine solche Homogenität weist auch die Oberfläche einer Kugel auf. Es ist aber bemerkenswert, dass es vergleichsweise wenige Beispiele gibt, in denen aus der daraus resultierenden freien Beweglichkeit der Kugel praktischer Nutzen zu ziehen ist. Ich nenne hier bloß das Kugellager, in dem die volle Homogenität der Kugel ausgenutzt wird, sowie das Kugelgelenk etwa eines Fotostativs, bei dem es darauf ankommt, freie Beweglichkeit des aufgesetzten Apparats für einen möglichst großen Raumwinkel zu erreichen. Andere Beispiele entstammen zumeist dem Bereich von Spiel und Sport, etwa Bowling, Billard, Tischtennis oder Prellball, bei denen sämtlich relativ gute Realisate von Kugeln aus verschiedenen Materialien benötigt werden, um die gewünschten Beweglichkeitseigenschaften zu erzielen.

Für viele praktische Zwecke und technische Anwendungen im engeren Sinne bedarf es statt einer völlig freien einer nur *eingeschränkten Beweglichkeit* (meist Beweglichkeit eines Körpers in seinem Lager). Wenn man einmal die Phänomene unter diesem Aspekt sichtet, so zeigt sich alsbald die universelle Verwendbarkeit zylindrischer und aus diesen abgeleiteter Formen. Hauptbeispiel sind die Funktionsweisen „Walze“ (Rad, Dampfwalze, Nudelrolle, Wäschemangel, Seismograph sowie allgemein alle Rollenschreibgeräte, usw.) und „Kolben“ (Dampfkolben, Pumpen, Paßstifte, Bohrer, u. a. mehr). Die Walzenfunktion des Zylinders beruht auf seiner Beweglichkeit um seine Achse entlang eines Kreises, seine Kolbenfunktion hingegen auf der Beweglichkeit längs seiner Achse und der zu ihr parallelen Mantellinien. Der Zylinder ist also auf zwei verschiedene Weisen homogen, was ihm eine Mittelstellung zwischen Ebene und Kugel verleiht. In seinem Lager gestattet er nur Bewegungen in Richtung seiner Achse oder Drehungen in dazu senkrechter Ebene, und auf dieser eingeschränkten Beweglichkeit beruht seine hervorragende technische und praktische Bedeutung.

Nebenbei sei in der Litfaßsäule ein Phänomen erwähnt, an dem sich ohne Rücksichtnahme auf Beweglichkeitsaspekte die innere Homogenität der Zylinderfläche auf bemerkenswert einfache Weise aus den angestrebten funktionellen Eigenschaften herauspräparieren lässt. Man fingiere nur einmal den Fall rechteckiger Plakatsäulen. Solches Fingieren alternativer Fälle ist – das sei nebenbei zur Unterrichtsmethodik bemerkt – oftmals ein wirkungsvoller Kunstgriff zur Verdeutlichung vorgegebener Sachverhältnisse.

Ich komme nun noch auf das *Beispiel der Schraubenlinie* zu sprechen, um anzudeuten, wie man sich eine sachliche und begriffliche Vertiefung des operativen Geometrietreibens in Stadium II und III vorzustellen hat. Phänomene aus Stadium I gibt es dazu offenbar in unerschöpflicher Fülle: angefangen von Schrauben und Schraubverschlüssen, Korkenziehern, Förderschnecken oder Propellerpumpen bis hin zur Wendeltreppe. Halten wir uns wieder an den Aspekt der Bewegung. Praktisch und technisch bedeutsam ist hier die allgemeine Aufgabe, eine Rotationsbewegung in eine Translationsbewegung umzusetzen oder umgekehrt. Eine Lösung dieser Aufgabe stellt der Zylinder in Walzenfunktion dar (Rad, evtl. mit Antriebriemen, Mühlrad, usw.). Hierbei liegt die Translationsrichtung in der Rotationsebene. Wenn es aber darum geht, dass die Translationsrichtung senkrecht zur Rotationsebene steht, so muss zusätzlich die Kolbenfunktion des Zylinders (und damit die zweite ihm eigene Homogenität) ausgenutzt werden. Die Aufgabe lautet dann etwa so: In einen massiven Zylinder ist eine Rille zu ritzen, längs welcher der Zylinder sich bei Drehung in Achsenrichtung (und damit senkrecht zur Drehebene) bewegt. – Das führt auf die folgende kinematisch höchst einfache Erzeugung der Schraubenlinie: Man rolle einen Zylinder über eine ebene Fläche und markiere dabei auf seinem Mantel die Spur einer scharfen (geraden) Kante (s. Figur 2).



Figur 2

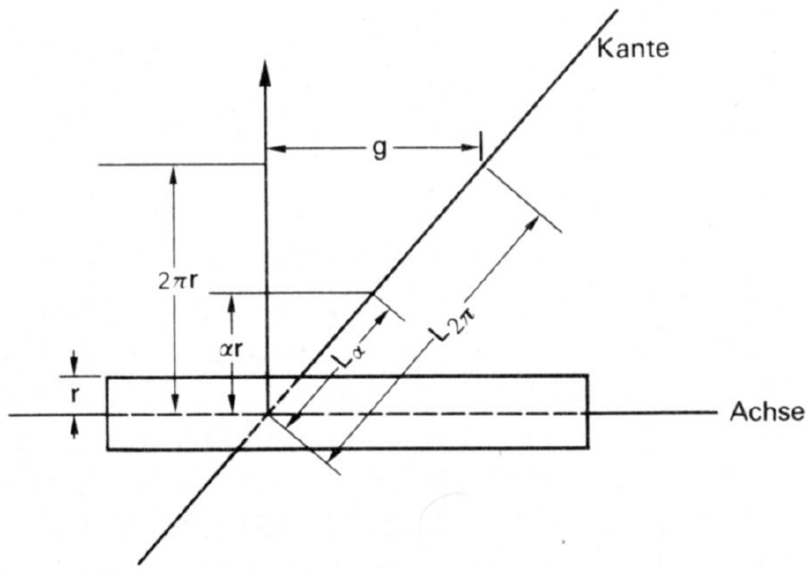
Steht die Kante senkrecht zur Zylinderachse, so entsteht ein Kreis; wenn die Kante nicht parallel zur Zylinderachse liegt: eine Schraubenlinie. Daraus wird sofort ersichtlich, dass es sich bei der Schraubenlinie um ein hochgradig homogenes Gebilde handeln muss, da im Prinzip nur gerade Kanten (Ebenenschnitte) und ein Zylindermantel zu ihrer Erzeugung genügen. Die funktionellen Anforderungen an Beweglichkeit führen uns aber nicht nur zu einer kinematisch höchst durchsichtigen Erzeugung der Schraubenlinie. Das Verfahren erlaubt auch sofort eine völlig elementare geometrische Bestimmung der Schraubenlinienlänge. In Lehrbüchern der Analysis wird diese Aufgabe üblicherweise im Ausgang von einer Parametrisierung

$$\phi(t) = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t, \frac{g}{2\pi} t)$$

durch Berechnung des Integrals

$$L_\alpha = \int_0^\alpha \| \phi'(t) \| \, dt$$

behandelt. Dabei ist r der Radius, g die Ganghöhe der Schraubenlinie sowie α der (im Bogenmaß angegebene) Rotationswinkel zwischen den Enden des zu rektifizierenden Linienstücks. – Tatsächlich wird hier mit Kanonen auf Spatzen geschossen. Hält man sich nur an die kinematische Erzeugung der Schraubenlinie, so leuchtet zunächst die Bedeutung der Ganghöhe ein: Sie ist der Abstand zweier Linienpunkte, von denen der erste nach genau einer Umdrehung des Zylinders in den zweiten überführt wird.



Figur 3

Um L_α zu ermitteln, hat man dann nur noch den ersten Strahlensatz und anschließend den pythagoreischen Lehrsatz anzuwenden (s. Figur 3):

$$\frac{L_\alpha}{L_{2\pi}} = \frac{\alpha r}{2\pi r}, \quad \text{also} \quad L_\alpha = \frac{\alpha}{2\pi} L_{2\pi}$$

und ferner

$$L_{2\pi}^2 = 4\pi^2 r^2 + g^2,$$

woraus sofort die bekannte Formel

$$L_\alpha = \alpha \sqrt{r^2 + \left(\frac{g}{2\pi}\right)^2}$$

resultiert. (Es sei angemerkt, dass man im Prinzip sogar ohne Kenntnis der Kreisumfangsformel auskommen könnte, falls man anstelle von $2\pi r$ eine unbekannte Funktion U_r einsetzen würde. Man beachte ferner den Fall $g = 0$, wo

L_α nichts anderes darstellt als die Länge eines Kreisbogens über dem Winkel α.)

Zu 2. – Die Forderung, einem Lernenden beim Erarbeiten eines Wissensgebietes nicht Nebensächliches, sondern Wesentliches, nicht das Rankenwerk, sondern den Kern der Sache zu vermitteln, darf man wohl als einen pädagogischen Gemeinplatz betrachten. Allerdings handelt es sich um einen Gemeinplatz, der – obwohl unbestritten – merkwürdigerweise gar nicht in gebührendem Ausmaß beherzigt zu werden pflegt. Dabei kann er ungewöhnlich hilfreich sein, sofern er uns zwingt, nach Ideen zu fragen, in denen sich ein Wissensgebiet, eine Methode, eine Denkweise etc. konzentrieren. Hierbei sollte man vielleicht weniger an Ideen denken, die fundamental in dem Sinne sind, den man für Grundbegriffe wie „Menge" oder für Axiome wie das der „vollständigen Induktion" zu beanspruchen pflegt. Eher gemeint sind Konzepte, die an höherer Stelle die Fäden im Netz mathematischer Begriffe und Methoden verknoten. Beispiele dafür scheinen mir die Ideen der *Symmetrie* und der *Approximation* zu sein. Diese Konzepte sind gebietsübergreifend und kennzeichnen bis zu einem gewissen Grade mathematisches Denken überhaupt. Andererseits sind sie im Zusammenhang mit der Geometrie zu nennen, weil sie dort, unter anderem vermöge des operativen Ansatzes, eine besondere Bedeutung entfalten.

Unbestritten ist die hervorragende Rolle der Symmetrie beim Lernen von Geometrie. Sofern es sich dabei um einen abbildungstheoretischen Symmetriebegriff handelt, lässt sich vom operativen Standpunkt aus noch die zusätzliche Frage aufwerfen, durch welche vortheoretischen Bedeutungen des Abbildungsbegriffs die Anfangsstadien der Symmetrieerkenntnis bestimmt werden können. Eine (wohl kaum die einzige) Möglichkeit liegt in den *realen räumlichen Bewegungen* von Gegenständen. Solche Bewegungen sind zwar keine Abbildungen im mathematischen Sinne, sie liefern aber auf einer vorläufigen Lernstufe den operativen Gehalt des Abbildungsbegriffs. Dem entsprechend erscheint auf dieser Stufe und unter diesem Aspekt die Symmetrie von Gebilden als deren *Homogenität*. Ehe die Symmetrien der Ebene abbildungsgeometrisch zu begreifen sind, werden sie in konkreten Situationen als Homogenität erfahren, z. B. beim Zusammenklappen eines Buchs, beim Drehen und Verschieben von Tellern auf einer Tischplatte, beim Hineinsehen in einen Spiegel von verschiedenen Raumstellen aus und dgl. mehr. Dabei liegt der Sinn der Homogenität zumeist in Beweglichkeitseigenschaften, von denen schon die Rede war, oder auch in Extremaleigenschaften der homogenen Gebilde (Gerade als Kürzeste, Ebene als Fläche minimaler Krümmung, usw.).

Zur Extremalität erspare ich mir hier ins Einzelne gehende Bemerkungen; bei ihr handelt es sich ja im Übrigen ebenfalls um eine Erscheinung, die auch außerhalb der Geometrie einen leicht durchschaubaren und oft herausgestellten operativen Sinn besitzt. Überall in Alltag und Wissenschaft haben wir es mit Aufgabenstellungen zu tun, wonach ein bestimmter Vorgang möglichst schnell verrichtet werden soll, ein maximaler Nutzen zu erzielen ist, mit dem geringsten Aufwand an Material und Kosten gearbeitet werden soll, usw. Gebiete wie Spieltheorie oder Variationsrechnung legen davon beredtes Zeugnis ab.

Zwischen der an zweiter Stelle genannten zentralen Idee der Approximation und dem Begriff der *Exhaustion* besteht ein ähnliches Verhältnis wie zwischen Symmetrie und Homogenität. Approximation im mathematischen Sinne spielt sich ganz auf ideellem Niveau ab, d. h. sie findet zwischen mathematischen Objekten wie Zahlen, Funktionen, Figuren oder Flächen statt. Demgegenüber setzt die Exhaustion bereits *auf vortheoretischer Stufe* ein; sie betrifft damit die Vorgänge des „Mathematisierens“ selbst ebenso wie die Genese mathematischer Begriffe. Beim ideellen Exhaurieren verschaffen wir uns zu vorgegebener Realsituation mathematische Modelle (evtl. in schrittweiser Verfeinerung); beim reellen Exhaurieren erzeugen wir durch Bearbeiten materieller Gegenstände immer besser werdende Realisate vorkonzipierter Ideen. Es ist dieser im Begriff der Exhaustion thematisierte doppelte Wirklichkeitsbezug, in dem wir aus operativer Sicht das Herzstück der Approximationsidee zu erblicken haben, jedenfalls soweit diese sich auf das geometrische Denken bezieht.

Das wird besonders sinnfällig am Beispiel des *Messens*. Nicht allein geometrische Maßbestimmungen im Sinne von Planimetrie und Stereometrie, auch der Vorgang des Messens selbst verdient einen zentralen Platz in einem Mathematikunterricht, der sich angewandte Geometrie und nicht bloß Anwendungsaufgaben angelegen sein lässt. An der Längenmessung, dem methodisch vorrangigen Fall, möchte ich kurz verdeutlichen, worauf es dabei aus operativer Sicht besonders ankommt. Zunächst sind Sinn und Zweck des Messens bewusst zu machen. Hier ist nicht der Rahmen, dies ausführlich zu erörtern. Ein Aspekt erscheint mir jedoch zumindest erwähnenswert, zumal er nicht selten übersehen wird: Wenn es nicht gerade um numerische Feststellungen für eine physikalische Theorie geht, kommt es beim Messvorgang nicht selten weniger auf das Messergebnis selbst als vielmehr darauf an, Längenverhältnisse zu ermitteln oder Erkenntnisse über das *Passen* von Einzelteilen zu gewinnen. P. Janich beschreibt dies treffend so: »Man vergegenwärtige sich an einfachen Beispielen aus Handwerk und Technik, wozu jemand etwas mißt.

Ein Schreiner mißt nicht etwa, um die Länge einer Tür in Metern aufschreiben zu können, sondern damit die Tür in den Türstock oder in einen Schrank paßt. Wenn ein Zimmermann ein Fachwerk baut, so geht es ihm um Reproduktion von Längengleichheit oder von Längenverhältnissen an Einzelteilen des Fachwerks, oder aber von Winkeln, weil nachher einige Balken „im Lot" und andere „im Wasser" (Wasserwaage) stehen müssen.«[13] Bei diesen Vorgängen macht man Gebrauch davon, dass der Maßstab sich nicht verändert, wenn man ihn von einer Lage in eine andere befördert. In die Sprache der Geometrie übersetzt bedeutet dies: Ein auf dem Maßstab markiertes Punktepaar wird bei allen Bewegungen des Maßstabs in ein zu ihm kongruentes (deckungsgleiches) Punktepaar überführt. Damit haben wir die Idee des *starren Körpers* gefasst, und zwar unter Verwendung des Begriffs der *Kongruenz* (von Punktepaaren oder Strecken). Bekanntlich sind beide Konzepte in einem bestimmten Sinn austauschbar; man braucht also nur eines von ihnen als ideative Norm zu formulieren, um die Längenmessung im operativen Sinn zu begründen. Dies bringt (hier nicht zu schildernde) Schwierigkeiten mit sich, die sich aber von didaktischer, genauer: genetischer Warte aus vermeiden lassen, wenn man von vorneherein das exhaustive Vorgehen beim Messvorgang herausstellt.

Das sieht dann (mit gewissen Vereinfachungen) folgendermaßen aus: Wer die Länge einer Kante messen und damit reproduzieren will, verwendet dazu einen Maßstab mit geeigneten Starrheitseigenschaften. Auf dieser Stufe hat der Starrheitsbegriff noch keineswegs den Status einer geometrischen Idee, ist also insbesondere noch nicht unter Rückgriff auf Streckenkongruenz präzisiert; das geschieht alles erst später, wenn die Geometrie als Theorie schon ein gewisses Stück weit entwickelt wurde. Zunächst werden starre Körper nach relativ vagen Kriterien ausgesucht, z. B. wird man beobachten (nicht messen!), ob die Körper sich beim Transport oder bei Druckwirkung „verändern" oder nicht. Was nun den für das Messen grundlegenden Begriff der Kongruenz angeht, so ist der wohl formal präzisiert in bezug auf den starren Körper, inhaltlich dadurch aber nur so gut bestimmt wie dieser starr ist. Die Konsequenz liegt auf der Hand: Die jeweils in einer bestimmten Situation gewünschte Zuverlässigkeit und Genauigkeit einer Messung führt zu gewissen Mindestanforderungen an die Deformationsfreiheit der zu verwendenden Maßstäbe. Will man insbesondere deren Skaleneinteilung verfeinern, so hat man sie an „hinreichend starren" Körpern anzubringen. Die Feinheit der Strichmarken verlangt aber auch „hinreichend scharfe" Kanten (oder Ecken) und damit eine

[13] 1976, loc. cit., S. 90.

Mindestgüte der bis dahin hergestellten Ebenenrealisate. Dingler sieht in einem solchen Exhaustionsschritt den *Übergang von einer Genauigkeitsschicht zu einer höheren*. Haben wir nämlich erst einmal provisorische Maßstäbe (und Skalierungen) nullter Stufe, so können wir weitere Maßstabkörper nicht nur durch bloßes Beobachten, sondern auch aufgrund von Messungen mittels der Maßstäbe einer früheren Genauigkeitsschicht auswählen. Dingler hielt diese Exhaustion in dem Sinn für konvergent, dass wir mit ihr im Prinzip beliebig hohe Messgenauigkeiten erzielen können. Für die Praxis selbst und für ein erstes Verständnis des exhaustiven Vorgehens genügt aber die empirisch erhärtete Abschwächung dieser Annahme, in der das Wort „beliebig“ ersetzt wird durch „hinreichend“ (für den in der jeweiligen Situation zu erfüllenden praktischen Zweck).

Nach dem Gesagten kann man nun die gewöhnliche Approximationsmethode bei geometrischen Maßbestimmungen im Lichte der operativ rekonstruierten Messpraxis verdeutlichen. Als Beispiel diene die Aufgabe, bei vorher festgelegter Maßeinheit die Diagonale eines Einheitsquadrats auszumessen. Es dürfte kaum umstritten sein, dass diese Aufgabe nicht durch eine sogleich ansetzende numerische Rechnung sinnvoll wird. Dabei würde unter anderem vermutlich die Gelegenheit vertan, Inkommensurabilität und Approximationsidee in ihrem hier wesentlichen Zusammenhang zu erarbeiten. Vielmehr führt gerade der Versuch, die Diagonalenlänge *praktisch* und mittels einer erst noch herzustellenden Skalierung der Einheitsstrecke zu bestimmen, in natürlicher Weise und geradezu zwangsläufig zu einem Annäherungsverfahren. Insofern dabei für die Erhöhung der Messgenauigkeit möglichst spitze Zeichenstifte verwendet werden müssen, handelt es sich also um eine reelle Exhaustion. Sie übernimmt hier gleichsam die Rolle eines operativen Vorbildes für die danach auf ideellem Niveau durchzuführende Approximation. Nicht minder wichtig als solche Entsprechungen sind die Unterschiede zwischen den Niveaus. Ein Beispiel dafür liefert die Frage der Kommensurabilität. Sicherlich stellt man sich in der Praxis die Frage, ob der Endpunkt der Diagonale einmal mit einer Strichmarke (bei mindestens einer n-adischen Skalierung) zusammenfällt. Soweit hier reale Strichmarken gemeint sind, kann die Antwort hierauf nur „ja“ lauten. Stellt man aber dieselbe Frage hinsichtlich der Approximation mit Strecken rationaler Länge, wie sie ja bei einer n-adischen Unterteilung ausschließlich entstehen, so steckt in der nun verneinenden Antwort gerade das irrationale Verhältnis von Seite und Diagonale. Dies ist mathematisch höchst bedeutsam, für die Messpraxis jedoch nicht von unmittelbarer Relevanz. Wie und wieweit ein Annäherungsverfahren anzulegen bzw. durchzuführen ist, steht eben nicht an sich fest, sondern wird seinerseits von bestimmten Zielvorstellungen und Zwecken reguliert. Diese müssen aus der jeweiligen Situation heraus entwickelt und bewusst gemacht werden. Als weiteres Beispiel dazu nehme ich die Annäherung an die Kugelform: Wer eine reale Kugelkalotte herstellen will, betreibt natürlich reelle Exhaustion, etwa in Gestalt eines Abschleifvorgangs. Geht es aber beispielsweise um die Inhaltsbestimmung der Kugeloberfläche, so erfolgt eine angemessene „Exhaustion“ (nämlich Approximation) über reguläre Polyeder, die bei einer reellen Exhaustion von Vollkugeln gewöhnlich keine Rolle spielen.

Zu 3, 4, 5. – Hinsichtlich der übrigen didaktischen Funktionen (Fächerintegration, Lernziele, Organisationsaufgaben) möchte ich mich auf einige summarische Andeutungen beschränken.

Zunächst zur *fächerübergreifenden Wirkung* des operativen Ansatzes. Für ihn bieten sich vielfältige Möglichkeiten: im ersten Stadium vor allem in Zusammenhang mit Themen des Sachunterrichts, insbesondere bei der projektbezogenen Untersuchung von Homogenitäten (Sport und Spiel, Haushaltsgegenstände, Eisenbahn, etc.). Später dürften sich die sehr engen Beziehungen zum Werken, zu textilem Gestalten sowie zur Technik und Architektur als fruchtbar erweisen (vorwiegend in Stadium II). Die Verbindungen zu einigen mehr grundlagenbetonten physikalischen Problemen und Begriffsbildungen (aus Kinematik, Mechanik oder Relativitätstheorie) kommen, wenn überhaupt, wohl nur für das dritte Stadium in Frage.

Was die *Lernziele* angeht, die durch das Eingreifen des operativen Ansatzes gefördert werden, so sind hier zunächst allgemeinere Lernziele zu nennen, wie sie H. Winter ausführlich diskutiert hat.[14] Von diesen scheinen mir in operativer Geometriegenese besonders das erste betroffen (»Der Unterricht soll dem Schüler Möglichkeiten geben, schöpferisch tätig zu sein«) sowie das dritte (»Der Unterricht soll dem Schüler Möglichkeiten geben, die praktische Nutzbarkeit der Mathematik zu erfahren«). Dies alles wird deutlicher, wenn man sich ansieht, wie entsprechende Zielvorstellungen geometriespezifisch formuliert werden können, etwa in dem folgenden allgemeinen Lernziel[15]:

Der Geometrieunterricht soll den Schüler befähigen, den wirklichen Raum

[14] Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht? *Zbl. f. Didaktik d. Math.* 7 (1975), S. 106-116.

[15] Zur genaueren Diskussion und Differenzierung des Zieles vgl. den in Fußnote 11 zitierten Aufsatz von P. Bender.

zu strukturieren und die Nutzbarkeit dieser Struktur zu erforschen.

Zur Verwirklichung einer derartigen Zielsetzung bedarf es natürlich gewisser Aufbauprinzipien für den Geometrieunterricht, in die Überlegungen darüber einfließen, wie die leitenden Ziele optimal (in welchem Sinne auch immer) erreicht werden können. Zwei solche Aufbauprinzipien nennt Winter für den Geometrieunterricht der Grundschule[16] (die aber auf andere Schulstufen übertragbar sind). Danach soll der Unterricht 1) sich um zentrale Ideen gruppieren und 2) integrativ organisiert sein. Nach allem, was bisher zu diesen beiden Funktionsprinzipien ausgeführt wurde, lässt sich wohl behaupten, dass sie dem eben formulierten Hauptziel angemessen sind: Gruppierung um zentrale Ideen eignet sich zur Ausbildung mathematischer (hier: geometrischer) Denkweisen; integrative Organisation fördert die Strukturierung der räumlichen Wirklichkeit.

Eine andere Art von Aufbauprinzipien hat Vollrath entwickelt.[17] Sie liefern hier ein Beispiel für mögliche durch den operativen Ansatz zu bewältigende *Organisationsaufgaben*. Vollrath geht es unter anderem um eine Überwindung des herkömmlichen Verfahrens, den Unterricht hauptsächlich an einer mathematischen Hintergrundtheorie (Topologie, Kongruenzgeometrie, Lineare Algebra, usw.) auszurichten. Dazu entwirft er gewisse »Sichtweisen von Geometrie« (S. 3), die sich bei genauerer Betrachtung zwanglos an den operativen Standpunkt anschließen lassen. Das gilt besonders, doch nicht allein für die genetisierende, die formenkundliche sowie die handlungsorientierte Sichtweise von Geometrie; es gilt ebenfalls – wenn vielleicht auch etwas abgeschwächter – für die übrigen Sichtweisen: eine formaldeduktive, eine an Problemlösestrategien orientierte, eine historische und eine physikalisch-raumtheoretische. – Mit der Erörterung der einzelnen Sichtweisen ist aber die Frage noch zu beantworten, wann welche eingesetzt und wie sie miteinander kombiniert werden sollen. Bei einem bloß additiven Nebeneinander würden die diesem Konzept innewohnenden Möglichkeiten keineswegs genügend ausgeschöpft. Es bedarf also eines eigenen Leitfadens, um die von Vollrath zusammengestellten Sichtweisen zu organisieren, d. h. zu einem organischen Zusammenwirken zu verknüpfen. Zweifellos kann es für eine solche Synthese nicht bloß eine einzige Lösung, ein Patentrezept geben. Ein brauchbares Verfahren ergibt sich aber aus der operativ interpretierenden Genese der Geometrie.[18] Dieser Ansatz ist

[16] Was soll Geometrie in der Grundschule? *Zbl. f. Didaktik d. Math.* 8 (1976), S. 14-18.

[17] H. J. Vollrath: Geometrie im Mathematikunterricht – eine Analyse neuerer Entwicklungen. *Schriftenreihe des IDM* 3, Bielefeld 1974, S. 1-22.

[18] Für den Nachweis dieser Behauptung verweise ich auf die in Fußnote 2 erwähnte Monografie

nicht nur mit Vollraths Aufbauprinzipien verträglich, er liefert auch eine Plattform, von der aus man ein umfassendes Panorama von Geometrie dann durch die wichtigsten jener Sichtweisen tatsächlich in den Blick bekommt.

POSTSKRIPTUM

In OGG[19] hatten P. Bender und ich eine didaktische Re-Interpretation von Dinglers operativen *Grundlagen der Geometrie* sowie von Lorenzens 'Protogeometrie' entwickelt, darüberhinaus aber auch (in den Kapiteln 7 und 10 von OGG) eingehende Untersuchungen zur mathematischen Durchführbarkeit der Ansätze angestellt. Das Ergebnis dieser metatheoretischen Analysen war überwiegend negativ. Zu ähnlich skeptischen Resultaten gelangte später zunächst auch L. Amiras in seiner Dissertation.[20] Auszugsweise hat Amiras seine Kritik auch in Zeitschriftenartikeln über Dingler[21] und den aus der 'Erlanger Schule' herkommenden P. Janich[22] formuliert. Die bei Dingler aufgezeigten Defizite lassen sich seiner Ansicht nach durch »eine umsichtige und gründliche Analyse und Klärung der geometrischen Redepraxis und des Bezuges der geometrischen Theorie auf Figuren mit den Mitteln moderner Sprachphilosophie und Logik« abmildern. Dies soll eine 'vorgeometrische' Theorie liefern und als Vorbereitung auf eine diesmal nicht »vorschnell« angestrebte »Rekonstruktion von Axiomensystemen« dienen. Janichs »Inanspruchnahme von Homogenitätsprinzipien« wird (eigentlich wenig überraschend nach OGG) abgelehnt, hingegen sein Herangehen an »die erste wichtige Aufgabe des Aufbaus der Geometrie als Theorie von Figuren an Körpern« durchaus zutreffend als »mutig« begrüßt. Mit ähnlichem Mut hat Amiras dann die seines Erachtens noch fehlende »überzeugende Begründungskonzeption, die vor allem den methodischen Aufbau der Begriffsbildung betrifft« als »funktional-operativen« Rekonstruktionsansatz entwickelt und in seiner Habilitationsschrift[23] vorgelegt. Die optimistische Einschätzung des Autors hinsichtlich dessen, was er mit seiner Revision des protogeometrischen Programms erreicht hat, spiegelt sich schon darin wider, dass er

---

sowie auf den Übersichtsartikel Bender, P.; Schreiber, A.: The Principle of Operative Concept Formation in Geometry Teaching. *Educational Studies in Mathematics* 11 (1980), S. 59-90.

[19] Abk. f. *Operative Genese der Geometrie*, Wien/Stuttgart 1985

[20] *Protogeometrica*. Systematisch-kritische Untersuchungen zur protophysikalischen Geometriebegründung. Universität Konstanz 2000.

[21] L. Amiras: Zur operativen Grundlegung der Geometrie bei H. Dingler. *Philosophia Naturalis* 39/2 (2002), S. 235-258.

[22] L. Amiras: Über den produktiv-operativen Ansatz zur Begründung der Geometrie in der Protophysik. *Journ. f. General Philosophy of Science* 34 (2003), S. 133-158.

[23] L. Amiras: *Protogeometrie*. Elemente der Grundlagen der Geometrie als Theorie räumlicher Figuren. Habilitationsschrift an der Pädagogischen Hochschule Weingarten, 2006.

die Untersuchung mit einem umfangreichen (mehr als 100 Seiten umfassenden) systematischen Teil beginnt[24], dessen zahlreiche (methodologisch eingehend kommentierte) Definitionen, Theoreme und Beweisskizzen sich explizit auf mathematische und formallogische Argumentationen stützen; erst dann folgen als weitere Teile der Abhandlung historisch-kritische und schließlich didaktische Studien und Entwürfe. Die damit vom Autor (für Teil I) herausgeforderte mathematische Richtigkeitsprüfung erweist freilich seine Begriffsbildungen als fragwürdig und die mit ihnen angestellten Begründungsansätze (Behauptungen!) in ihren wesentlichen Teilen als defizient oder unhaltbar. Zwar klingt das in der Einleitung vorgetragene Ziel eher bescheiden: eine revidierte »Figurentheorie« lediglich in einen »methodischen (nicht logischen) Zusammenhang mit einer passenden Axiomatik der Geometrie zu bringen«. Andererseits soll dann aber doch »eine Terminologie bereitgestellt werden, die eine Interpretation der Grundrelationen Inzidenz, Anordnung und Kongruenz ermöglicht«.[25] Im Einzelnen zeigt sich dann allerdings, dass der Kongruenzbegriff (und damit Längenmessung) aus einer reinen »Praxis des Umgangs mit Figuren« nicht zu gewinnen ist. Der Rückzug auf einen vorgeblich nur „methodischen" Ansatz (anstelle der üblichen logisch-axiomatischen Vorgehensweise beim Aufbau der Geometrie) hilft hier gar nichts, denn das von Amiras entwickelte Begriffsarsenal stipuliert zahlreiche Sachverhalte über Anordnung, Berührung, Passung, Bewegung und Formkonstanz, die – auch und gerade dann, wenn die Überlegungen in sich korrekt wären – von wesentlichen Aussagen einer schon als Theorie vorausgesetzten Geometrie Gebrauch machen müssten. Auch wenn es Amiras erklärtermaßen nicht darauf anlegt, aus seiner figurentheoretischen Terminologie die gewöhnliche (z. B. euklidische) Geometrie logisch herzuleiten, so befreit dies keinesfalls von Beweispflichten, die sich innerhalb des Diskurses über Eigenschaften von Figuren ergeben. – Im Fazit haben wir einen erfreulich ehrgeizigen Neuanlauf zur 'Protogeometrie', der (weniger erfreulich) in ähnlicher Weise wie die früher bekannt gewordenen Begründungsversuche sein Ziel bisher nicht erreicht hat.

---

[24] Umgekehrt zu der in OGG gewählten Reihenfolge, welche die kritische Einsicht zum Ausdruck bringt, dass der Wert der im 20. Jh. betriebenen 'Vorgeometrie'-Forschung sich nicht auf aussichtsreiche operative Axiomatisierungen der Geometrie gründet, sondern vorwiegend – wenn nicht ausschließlich – darin besteht, unser *didaktisches* Verständnis geometrischer Begriffsbildung um wesentliche Facetten zu erweitern. Amiras scheint in der Einleitung zu seiner Habilitationsschrift anzudeuten, dass ihm eine solche »Einschränkung des operativen Ansatzes auf didaktische Zwecke« nicht genügt.

[25] Vgl. Amiras, Habil., S. 3 f.

Rezension[1] : ›Konstruktive Geometrie‹

Eine formentheoretische Begründung der euklidischen Geometrie von R. Inhetveen (B. I. Zürich 1983)

Dass mit dem Titel *Konstruktive Geometrie* nicht die Disziplin gemeint ist, die ein praktischer Geometer dahinter vermuten könnte, darüber belehrt uns der Untertitel. Dass das Wort „Begründung" keinen axiomatischen Aufbau ankündigt, verrät der Zusatz „formentheoretisch". Womit also beschäftigt sich der Autor dieses Buches, wenn nicht mit Konstruktion (im herkömmlichen Sinn) oder mit Deduktion? In der Einleitung wird das Ziel gekennzeichnet: es ist nichts Geringeres als die *Konstitution* der Geometrie als Theorie und Begriffssystem aus einer methodisch schrittweise geläuterten Praxis der technischen Formung. Dieses Programm soll den Zusammenhang klären zwischen mathematischer (axiomatischer) Theorie und außermathematischer (technischer) Praxis, zwischen Geometrie und Wirklichkeit. Damit ist es nicht allein ein Thema für Philosophen der Mathematik oder Grundlagentheoretiker, sondern nicht weniger auch für den Mathematikdidaktiker mit Interesse an genetischen Aspekten der Begriffsbildung (außerhalb kognitionspsychologischer Betrachtungsweisen).

Um Inhetveens Schrift gerecht zu werden, sollte man zunächst ihren geschichtlichen und Forschungskontext zur Kenntnis nehmen. Der Autor ist Mitarbeiter von Paul Lorenzen an der Universität Erlangen-Nürnberg und legt mit seinem Buch den letzten Stand der Begründungsversuche vor, welche die sog. Erlanger Schule um Lorenzen zu einer „Protophysik" des Raumes bzw. der Längenmessung erarbeitet hat. Die methodische Idee hierzu geht zurück auf den deutschen Philosophen Hugo Dingler, der ein Jahrzehnt nach Hilberts *Grundlagen der Geometrie* mit zahlreichen Veröffentlichungen zum Thema „Geometrie und Wirklichkeit" hervortrat. Dabei bewunderte Dingler zwar die

[1] Erschienen in: *Zbl. f. Didaktik d. Math.* 5 (1984), S. 171-173.

Systematiken von Euklid und Hilbert, meinte jedoch, man müsse sie zu einem „epistemologisch optimalen“ Aufbau umstrukturieren. Darunter ist kurz folgendes zu verstehen: Grundbegriffe der Geometrie wie Ebene, Gerade, orthogonal, usw. (sofern sie im System undefiniert bleiben) haben ihren Ursprung in der Praxis des Herstellens. Wir gebrauchen sie zumeist nicht, weil wir sie der Realität abstrahierend entnommen haben, sondern umgekehrt: weil wir sie von praktischen Erfordernissen ausgehend gedanklich entwickeln, um sie dann an körperlichen Gegenständen handwerklich/technisch zu realisieren. Auf diese Weise wird immer mehr Geometrie in die uns umgebende Wirklichkeit hineingetragen, was schließlich erklären mag, warum die entsprechende Theorie am Ende so gut auf die Realität passt. Dingler hat deshalb vorgeschlagen, den Prozess der Gestaltung von Grundformen gleichsam in Prinzipiengewand in den Theorieaufbau mitaufzunehmen, in der Hoffnung, die Axiomatik damit zu einer erkenntnisgenetisch begründeten Disziplin zu machen. Vor allem dachte er dabei an die Idee der Ununterscheidbarkeit (von ihm auch Symmetrie, von Lorenzen später *Homogenität* genannt), die in der Praxis eine hervorragende Rolle spielt.[2] Paradebeispiel ist die Herstellung von Ebenen, deren Stellen durch das gegenseitige Abschleifen dreier Platten untereinander schließlich keine relevanten Unterschiede mehr aufweisen (sog. Dreiplattenverfahren).

Lorenzen hat Dinglers Ansatz aufgegriffen und 1961 in einem inzwischen klassisch zu nennenden Aufsatz[3] mit Hilfe von Formelschemata für die Homogenität konkretisiert. Z. B. drückt ein solches Homogenitätsprinzip für beliebige Stellen S, S' einer Ebene E aus, dass mit dem Bestehen einer Eigenschaft $\mathfrak{A}(E,S)$ immer auch $\mathfrak{A}(E,S')$ gilt. Solche Prinzipien sind als *Normen* anzusehen, die einerseits die Formungspraxis leiten und andererseits auch eine Basis zum Aufbau der eigentlichen Theorie vermitteln. Diese Verbindung von praktisch-zweckgerichtetem Handeln und geometrischer Axiomatik verdient den Namen einer *operativen Begründung*. Allerdings stellte sich im Laufe der Jahre immer mehr heraus, dass mit den Homogenitätsschemata nur schwer zu hantieren war und so kein wirklich überzeugender Ausbau der ursprünglichen Ansätze möglich schien. Wenn man jedoch einmal von diesen Schwierigkeiten absieht, so erlaubt die noch übrig bleibende operative *Interpretation* der Geometrie immerhin noch eine didaktisch bedeutsame inhaltliche Analyse ihrer

[2] H. Dingler: *Die Grundlagen der Geometrie*. Ihre Bedeutung für Philosophie, Mathematik, Physik und Technik. Stuttgart 1933

[3] P. Lorenzen: Das Begründungsproblem der Geometrie als Wissenschaft der räumlichen Ordnung. *Philosophia Naturalis* 4 (1961), S. 415-431

Begriffsbildungen.[4] Vieles spricht dafür, dass in einer didaktischen Auslegung des operativen Ansatzes überhaupt der Kern dieser Philosophie zu erblicken ist.[5]

Eine Wende in der Erlanger Begründungstheorie der Geometrie begann in der Folge eines groß angelegten Artikels von P. Janich[6], dann 1977 mit dem Aufsatz Lorenzens zu einer »konstruktiven Theorie der Formen räumlicher Figuren«.[7] Statt mit den Homogenitätsprinzipien beginnt dieser »formentheoretische« Ansatz mit einer Art Relationentheorie des Passens. Der Grundgedanke ist keineswegs neu und wurde schon 1911 von Dingler selbst angesichts des Dreiplattenverfahrens formuliert: Eine Fläche und ihr Abdruck passen aufeinander; der Abdruck dieses Abdrucks ist eine Kopie der Fläche. Wenn schließlich Kopie und Original wiederum aufeinander passen (wenn also ein Abdruck bereits eine Kopie darstellt), dann muss die Fläche eben sein. – So allgemein gilt dies allerdings nicht, und man muss zur korrekten Durchführung dieser Idee noch Zusätzliches verlangen, z. B. freie Verschiebbarkeit der Flächen aufeinander (oder dgl.). Mit dem Ziel, dabei ganz den Bewegungsbegriff zu vermeiden, hat Lorenzen entsprechende *Neue Grundlagen der Geometrie* skizziert (Mskr. Erlangen, April 1981). Inhetveens »Konstruktive Geometrie« ist der Versuch, dieses Konzept auch in den Einzelheiten, ergänzt durch methodologische und historische Kommentare, durchzuführen. Hatte man übrigens anfangs noch geglaubt, die Homogenität könnte aus der „Formentheorie" abgeleitet werden, so will Inhetveen nun durch seine Arbeit zeigen, »daß man in einer konstruktiven Begründung der Geometrie ganz ohne Homogenitätsprinzipien auskommen kann« (S. 4).

Das Buch enthält eine ausführliche Einleitung, drei Kapitel (I: Protogeometrie; II: Geometrie; III: Historisches), einen Anmerkungsteil und ein Literaturverzeichnis.

---

[4] Bender, P.; Schreiber, A.: The Principle of Operative Concept Formation in Geometry Teaching. *Educational Studies in Mathematics* 11 (1980), S. 59-90; ausführlicher noch die Monografie ders.: *Operative Genese der Geometrie*. Wien; Stuttgart 1985.

[5] A. Schreiber: Die operative Genese der Geometrie nach Hugo Dingler und ihre Bedeutung für den Mathematikunterricht. *Der Mathematikunterricht* Jg. 24 (1978) Heft 5, S. 7-24; Beitrag in diesem Band.

[6] Zur Protophysik des Raumes. In: G. Böhme (Hrsg.): *Protophysik* – Für und wider eine konstruktive Wissenschaftstheorie der Physik, Frankfurt am Main 1976.

[7] Bezeichnenderweise erschienen in: *Zbl. f. Didaktik d. Math.* 9 (1977), S. 95-99; wenig später präsentierte R. Inhetveen: Gedanken zu einer Didaktik der konstruktiven Geometrie, in: M. Ewers (Hrsg.): *Wissenschaftstheorie und Naturwissenschaftsdidaktik*, Bad Salzdetfurth; Hildesheim 1979.

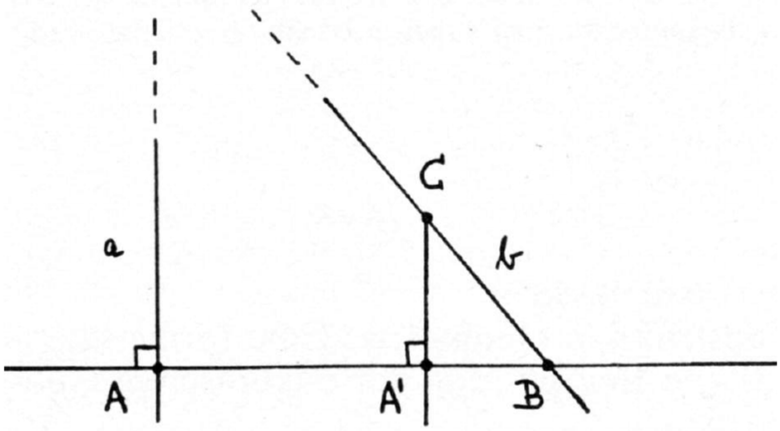
In der Einleitung schildert der Autor kurz den methodologischen Hintergrund seines Vorhabens und verspricht als dessen Ziel »eine neue, normative und zugleich nicht-dezisionistische Antwort auf die Frage nach dem Zusammenhang zwischen Geometrie und Wirklichkeit durch die Ermöglichung einer methodisch gesicherten, d. h. schrittweise und zirkelfrei begründeten Theorie der reproduzierbaren Längenmessung« (S. 9).

Der systematischen Geometrie ist eine Protogeometrie vorgeschaltet. Hier wird zunächst einmal das »lebensweltliche Fundament der Geometrie« aufgezeigt: die praktischen Tätigkeiten des Landvermessens und vor allem des Bauens. Inhetveen verweist auf einige Beispielfälle, in denen es um die »Herstellung von individuellen Passungen« geht, um dann das Berühren und das Passen von Körpern (an Oberflächenstücken) begrifflich zu rekonstruieren. Dies geschieht z. B. durch Aussagen wie die, dass das Berühren b und Passen p als Relationen jeweils total, symmetrisch und schwach-transitiv sind (letztes bedeutet z. B. für p: aus ApB, BpC, CpD folgt ApD). Nach Inhetveen haben wir diese und auch andere protogeometrische Aussagen als »aphairetisch« aufzufassen, was heißen soll: der Form nach Behauptungssätze, der Absicht nach als Normen (und damit Gütekriterien) der Formungstechnik. Flächen (an Körpern), die auf ihre Kopien passen, werden »abdruckstabil« genannt; unter ihnen werden dann »technische Ebenen« ausgesondert (nach einem Kriterium, auf das ich gleich noch zu sprechen komme). Eine als »Dingler-Janichscher Eindeutigkeitssatz« hervorgehobene Proposition besagt, dass irgend zwei technische Ebenen an beliebigen inneren Stellen zur Passung gebracht werden können.[8] Kanten (alias »technische Geraden«) werden als Schnitte technischer Ebenen eingeführt und in der Folge davon u. a. die Begriffe »Verbindungsgerade«, »lotrecht« sowie Anordnungsbegriffe (einschließlich Ableitungen der bei Hilbert als Axiome aufgeführten Anordnungsaussagen).

Mit diesem Rüstzeug macht sich Inhetveen nun an den Aufbau der Geometrie. Zunächst werden Definitionen aus der Protogeometrie unter Weglassung des Beiwortes „technisch“ einfach reformuliert. Dann teilt der Autor Postulate mit, in denen er bestimmte Grundkonstruktionen zur Aufgabe stellt: (I) »zwei verschiedene Punkte O und X zu konstruieren«; (III) »zu zwei verschiedenen, schon konstruierten Punkten die Verbindungsgerade zu konstruieren«; (IV) »zu einem schon konstruierten Punkt und einer schon konstruierten Gera-

[8] Vgl. S. 32; zur Eindeutigkeitsfrage s. auch K.-H. Katthage: *Die Eindeutigkeit des Dreiplattenverfahrens*. Ein Beitrag zur Diskussion des Eindeutigkeitsproblems in der Protophysik des Raumes, Diss. Köln 1979, sowie Bender/Schreiber: OGG, s.o.

den die Orthogonale auf diese Gerade durch den schon konstruierten Punkt zu konstruieren« (S. 67 ff.); später (S. 78) kommt noch, als (V), die Winkelhalbierende hinzu. Für Existenz und Eindeutigkeit dieser Figuren verweist Inhetveen auf entsprechende Aussagen der „Protogeometrie". Möglich wird dieses Vorgehen jedoch erst durch eine Forderung (II): das von Lorenzen und Inhetveen so genannte »Formprinzip«. Danach sind alle Figuren, die aus irgend zwei Punkten durch jeweils dieselbe Folge von Konstruktionshandlungen hervorgehen, »formentheoretisch nicht zu unterscheiden«. Gemeint ist hiermit die Ähnlichkeit der Figuren, und es ist klar, dass dieser Begriff, weil er »schon von Längenverhältnissen Gebrauch macht«, bei einer Rekonstruktion des Längenbegriffs nicht zu verwenden ist (vgl. S. 68 f.). Wie dann der Begriff »formgleich« angewandt wird, zeigt sich bei einem Beweis des Parallelenaxioms (S. 71 ff.). Dort wird für die Figur 1 ein Schnittpunkt der Geraden a und b



Figur 1

abgeleitet; denn das Formprinzip postuliert für das Punktepaar (A,B) dieselbe Endfigur wie für (A',B), wo die Orthogonale in A' die Gerade b in C schneidet. – Es wird keinen Geometer weiter verwundern, dass dieses Prinzip *a priori* die euklidische Geometrie erzwingt. Allerdings ist es sehr fraglich, ob eine solche Stipulation den Namen »Begründung der euklidischen Geometrie« verdient. Zu Recht betont Inhetveen, dass sich die systematische Geometrie von der Protogeometrie gerade durch den Einsatz des Formprinzips auszeichnet. Fast ebensogut könnte man sich aber wohl gleich eines allgemeinen Systems der euklidischen Geometrie bedienen.

Der weitere Verlauf der Theorie geht dann reibungslos vonstatten bis hin zur Definition der Streckenkongruenz. Zunächst werden an der (auch sonst im Buch häufig gebrauchten) Figur des Thales-Vierecks die Relationen »diagonalgleich« (ρ) und »seitengleich« ($\overline{\rho}$) für Punktepaare eingeführt. Das Relationenprodukt $\rho\overline{\rho}\rho$ ist dann die gewünschte *Abstandsgleichheit*, von der gezeigt wird, dass sie eine Äquivalenzrelation ist. Dieser und der nachfolgende Abschnitt über die Koordinatisierung enthalten einige originelle und interessante Überlegungen, z. B. zur Gewinnung des euklidischen Höhensatzes und des »Quadratsummensatzes« (Pythagoras). Die Einführung von Koordinaten erfolgt durch ein sukzessive verfeinertes Quadratgitter. Es ergibt sich schließlich als zugehörige Koordinatengeometrie der cartesische Raum über dem pythagoreischen Zahlenkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{1+\xi^2})$. Mit der Streckenkongruenz könnten nun Zirkel auf ihre Starrheit geprüft und damit auch Kreiskonstruktionen mitsamt der nötigen Erweiterung zum euklidischen Zahlenkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{|\ \xi\ |})$ »methodisch rechtfertigbar« werden. Die Vollständigkeit, und damit $\mathbb{R}$, wird – unter Berufung auf eine Äußerung Dedekinds – »als nichtgeometrisch aus der Betrachtung« ausgeklammert (S. 118 f.).

Im dritten Kapitel sucht Inhetveen in der Geometriegeschichte nach Vorläufern der formentheoretischen Auffassung. Als »Interpretationsleitfaden« dient ihm dabei »das aus technischen Zielen hergeleitete Formprinzip«. (Es ist mir übrigens nicht klar, wo der Autor diese hier S. 120 unterstellte Herleitung durchgeführt haben will; den entscheidenden Passagen S. 66-69 kann ich sie nicht entnehmen, und zudem erklärt er auf S. 56, die Größeninvarianz sei gerade »kein neues Ziel der Passungs- oder Formentechnik, sondern eine Norm, die die Theorie der konstruierbaren Figuren leitet«.) Gewiss überrascht es kaum, dass sich so eine Art »'Frühgeschichte' des Formprinzips« entdecken lässt, waren doch die stillschweigend vorausgesetzte Größeninvarianz und später die euklidische Geometrie anfänglich Grundlagen ohne jede Alternative. Auch in Euklids *Elementen* kann man dann manche Passage konstruktiv-formentheoretisch deuten, auch wenn Euklid offenbar Platonist gewesen sein soll, den Kreis zu den Grundfiguren hinzugenommen hat und das Prädikat »streng konstruktiv« nicht mit Sicherheit verdient (vgl. S. 146). Ob die geschichtlichen Marginalien des Autors am Ende wirklich dazu hinreichen, »den Blick für und auf die historischen Fundamente der Geometrie neu zu schärfen« (S. 5), scheint mir zweifelhaft.

Nichtsdestoweniger enthält das Buch aufgrund seiner formentheoretischen Sicht insgesamt eine Reihe von geschichtlichen Hinweisen, methodischen Diskussionen und Darstellungsvarianten in der deduktiven Ordnung, die es zu einer lohnenden (und auch aus didaktischer Sicht anregenden) Lektüre machen. Fundamental ist insbesondere die in ihm herausgestellte zentrale Idee des Passens. Unangefochten dürfte der Wert des Buches bleiben als Zusammenfassung aller bisherigen Forschungen der Erlanger Schule zu den Grundlagen der Geometrie (was allerdings mitunter auch die Notwendigkeit zeigt, den Blick für und auf die einschlägigen Beiträge ‘Außenstehender’ neu zu schärfen).

Das Buch entwirft einen faszinierenden Weg von den allerersten Anfängen menschlichen Gestaltens an und mit Gegenständen über eine allmähliche Herausbildung von Prinzipien für eine (reproduzierende) Formungstechnik bis hin zu den Konsequenzen des Formprinzips (und damit der euklidischen Geometrie). Freilich, der Teufel steckt im Detail. Ein solches (wie ich meine) entscheidendes Detail ist die Einführung des Ebenenbegriffs (in der „Protogeometrie“ als technische Ebene). Ebenen sind Sonderfälle abdruckstabiler Flächen (s. o.). Nun denkt man sich die Passung eines entsprechenden Körpers *A* und seiner Kopie mit Hilfe einer »Klappung« realisiert, die die Kopie von *A* auf das betreffende Oberflächenstück von *A* aufsetzt und dabei eine »Klappachse« auszeichnet (sie »enthält alle die Stellen, die bei der Klappung fest bleiben«, S. 29). Oberflächen wie das (abdruckstabile) hyperbolische Paraboloid fallen damit außer Betracht, und es bleiben »klappsymmetrisch« genannte Körper(oberflächenstücke), z. B. ein Wellblech oder eine Fläche mit sägezahnförmigem Querschnitt. Von einer »technischen Ebene« wird nun verlangt, dass sie »frei klappsymmetrisch« ist, d. h. dass »zu je zwei Stellen des Oberflächenstückes eine Klappung um eine Klappachse existiert, die diese Stellen ineinander überführt« (S. 31). Der protogeometrische Status der so definierten Ebenen erscheint mir allerdings unklar. Wenn nämlich die protogeometrischen Sätze »als *Gütekriterium* für die Herstellung von Körpern mit geforderten Eigenschaften« (S. 20) fungieren, dann muss es möglich sein, auf der Oberfläche bestimmter Körper Klappachsen auszumachen. Es ist jedoch in der pragmatischen Ordnung unklar, wonach man dabei zu suchen hat. Was bedeutet in der Herstellungspraxis eine Fixpunktmenge unter einer Klappung? Gegen eine im bloß Anschaulichen verbleibende Plausibilitätsvorstellung richtet sich Inhetveens früheres Gebot, dass wir zwecks methodischer Kontrolle »auf Appelle an Evidenzerlebnisse und andere psychische Leistungen verzichten müssen« (S. 17). Erst später (*nach* dem Eindeutigkeitsbeweis für die Ebene) werden »technische Geraden« als Kanten (Schnitte zweier technischer Ebenen) eingeführt und Klappachsen als technische Geraden identifiziert (S. 33). So drängt sich denn der Verdacht auf, dass mit dem harmlos scheinenden Wort ‘Klappachse’ das ganze Vorgehen zirkulär wird: wie durch einen Joker, der an entscheidender (unerlaubter) Stelle die Rolle der Geraden übernimmt, um sie danach ‘offiziell’ zugesprochen zu erhalten. Außer dieser (natürlich nicht expliziten) Zirkularität ist kritisch anzumerken, dass eine Definition der Ebene mit einem so starken und der (doch so vielbeschworenen) Praxis so fernliegenden Begriff wie dem der (freien) Klappsymmetrie begründungstheoretisch als eher trivial anzusehen ist, ganz im selben Sinne wie es die Erzwingung der Euklidizität durch das »Formprinzip« ist. Somit wird nicht immer hinreichend deutlich, worin sich schließlich der selbstgesetzte strenge methodologische Anspruch eines Aufbaus »aus dem lebensweltlichen Fundament einer Passungstechnik zu einer Theorie der Formen« erfüllen soll.

Zur Anpassungsdynamik subjektiver Wahrscheinlichkeiten[1]

1. Einleitung

Lebensfähige Individuen unterliegen überwiegend einem Prinzip des Lernens aus der Erfahrung, indem sie gegenwärtiges oder vergangenes Geschehen bewusst oder unbewusst zur Ausrichtung ihres künftigen Verhaltens auswerten. Ein Teil solcher Vorgänge lässt sich als Anpassung dadurch beschreiben, dass man angibt, wie sich die Wahrscheinlichkeiten bestimmter Zustände im Verhalten der betreffenden Individuen aufgrund äußerer Einwirkungen ändern und in der Nähe eines gewissen Niveaus stabilisieren.

In der Psychologie studiert man solche Prozesse im Rahmen stochastischer Lernmodelle, wie sie von Estes, Bush und Mosteller in den 1950-er Jahren entwickelt wurden; aus kybernetischer Sicht deutete sie wenig später H. Frank als »informationelle Akkomodation«. Wahrscheinlichkeitsdynamik ist aber auch seit längerem ein Thema wissenschaftstheoretischer Untersuchungen; als klassisch gelten hier B. de Finettis Studie von 1937 (*La prévision: Ses lois logiques, ses sources subjectives*) und R. Carnaps großangelegte Begründung einer Theorie des induktiven Räsonierens (seit etwa 1945).

Ursprünglich gab es keine Verbindung zwischen den psychologischen Modellen mit ihrer empirischen und den wahrscheinlichkeitslogischen Theorien mit ihrer analytischen Orientierung. Sie lässt sich aber möglicherweise mit Hilfe von Ideen aus der Theorie der Spiele anbahnen (wie z. B. dem von Kelly, Bellman und Kalaba untersuchten »adaptive gambler«; vgl. dazu [10]). Auch in der vorliegenden Arbeit wird ein Kollektiv von Spielern betrachtet, das seine subjektiven Wahrscheinlichkeiten schrittweise an eine objektive Verteilung anpasst, allerdings ohne Beschränkung von Kapital und Spielzeit. Das resul-

---

[1] Veröffentlicht in: *Grundlagenstudien aus Kybernetik und Geisteswissenschaft* 21/4 (1980), S. 117-125.

tierende System ist eng verwandt sowohl mit informationeller Akkomodation als auch mit einem in [6] geschilderten Regelkreis für die Auszahlungsfaktoren eines Glücksspiels.

Im Einzelnen gehe ich wie folgt vor: Zunächst wird über stochastische Lernmodelle und informationelle Akkomodation (Wahrscheinlichkeitslernen) soweit berichtet, wie dies der Zusammenhang mit den hier entwickelten Gedanken erfordert. Dann beschreibe ich kurz die Bildung subjektiver Wahrscheinlichkeiten in Spielen mit Quoten (nach de Finetti). Ihre Anpassungsdynamik wird mittels einer Rekursion beschrieben, aus der sich schließlich eine Konvergenzaussage in Form eines starken Gesetzes der großen Zahlen ergibt.

2. Stochastische Lernmodelle. Wahrscheinlichkeitslernen

Mit stochastischen Lernmodellen verfolgt der Psychologe unter anderem das Ziel, wiederzugeben, wie ein Individuum sein Verhalten schrittweise an die Informationen aus einer ihm zunächst nicht vertrauten Umwelt anpasst. Häufig stellt man sich dazu einen mehrstufigen Prozess vor, bei dem das Individuum auf jeder Stufe unter einer festen Zahl von N sich gegenseitig ausschließenden Verhaltensmöglichkeiten $R_1, \dots, R_N$ auswählt (z. B. können die R_k Reaktionen auf bestimmte Umweltereignisse sein), und zwar zur (diskreten) Zeit t entsprechend einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(t) = (w_1(t), \dots, w_N(t))$. Ein dynamisches System erhält man hieraus, indem man Anfangswerte bestimmt und angibt, wie sich diese Verteilung von einer Stufe zur nächsten ändert:

$$(1) \qquad w(t+1) = Q(w(t), \pi(t))$$

Der Parameter $\pi(t)$ kann hierbei verschiedene Bedeutungen haben; z. B. kann er die Reaktion des Individuums zur Zeit t angeben oder aber das Umweltereignis, das diese Reaktion ausgelöst hat. Die Wahl von $\pi(t)$ ist weitgehend abhängig von psychologischen Annahmen über die Art des zu erfassenden Lernvorgangs. Das gilt natürlich erst recht für den Übergangsoperator Q.

Am besten erforscht sind lineare Modelle, das sind Systeme mit linearem Operator Q, wie sie Estes [3] aus assoziationspsychologischer Sicht sowie Bush und Mosteller [1,2] von einem mehr behavioristischen Standpunkt aus entwickelt haben. Wenn wir Vektoren als Tupel-Zeilen notieren, so hat ein linearer Operator folgende (von einem zeitabhängigen Parameter freie) Form:

$$(2) \qquad Q(w) = wA + b$$

Von besonderem Interesse sind die Fixpunkte von Q, das sind Verteilungen $p = (p_1, \dots, p_N)$, für die $Q(p) = p$ gilt. Ihre Existenz ist unter den Voraussetzungen des Markoffschen Ergodensatzes gesichert, die man gewöhnlich im Modell von Estes etabliert. Es gilt dann $w(t) \to p$ für $t \to \infty$. Auf einfachere Weise kommt man zu einem eindeutig bestimmten Fixpunkt nach [2, S. 37 ff] dadurch, dass man Verfeinerungen oder Vergröberungen des Reaktionsspektrums $(R_1, \dots, R_N)$ gestattet. Diese – psychologisch zu begründende – »combining classes condition« reduziert die Matrix A in (2) auf einen Skalarfaktor zwischen 0 und 1:

$$Q(w) = \alpha w + b.$$

Für $0 \leq \alpha < 1$ ist offenbar $p = \frac{1}{1-\alpha} b$ der einzige Fixpunkt von Q, und es gilt

$$Q(w) = \alpha w + (1 - \alpha)p. \tag{3}$$

Aus dieser (in der Literatur als „Fixpunktform“ geläufigen) Darstellung von Q folgt sofort

$$w(t) = \alpha^t \cdot w(0) + (1 - \alpha^t) \cdot p \qquad (t = 0, 1, 2, \dots) \tag{4}$$

und damit $w(t) \to p$ für $t \to \infty$.

Die Konvergenzaussage beschreibt auf einfache Weise, wie sich die subjektive Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(t)$ auf eine stationäre Verteilung p zubewegt.[2] In gewissen Grenzen lässt sich damit ein in psychologischen Versuchen nachweisbares Wahrscheinlichkeitslernen („probability matching“) erfassen, das H. Frank [5,6] als »informationelle Akkomodation« gekennzeichnet hat.

Der von Frank benutzte Operator unterscheidet sich allerdings in einem wesentlichen Punkt von (3): An die Stelle der fixen Verteilung p tritt in [6, S. 92] eine Zufallsvariable mit der Verteilung p, nämlich der Indikator $x(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$ mit $x_k(t) = 1$ (bzw. 0), wenn zur Zeit t der k-te Ausgang erscheint (bzw. nicht erscheint), wobei gilt:

$$P(x_k(t) = 1) = p_k, \quad P(x_k(t) = 0) = 1 - p_k \qquad (1 \leq k \leq N).$$

Während der durch (3) erzeugte Prozess rein deterministisch ist, kennzeichnet die neue Rekursion

$$w(t+1) = \alpha \cdot w(t) + (1 - \alpha) \cdot x(t) \tag{5}$$

[2] Für nähere Einzelheiten sowie die Diskussion anderer Modelltypen verweise ich auf die deutschsprachigen Einführungsschriften [9] und [12].

einen Zufallsprozess. Dementsprechend anderer Art sind auch die Aussagen über das mögliche Konvergenzverhalten von $w(t)$. Es gilt zwar eine zu (4) analoge Aussage für die *Erwartungswerte* (hierbei ist $E(w(t))$ komponentenweise definiert als $(E(w_1(t)),\ldots,E(w_N(t)))$; s. [6], S. 93):

$$(6) \quad E(w(t)) = \alpha^t \cdot E(w(0)) + (1-\alpha^t)\cdot p,$$

doch ergibt sich hieraus nur $E(w(t)) \to p \quad (t \to \infty)$. In der Tat erweist sich (z. B. in Computer-Simulationen) (5) als ein wenig stabiles, stark schwingendes System.

Im Folgenden werde ich zeigen, dass es sich stabilisieren lässt, wenn man den 'Trägheitsfaktor' α in geeigneter Weise zeitabhängig wählt, nämlich von der Form

$$(7) \quad \alpha = \alpha(t) = \frac{t}{t+\gamma}, \quad \gamma > 0 \text{ konstant.}$$

Eine solche Wahl entspricht der Vorstellung, dass der „Widerstand des Systems gegen die Erfahrung" sich asymptotisch dem Höchstwert 1 nähert. Annahme (7), mit $\gamma = 1$, ist in der Literatur bekannt aus den Rekursionsgleichungen des „fictitious play" nach G. W. Brown und J. Robinson ([8], S. 120). Sie ist aber hier wie dort keine Ad-hoc-Hypothese, sondern entspringt einer geeigneten Präzisierung opportunistischer Verhaltensweisen im 'Spielerkollektiv'. Dies ebenso wie der Übergang von (3) nach (5) sind Beispiele für die Einführung zeitabhängiger Parameter in Gleichung (1).

3. Spiele mit Quoten. Subjektive Wahrscheinlichkeiten

Das soeben angedeutete dynamische System soll nun in einem spieltheoretischen Rahmen entwickelt werden, in dem sich subjektive Wahrscheinlichkeiten nach Ramsey und de Finetti als kohärent gebildete Wettquotienten präzisieren lassen. Ich folge dabei der Darstellung in [4] (Verweise nach der englischen Fassung) und [11].

Wir betrachten einen Zufallsversuch mit N Ausgängen $A_1,\ldots,A_N$, auf die von Spielern beliebige (nicht-negative) Geldbeträge $e_1,\ldots,e_N$ gesetzt werden. Wird bei Erscheinen von A_k der Betrag $q_k e_k$ ausgezahlt, $q_k \geq 1$, so heißt q_k Auszahlungsfaktor (oder Quote) von A_k. Den Kehrwert $b_k = {}^1\!/_{q_k}$ bezeichnet man gewöhnlich als *Wettquotienten* („betting quotient"). Von einem *Spiel mit Quoten* soll dann die Rede sein, wenn vor dem Versuch (aber nicht notwendig vor Einzahlung der Einsätze) vom Veranstalter („Bank" genannt) eine

Quotenverteilung $q = (q_1, \dots, q_N)$ festgelegt wurde. Offenbar schlagen sich in der Wahl von q die Intensitätsgrade nieder, mit denen eine Person oder Gruppe von Personen an das Eintreten der jeweiligen Versuchsausgänge glaubt. So drückt etwa eine große Quote (und damit ein kleiner Wettquotient) einen entsprechend kleinen Grad von Erwartung aus. Die Prinzipien zur Festlegung einer Quotenverteilung bilden daher – zumindest in einer Situation dieses Typs – den Schlüssel zum Begriff der subjektiven Wahrscheinlichkeit.

Zunächst muss die Bank dafür sorgen, dass es keine gewinnsichere Einsatzverteilung $(e_1, \dots, e_N)$ geben kann: bei einer solchen ist unabhängig davon, welchen Ausgang der Versuch nimmt, der Reinerlös auf A_k (d. h. der Betrag $q_k e_k - S$ mit $S = e_1 + \dots + e_N$) positiv für $k = 1, \dots, N$. Nach [11, S. 120] lässt sich eine gewinnsichere Einsatzverteilung genau dann (explizit) angeben, wenn $b_1 + \dots + b_N < 1$. Andererseits sind die Teilnehmer des Spiels daran interessiert, dass keine verlustsicheren Wetten existieren, was gerade bei $b_1 + \dots + b_N > 1$ der Fall ist. Gibt es weder Wetten mit sicherem Gewinn noch solche mit sicherem Verlust, so nennen wir mit de Finetti [4] die Verteilung der Quoten $(q_1, \dots, q_N)$ bzw. der Wettquotienten $(b_1, \dots, b_N)$ *kohärent*. Aus dem zuvor Gesagten ergibt sich somit die bei de Finetti [4, S. 103 f.] ausgesprochene Äquivalenz der Kohärenzbedingung und der Gleichung $b_1 + \dots + b_N = 1$. Kohärent festgelegte Wettquotienten bilden demnach eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, d. h. die subjektive Wahrscheinlichkeit von A_k lässt sich präzisieren als b_k $(1 \leq k \leq N)$.

Ein verbreitetes Prinzip zur Festlegung von Quoten ist der sog. *Totalisator*. Ist e_k der auf A_k gewettete Gesamteinsatz, so lautet die danach gebildete Quote $q_k = {}^{\theta \cdot S}/_{e_k}$ mit $0 < \theta \leq 1$. Daher ist θS der Anteil der Gesamteinnahmen S, den die Bank an die Gewinner ausschüttet. Wegen $b_1 + \dots + b_N = {}^1/_\theta$ liefert der Totalisator genau dann kohärente Wettquotienten, wenn der Totalisationsfaktor θ gleich 1 ist, die Bank also nichts für sich behält. Wenn man davon ausgeht, dass eine Spielergruppe ihr Erwartungsgefühl in der Höhe ihrer Wetteinsätze zum Ausdruck bringt, so liefert das Prinzip des Totalisators auf einfache Weise die dazu passende (kollektive) Wahrscheinlichkeitsverteilung.

4. Dynamisierung der Wettquotienten

Schließlich gelangen wir auf der bisherigen Grundlage zu einer Wahrscheinlichkeitsdynamik, indem wir uns zu den Zeiten $t = 0, 1, 2, \dots$ unabhängige Wiederholungen des Zufallsversuchs mit der objektiven Wahrscheinlichkeitsverteilung $p = (p_1, \dots, p_N)$ durchgeführt denken. Kommt zur Zeit t der Ausgang A_k, so schreiben wir wie bisher $x_k(t) = 1$, sonst $x_k(t) = 0$ (s. Abschn. 2).

Zeitabhängig werden auch die Einsätze $e_k = e_k(t)$ sowie die hier und im Folgenden stets nach dem Totalisatorprinzip gebildeten Wettquotienten:

$$(8) \quad b_k(t) = \frac{e_k(t)}{\theta S(t)} \qquad (1 \leq k \leq N; 0 < \theta \leq 1),$$
$$S(t) = e_1(t) + \ldots + e_N(t).$$

Von nun an übernehmen also die Vektoren $b(t) = (b_1(t), \ldots, b_N(t))$ die Rolle der $w(t)$ in Gleichung (1). Der Operator Q soll dabei indirekt aus einer Rekursion für die Wettquotienten gewonnen werden, die sich aus plausiblen Annahmen über das sich in den Einsatzverteilungen $e(t)$ manifestierende Wettverhalten ergibt.

Die einfachste derartige Annahme ist die einer „vorsichtigen Strategie" zur Festlegung der Einsätze:

$$e(t+1) = \lambda \cdot b(t), \text{ mit konstantem } \lambda > 0 \text{ für alle } t.$$

Hiernach sind die Einsätze stets proportional den Wettquotienten des vorhergehenden Durchgangs. Man verifiziert ohne weiteres, dass dann für alle t gilt: $b(t+1) = b(t)$, der Übergangsoperator also die Identität ist [11, S. 123]. Diese wenig realistische Stationarität lässt sich vermeiden, indem man die Wetten nicht unmittelbar an den Quoten, sondern an den jeweiligen Gewinnerwartungen orientiert. Bei Frank [6, Bd. I, S. 306 f.] ist das entsprechende Vorgehen durch einen *Regelkreis* beschrieben: Sinkt die Gewinnerwartung auf einem Ausgang A_k, so erhöht sich durch die daraus resultierende Zurückhaltung der Spieler dessen Quote $q_k(t)$; dadurch steigt aber die Gewinnerwartung wieder, und die Teilnehmer riskieren größere Einsätze, was abermals die Quote und damit die Gewinnerwartung drückt, usf.

Dieses System scheint sich (bei $\theta = 1$) auf einen stabilen Zustand mit $b(t) = p$ und mit einer Gewinnerwartung $= 0$ hin zu bewegen. Um eine entsprechende Aussage über sein zeitliches Grenzverhalten zu gewinnen, ist es allerdings nötig, die „Gewinnerwartung" zu präzisieren als *den bis zum jeweiligen Zeitpunkt tatsächlich erzielten mittleren Gewinn*. Dies geschieht genauer durch die beiden folgenden Annahmen (9) und (10):

$$(9) \quad \forall k \, (1 \leq k \leq N) \, \exists \tau < t_0 : x_k(\tau) = 1 \text{ und } e_k(\tau) > 0.$$

Das heißt: Bis zu einem gewissen Zeitpunkt (hier und im Folgenden mit t_0

bezeichnet[3]) ist auf jedem Ausgang des Versuchs ein positiver Gewinn erzielt worden.

$$(10)\quad \forall k \forall t > t_0: \ e_k(t) = a \cdot \frac{\theta}{t} \sum_{\tau=0}^{t-1} S(\tau) x_k(\tau) \qquad (a > 0 \text{ konstant}).$$

Das heißt: Der Einsatz auf dem k-ten Ausgang zur Zeit $t > t_0$ ist proportional dem mittleren Gewinn (mit a als universellem Proportionalitätsfaktor), der darauf im Zeitraum $[0, t-1]$ erzielt wurde; für die früheren Zeitpunkte $t \leq t_0$ denke man sich die Einsätze beliebig (willkürlich) gewählt.

Offenbar benötigt man die Klausel (9), um zu verhindern, dass die Proportionalitätsregel in (10) einige Einsatzfolgen konstant Null werden lässt. Das Wettverhalten richtet sich nach der in (10) definierten „opportunistischen Strategie" also erst von einem Zeitpunkt an, bis zu dem auf jedem der Versuchsausgänge mindestens eine Wette mit positivem Einsatz Erfolg hatte.

Bevor das Konvergenzverhalten des Systems im nächsten Abschnitt erörtert wird, sind hier die Rekursionsgleichungen zu notieren, denen die Einsätze $e_k(t)$, $S(t)$ sowie die Wettquotienten $b_k(t)$ genügen.

Unmittelbar aus (10) ergibt sich

$$(11)\quad e(t+1) = \frac{t}{t+1} e(t) + \frac{\theta a S(t)}{t+1} x(t) \qquad (t > t_0).$$

Ferner gilt $x_1(\tau) + \ldots, x_N(\tau) = 1$ und daher für $t > t_0$:

$$\begin{aligned}(12)\quad S(t) &= \sum_{k=1}^{N} e_k(t) = \frac{\theta a}{t} \sum_{k=1}^{N} \sum_{\tau=0}^{t-1} S(\tau) x_k(\tau) \\ &= \frac{\theta a}{t} \sum_{\tau=0}^{t-1} \left(S(\tau) \sum_{k=1}^{N} x_k(\tau) \right) \\ &= \frac{\theta a}{t} \sum_{\tau=0}^{t-1} S(\tau).\end{aligned}$$

Daraus folgt sofort

$$(13)\quad S(t+1) = \frac{t + \theta a}{t+1} \cdot S(t) \qquad (t > t_0).$$

[3] Da jedes Ergebnis A_k mindestens einmal aufgetreten sein soll, ist sicherlich $t_0 \geq N$.

Dividiert man (11) komponentenweise durch $\theta S(t+1)$, so ergibt sich nach (8) unter Verwendung von (13)

$$(14) \quad b(t+1) = \frac{t}{t+\theta a} \cdot b(t) + \frac{a}{t+\theta a} \cdot x(t) \qquad (t > t_0).$$

Für $\theta = 1$ sind diese Wettquotienten *subjektive Wahrscheinlichkeiten*; die zugehörige Rekursion (14) geht dann über in (5) mit dem Trägheitsfaktor (7) (wobei $\gamma = a$).

5. Beweis einer Konvergenzaussage

Es soll nunmehr unter den Voraussetzungen (8), (9) und (10) die folgende Aussage[4] bewiesen werden:

$$(15) \quad P\left(\lim_{t\to\infty} b(t) = \frac{1}{\theta}\, p\right) = 1$$

Speziell strebt bei $\theta = 1$ die Folge der subjektiven Wahrscheinlichkeiten $b_k(t)$ fast sicher gegen die objektive Wahrscheinlichkeit p_k für $t \to \infty$ ($1 \leq k \leq N$).

Beweis: Wir betrachten für $t > t_0$ die Differenz

$$\begin{aligned}
b_k(t) - \frac{p_k}{\theta} &= \frac{e_k(t)}{\theta S(t)} - \frac{p_k}{\theta} \\
&= \frac{1}{\theta t S(t)} \cdot \left(\theta a \sum_{\tau=0}^{t-1} S(\tau) x_k(\tau) - p_k t S(t)\right) \\
&= \frac{1}{\theta t S(t)} \left(\theta a \sum_{\tau=0}^{t-1} S(\tau) x_k(\tau) - \theta a p_k \sum_{\tau=0}^{t-1} S(\tau)\right) = \ldots \\
\ldots &= \frac{a}{t S(t)} \sum_{\tau=0}^{t-1} \left(S(\tau) x_k(\tau) - S(\tau) p_k\right).
\end{aligned}$$

Bei der eigentlichen Konvergenzbetrachtung ist ausschlaggebend, dass die Zufallsvariable $S(t)$ zu jedem Zeitpunkt t eine „Konstante“ darstellt (d. h. der von ihr angenommene Wert ist vom Ausgang des Zufallsversuchs unabhängig). Ist

[4] Insoweit dabei ein Grenzübergang *im Argument* des Wahrscheinlichkeitsmaßes P erfolgt, ist die Aussage der Form nach ein „starkes Gesetz der großen Zahl“.

$t \leq t_0$, so resultiert dies aus der willkürlichen Wahl der Wetteinsätze; für $t > t_0$ ergibt es sich aus der dann gültigen Beziehung

$$(16) \quad S(t) = m_0 \cdot H(\theta a, t) \qquad (t > t_0)$$

mit einer positiven reellen Konstanten m_0 und der Funktion

$$H(u,t) := \frac{u}{t} \prod_{\tau=1}^{t-1} \left(1 + \frac{u}{\tau}\right).$$

Dabei ist ein leeres Produkt stets $= 1$ zu setzen.

Zum Beweis dieser Darstellung verifiziert man zunächst mittels (13) durch vollständige Induktion über $t \geq t_0 + 1$

$$S(t) = m \cdot \frac{\theta a}{t} \cdot \prod_{\tau=t_0+1}^{t-1} \left(1 + \frac{\theta a}{\tau}\right), \text{ wobei } m = \sum_{\tau=0}^{t_0} S(\tau).$$

Dabei ist ein leeres Produkt (etwa bei $t \leq t_0 + 1$) stets $= 1$ zu setzen. – Daraus folgt dann (16) für

$$m_0 := \frac{m\theta a}{(t_0+1)H(\theta a, t_0+1)}.$$

Insbesondere gilt also $E(S(t)) = S(t)$ und somit auch

$$(17) \quad b_k(t) - \frac{p_k}{\theta} = \frac{a}{r(t)} \sum_{\tau=0}^{t-1} (z_k(\tau) - E(z_k(\tau))) \qquad (t > t_0),$$

wo $r(t) := tS(t)$ und $z_k(t) := S(t)x_k(t)$.

Es soll nun gezeigt werden, dass die rechte Seite von (17) für $t \to \infty$ mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen 0 konvergiert. Nach dem Kolmogoroffschen Gesetz der großen Zahlen[5] sind dazu folgende Bedingungen hinreichend:

(i) $(z_k(t))_{t>t_0}$ ist eine unabhängige Folge von Zufallsvariablen;

(ii) $(r(t))_{t>t_0}$ ist eine wachsend gegen $+\infty$ strebende Folge positiver Zahlen;

(iii) die Varianzen $V(z_k(t))$ existieren, und es gilt $\sum_{t=t_0+1}^{\infty} \frac{V(z_k(t))}{r(t)^2} < \infty$.

[5] Vgl. etwa [7], S. 103.

Die Bedingung (i) ist ohne weiteres erfüllt aufgrund der Konstanz von $S(t)$ und der Unabhängigkeit der Indikatorfolge $x(t)$. – Aus (16) ergibt sich für $t > t_0$

$$r(t) = m_0 \theta a \prod_{\tau=1}^{t-1} \left(1 + \frac{\theta a}{\tau}\right).$$

Offenbar ist $0 < r(t) < r(t+1)$, und es gilt $r(t) \to +\infty$, da das Produkt rechter Hand divergiert für $t \to \infty$. Somit ist auch (ii) erfüllt. – Schließlich hat man für die Varianzen

$$\begin{aligned} V(z_k(t)) &= E(z_k(t)^2) - E(z_k(t))^2 \\ &= S(t)^2 p_k(1 - p_k) \end{aligned}$$

und daher

$$\sum_{t=t_0+1}^{\infty} \frac{V(z_k(t))}{r(t)^2} = p_k(1-p_k) \cdot \sum_{t=t_0+1}^{\infty} \frac{1}{t^2} < \infty,$$

d. h. es gilt (iii). $\dashv$

Der Beweis verläuft wesentlich einfacher, falls die Einsatzsummen $S(t)$ zeitlich nicht variieren (nach (13) ist dies genau bei $\theta a = 1$ der Fall). Dann haben nämlich die Zufallsvariablen $z_k(t)$ eine gemeinsame Verteilungsfunktion, und in (10) gilt nach einem weiteren Satz von Kolmogoroff [7, S. 106]: $e_k(t) \to E(z_k(t)) = S \cdot p_k$ mit Wahrscheinlichkeit 1. Hieraus ergibt sich die Behauptung von (15) mittels (8). Gilt noch spezieller $\theta = a = 1$, so erhält man die Konvergenz aus der Tatsache, dass dann (14) auch die von der relativen Häufigkeit zur Zeit t erfüllte Rekursion ist (was auf das klassische Starke Gesetz der großen Zahl hinausläuft).

Literatur

1. Bush, R. R.; Mosteller, F.: A Mathematical Model for Simple Learning. *Psychol. Rev.* 58 (1951), S. 313-323.
2. Bush, R. R.; Mosteller, F.: *Stochastic Models for Learning*. New York and London, 1955.
3. Estes, W. K: Toward a Statistical Theory of Learning. *Psychol. Rev.* 57 (1950), S. 94-104, 106-107.
4. de Finetti B.: *Foresight: Its Logical Laws, Its Subjective Sources*. Engl. Übs. von ›La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives‹. *Ann. de l'Inst.*

H. Poincaré, vol. 7 (1937). In: Kyburg, H. E.; Smokler, H. E. (eds.): *Studies in Subjective Probability*. New York 1964.

5. Frank, H.: Über das Intelligenzproblem in der Informationspsychologie. *Grundlagenstudien aus Kybernetik und Geisteswissenschaft* 1/1 (1960), S. 85-96.
6. Frank, H.: *Kybernetische Grundlagen der Pädagogik*. 2. völlig neubearb. u. wesentl. erw. Auflage, Bände I & II: Baden-Baden 1969.
7. Krickeberg, K.: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Stuttgart 1963.
8. Nievergelt, H.; Farrar, J. C.; Reingold, E. M.: *Computer Approaches to Mathematical Problems*. Englewood Cliffs, N. J. 1974.
9. Palmers, C.: Mathematische Lernmodelle. In *Kindlers Psychologie des 20. Jahrhunderts*, Bd. IV: Pawlow und die Folgen, hrsg. v. H. Zeier, Zürich 1977.
10. Rapoport, A.; Jones, L. V.; Kahan, J. P.: Gambling Behavior in Multiple-Choice Betting Games. *Journ. of Math. Psychology* 7 (1970), S. 12-36.
11. Schreiber, A.: Über Spiele mit Quoten. *Elem. d. Math.* 32 (1977), S. 118-123.
12. Tack, W. H.: *Stochastische Lernmodelle*. Stuttgart 1976.

POSTSKRIPTUM

1. – Der Nachweis, dass $S(t)$ eine „Konstante“ darstellt (d. h. als Zufallsvariable nicht vom Versuchsausgang abhängt), lässt sich einfacher erbringen: durch Induktion direkt mittels Gleichung (13) (Induktionsanfang: $t = t_0 + 1$).

2. – Eine eingehendere Analyse des in Abschnitt 3 skizzierten Glücksspieltyps findet man in meiner Arbeit „Gewinnabsicherung bei Wetten mit festen Auszahlungsquoten“ [Kap. 28 in: B. Luderer (Hrsg.): *Die Kunst des Modellierens*. Mathematisch-ökonomische Modelle, Vieweg / Teubner: Wiesbaden 2008]. Sie enthält unter anderem eine neue Formel für die allgemeinste Einsatzverteilung bei Spielen mit $b_1 + \ldots, +b_N > 1$ und ein verschärftes Kriterium für den Begriff der „günstigen“ Wette.

Rezension[1] : ›Zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs‹

Das Anwendungsproblem in der Wahrscheinlichkeitstheorie aus didaktischer Sicht von H. Steinbring (IDM Bielefeld 1980)

Die vorliegende umfangreiche Schrift von 462 Seiten ist eine Dissertation, die im Rahmen der Forschungen der Arbeitsgruppe „Mathematiklehreraus- und Weiterbildung“ am Bielefelder Institut für Didaktik der Mathematik (IDM) entstanden ist. Wie aus dem Titel hervorgeht, soll es sich um eine Untersuchung zur Didaktik handeln mit dem Ziel, »anhand der Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs zum Verständnis der Probleme der Herausbildung und Aneignung mathematischer Begriffe insgesamt beizutragen«. (S. i, Vorwort). Schon beim ersten Durchblättern zeigt sich, dass der Verfasser dazu den Rahmen didaktischer Forschung weiter absteckt als das üblicherweise geschieht. Der Aspektevielfalt mathematischer (hier stochastischer) Begriffe will er gerecht werden durch eingehende historische Studien, erkenntnistheoretische Betrachtungen sowie fachinhaltliche Analysen. Auf diese Weise ist eine Arbeit entstanden, die man wohl als einen Beitrag zu didaktischer Grundlagenkritik (oder -theorie) begrüßen darf, also etwas, für das es noch nicht so viele Beispiele und Vorbilder gibt. Dementsprechend kommen als Leser vor allem Kenner der Stochastik in Frage, die sich für die geschichtlichen und wissenschaftsphilosophischen Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffs aus didaktischer Sicht interessieren. Ausdrücklich beabsichtigt ist natürlich auch eine didaktische *Auswertung* des Ganzen (z. B. zur Beurteilung von Kursvorschlägen, zum Entwurf von Curricula und dgl. mehr), freilich nicht in dem Sinn, dass ein Mathematiklehrer hier auf die Suche nach passenden Rezepten und Beispielen für seinen Unterricht gehen könnte.

[1] Erschienen in: *Zbl. f. Didaktik d. Math.* Heft 4 (1982), S. 233-236.

Bevor ich auf inhaltliche Fragen näher eingehe, möchte ich den formalen Aufbau des Werks in groben Zügen schildern. Es besteht aus vier Kapiteln, einer Zusammenfassung und einem Literaturverzeichnis (225 Titel). Kapitel I (10 Seiten) dient der Einführung; hier erklärt der Verfasser die Problematik des Wahrscheinlichkeitsbegriffs aus seiner Sicht, hier gibt er auch einen kurzen Vorblick auf die »dynamische Sichtweise«, mit der er an die Probleme herangehen will. Es empfiehlt sich übrigens, unmittelbar nach dem ersten Kapitel schon einmal die am Ende gegebene Zusammenfassung (10 Seiten) zu lesen; dadurch ist es leichter, sich in den langen Hauptkapiteln zurechtzufinden. Kapitel II (233 Seiten) »aus der Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie« enthält Fallstudien und Kommentare zu drei historischen Phasen:

1. Anfänge der Entwicklung bei Jakob Bernoulli (mit dessen Gesetz der großen Zahlen);
2. Begründung der Theorie der Beobachtungsfehler durch Gauss und Laplace (Normalverteilung, Zentraler Grenzwertsatz);
3. Vordringen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in physikalische Theorien (Thermodynamik, statistische Gastheorie), vor allem auf der Grundlage der Arbeiten von Ludwig Boltzmann.

In Kapitel III (69 Seiten) geht es darum, an den historischen Begriffswandel in Grundzügen eine »logische Entwicklungsstruktur« anzuschließen. Hier soll die Begriffsdynamik nun auch epistemologisch verstanden werden, nämlich mittels einer (an J. Sneed angelehnten) Metatheorie der theoretischen Terme einer Theorie, in diesem Fall der Wahrscheinlichkeitstheorie. Schließlich behandelt Steinbring in Kapitel IV (125 Seiten) »didaktische Probleme des Wahrscheinlichkeitsbegriffs«, u. a. die Stellung der Stochastik im Curriculum, das Verhältnis von Kausalität und Zufall, Status und Gebrauch stochastischer Modelle sowie Vorschläge zum Stochastikunterricht an der Schule.

In gut der Hälfte der Arbeit befasst sich der Autor mit den geschichtlichen Hintergründen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Dabei entstand für mich der Eindruck, dass er dies nicht vom Standpunkt eines Historikers der Mathematik tut, sondern dass er Erkenntnisse der Fachhistorie im Lichte seiner epistemologischen Auffassungen zu interpretieren sucht. So werden hier die wichtigsten Motive des Theorie-Kapitels III bereits vorweggenommen und in den entsprechenden geschichtlichen Kontext gestellt. Ein solches Vorgehen erscheint mir grundsätzlich als legitim, es wäre aber dann zweckdienlicher gewesen, die Passagen von Kapitel II mit ihren oft seitenlangen Zitaten und gelegentlich auch etwas weitschweifigen Erläuterungen zu straffen. Gleichwohl erfüllt das Kapitel seine Aufgabe, nicht zuletzt aufgrund sorgfältiger Auswertung von Quellen: nämlich aufzuzeigen, dass und wie ein Begriff(system) sich entwickelt, indem der assoziierte Bereich von Anwendungen sich mehr und mehr ausweitet oder verlagert. Für die Wahrscheinlichkeitstheorie sind Anwendungen nicht bloß erfreuliche Beigaben, die ihre Nützlichkeit beweisen, sondern in das Begriffsgefüge selbst eingegangene Erfahrung. Umgekehrt sind die Anwendungen nur dadurch möglich, dass der Begriff auf variable Weise ausgebildet und gehandhabt wird (z. B. als Anzahlquotient, als relative Häufigkeit, als Gewissheitsgrad, als statistische (objektive) Wahrscheinlichkeit). Steinbring spricht hier des öfteren von einer »schwierigen Wechselbeziehung« oder einem »komplizierten Verhältnis« (etwa von Wahrscheinlichkeitstheorie und Mechanik).

Im Folgenden möchte ich auf einige zentrale Vorstellungen und Überlegungen zu sprechen kommen, mit denen der Autor an das besagte »komplizierte Verhältnis« von Begriff und Gegenstand, von Theorie und Realität (Anwendung) herangeht.

Steinbring beginnt seine Analyse an einem Phänomen, das er als *Zirkularität* apostrophiert und dem man in der Begriffslogik der Wahrscheinlichkeit verschiedentlich begegnet. In Bezug auf die Mechanik ist es von J. D. Sneed in seinem Buch *The logical structure of mathematical physics* (Dordrecht 1971) analysiert worden. Sneed befasst sich dort u. a. mit der Frage, welche einschlägigen Terme (Begriffe) einer Theorie theoretisch sind. Die ältere Wissenschaftsphilosophie (vor allem in Anknüpfung an Carnap) glaubte noch an eine absolute Dichotomie von Beobachtungsbegriffen auf der einen und theoretischen Begriffen auf der anderen Seite. Demgegenüber erklärt Sneed das Theoretisch-Sein eines Terms relativ zu einer ihn verwendenden Theorie, und zwar dadurch, dass man zu seiner konkreten Messung (z. B. der Größe ‘Kraft’) bereits auf Gesetze und Annahmen der Theorie (hier auf die zweite Newtonsche Grundgleichung $F = m \cdot a$) zurückgreifen muss. Ähnliches scheint in der Stochastik, etwa bei der Bestimmung einer Wahrscheinlichkeit zu geschehen: ein Urteil wie „Dieser Würfel hat 6 gleichwahrscheinliche Seiten“ kann selbst nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit gefällt werden (und/oder hängt ab von anderweitigen statistischen Hypothesen). Für den Autor sind solche Zirkularitäten ein Indiz für den theoretischen Charakter des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Während aber Sneed vornehmlich an einer formal-logischen Metatheorie des Problems interessiert ist, konzentriert sich Steinbring auf die allgemeineren und informellen Aspekte der neuen Theorie-Konzeption. Entscheidend ist hier der Gedanke, wonach wir in einer Theorie nicht ein mehr oder weniger apodiktisches Satzsystem zu erblicken haben, das sich mit einem Schlag der Wissenschaftlergemeinde darbietet, sondern vielmehr eine sich entwickelnde dynamische Struktur mit einem Kern (z. B. ihrem mathematischen Apparat) und einem variablen Feld sog. intendierter Anwendungen. Ich erwähne nur nebenbei, dass auch in den Begründungstheorien zur Geometrie oder zur Logik theoretische Zirkularitäten auftreten; und auch dort sind sie kaum anders als pragmatisch aufzulösen, d. h. durch Rückgang auf einen vortheoretischen Handlungs- oder Lebenskontext, der sich entwickelt und schrittweise mit Theoretizität vollsaugt (z. B. handwerkliche Praxis, natürliche Sprache).

Was nun die Stochastik anbelangt, so mag man sich angesichts des in ihr anzutreffenden mathematischen Gehalts wundern, dass der Autor über ziemlich informelle epistemologische Betrachtungen nicht hinausgeht. Er verzichtet aber bewusst auf eine *Logik* der Entwicklung im engeren Sinne, denn seiner Ansicht nach lassen sich einige »spezifische Züge der Wahrscheinlichkeitstheorie ... mit Hilfe der Sneedschen Konzeption nicht beschreiben« (S. 249). Dem möchte ich hinzufügen: In der Tat gibt es hier auch nichts, was bei der Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten die Rolle spielt, die jener der Newtonschen Gleichungen in der Mechanik beim Messen von Kraft oder Masse entspricht. Insofern ist die Rede von der theoretischen Natur des Wahrscheinlichkeitsbegriffs auch weniger verbindlich oder zumindest schwieriger zu präzisieren.

Worin liegt nun die Dynamik des Wahrscheinlichkeitsbegriffs? – Sie liegt in den Anwendungen, genauer: in ihrem variablen Anwendungsbezug. Eine Besonderheit der Stochastik (und einen Unterschied zur klassischen Mechanik) sieht der Autor darin, dass dieser Anwendungsbezug, »der Zusammenhang von empirischen und theoretischen Aspekten«, selbst einem probabilistischen Urteil unterliegt; die Stochastik »ist gewissermaßen eine Theorie ihrer eigenen Anwendung« (S. 257), gelegentlich auch als »Theorie 2. Stufe« bezeichnet (was allerdings etwas gänzlich anderes bedeutet als der gleichlautende Terminus der Mathematischen Logik). Standarbeispiel hierfür ist Bernoullis Gesetz der großen Zahlen. Darin wird nämlich ein Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit hergestellt und *als stochastische Aussage* formuliert.

Ein Hauptmerkmal der Begriffsdynamik in der Stochastik ist nach Ansicht Steinbrings der tendenzielle Übergang einer Theorie 2. Stufe in eine Theorie 1. Stufe; er vollzieht sich im allgemeinen dadurch, dass der Gegenstand der Theorie unter einen Systemgesichtspunkt gerät. In den historischen Studien werden dazu verschiedene Beispiele untersucht. So entwickelte sich in der Theorie der Beobachtungsfehler nach und nach der Begriff des »Fehlergesetzes« und daraus schließlich der Begriff der Wahrscheinlichkeitsverteilung (beliebiger Zufallsvariablen). Der Autor erblickt darin eine Voraussetzung für das Entstehen einer Statistik als einer (auf 1. Stufe) theoretischen Disziplin zur Behandlung von Anwendungsproblemen.

Ein weiteres Beispiel ist die Entwicklung der Ergoden- und Ensembletheorie aus der statistischen Kinetik der Gase. Auch hier wird »der statistische Charakter des behandelten Problems in den Begriff der Verteilung gesteckt« und damit das Anwendungsproblem »aus der neuen Theorie, der statistischen Mechanik gewissermaßen ausgesondert« (S. 242). Es entsteht derart wohl eine brauchbare und ökonomische Technik der Anwendungen; keineswegs sind aber damit konkrete Problemlösungen auch schon in ihren inhaltlichen (»gegenstandsspezifischen«) Aspekten reguliert.

Es ist mir übrigens nicht immer leicht gefallen, die diesbezüglichen meist recht allgemeinen und abstrakten Formulierungen des Autors nachzuvollziehen. Der beanspruchte Vagheitsraum ist bisweilen beträchtlich, z. B. wenn es zu dem soeben erwähnten Thema auf S. 260 resümierend heißt: »Nicht auf der Ebene konkreter Gegenstandsbearbeitungen, sondern auf der Ebene der Beschreibung theoretischer Erkenntnisse wird der Unterschied von System und Einzelfall für die Charakterisierung der Besonderheiten der Wahrscheinlichkeitstheorie relevant.« Gewiß, der Verfasser erläutert diesen Punkt an vielen anderen Stellen seines Buches, aber durch dieses auch sonst geübte Verfahren hat der Gesamttext keine klareren Konturen gewonnen. Zudem besteht in der dünnen Luft epistemologischer Allgemeinbetrachtung stets die Gefahr übertriebener oder zu pauschaler Aussagen. So bemerkt Steinbring zur Diskussion der statistischen Mechanik, die Wahrscheinlichkeitstheorie sei zu einer Theorie »der Anwendung auch anderer Theorien« geworden (S. 262); ab S. 263 ist des öfteren dann gleich die Rede von der Tatsache (!) »Theorie der Anwendung aller Theorien« zu sein.

Neben der Entwicklung des Theorientyps (von 2. zu 1. Stufe) betrachtet der Verfasser auch eine zugeordnete »Entwicklung der Epistemologie« und behandelt darin »Stellung und Rolle des Subjekts im Erkenntnisprozeß« (S. 267). Die maßgeblichen Begriffspaare sind jetzt »Subjekt–Objekt« und »Zufall–Kausalität«. Im historischen Teil wurde ausführlich die statistische Deutung der Thermodynamik erörtert mit dem Fazit, dass es nur durch gleichzeitige Verwendung mechanischer und statistischer Annahmen (wie dem Stoßzahlansatz) möglich ist, den Zweiten Hauptsatz (der damit auch eine statistische Aussage wird) zu gewinnen. In dieser Methodenverschmelzung sieht Steinbring schließlich überhaupt den Ausdruck einer verschwindenden ontologischen Differenz von kausalen und zufälligen Momenten. Als Vorreiter in dieser Richtung nennt er A.-A. Cournot mit seiner *Exposition de la théorie des chances et des probabilités* (1843), verzichtet aber seltsamerweise darauf, im Anschluss an die Boltzmannschen Theorien auf die Quantenmechanik einzugehen. Besser als an den von ihm analysierten Beispielen wäre anhand der statistischen Quantengesetze zu zeigen gewesen, dass dabei die Wahrscheinlichkeitstheorie auf irreduzible Weise mit einer physikalischen Theorie verbunden ist. Nach meiner Auffassung fällt der Autor auch hier in ein falsches Extrem, wenn er später (im didaktischen Teil, S. 335) von der Tatsache (!) spricht, »daß es keine grundsätzlichen epistemologischen oder ontologischen Unterschiede zwischen statistischen und deterministischen Theorien gibt« (und für den Stochastikunterricht empfiehlt, »sich nicht zu stark vom kausal-mechanischen Vorgehen alternativ abzusetzen«). Als Beispiel gibt er die Längenmessung an, die (wie jede physikalische Messung) letztlich statistischen Charakter habe. Anders als bei der Quantenmechanik betrifft dieser statistische Charakter aber nur die Anwendungen der Theorie auf einen konkreten Fall, nicht jedoch ihren Kern, der z. B. bei der klassischen Mechanik gewiss deterministisch ist. Man wird wohl zugestehen können, dass deterministische und statistische Gesetze gleichberechtigt in der Physik Verwendung finden; das muss aber nicht heißen, dass zwischen ihnen keine Unterschiede bestehen.

In diesen Zusammenhang sind auch die »Anmerkungen zur Kontroverse um die objektive oder subjektive Wahrscheinlichkeitsauffassung« (S. 306-312) einzuordnen. Auch hier (S. 311 f) lautet das Fazit, »daß eigentlich kein grundsätzlicher Unterschied zwischen beiden Positionen besteht«. Zunächst werden diese Positionen etwas flüchtig skizziert, die objektivistische nach der Limestheorie v. Mises', die subjektivistische nach de Finetti. Mit einer gewissen Berechtigung wird daran gezweifelt, dass der Kollektivbegriff den vielfältigen Anwendungskontexten der Stochastik angemessen sei. Auch die subjektive Theorie, in der ein ‘Lernen aus der Erfahrung’ mittels der Bayesschen Formel modelliert wird, hat ihre Probleme mit der »Adaption neuer empirischer Fakten« (S. 311). Beiden Positionen wirft Steinbring eine »verkürzte Auffassung über die Kompliziertheit des Theorie-Gegenstandsverhältnisses«, eine zu starke »Identifikation« von Theorie und Empirie vor (S. 311). Diese 'Gemeinsamkeit' berechtigt aber wohl kaum dazu, die beiden Sichtweisen in einen Topf zu werfen. Das erscheint schon deswegen nicht als angemessen, weil zu ihnen auch mathematische Theorien entwickelt wurden, aus denen die Stochastik auf ganz unterschiedliche Weise fruchtbare Impulse empfangen hat. Zudem gibt es noch gar keine Theorie der Wahrscheinlichkeit, in der objektive und subjektive Aspekte generell in der vom Autor geforderten wechselseitigen Verbundenheit behandelt werden.

Schließlich noch einige Bemerkungen zum didaktischen Kapitel IV. Hier werden die zuvor erarbeiteten Auffassungen auf einige allgemeinere Probleme des Stochastikunterrichts angewandt. Für die Anwendungen in unterrichtlicher Behandlung postuliert Steinbring einen unmittelbareren Bezug auf die Gegenstände und Beispiele als dies für die Wissenschaft üblich sei. Auch sollten sie bewusst als »Momente der Begriffsentwicklung« verstanden werden. Dabei warnt er vor einer »Entgegensetzung von Zufall und Determiniertheit« und empfiehlt »stärker Zusammenhänge zu mechanischen Erklärungen herzustellen und so an die Vorerfahrungen der Schüler anzuknüpfen« (s. o.). Ebenfalls recht allgemein sind seine Ausführungen zu Status und Gebrauch stochastischer Modelle. Er kennzeichnet für sie drei Etappen der Entwicklung: 1. »primär kombinatorische Modellierung und Ersatz für den Gegenstand«; 2. Modell als Zufallsgenerator; 3. wird »das Verhältnis von statistischer Analyse zu gegenständlich-inhaltlichen Besonderheiten des Objekts explizit zu einer Grundbeziehung des Modells« (S. 391). In seinen dann folgenden Vorschlägen zum Stochastikunterricht beschreibt Steinbring zunächst einen vorliegenden Kurs für die Sekundarstufe I (von Bigalke), knüpft daran einige kritische Anmerkungen (auf der Basis seiner Epistemologie) und gibt anschließend auch einige Beispiele als Ergänzung dazu (betreffend Simulation, Unabhängigkeit, relative Häufigkeit). Gerade weil inhaltlich kaum etwas Neues in diesem Kapitel vorkommt, wird man hier einen gewissen Mangel an didaktischer Konkretheit beklagen. Eine willkommene Ergänzung ist daher die vom Autor zusammen mit G. von Harten abgefasste EPAS-I-Drucksache Nr. 6 (Bielefeld: IDM, Mai 1981), die unter dem Titel *Schätzen, Messen und Entscheiden – Stochastik im Unterricht der Sekundarstufe I* erschienen ist.

Die Stärke von Steinbrings interessanter und anregender Dissertation liegt im Wechselbezug von epistemologischer und historischer Betrachtungsweise; sie wird damit zu einem wissenschaftlichen Grundlagenbuch für jeden, der sich mit der Entwicklung und den Begriffsbildungen der Stochastik befasst.

SUPPLEMENT

(zum Gesetz der großen Zahlen)

Kurze Zeit nach Erscheinen von Steinbrings Dissertation veröffentlichte ihr Autor (zusammen mit R. Biehler) eine überarbeitete und ergänzte Fassung des in Bd. 12 der *Materialien und Studien* am IDM 1978 publizierten Aufsatzes „Bernoullis Theorem: Eine ‘Erklärung’ für das empirische Gesetz der großen Zahlen?“ (in H. G. Steiner (Hrsg.): *Mathematik – Philosophie – Bildung*, Köln 1982). An diesem speziellen Thema, das in Steinbrings Dissertation nur gestreift wurde (S. 370-371), wollten die Autoren nun ausführlicher eine Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffs herausarbeiten, welche »die technisch-instrumentellen Aspekte des Begriffs« (als bloß innermathematisch verstandenen Wahrscheinlichkeitskalkül) um die Dimension des »schwierige[n] Verhältnis[ses] von Wahrscheinlichkeit zu Empirie« erweitert. Im Zentrum dieser »Anwendungsproblematik« steht nach ihrer Ansicht das »Gesetz der großen Zahlen«.

Es wird betont, dass „Wahrscheinlichkeit“ ein *theoretischer* Begriff sei. Die Autoren deuten das vor dem Hintergrund der Wissenschaftstheorie von J. D. Sneed, der von einem T-theoretischen Term einer Theorie T spricht, wenn dessen Werte sich nicht messen (berechnen) lassen ohne Rückgriff auf eine erfolgreiche Anwendung von T. In mehrfacher Hinsicht darf man sich von diesem Ansatz nicht allzuviel versprechen. Im Kern zielt das Sneedsche Unternehmen auf die Physik[2]. Wahrscheinlichkeiten jedoch werden nicht gemessen wie Längen oder Temperaturen, sondern auf der Grundlage mehr oder weniger umfangreicher Erfahrungsdaten *geschätzt*. Eine so gebildete *Annahme* lässt sich dann (z. B. mit statistischen Methoden) prüfen oder zur Berechnung weiterer Wahrscheinlichkeiten verwenden. Benützt man freilich Wahrscheinlichkeitsannahmen, um den Begriff „Wahrscheinlichkeit“ zu *definieren*, so können in der Tat *zirkuläre* Situationen entstehen (a. a. O., S. 298, 318). Andererseits sind derartige Zirkel nicht von vornherein logisch fehlerhaft, denn gewöhnlich wird mit ihnen auch eine gewisse *Reduktion* erreicht. Das einfachste Beispiel ist die klassische (Laplacesche) Wahrscheinlichkeit, als Verhältnis von günstigen zu möglichen Fällen definiert. Da diese Fälle *gleichwahrscheinlich* sein müssen, liegt solange keine zirkuläre Definition vor, als man nicht versucht „Gleichwahrscheinlichkeit“ auf „Wahrscheinlichkeit“ zurückzuführen.

Etwas komplizierter ist die Sachlage beim Bernoullischen Theorem. Dieses ist auf das Ereignis gerichtet, dass die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A von seiner relativen Häufigkeit $H_n(A)$ um weniger als ein vorgegebenes

[2] zumeist in Gestalt einer miniaturhaft axiomatisierten „klassischen Partikel-Mechanik“, wobei nichts erklärt oder beschrieben wird, was außer für Philosophen jemals *de facto* von Belang sein könnte

$\varepsilon > 0$ abweicht. Dabei bezieht sich $H_n(A)$ auf eine Stichprobe, die aus n unabhängigen Versuchen hervorgegangen ist.[3] Behauptet (und bewiesen) wird dann, dass die Wahrscheinlichkeit von $|H_n(A) - P(A)| < \varepsilon$ beliebig nahe bei 1 liegt, wenn nur die Versuchslänge n groß genug gewählt wird.

Die Aussage selbst ist keineswegs zirkulär; gewisse Formen, sie *philosophisch zu verwenden*, sind es aber durchaus[4]: etwa der Ansatz, $P(A)$ als „wahrscheinlichen" Grenzwert von $H_n(A)$ zu definieren. Die „äußere" Wahrscheinlichkeit $\overline{P}$, welche die Stichproben der Länge n bewertet, ist eine Produkt-Wahrscheinlichkeit, die aus dem gegebenen Maß P unter der Voraussetzung unabhängiger Versuche eindeutig konstruiert werden kann. Mit dieser müsste somit *zuerst* verstanden werden, was $\overline{P}(|H_n(A) - P(A)| < \varepsilon) \to 1$ $(n \to \infty)$ bedeutet. Aber eben dazu benötigt man wiederum P selbst.

Zur Vermeidung dieses Zirkels beruft man sich gerne auf ein Brückenprinzip (häufig nach Cournot benannt, aber schon von Bernoulli als »Prinzip der moralischen Gewißheit« ins Feld geführt). Danach soll ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit ≈ 1 als „praktisch sicher" anzusehen sein. Doch ist die Schwierigkeit damit nur verlagert. Denn wann liegt eine Wahrscheinlichkeit „nahe bei 1", und was bedeutet dann „praktisch sicher"? Diese Kriterien sind nicht weniger vage als das »empirische Gesetz der großen Zahlen«, auf das man dabei gerne zurückgreift. Man kann mit Fug und Recht bestreiten, dass es sich überhaupt um ein *Gesetz* (im engeren Sinne eines Naturgesetzes) handelt[5], und zwar nicht deswegen, weil es als empirische Aussage mit prinzipieller Unsicherheit behaftet ist, sondern weil es sich als eine solche Aussage *nicht hinlänglich präzise formulieren* lässt. Werfen wir eine Münze, so möchte man sich vermutlich auf die Behauptung einigen, die relativen Häufigkeiten von ‘Zahl’ *tendierten auf lange Sicht gegen* 1/2 (ohne freilich zu konvergieren). Die Aussage über eine ‘Tendenz’ spiegelt, wie wir weiter unten sehen werden,

---

[3] Auch in der relativen Häufigkeit steckt in einem gewissen Sinn die Idee der klassischen Wahrscheinlichkeit als Verhältnis der günstigen zu den möglichen Fällen: mit dem Unterschied, dass nun die möglichen Fälle nicht auf einen Schlag in einer (symmetrischen) Versuchsvorrichtung verkörpert sind, sondern in zeitlicher Sukzession als Ausfälle unabhängiger Versuche in Erscheinung treten.

[4] Diesen Unterschied scheinen Biehler und Steinbring zu verwischen, wenn es a. a. O., S. 318, heißt: »Im Grunde weist die in Bernoullis Theorem historisch erstmals sichtbar werdende *Zirkularität* beispielhaft auf den relativ eigenständigen, theoretischen Charakter des Wahrscheinlichkeitsbegriffs hin.« – Ich vermute, diese ein wenig verschwommene (»im Grunde«) und inhaltsarme Feststellung soll vor allem verhelfen, die Wahrscheinlichkeit unter das Sneedsche ‘Paradigma’ zu subsumieren.

[5] So geschehen in meinem Aufsatz „Probleme bei der Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs", *Math. did.* 2 (1979), S. 235-246.

freilich eine geradezu ubiquitäre Erscheinung wider (während der Ausschluss von 'Konvergenz' aufgrund des infinitären Charakters von Grenzwertaussagen keinen empirischen Sinn haben kann). Schwieriger noch wird es sein, einen „wahrscheinlichen" Grenzwert für die Häufigkeiten von Versuchsausfällen anzugeben, bei denen Apriori-Annahmen aufgrund von Symmetrien nicht leicht oder gar nicht möglich sind (z. B. Lage eines zu Boden gefallenen Reisnagels, Geschlecht eines neugeborenen Kindes)? Vielleicht lässt sich für den Reisnagelwurf (nach dem Vorbild des berühmten Buffonschen Nadel-Experiments) eine geometrisch-physikalische Modellierung mit Erfolg ausdenken – doch darf man im Allgemeinen nicht hoffen, einen Zufallsversuch auf kalkulierbare Symmetrieannahmen abbilden zu können. Nur das empirische Experiment liefert dann Anhaltspunkte vor dem Hintergrund einer *Gesetzmäßigkeit*, deren Regularität durch zufällige Einwirkungen zustandekommt, weshalb ich sie als eine »unerklärte Struktureigenschaft unserer Erfahrungswelt« bezeichnet hatte (loc. cit., S. 242), nicht zuletzt im Hinblick auf die Tatsache, dass die diesbezüglichen Aussagen *Vermutungen* sind, die sich – aufgrund mangelnden Wissens über kausale Zusammenhänge – allenfalls statistisch beurteilen lassen.

Die Autoren sehen sich »in deutlichem Gegensatz« zu dieser Auffassung und meinen, die Gesetzmäßigkeiten bei empirischen Häufigkeiten seien »genausowenig und genausoviel eine unerklärte Struktureigenschaft unserer Erfahrungswelt, wie es etwa die Keplerschen Gesetze der Planetenbewegung sind« (S. 325)[6]. Analog zur »Systematisierung und Präzisierung« dieser Gesetze innerhalb der Newtonschen Mechanik gestehen sie Bernoullis Theorem »einen wichtigen Erklärungswert« bezüglich des empirischen „Gesetzes der großen Zahlen" zu.

Bei dieser Überlegung sollte man im Auge behalten, dass die Keplerschen Gesetze *exakte* prognostische Angaben über die Bahneigenschaften machen und daher nichts mit einer statistischen Vermutung gemein haben. Außerdem ist es möglich, sie *innerhalb* (d. h. unter den Annahmen) der Newtonschen Mechanik zu *beweisen*. Auch das Theorem von Bernoulli lässt sich in aller Strenge beweisen und liefert eine stochastische Konvergenzaussage über (theoretische) relative Häufigkeiten, sofern man einen Wahrscheinlichkeitsbegriff mit wohldefinierten Eigenschaften voraussetzt. Nach der von den Autoren beanspruchten Analogie wäre aber nun ein (u. U. spezielleres) *empirisches Gesetz* anzugeben, für welches das theoretische „Gesetz der großen Zahlen"

[6] Diese Behauptung finde ich an keiner Stelle des Aufsatzes stichhaltig begründet; vermutlich ist sie ähnlich motiviert wie das „Argument" in Fußnote 4.

einen »Erklärungswert« besitzt (falls „einen Erklärungswert besitzen" etwas Anderes, evtl. Schwächeres ausdrücken soll als „Erklärung"). Auf S. 313 findet man diverse »paraphrasierend[e]« Formulierungen des fraglichen Explanandums in Form von »Alltagswissen über die Regelmäßigkeiten bei relativen Häufigkeiten von zufälligen Ereignissen«,[7] auf S. 320 f dann die elaborierteren Aussagen einiger Wahrscheinlichkeitstheoretiker (Poisson, v. Mises, Hengst, Pfanzagl). Bestenfalls entnimmt man daraus den übereinstimmend wiederholten Hinweis auf das *Phänomen der Stabilisierung* relativer Häufigkeiten mit wachsender Anzahl von Versuchen.

Was die Berufung auf „Stabilisierung" letztlich bedeuten könnte, wird in Lehrgängen der Stochastik (und auch in dem Aufsatz der Autoren) häufig nur eingeschränkt reflektiert. Typischerweise bezieht man sich auf eine Situation wie diese: Jemand wirft eine Münze und notiert die (potentiell beliebig fortsetzbare) Folge relativer Häufigkeiten[8] $h_1, h_2, h_3, \ldots$ des Ereignisses 'Zahl'. Früher oder später werden sich die Werte der h_i in der Nähe von $1/2$ befinden. Darin soll sich nun ein empirisches „Gesetz" der großen Zahlen manifestieren. Merkwürdigerweise beschäftigt man sich aber nicht mit der Frage, welche Folge herauskäme, wenn die Häufigkeiten des Ereignisses „ungerade Ziffer" in der Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{2}$ hingeschrieben würden oder – im Extremfall – eine Person uns nach ihrem Gutdünken 'Kopf' (0) oder 'Zahl' (1) zudiktierte. *Auch dann* findet nämlich – zumal unter empirischen Beobachtungsbedingungen – eine Stabilisierung statt! Es lässt sich auf einfache Weise zeigen, dass die Schwankung innerhalb von Blöcken fester Länge k in der Häufigkeitenfolge beliebig klein wird, wenn man nur genügend viele „Versuche" durchführt. Genauer gilt die scharfe Ungleichung:

$$\max_{n \le i,j \le n+k} |h_i - h_j| \le \frac{k}{n+k}.$$

Hieraus wird unmittelbar ersichtlich, dass bei beliebig großer (festgehaltener) Blocklänge k die Schwankung der h_i über dem Intervall $[n, n+k]$, für $n \to \infty$ gegen Null geht.[9] Somit wird man nach einer gewissen Versuchsanzahl bei

[7] „Relative Häufigkeiten reproduzieren sich annähernd in verschiedenen Versuchsreihen", „Relative Häufigkeiten stabilisieren sich mit zunehmendem n", „Um aus beobachteten Häufigkeitsverhältnissen auf das 'wahre Chancenverhältnis' mit einiger Sicherheit schließen zu können, darf die Versuchsanzahl nicht zu gering sein", etc.

[8] Der Index n von h_n steht für die Anzahl der Münzwürfe (unabhängiger Zufallsversuche), die bis zu einem bestimmten Zeitpunkt durchgeführt wurden.

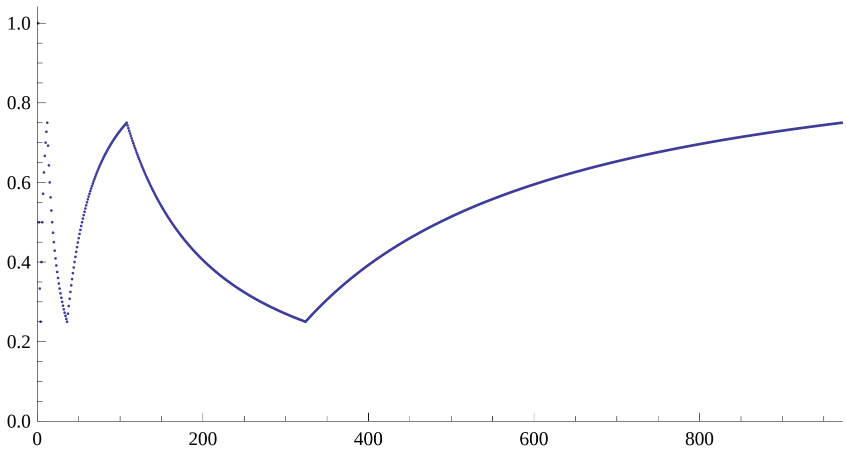
[9] Das impliziert keinesfalls Konvergenz, die erst vorläge, wenn zu beliebigem positiven ε ein

der Häufigkeitenfolge *jeder* Folge in fest beschränkten Beobachtungszeiträumen nur noch minimale Schwankungen feststellen können (und diese dann als „Stabilisierung" interpretieren).

Fragen wir umgekehrt, wie eine Beobachtungsfolge (Urliste) beschaffen sein muss, damit ihre relativen Häufigkeiten *keine* konvergente Folge bilden. Die Häufigkeitenfolge ist beschränkt, also wird sie dauerhaft zwischen zwei Niveaus oszillieren. Andererseits strebt, wie wir eben sahen, die Schwankung in Blöcken beliebiger (aber fester) Größe gegen Null. Bedenkt man ferner, dass ein paar Ausreißer in der Urliste nur wenig bewirken, so leuchtet ein, dass sich in der Versuchssituation immer wieder eine Trendumkehr ereignen muss (und zwar jedes Mal nachhaltiger). Ohne eine „regelhaft" eingreifende Ursache ist das kaum vorstellbar. Soll beispielsweise die Häufigkeitenfolge einer 0-1-Folge, in der Blöcke aus Einsen und Nullen abwechseln, immer wieder das Innere eines 2δ-Streifens (mit $0 < \delta < 1/2$) um $1/2$ verlassen, so muss nach n Versuchen der jeweils nächste Block aus mindestens

$$k \geq \frac{\delta + |\frac{1}{2} - h_n|}{\frac{1}{2} - \delta} \cdot n$$

Elementen bestehen. Für $\delta = 1/4$ etwa sieht man leicht, dass die Länge alternierender Blöcke exponentiell wächst (ein neuer Block ist 3-mal so lang wie sein unmittelbarer Vorgänger). Setzt man das Anfangsstück 100011111111 nach diesem Erzwingungsmuster fort, dann oszilliert die Folge der relativen Häufigkeiten von ‘1’ dauerhaft zwischen $1/4$ und $3/4$:



n existiert, so dass für alle $k > 0$ die linke Seite der Ungleichung $< \varepsilon$ ausfiele (Cauchysches Kriterium). Von vornherein ausgeschlossen ist das nicht, doch gibt es die Schwankungsschranke $k/_{n+k}$ nicht her.

Dieses einfache Beispiel mag illustrieren, in welchem Maße das Phänomen der Stabilisierung gleichsam schon *apriori* mitbedingt ist durch die zunehmende 'Trägheit' von Häufigkeitsfolgen *beliebiger* Urlisten. So verifiziert man anhand der Schwankungsschranke, dass sich die relativen Häufigkeiten für einen Beobachter zwischen dem 10001000-ten und dem 10002000-ten Versuch um insgesamt nicht mehr als 0.0001 ändern, und zwar *völlig unabhängig von den Ergebnissen des Versuchs*. Diese Unempfindlichkeit (und damit der *Eindruck* von Stabilisierung) ist umso stärker ausgeprägt, wenn der Versuch nicht – wie im obigen Beispiel – unter massiv dominierende Einflüsse gerät, die seine Ergebnisse immer wieder in eine andere Richtung drängen. Fehlen solche Einflüsse (was bei empirischen Vorgängen oft der Fall ist), dann erhält man eine „ausgeglichenere" Urliste[10] und dementsprechend weitaus geringere Schwankungen in der Häufigkeitenfolge.

Im Abschnitt über »Implikationen für die Mathematikdidaktik« (S. 326) plädieren die Autoren dafür, das „Häufigkeitskonzept" (samt Stabilisierung) als eine die Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs vorantreibende Leitidee ernst zu nehmen (vor allem in Zusammenhang von Anwendungen). Aber müssen für dieses (im Übrigen sinnvolle) Ziel wirklich »wissenschaftstheoretische Aspekte« explizit herangezogen werden? Vollzieht man die Überlegungen des Beweises zu Bernoullis Theorem mit gleichwahrscheinlichen Fällen nach, so kann man sich immerhin kombinatorisch diejenigen Versuchsreihen (und ihre relative Häufigkeit unter sämtlichen Versuchsreihen) vor Augen führen, bei denen die relative Häufigkeit in hinreichender Nachbarschaft der Wahrscheinlichkeit liegt. Die Behauptung des Theorems lässt sich auf solche Weise als eine Aussage über die Ausgänge eines Laplace-Experiments auffassen (wobei die Wahrscheinlichkeitsannahmen in den Symmetrien der Versuchsvorrichtung stecken).

Für diese Einsicht benötigt man ganz offensichtlich keinerlei wissenschaftsphilosophische Betrachtungen über „Theoretizität", und das angemahnte Forschungsdesideratum, es sei »noch ein ungelöstes Problem, wie derartiges Metawissen [...] mit konkreten Erfahrungen des Schülers« zusammengebracht werden könne, dürfte sich in dieser Form erübrigen. Ohnehin findet sich außer verbalen Subsumtionen unter den Begriff des „theoretischen Terms" nirgendwo eine konkrete Untersuchung zu den maßgeblichen Details der befürworte-

[10] An dieser Stelle wird plausibel, dass eine „zufällige" Folge bzw. Urliste gerade wegen ihrer „Regellosigkeit" diesen Effekt verstärkt.

ten Übertragung von Sneeds „strukturalistischer" Interpretation (eines kleinen Teils) der Physik auf die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.[11] Auf „Hintergrundtheorien" dieser Art, die nur pauschal angerufen werden, kann man in der Forschung eigentlich verzichten (und umso mehr in Lehre und Unterricht).

[11] Auf S. 317 f klingt eher eine gewisse Skepsis an unter Hinweis auf eine »gegenüber der Analogie zur Physik hinausgehende Komplizierung« im Zusammenhang mit statistischen Tests und Cournotschem Prinzip.

IV

Eine methodische Schwierigkeit in P. Lorenzens operativer Begriffslehre[1]

Paul Lorenzen hat in seiner Abhandlung „Methodisches Denken“[2] eine Begriffslehre vorgelegt, die dem rationalen Aufbau der Wissenschaftssprache dienen soll, ohne bereits »wie bei Aristoteles mit der Logik verschmolzen« zu sein (S. 36). Im Unterschied zur Tradition werden Begriffe nicht ontologisch, sondern operativ interpretiert, d. h. sie »werden als etwas unserem Handeln Zugehöriges eingeführt« (S. 36).

Ausgangspunkt bilden Grundaussagen der Alltagssprache, und zwar in affirmativer Form: $s_1, \ldots, s_n\, \varepsilon P$, und in negativer Form: $s_1, \ldots, s_n\, \varepsilon' P$, wobei gewissen (mit Eigennamen versehenen) Subjekten $s_1, \ldots, s_n$ vermöge der Kopula ε oder der negierenden Kopula ε' ein Prädikat P zu- bzw. abgesprochen wird. Eine Liste derartiger »Grundaussagen« liefert das, was Lorenzen »exemplarische Einführung« der in ihnen vorkommenden Prädikate nennt (S. 30). Da die so erstellte »Distinktionsbasis« den Gebrauch der betreffenden Prädikate noch ziemlich unbestimmt lässt, geht Lorenzen dazu über, ihn mittels geeigneter Subsumtionsregeln[3] näher festzulegen. Die Hinzunahme solcher Regeln bildet die Vorstufe zur Bildung von Begriffen (zu welchen man durch Abstraktion gelangt, indem gleichbedeutende Prädikate „identifiziert“ werden).

In den Subsumtionsregeln, genauer: in der von Lorenzen vorgenommenen methodologischen Behandlung dieser Regeln, liegt nun eine Schwierig-

[1] Veröffentlicht in: *Zeitschrift für philosophische Forschung* 32 (1978), S, 99-102. – Den Artikel gebe ich hier in einer späteren (bisher noch nicht publizierten) Fassung wieder, in der die Ansatzpunkte meiner Kritik unverändert sind, jedoch die Argumentation besser verdeutlicht erscheint.

[2] In: *Ratio*, Bd. VII (1965), S. 1-23. Meine Seitenangaben beziehen sich auf den Wiederabdruck in: P. Lorenzen: *Methodisches Denken*, Frankfurt am Main 1968, S. 24-59.

[3] In der späteren Schrift W. Kamlah; P. Lorenzen: *Logische Propädeutik oder Vorschule des vernünftigen Redens*, Mannheim 1967, ist von »Prädikatoren« bzw. »Prädikatorenregeln« die Rede (S. 70 ff). Der dort S. 28 f getroffene Unterschied zwischen Prädikatoren und Prädikaten ist allerdings für die hier durchzuführenden Überlegungen unerheblich und bleibt daher unberücksichtigt.

keit, die ich im Folgenden darstellen und erörtern möchte. Obwohl sich meine kritischen Überlegungen auf ein relativ speziell erscheinendes Detail der „konstruktivistischen“ Begriffslehre beziehen, ist die aufgezeigte Schwierigkeit doch in gewissem Sinn symptomatisch für die Folgen der auf die Spitze getriebenen Idee, rationales Denken methodisch streng aufzubauen (und das heißt vor allem: ohne Rückgriff auf noch nicht gesicherte Elemente).

Eine Subsumtionsregel ist von der Form $x\,\varepsilon P \Rightarrow x\,\varepsilon Q$, wobei P und Q jeweils exemplarisch eingeführte Prädikate darstellen. Solche Regeln sind nach Lorenzen »praktische Anweisungen, die vorschreiben, von gewissen Sätzen zu anderen überzugehen« (*Meth. Denken*, S. 33). Was den Doppelpfeil (von Lorenzen praktisches Wenn-dann genannt) angeht, so heißt es unmittelbar im Anschluss an die zuletzt zitierten Stelle darüber: »Das Zeichen $\Rightarrow$ (Pfeil) wird *exemplarisch eingeführt* [Hervorhebung von P. L.] zur Mitteilung solcher Übergänge. Das Handeln nach diesen Regeln kann praktisch eingeübt werden« (S. 33).

Im Folgenden werde ich aufzeigen, dass dieser Standpunkt problematisch ist. Die aus ihm resultierende Schwierigkeit besteht darin, dass man beim Ausbau „rationalen“ Redens (im Rahmen der von Lorenzen abgesteckten Methodenlehre) über Grundaussagen nicht wirklich hinausgelangen kann.

1. – Will man den Regelpfeil exemplarisch einführen, so hat man ganz allgemein auch Grundaussagen mit mehrstelligen Prädikaten zu betrachten. Der Regelpfeil wäre dann als ein zweistelliges Prädikat $\mathscr{R}$ aufzufassen, welches gewissen Paaren von Gegenständen zugesprochen und (in konverser Form) anderen abgesprochen wird. Hier sei vorübergehend einmal angenommen, für das fragliche Prädikat $\mathscr{R}$ der dritten Sprachstufe (vgl. *Log. Propädeutik*, S. 82) lasse sich eine geeignete Distinktionsbasis erstellen. – Die sich daran anschließende Frage lautet dann: Kann auf dieser Basis auch ein *Begriff* von Subsumtionsregel gewonnen werden? Im Sinne der Lorenzenschen Begriffslehre wären dazu nähere Bestimmungen erforderlich, nämlich solche mittels Subsumtionsregeln! Erst solche Regeln könnten dem nur exemplarisch bestimmten Prädikat $\mathscr{R}$ einen »*Stellenwert* im System« verleihen (vgl. *Meth. Denken*, S. 34 f).

Nun hat eine $\mathscr{R}$ näher bestimmende Subsumtionsregel die folgende (oder dazu konverse) Form:

(*) $\quad (p,q)\,\varepsilon\,\mathscr{R} \Rightarrow (p,q)\,\varepsilon\,\mathscr{S}$

wobei $\mathscr{S}$ wie $\mathscr{R}$ ein Prädikat der dritten Sprachstufe ist. Angesichts dieser Regel muss man sich fragen, welchen logischen Status der darin vorkommende Doppelpfeil hat. Rein formell könnten wir ihn als zweistelliges Prädikat $\mathscr{R}^*$ der vierten Sprachstufe auffassen. Dann ist (*) allerdings keine $\mathscr{R}$ näher bestimmende Regel, sondern allenfalls eine Grundaussage aus einer Distinktionsbasis für $\mathscr{R}^*$:

$$((p,q)\,\varepsilon\,\mathscr{R},(p,q)\,\varepsilon\,\mathscr{S})\;\varepsilon\,\mathscr{R}^*.$$

Jeder Versuch, die Verwendung von $\mathscr{R}^*$ erneut durch Angabe von Regeln zu spezifizieren, führt ganz entsprechend wieder auf ein Regelprädikat $\mathscr{R}^{**}$ höherer Sprachstufe, usf. Offensichtlich gelangen wir so in einen infiniten Regress. Die dabei sukzessive erzeugten Grundaussagen enthalten ausschließlich unbestimmte (d. i. durch Regeln nicht näher bestimmbare) Prädikate.

Man könnte auf den Gedanken kommen, die regressive Unbestimmtheit von $\mathscr{R}$ zu beheben, indem man die Regelprädikate aller Sprachstufen mit $\mathscr{R}$ identifiziert. Dann wäre (*) folgendermaßen zu schreiben:

$$((p,q)\,\varepsilon\,\mathscr{R},(p,q)\,\varepsilon\,\mathscr{S})\;\varepsilon\,\mathscr{R}.$$

In dieser Form kann nun aber das Prädikat $\mathscr{R}$ auch nicht näher als *Begriff* bestimmt werden. Dazu müsste man bereits verstanden haben, dass die Satzfunktion $(p,q)\,\varepsilon\,\mathscr{R}$ hier in einer praktischen Regel verwendet wird. Hat man das nicht verstanden, so lernt man diesen Gebrauch keinesfalls durch (*). Denn in der Form $(p_0,q_0)\,\varepsilon\,\mathscr{R}$ (p_0 Name für $(p,q)\,\varepsilon\,\mathscr{R}$, q_0 Name für $(p,q)\,\varepsilon\,\mathscr{S}$) erscheint (*) überhaupt nicht als Regel, sondern *allenfalls als weitere Grundaussage* in einer Distinktionsbasis von $\mathscr{R}$. Somit kann ein Regelsystem nicht dazu dienen, die Verwendung des Regelprädikates $\mathscr{R}$ als Begriff festzulegen.

2. – Ist auch in einer strengen methodischen Ordnung ein durch Regeln näher bestimmter Regel-Begriff nicht zu gewinnen, so bleibt immer noch das von Lorenzen geforderte Verfahren, das Regel-Prädikat $\mathscr{R}$ (bzw. den »Pfeil« '$\Rightarrow$') durch eine Distinktionsbasis von Grundaussagen exemplarisch einzuführen.

Dazu müssten unter $\mathscr{R}$ subsumierbare Beispiele sowie ggfs. unter $\mathscr{R}$ nicht subsumierbare Gegenbeispiele angegeben werden. Gegenbeispiele, also p,q mit $(p,q)\,\varepsilon'\,\mathscr{R}$ sind möglich, sofern p und q nicht beide schon Entitäten sind, die sich (wie Aussagen oder Satzfunktionen) als Vorder- und Hinterglied in ein Regelschema einsetzen lassen. Anderenfalls würde $(p,q)\,\varepsilon'\,\mathscr{R}$ den Übergang von p nach q vermöge einer praktischen Regel ausschließen, obwohl doch dieser Übergang sehr wohl als »Bestandteil« einer »zu erlernenden Sprache« vorkommen kann (vgl. *Meth. Denken*, S. 33). Dagegen sind etwa '(Peter, $x\,\varepsilon$ Rabe)' oder '(Tier, Lebewesen)' geeignete Gegenbeispiele.[4]

Die ganze Schwierigkeit liegt in den Beispielen (und Gegenbeispielen), bei denen p und q sprachlich zulässige Ausdrücke sind. Ein Beispiel bestünde in der Angabe zweier Aussagen oder Satzfunktionen p_0, q_0, für die gilt: $(p_0, q_0)\,\varepsilon\,\mathscr{R}$, etwa $(x\,\varepsilon\,\text{Rabe}, x\,\varepsilon\,\text{Tier})\,\varepsilon\,\mathscr{R}$. Zunächst liegt damit lediglich eine Grundaussage vor, die das geordnete Paar '(Rabe, Tier)' als Anwendungsfall einer *noch weitgehend unbestimmten* Beziehung $\mathscr{R}$ qualifiziert. Auch allgemein ist im Rahmen einer (hypothetisch unterstellten) exemplarischen Einführung des Regelpfeils das Schema '$x\,\varepsilon P \Rightarrow x\,\varepsilon Q$' nicht als Regel zu verstehen, in der mittels '$\Rightarrow$' die Prädikate P, Q näher bestimmt werden, sondern umgekehrt als eine Grundaussage, in der das Paar $(x\,\varepsilon P, x\,\varepsilon Q)$ eine die Regelbeziehung exemplifizierende Instanz darstellt. Daher müssen P, Q bereits *anderweitig* bestimmt worden sein. Diese Bestimmung kann aber höchstens durch Grundaussagen erfolgen, da eine Ausformung zu Begriffen die Verwendung von Regeln erforderlich macht, die auf dieser Stufe des Sprachausbaus methodisch noch nicht gesichert ist. Das heißt: auch Grundaussagen, welche die Regelbeziehung exemplifizieren, können dazu grundsätzlich nur Prädikate (und keine Begriffe) verwenden. Die Regelbeziehung $\mathscr{R}$ (bzw. $\Rightarrow$) lässt sich exemplarisch (wenn überhaupt) nur anhand ihrerseits unterbestimmter Prädikate „einführen“.

Andererseits scheint der konstruktivistische Wissenschaftstheoretiker zu erwarten, dass sich mit dieser und ggfs. weiteren „distinguierenden“ Grundaussagen das Prädikat $\mathscr{R}$ gleichsam als vorbegriffliches Stadium von '$\Rightarrow$' in hinlänglichem Maße konstituiert, so dass es damit möglich ist, in „Regeln“, die mittels $\mathscr{R}$ formuliert werden, die darin benützten Prädikate näher zu bestimmen. Diese müssen natürlich andere sein als die Prädikate, mit denen bei der exemplarischen Einführung der Regelbeziehung die dazu erforderlichen Grundaussagen gebildet wurden (s. o.).

Lorenzen will allerdings zum Verständnis von '$\Rightarrow$' »nicht auf eine kinderpsychologische Tatsache« (*Meth. Denken*, S. 30) zurückgreifen und ebensowenig »auf die in der natürlichen Sprache enthaltene Logik« (*Konstruktive Wissenschaftstheorie*, S. 176). Dennoch soll seiner Ansicht nach »das praktische Wenn-dann … vor aller Theorie zu lernen« sein (loc. cit., S. 176). Soweit

[4] Man kann freilich auch Regeln zulassen, die nicht den Übergang zwischen Sätzen oder Satzfunktionen betreffen, wie z. B. $n \Rightarrow n\,|$ in der Arithmetik von Lorenzen (*Meth. Denken*, S. 45). Dann ist meine Bemerkung über Gegenbeispiele zu modifizieren (oder ganz wegzulassen). Die folgenden Einwände, auf die es allein ankommt, werden dadurch nicht berührt.

das jedoch darauf hinausläuft, sich auf ein exemplarisch eingeführtes Regel-Prädikat zu beschränken, bleiben wir beim Ausbau einer rationalen Sprache generell auf einfache Distinktionsbasen von Grundaussagen angewiesen. *Begriffe im eigentlichen Sinne lassen sich auf diese Weise überhaupt nicht gewinnen.* Dazu müsste demjenigen, der das „Sprachspiel" erlernt, nämlich zumindest *explizit erläutert* werden, dass eine Regel wie '$x\,\varepsilon\,$Rabe $\Rightarrow x\,\varepsilon\,$Tier' eine generalisierende Subsumtion zum Ausdruck bringt, nämlich aller Gegenstände s, für welche die Grundaussage '$s\,\varepsilon\,$Rabe' zutrifft, unter das Prädikat 'Tier'. Eine solche Erläuterung ist nicht zurückführbar auf die exemplarische Einführung eines Prädikats $\mathscr{R}$; vielmehr steckt in ihr ein praktisches „Wenn-dann" dergestalt, dass immer dann, wenn Bezug auf einen Raben genommen wird, dieser ein Tier genannt werden darf.

In der konstruktivistischen Wissenschaftstheorie gibt es für einen so ausgeübten vortheoretischen Gebrauch von logischer Allgemeinheit keinen systematischen Ort und offenbar auch keinen brauchbaren Ersatz, solange behauptet wird, das „praktische Wenn-dann" könne anhand einfacher »Grundaussagen … exemplarisch eingeführt« werden.

Fazit: Dass in einer dem Anspruch nach rational konstruierenden Begriffslehre ausgerechnet dasjenige Methoden-Element, das für den Übergang von schwach bestimmten, nur exemplarisch eingeführten Prädikaten zu eigentlichen Begriffen verantwortlich ist, seinerseits mit der solchen Prädikaten eigentümlichen Unterbestimmtheit behaftet ist (und bleibt), ist von vornherein ein wesentlicher Schwachpunkt in Lorenzens Methodologie.

Auf dem Wege zu einer logischen Analyse des Evidenzbegriffs[1]

Die folgenden Überlegungen gelten dem Begriff der Evidenz; es sollen Möglichkeiten dargelegt werden, sich einem Verständnis dieses Konzeptes aufgrund begrifflich-logischer Präzisierung zu nähern.

Der bedeutenden Rolle, die das Thema „Evidenz“ von der Antike bis in unsere Zeit hinein gespielt hat und immer noch spielt, möge eingangs durch einen kurzen Rückblick auf einige der wichtigsten Stationen dieser Entwicklung Rechnung getragen werden. Sie beginnt bei Aristoteles. Er fordert in seiner Wissenschaftslehre, dass die Grundsätze oder Axiome jeder Wissenschaft evident sein sollen. Der Begriff „evident“ bezeichnet dabei eine Eigenschaft von Sätzen: nämlich als wahr einzuleuchten, ohne eines Beweises zu bedürfen. In ungefähr dieser Bedeutung dringt der Evidenzbegriff auch in die damalige Mathematik ein; er hat dort zwei Jahrtausende kaum angefochten geherrscht bis einschließlich bei Frege. Erst das Vordringen der formalistischen Axiomatik hat die Auffassung der Grundlagentheoretiker verändert. Den Axiomen mathematischer Theorien wird Evidenz abgesprochen; stattdessen fordert man ihre Widerspruchsfreiheit (Hilbert). Um jedoch über Theorien und ihre Axiome sprechen zu können, wie das bei Untersuchungen über Widerspruchsfreiheit erforderlich wird, ist eine Metatheorie vonnöten. Von deren Prinzipien wird Evidenz verlangt. Der Evidenzbegriff hat demnach noch ein eingeschränktes Recht. Später hat man bemerkt, dass sich die Berufung auf Einsicht keineswegs auf ein so enges Feld eingrenzen lässt wie das die Formalisten gerne gesehen hätten.[2]

---

[1] Dem Aufsatz liegt ein Vortrag zugrunde, den ich am 23.10.1975 im Philosophischen Seminar der Universität Hamburg gehalten habe; er wurde veröffentlicht in: *Allgemeine Zeitschrift für Philosophie* 6/3 (1981), S. 60-68.

[2] Vgl. dazu etwa Kap. II (bes. S. 265 ff.) von W. Stegmüller: *Metaphysik, Skepsis, Wissenschaft*, 2. verb. Aufl., Berlin; Heidelberg; NewYork 1969, oder Kap. 4 meines Traktats *Theorie und Recht-*

In der Philosophie selbst ist gelegentlich eine mehr affirmative Haltung gegenüber dem Evidenzbegriff anzutreffen. Auf verschiedene Weise suchte man seit Descartes im Phänomen der Evidenz, im Evidenzerlebnis einen Angelpunkt der Erkenntnis. Die Theorie F. Brentanos und deren Ausbau zu einer allgemeinen Phänomenologie der Erkenntnis durch Husserl sind die bekanntesten Beispiele. Dabei geht es bei Husserl nicht um eine Theorie des Evidenzbegriffs. Vielmehr soll die phänomenologische Entfaltung aller Erkenntnisweisen die universale Funktion der Evidenz zutage fördern: Evidenz als eine »auf das gesamte Bewußtseinsleben bezogene Weise der Intentionalität« erweisen.[3]

Es scheint wohl kaum übertrieben, wenn man feststellt, dass die traditionellen Evidenzlehren sämtlich anfechtbar sind und ausnahmslos als umstritten gelten. Das Problem der Evidenz ist nach wie vor ungelöst, und eine befriedigende (vollständige) Lösung liegt auch wohl noch in weiter Ferne. – Allerdings gibt es nicht *das* Problem der Evidenz. Bei genauerer Unterscheidung liegen nämlich zwei Probleme vor: ein Explikationsproblem (Was ist unter Evidenz zu verstehen?) und ein Existenzproblem (Gibt es Evidenz?). W. Stegmüller behauptet in seinem Buch *Metaphysik, Skepsis, Wissenschaft*, dass beide Probleme unlösbar seien. Das Explikationsproblem deshalb, weil der Evidenzbegriff »nur an Hand von Beispielen … erläutert« werden könne.[4] Das Existenzproblem hält Stegmüller sogar für »absolut unentscheidbar … Denn alle Argumente für die Evidenz stellen einen circulus vitiosus dar und alle Argumente gegen sie einen Selbstwiderspruch«.[5]

Diese Einsicht darf als grundlegend und wichtig gelten; man muss sie jedoch nicht unbedingt für das letzte Wort in Sachen Evidenz halten. Immerhin haben in der Folgezeit einige Logiker versucht, so etwas wie eine analytische Theorie der Evidenz aufzustellen, unter ihnen N. Rescher[6] und K. Lehrer[7]. Rescher untersucht verschiedene Evidenzbeziehungen zwischen Aussagen, ein Thema, das hier nicht weiter verfolgt werden soll. Die Theorie von Lehrer ist

---

fertigung. Untersuchungen zum Rechtfertigungsproblem axiomatischer Theorien in der Wissenschaftstheorie, Braunschweig 1975.

[3] E. Husserl: Formale und transzendentale Logik. *Jahrb. f. Philos. u. phän. Forsch.*, Bd. 10, Halle (Saale) 1929, S. 1-298, hier: S. 143.

[4] Loc. cit., S. 162

[5] Loc. cit., S. 168 f.

[6] A Theory of Evidence. In: *Philosophy of Science*, vol. 25 (1958), S. 83-94.

[7] Justification, Explanation, and Induction. In: *Induction, Acceptance, and Rational Belief*, ed. by M. Swain, Dordrecht 1970, S. 127-134, sowie: Evidence and Conceptual Change. In: *Logic, Language, and Probability*, ed. by R. J. Bogdan, I. Niiniluoto, Dordrecht 1973, S. 100-107.

unmittelbarer als ein Beitrag zur Explikation des Evidenzbegriffs zu werten; sie ist nämlich darauf gerichtet, *Evidenz als eine Eigenschaft von Aussagen* zu präzisieren. Lehrers Überlegungen sind in Studien entwickelt, die dem Aufbau einer allgemeinen Theorie des induktiven Schließens dienen.

Die hier zu schildernden Studien entstanden wenig später unabhängig davon in einem ganz anderen Zusammenhang. Es handelte sich dabei um die Aufgabe, die zu Rechtfertigungszwecken oft herangezogene These zu untersuchen, wonach ein System evidenter Sätze keinen Widerspruch einschließen könne, oder umgekehrt: den Aussagen eines widerspruchsvollen Systems niemals Evidenz zukomme. – Woher weiß man das? Welche Merkmale muss der Begriff der Evidenz mindestens besitzen, wenn diese niemals angefochtene These beweisbar sein soll? Diese Fragen führen zu Untersuchungen, in die sich die Theorie von Lehrer zwanglos einfügt. In der nachstehenden Übersichtsdarstellung soll es dabei nicht so sehr auf technische Einzelheiten als vielmehr darauf ankommen, den methodischen Ansatz und mögliche Weiterentwicklungen der umrissenen Gedankengänge zu verdeutlichen.

Als Methode der Untersuchung ist im Titel die logische Analyse genannt. Aber worin besteht eine logische Analyse? Nach F. Waismann[8] ist logische Analyse »die möglichst genaue und vollständige Darlegung der Grammatik eines sprachlichen Ausdrucks«. Dies ist nun noch etwas näher zu erläutern und dabei auf das hier anstehende Explikationsproblem zuzuschneiden.

Nehmen wir einmal an, wir hätten überhaupt keine Vorstellung von der ‘Sache’, auf welche der Begriff der Evidenz abzielen soll. Nun treffen wir auf einen Text, in dem der Autor das Wort „evident“ ohne Erklärung ständig verwendet, obwohl kein Nachschlagewerk uns darüber Auskunft gewährt. Der Autor möge sogar zu erkennen geben, dass er diesen Begriff für nicht definierbar hält. Diese Situation ist vielleicht gar nicht so fiktiv und ungewöhnlich; sie erinnert ein wenig an die Lage desjenigen, der einen überlieferten philosophischen Text durch eine immanente Interpretation verstehbar machen will. In beiden Fällen hilft man sich auf ähnliche Art: Man versucht die Sätze, in denen der unbekannte Begriff vorkommt, als Bestandteile oder Bruchstücke einer Definition aufzufassen. Die weitere logische Zergliederung dieser Teile ist die logische oder, wie man hier genauer sagen könnte: *Kontextanalyse* des Begriffs.

Die Kontextanalyse darf man als eine Art logischer Hochstilisierung des Verfahrens ansehen, mit dem Begriffe überhaupt gerlernt werden. Die we-

[8] *Was ist logische Analyse?* Gesammelte Aufsätze mit einer Einleitung herausgeg. von G. H. Reitzig, Frankfurt/M. 1973, S. 65.

nigsten Begriffe lernen wir ja durch eine Definition; meist eignen wir sie uns im Zusammenhang, im Kontext des alltäglichen oder wissenschaftlichen Gebrauchs an. Eigentümlich schwierig ist nur der Schritt vom bloßen Wissen *über* einen Begriff zum Begreifen *mittels* des Begriffs. Bei einem Gebilde solch theoretischer Natur wie dem Evidenzbegriff besteht natürlich wenig Hoffnung, ihn gleichsam auszuschöpfen, indem man alle relevanten Kontexte heranzieht. Das beste, was man erwarten kann, ist seine immer tiefergehende Bestimmung unter Wahrung von Konsistenz und Adäquatheit, ein Unterfangen, das für den Anfang schwierig genug ist.

Es ist nun zu zeigen, wie die Kontextanalyse auf den Begriff der Evidenz angewendet werden kann. Dazu ist es nötig, sich zunächst eine Reihe geeigneter Kontexte zu verschaffen. Nicht jeder Kontext eignet sich, besonders anfangs, zur Analyse. Als Beispiel sei der Satz gewählt: „Evidente Aussagen vermitteln ein nicht mehr steigerungsfähiges Gefühl der Überzeugung.“ – Man mag diesen Satz als einen relevanten Kontext ansehen; dennoch eignet er sich nicht gut für eine logische Zergliederung, denn das in ihm angesprochene Überzeugungsgefühl gehört in die Sphäre psychischer Phänomene. Etwas besser eignet sich die Behauptung, dass eine evidente Aussage stets wahr sei. Allerdings kommt man auch hier nur weiter, wenn der Analyse eine ganz bestimmte Explikation des Wahrheitsbegriffs (etwa die von Tarski oder eine andere) zugrunde gelegt wird. Dies bringt besondere, wenn auch vermutlich nicht unüberwindbare Schwierigkeiten mit sich, deren Bearbeitung auf dem Wege zu einer möglichst umfassenden Analyse des Evidenzbegriffs zu leisten wäre.

Als von vornherein geeigneter Kontext erscheint dagegen die folgende zur Analyse herangezogene These: „Ein System evidenter Aussagen ist widerspruchsfrei.“ – Die besondere Eignung dieses Kontextes beruht darauf, dass der in ihm mit dem Begriff „evident“ in Zusammenhang gebrachte Begriff der Widerspruchsfreiheit rein syntaktischer Natur ist. Wir stehen also hier nicht, wie beim Begriff der Wahrheit oder gar des Überzeugungsgefühls, vor der Aufgabe, semantische bzw. subjektive Momente in die Rekonstruktion einbeziehen zu müssen. Zumindest ist damit der Anfang der zu leistenden Analyse erleichtert. Um die Analyse auf festen Boden zu stellen, bedarf es nämlich nur noch der Vereinbarung, sich den Begriff der Aussage, der in der genannten These vorkommt, bezüglich einer vorgegebenen formalen Sprache $\mathscr{L}$ expliziert zu denken, am besten nach den in der elementaren Prädikatenlogik üblichen syntaktischen Regeln. So gebildete Aussagen mögen mit $A, B, C \ldots$ bezeichnet werden. Der Evidenzbegriff hat dann den Status eines Prädikates

Φ, das sich auf die Aussagen der Sprache $\mathscr{L}$ bezieht. – Worin besteht nun die Kontextanalyse dieses unbekannten Prädikates Φ? Es ist nicht (jedenfalls vorerst nicht) das Ziel, zu erklären, wann das Prädikat Φ einer Aussage zukommt oder nicht. Das wäre ja eine *unmittelbare* Definition des Evidenzbegriffs, wie sie im Übrigen K. Lehrer versucht hat. In der Kontextanalyse sind, im Unterschied dazu, Voraussetzungen über Φ freizulegen, unter denen die als Kontext zugrunde gelegte Behauptung gültig ist. Somit lautet das Problem vorerst folgendermaßen: *Welche Bedingungen muss das Prädikat Φ erfüllen, damit jedes System $\mathfrak{S}$ von Aussagen A mit $\Phi(A)$ widerspruchsfrei ist?*

Wie findet man solche Bedingungen? Sicherlich führt dabei kein Rezept ans Ziel, sondern gewöhnlich nur eine geeignete Verbindung von logischem „Zerlegen" und heuristischer Technik. Im übrigen kann es ferner auch nur darum gehen, hinreichende Bedingungen aufzustellen und hier die Frage auszuklammern, ob sich diese Bedingungen noch abschwächen lassen. Ein mögliches Resultat der Analyse sind die folgenden beiden Bedingungen[9] für Φ:

I. *Schwache Konsistenz*: Eine beliebige Aussage A mit $\Phi(A)$ ist nicht rein logisch widerlegbar.
II. *Konjunktivität*: Wenn $\Phi(A)$ und $\Phi(B)$, so gilt auch $\Phi(A \wedge B)$.

In der Tat ist auf der Basis dieser beiden Bedingungen der gewählte Kontext rekonstruierbar. Man zeigt nämlich ohne Mühe den *Satz*: Sei Φ ein schwachkonsistentes und konjunktives Prädikat für Aussagen der Sprache $\mathscr{L}$ und $\mathfrak{S}$ irgendein System solcher Aussagen derart, dass $\Phi(A)$ für jedes A aus $\mathfrak{S}$ gilt. Dann ist $\mathfrak{S}$ widerspruchsfrei.[10]

Vielleicht werden manche Leser sich an dieser Stelle fragen: Was hat das alles denn noch mit dem Evidenzbegriff zu tun? Von Evidenz oder evidenten Aussagen ist ja überhaupt nicht mehr die Rede. Das stimmt. Allerdings suchten wir in der logischen Analyse auch nicht nach einer direkten Definition des Evidenzbegriffs, sondern nur nach ersten Bedingungen, die an ihn zu stellen sind. Als erste solche Bedingungen ergaben sich schwache Konsistenz und Konjunktivität. Provisorisch möge daher ein (auf $\mathscr{L}$-Aussagen bezogenes) Prädikat Φ *Evidenzbegriff* (*bezüglich* $\mathscr{L}$) – symbolisch: $\mathrm{Ev}_L(\Phi)$ oder

[9] Die in II auftretende Aussage $A \wedge B$ bezeichnet das aus A und B gebildete logische Konjugat (gelesen: *A und B*).

[10] Für die Einzelheiten eines Beweises vgl. man Schreiber loc. cit., S. 137 f. Der Grundgedanke ist einfach: Wäre $\mathfrak{S}$ widerspruchsvoll, so wäre mit Hilfe eines Widerspruchs W dasjenige Konjugat von Aussagen aus $\mathfrak{S}$ rein logisch widerlegbar, aus dem W abgeleitet wurde. Jedem solchen Konjugat kommt aber nach II das Prädikat Φ zu, wodurch mit I ein (Meta-)Widerspruch entsteht.

kürzer Ev(Φ) – genannt werden, wenn Φ schwach-konsistent und konjunktiv ist. Nun ist diese Erklärung zunächst rein nominell; es kommt jetzt darauf an, sie als sinnvoll zu rechtfertigen. Die damit verbundenen Probleme sind solche der Adäquatheit; mit ihrer Bearbeitung tun wir die ersten Schritte in Richtung einer analytischen Theorie des Evidenzbegriffs. Die vergleichsweise einfachste Aufgabe im Zusammenhang mit den Bedingungen I und II besteht darin, sie als Merkmale eines (natürlich vagen) inhaltlichen Konzeptes von Evidenz plausibel zu machen. Tatsächlich lässt sich einsichtig machen, dass die beiden Bedingungen für sich genommen nicht den Intentionen zuwiderlaufen (ihnen auch durchaus entsprechen), die man an den inhaltlichen Begriff der Evidenz knüpft. Was die schwache Konsistenz anbetrifft, so stellt sie im wesentlichen nichts anderes dar als das auf Evidenz anstelle von Wahrheit bezogene Postulat Kants von »Übereinstimmung einer Erkenntnis mit den allgemeinen und formalen Gesetzen des Verstandes und der Vernunft« (KrV/B84). Dass eine *schon logisch widerlegbare* Behauptung unwahr sein muss, liegt wohl auf der Hand. Dass sie dann auch nicht evident sein kann, wird in I als sinnvolle *Forderung* an den Begriff „evident“ eingebracht. – Auch die Konjunktivität stellt für sich genommen kein problematisches Merkmal dar: in allen Aussagen, die durch konjunktive Verknüpfung irgendwelcher als evident angenommener Aussagen entstehen, bleiben diese gleichsam konserviert. Sie hintereinander zu schreiben, worauf eine solche Verknüpfung hinausläuft, liefert ein syntaktisches Gebilde, in dem die Evidenz der verwendeten Aussagen gewissermaßen unverfälscht erhalten bleiben und sich auf das Ganze übertragen kann.[11]

Gleichwohl kann die durch die Bedingungen I und II gegebene Erklärung und jede ihr ähnliche Definition noch auf drei Arten inadäquat sein und damit ihr Ziel verfehlen:

- Sie könnte *leer* sein (wenn es nämlich keinen Evidenzbegriff im Sinne der Erklärung gibt).
- Sie könnte in dem Sinne *zu weit* sein, dass sie unter anderen auch solche Begriffe umfasst, die man, an inhaltlichen Vorstellungen gemessen, gar nicht als Evidenzbegriffe ansehen möchte.
- Sie könnte in dem Sinne *zu eng* sein, dass *alle* von ihr erfassten Aussagenprädikate eine Eigenschaft gemeinsam haben, die im Hinblick auf inhaltliche Vorstellungen vom Begriff der Evidenz nicht wünschenswert ist.

[11] Für eine etwas genauere Erörterung dieser Plausibilitätsfragen vgl. Schreiber loc. cit., S. 135 ff.

Das diese drei Punkte betreffende Ergebnis lautet: Der Begriff ‘Ev’ ist nicht leer, unter ihn fällt z. B. das von Lehrer konstruierte Evidenzprädikat (siehe weiter unten). ‘Ev’ ist auch nicht inadäquat im Sinne zu großer Enge, jedenfalls soweit dies aufgrund der bisherigen Untersuchungen abzusehen ist. Mit Sicherheit aber ist er zu weit. Das lässt sich am besten dadurch illustrieren, dass eine Reihe ganz unterschiedlicher Prädikate $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ vorgestellt wird, die alle Evidenzbegriffe im Sinne der oben getroffenen Erklärung sind:

$\Phi_0(A)$: A ist Konjugat logischer Axiome.[12]

$\Phi_1(A)$: A ist gültig bei $\mathfrak{I}$ (wo $\mathfrak{I}$ eine vorgegebene semantische Interpretation[13] der Sprache $\mathscr{L}$ ist).

$\Phi_2(A)$: A ist aus $\mathfrak{K}$ ableitbar (wo $\mathfrak{K}$ eine widerspruchsfreie Menge von $\mathscr{L}$-Aussagen ist).

$\Phi_3(A)$: A ist nicht rein logisch widerlegbar und wahrscheinlicher als alle $\mathscr{L}$-Aussagen, die nicht logische Folgerungen aus A sind.

Zunächst einige etwas ausführlichere Bemerkungen zum letzten Beispiel. Das Prädikat Φ_3 ist der Evidenzbegriff von K. Lehrer. Der darin auftretende Begriff von Wahrscheinlichkeit wird von Lehrer durch ein *subjektives Wahrscheinlichkeitsmaß* P_i präzisiert, das überdies noch mit einem Zeitindex i versehen ist. In seiner Arbeit von 1973 erklärt Lehrer den Evidenzbegriff Φ_3 genauer wie folgt: A ist *evident* (d. h. $\Phi_3(A)$) genau dann, wenn A nicht rein logisch widerlegbar (d. h. aus A kein Widerspruch ableitbar) ist und für alle nicht aus A ableitbaren Aussagen S gilt: $P_i(A) > P_i(S)$.

Die schwache Konsistenz von Φ_3 ist als Bestandteil dieser Definition selbstverständlich gegeben. Der Nachweis der Konjunktivität ergibt sich aus technischen Betrachtungen im Anhang von Lehrer (1970)[14]. Da diese Überlegungen aber mit Begriffen und formallogischen Details befrachtet sind, die in unserem Zusammenhang keine Rolle spielen, soll im Folgenden die Konjunktivität von Φ_3 in einem einfachen und auf die hier anstehende Spezialproblematik zugeschnittenen Beweis dargetan werden.

Sei dazu $\Phi_3(A)$und $\Phi_3(B)$ vorausgesetzt. Dann ist entweder B aus A ableitbar oder umgekehrt; andernfalls ergäbe sich nämlich aus $\Phi_3(A)$ sofort $P_i(A) > P_i(B)$ und entsprechend aus $\Phi_3(B)$ die dem widersprechende Ungleichung

[12] „Logisches Axiom“ heißt hier soviel wie „prämissenfreie Schlussregel der Prädikatenlogik“; vgl. dazu etwa F. v. Kutschera: *Elementare Logik*, Wien; New York 1967.

[13] Siehe zu diesem Begriff z. B. v. Kutschera loc. cit., S. 136 ff.

[14] Loc. cit., S. 128 f.

$P_i(B) > P_i(A)$. Wir betrachten jetzt nur den Fall der Ableitbarkeit von B aus A (der umgekehrte Fall erledigt sich nach einer völlig analogen Überlegung). Aus den für ein Wahrscheinlichkeitsmaß vorauszusetzenden Eigenschaften resultiert nun, dass die Wahrscheinlichkeit von B unter der Hypothese A gleich 1 ist (B *folgt* ja schon aus A), symbolisch: $P_i(B \mid A) = 1$. Daraus folgt die Beziehung

(*) $$P_i(A \wedge B) = P_i(A) \cdot P_i(A \mid A) = P_i(A).$$

Als nächstes kommen wir zum Nachweis von $\Phi_3(A \wedge B)$. Es ist $A \wedge B$ nicht rein logisch widerlegbar, da sonst die Negation von B aus A ableitbar und damit aufgrund der Ableitbarkeit von B aus A auch A selbst logisch widerlegt wäre. Wegen $\Phi_3(A)$ kann dies jedoch nicht der Fall sein. Somit bleibt nur noch zu zeigen, dass $P_i(S) < P_i(A \wedge B)$ gilt, falls S eine nicht aus $A \wedge B$ ableitbare Aussage ist. Ist aber S nicht aus $A \wedge B$ ableitbar, so erst recht auch nicht aus A. Also muss wegen $\Phi_3(A)$ und (*) gelten: $P_i(S) < P_i(A) = P_i(A \wedge B)$. Damit ist Φ_3 als Evidenzbegriff im Sinne der Bedingungen I und II erwiesen.

Auf die übrigen Beispiele braucht in unserem Zusammenhang inhaltlich nicht näher eingegangen zu werden.[15] Nur dies sei hervorgehoben: Alle genannten Prädikate, vielleicht das Lehrersche Prädikat ausgenommen, verdienen nicht wirklich Begriffe von Evidenz genannt zu werden. Unsere provisorische Erklärung ist also tatsächlich inadäquat im Sinne zu großer Weite. Allerdings war das auch kaum anders zu erwarten. Wir sind von einem Minimum an Kontext ausgegangen, das Ergebnis ist entsprechend nur eine höchst partielle Explikation. Um den Bereich der Evidenzbegriffe durch weitere Bedingungen einzugrenzen, müssen wir weitere Kontexte zur logischen Analyse heranziehen. Als relevanter Kontext bietet sich etwa die bereits erwähnte Behauptung an, dass evidente Aussagen stets wahre Aussagen seien. Am ehesten Aussicht auf Erfolg könnte dabei vermutlich eine logische Analyse haben, die auf einen Wahrheitsbegriff zurückgreift, den man im Rahmen einer Kohärenztheorie der Wahrheit präzisieren kann, wie sie etwa N. Rescher (1973) entwickelt hat.[16] Aber ungeachtet der Vorgehensweise im Einzelnen gilt: Welches neue Merkmal auch immer in die Explikation aufgenommen wird, jedesmal sind von neuem die drei Adäquatheitsprobleme aufzurollen: ist das Explikat leer, zu weit oder zu eng?

Abschließend soll noch eine Vorstellung davon vermittelt werden, wie unbequem das dritte dieser Probleme ist. Es besteht in der Frage, ob aus den

---

[15] Die einfachen Analysen zu Φ_0 und Φ_2 finden sich in: Schreiber loc. cit., S. 138 f.

[16] *The Coherence Theory of Truth*, Oxford 1973.

Merkmalen des Explikates nicht Eigenschaften resultieren, die man im Hinblick auf eine Explikation des Begriffs der Evidenz als unerwünscht ansehen muss. Das Bedauerliche an diesem Problem ist der Umstand, dass es grundsätzlich nicht gelöst werden kann. Kein Mensch kann übersehen, was nicht alles aus gegebenen Bedingungen logisch folgt und ob sich nicht vielleicht eine unerwünschte Folgerung darunter befindet. Erst recht kann man hier nicht *beweisen*, dass niemals eine Eigenschaft resultiert, die sich bei genauerer Untersuchung als inadäquat herausstellt. Dazu bedürfte es zumindest eines Überblicks über sämtliche unerwünschten Eigenschaften. Ein solcher Überblick ist aber völlig illusorisch. Statt dessen bleibt nur Folgendes zu tun: Man prüft zunächst die Bestandteile des Explikates selbst auf ihre Plausibilität hin. In unserem Falle wäre also – wie oben geschehen – zu überlegen, ob schwache Konsistenz und Konjunktivität, jeweils für sich genommen, wünschenswerte Eigenschaften eines Evidenzbegriffs darstellen. Als nächstes hat man spezielle unerwünschte Eigenschaften aufzusuchen. Für jede einzelne von ihnen ist dann zu untersuchen, ob sie im Explikat enthalten ist oder nicht.

Es sei dies an einem Beispiel illustriert. Das unerwünschte Merkmal, das hier zur Rede stehen soll, ist die deduktive Erblichkeit. Ein Aussagenprädikat Φ heißt *deduktiv-erblich*, wenn es jeder Aussage zukommt, die sich aus einem System deduzieren lässt, dessen Aussagen A die Eigenschaft Φ besitzen. – Warum ist die deduktive Erblichkeit im Hinblick auf den Begriff der Evidenz etwas Unerwünschtes? Nun, sie würde doch beinhalten: logische Folgerungen aus evidenten Aussagen sind wiederum evident. Diese letztere Evidenz wäre dann aber nur mehr *mittelbar* (wie Brentano dies nennt), sie wäre nicht, wie bereits bei Aristoteles, auf eine möglichst kleine Gruppe etwa als Axiome ausgezeichneter Prinzipien zu reservieren. Ein deduktiv-erblicher Evidenzbegriff wäre kein adäquates Explikat für den inhaltlichen Begriff der Evidenz. Wir müssen uns daher vergewissern, dass schwache Konsistenz und Konjunktivität (unsere bisherigen Merkmale) *nicht die deduktive Erblichkeit nach sich ziehen*. Dies lässt sich durch das folgende einfache Verfahren nachweisen: Man sucht ein spezielles Aussagenprädikat, das zwar schwach-konsistent und konjunktiv, nicht aber deduktiv-erblich ist. Ein solches Beispiel bildet das vorhin angeführte Prädikat Φ_0[17]; auch der Evidenzbegriff Φ_3 von Lehrer ist – das sei ebenfalls ohne Beweis vermerkt – nicht deduktiv-erblich. Methodisch völlig entsprechende Überlegungen wären nun für alle Merkmale zu führen, die

[17] Das ergibt sich unmittelbar aus der Widerspruchsfreiheit der Prädikatenlogik; vgl. Schreiber loc. cit., S. 139.

sich im Weiteren als unerwünscht herausstellen.[18] Solche Merkmale sind nicht leicht zu finden. Ein weiteres ist die Negationstreue.[19] Negationstreue Aussagenprädikate sind dadurch gekennzeichnet, dass sie dem Negat einer Aussage zukommen, wenn sie der Aussage selbst nicht zukommen. Tatsächlich bildet Φ_0 wieder ein geeignetes Beispielprädikat, aus dem hervorgeht, dass die Negationstreue nicht schon aufgrund der Bedingungen I und II gegeben ist.

Zum Schluss nur noch diese Bemerkungen: Ziel des vorliegenden Beitrages war, in Umrissen zu zeigen, wie eine logische Analyse (oder Kontextanalyse) des Evidenzbegriffs vonstatten gehen könnte. Dabei war von vorneherein klar: diese Analyse vermag nur formale Eigenschaften der Evidenz freizulegen, ihre Fundiertheit in einem Evidenzerlebnis bleibt außer Acht. Deshalb ist die Kenntnis der formalen Eigenschaften aber nicht gleich wertlos, denn sie etabliert einen allgemeinen Rahmen für weitere Untersuchungen zum Explikationsproblem der Evidenz; insbesondere gestattet sie die logische Rekonstruktion derjenigen Kontexte, von denen die Analyse ihren Ausgang nimmt. Was schließlich die hier versuchte Analyse selbst betrifft, so ist sie noch sehr lückenhaft und zeitigt – wie zu sehen war – eine ganze Reihe offener Probleme. Einmal fehlt es an geeigneten relevanten Kontexten; ferner müsste eine hinlänglich umfassende Klasse von inadäquaten Merkmalen spezifiziert werden. Vielleicht sollte man der bloßen Analyse auch entgegengehen, indem man, wie K. Lehrer, spezielle Evidenzbegriffe konstruiert und diese untersucht. Das hat zwar ein wenig den Anstrich des Spekulativen, aber Spekulatives ist ja nicht selten die Hefe, mit der das diskursive Denken erst „geht“.

[18] Man kann damit dann auch die Bedingungen I und II durch weitere ergänzen, welche die betreffenden Merkmale ausschließen.
[19] Vgl. Schreiber loc. cit., S. 139 f.

Progressionen von Theorien[1]

Ein Vorschlag zur Präzisierung von 'Wahrheitsannäherung'

There is no ›clean‹ progress; there are improvements, but there are also lots of deteriorations.

PAUL FEYERABEND

Vorbemerkung. — Im Folgenden wird Gebrauch von mathematischen Ausdrucks- und Darstellungsweisen gemacht, dabei aber überflüssiges Formalisieren vermieden. Auch die Verwendung logischer Kürzel wird auf das in mathematischen Texten übliche Maß beschränkt. Nur an wenigen Stellen – etwa wenn Definitionen oder Eigenschaften in bündiger Form festzuhalten sind – treten explizit Symbole für (metasprachliche!) Junktoren und Quantoren auf. Um sie von den heute gebräuchlichen objektsprachlichen Zeichen zu unterscheiden, benutze ich ältere Kürzel. Im Einzelnen: *non* für die Negation, & für die Konjunktion ('und'), $\supset$ für die Implikation ('wenn … dann'), $\equiv$ für die Äquivalenz ('genau dann … wenn'), $(x)P(x)$ für: Für alle x gilt $P(x)$, $(Ex)P(x)$ für: Es gibt x mit $P(x)$.

[1] Revidierte Aufsatzfassung von Kapitel 5 (S. 169-195) meiner Untersuchung *Theorie und Rechtfertigung*, 1975 bei Vieweg (Braunschweig) als Band 11 der Reihe *Wissenschaftstheorie: Wissenschaft und Philosophie* erschienen. – Die originale Kapitel-Überschrift („Die Progression von Theorien: Das Konzept der Annäherung an die Wahrheit im Kritischen Rationalismus und die Probleme seiner Präzisierung“) habe ich hier nicht beibehalten. Zum einen soll der Plural „Progressionen“ die Behandlung des Themas von eventuell mitschwingenden Hintergrundvorstellungen lösen, wonach ein tatsächlich stattfindender „Fortschritt der Wissenschaft“ irgendwie rational rekonstruiert werden soll. Zum anderen spielt der „Kritische Rationalismus“ schon längst keine initiierende Rolle mehr für die späteren Diskussionen zum Begriff der Wahrheitsannäherung („verisimilitude“, „truthlikeness“, „approach to truth“, etc.). Die Revision des Textes ließ es zudem geraten erscheinen, den eingehenden expositorischen Teil 5.1 des Th & R-Kapitels erheblich zu kürzen und umzuschreiben. Das gilt auch für die Abschnitte zum Explikationsversuch von H.-P. Lorenzen. Da dieser Ansatz aber – gerade aufgrund seiner Defizite – mein eigenes Forschen im Problemkreis approximativer Theorie-Beziehungen in Gang gesetzt hat, soll die Grundidee und die von mir entwickelte Kritik zumindest in zusammengefasster Form wiedergegeben werden.

1. Die Idee der 'Wahrheitsannäherung'

In den folgenden Überlegungen geht es darum, relativ zu einer vorgegebenen Theorienmenge, einem System zugehöriger Prüfsätze und einem klassifikatorischen Bestätigungsbegriff Voraussetzungen anzugeben, unter denen die *Sprechweise* von einer „Annäherung an die Wahrheit" präzisiert werden kann.

Es wäre wenig sinnvoll, wollte man das Problem von vornherein so stellen, als gehe es um eine Analyse des „wissenschaftlichen Erkenntnisfortschrittes in Richtung auf die Wahrheit". Dadurch begäbe man sich eines festen Begriffsrahmens und stünde der uferlosen Aufgabe gegenüber, das komplexe und unübersichtliche Phänomen des wissenschaftlichen Fortschritts *en detail* untersuchen zu müssen. Notgedrungen hätte man dabei irgendwann auch klarzustellen, welche Bestätigungsbegriffe beim Ablehnen und Akzeptieren von Hypothesen *tatsächlich* zur Geltung kommen (oder künftig zur Anwendung kommen sollen). Die Kontroversen, die man damit heraufbeschwören würde, berühren aber das Problem der 'Wahrheitsannäherung' – wenn überhaupt – nur in zweiter Linie.

K. Popper hat das Konzept der Wahrheitsannäherung im Zusammenhang seiner *Logik der Forschung* (1934, 1971) (und der darin als Schlüsselidee fungierenden grundsätzlichen Falsifizierbarkeit empirischer Theorien) nachdrücklich propagiert. Dennoch beanspruchen meine Ausführungen nicht, auf dem Boden seiner Wissenschaftslogik zu stehen. An keiner Stelle wird behauptet, dass eine „Annäherung an die Wahrheit" möglich sei oder dass das Konzept der 'Wahrheitsnähe' einen befriedigenden Ersatz für die liquidierte Rechtfertigungsidee hergebe. Alleiniges Ziel meiner hier vorliegenden Untersuchung ist der Nachweis, dass – unter gewissen Voraussetzungen – *eine Begriffsexplikation für die Popperschen Sprechweisen möglich ist*.

2. Progressionen vs. komparativer Ansatz

Die Idee der Annäherung an die Wahrheit hat eine weit zurückreichende Geschichte. Da sie kaum je in systematischer oder konstruktiver Weise konzipiert und angewendet wurde – Ch. S. Peirce bildet hier vielleicht eine Ausnahme –, besitzt die Idee einen gewissen vulgärphilosophischen Anstrich, ein Missstand, der Popper stets »Gewissensbisse« bereitet hat angesichts der programmatischen Stellung, die der Begriff der 'Wahrheitsannäherung' innerhalb des kritischen Rationalismus einnimmt.

Popper legt Wert darauf, den in solchen Sprechweisen verwendeten Wahrheitsbegriff nicht mit metaphysischem Ballast zu beschweren: »For there is no reason whatever why we should not say that one theory corresponds better to the facts than another. This simple initial step makes everything clear ...«[2]. Demzufolge scheint Popper die Idee der Annäherung an die Wahrheit mit Hilfe eines *komparativen* Begriffs von 'Wahrheitsnähe' erklären zu wollen. Er präsentiert denn auch sieben Vorschläge einer informalen Charakterisierung der von ihm so genannten Beziehung »t_2 seems – as far as we know – to correspond better to the facts than t_1« (loc. cit., S. 232). Es kann hier darauf verzichtet werden, diese Beschreibungen im einzelnen aufzuzählen und zu erörtern. Günstigstenfalls wird man nämlich mit ihrer Hilfe eine Relation $F(t_1,t_2)$ für Theorien t_1,t_2 erklären können, welche die Redewendung „t_2 liegt näher an der Wahrheit als t_1" präzisiert.

Macht aber nun die Einführung eines derartigen komparativen Begriffs „alles klar"? Für Popper scheint sich die Sache auf den ersten Blick so zu verhalten, wenn er meint: »This comparative use of the idea is its main point; and the idea of a higher or lower degree of verisimilitude seems less remote and more applicable and therefore perhaps more important for the analysis of scientific methods than the – in itself much more fundamental – idea of absolute truth itself« (loc. cit., S. 234).

Andererseits spricht Popper aber auch von einem »approach more and more closely to the truth« (S. 231), was eher an einen (vorläufig noch unpräzisierten) Prozess zunehmender Theorienverbesserung denken lässt. Zweifellos ist dies denn auch der springende Punkt der hier zu leistenden Begriffsklärung:

Nur mit einer (im Prinzip nicht-abschließbaren) Progression von Theorien kann im eigentlichen Sinn die Vorstellung einer Annäherung (an was auch immer) verbunden werden.

Dagegen könnte man einwenden, dass auch zwischen *zwei* Objekten (für sich genommen) eine Näherungsbeziehung denkbar ist, z. B. zwischen einer irrationalen Größe wie $\sqrt{2}$ und dem „geringfügig" abweichenden Dezimalbruch 1,4142. – Dieser Einwand, so plausibel er auf den ersten Blick erscheinen mag, fußt entscheidend darauf, dass wir in der Lage sind, die zwischen beiden Objekten bestehende Abweichung zu beurteilen, was im Beispiel zweifellos möglich ist. Um die Kenntnis von $\sqrt{2}$ als Fundamentalfolge nicht schon vorauszusetzen, könnten wir etwa indirekt prüfen, wie nahe das Quadrat $1{,}4142^2$ (= 1,99996164) bei $\sqrt{2}^2$ (= 2) liegt. Aber auch dabei kommt eine (genau genommen *die*) charakteristische Eigenschaft von $\sqrt{2}$ ins Spiel.

[2] Siehe *Conjectures and Refutation*, London 1969, S. 232.

Betrachten wir ein zweites (nicht-mathematisches) Beispiel: eine Orchesterpartitur und ein daraus hergestellter Klavierauszug. Es ist sicherlich berechtigt, in einem musikalisch-handwerklich gut gefertigten Klavierauszug so etwas wie eine Annäherung an das originale Orchesterwerk zu sehen. Jedoch setzt dies voraus, dass man das Original hinreichend detailliert kennt. Liegen etwa zwei Klavierauszüge A und B vor, so ließe sich ohne Kenntnis der ursprünglichen Vorlage nicht feststellen, ob beispielsweise Klavierauszug B das Original besser annähert als A.

In analoger Weise macht eine sich auf konkurrierende Theorien beziehende Behauptung, t_2 läge näher an der „Wahrheit" als t_1, implizit von der Vorstellung Gebrauch, dass in einem noch zu explizierenden Sinn Abweichungen jeweils von t_1 und t_2 zur „Wahrheit" (d. h. zu einer idealerweise als wahr angenommenen und daher *nicht falsifizierbaren* Theorie) gemessen (und verglichen!) werden können. Selbstredend kennen wir eine solche Theorie nicht und dürfen darüberhinaus unterstellen, dass gerade ein kritischer Rationalist wie Popper sie allenfalls als einen *bloß gedachten Grenzfall* akzeptiert, welcher in konkreter Form niemals vorliegen kann.[3] Wollte man die fiktive Grenztheorie durch die Forderung charakterisieren, dass sie sämtliche denkbaren empirischen Prüfungen erfolgreich besteht, so reicht selbst das offensichtlich nicht für einen Vergleich von t_1 mit t_2. Denn wenn auch t_2 zu einem bestimmten Zeitpunkt mehr (und substanziellere) Prüfungen besteht als t_1, so ist nicht ausgeschlossen, dass sich das Blatt zu einem späteren Zeitpunkt sehr wohl wieder zugunsten von t_1 ändert.[4]

Es ist bemerkenswert, dass Popper die zu vergleichenden „Theorien" in abstrakten mathematischen Räumen verortet. In *Conjectures and Refutation*, S. 232, heißt es dazu: »Is it not dangerously misleading to talk as if Tarskian truth were located somewhere in a kind of metrical or at least topological space

[3] Poppers Versuch, seinen komparativen Begriff $F(t_1,t_2)$ ohne Bezug auf eine Idee von absoluter Wahrheit zu definieren (*Conj. & Ref.*, S. 233) ist freilich unzulänglich. Die dabei benutzten Hilfsmengen (Wahrheitsgehalt und Falschheitsgehalt einer Theorie) sind nicht effektiv; außerdem fallen sie zusammen, wenn die konkurrierenden Theorien falsifiziert sind (mit dem unerwünschten Ergebnis, dass sie dann äquivalent sind). – Aber selbst dann, wenn $F(t_1,t_2)$ (als partielle Ordnungsrelation) wohldefiniert vorläge, garantiert die Monotonie einer Theorienfolge $t_1,t_2,t_3,\ldots$ bzgl. F, d. h. das Erfülltsein von $F(t_n,t_{n+1})$ für $n \geq 1$, noch keineswegs die Konvergenz gegen ein nicht mehr falsifizierbares $t \in T$. Eine entsprechende Übertragung auf Zahlen macht das sofort klar: Eine streng monoton wachsende Folge $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ *kann* durchaus gegen ∞ konvergieren, doch gibt es beliebig viele Beispiele solcher Folgen, die nach oben beschränkt sind, d. h. einen bestimmten endlichen Wert nicht übersteigen.

[4] Ein historisches Beispiel aus der Entwicklung der Theorie des Lichts bilden die Wellentheorie von Huygens und die Korpuskeltheorie von Newton.

so that we can sensibly say of two theories – say an earlier theory t_1 and a later theory t_2, that t_2 has superseded t_1 or progressed beyond t_1, by approaching more closely to the truth than t_1? I do not think that this kind of talk is at all misleading.«. Popper hat hier wohl sein komparatives Verständnis von Wahrheitsannäherung vor Augen, spekuliert aber gleichwohl mit mathematischen Begriffen (Topologie, Metrik), mit denen man üblicherweise *Konvergenzprozesse* beschreibt. Der im nächsten Abschnitt zu skizzierende Explikationsversuch greift diese Anregung auf und löst sich vom komparativen Ansatz durch den konsequenten begrifflichen Bezug auf Theorienfolgen.

3. Der Explikationsversuch von H.-P. Lorenzen

H.-P. Lorenzen hat 1971 den Versuch unternommen, die Idee der „Annäherung an die Wahrheit" mit Hilfe des begrifflichen Apparats der Topologie zu präzisieren.[5] Er legt sich dazu die folgende Frage vor: »Unter welchen Voraussetzungen konvergiert eine geeignete Folge wissenschaftlicher Theorien gegen einen Grenzwert, den man dann als Wahrheit definieren könnte?« Generell soll dabei der Betrachtung ein abgeschlossener Teilbereich wissenschaftlicher Erkenntnis zugrunde liegen, was nach Lorenzen dann der Fall ist, »wenn es kein Experiment (bekannt oder noch unbekannt) außerhalb dieses Teilbereiches gibt, dessen Ergebnis einen Einfluß auf den Stand der Erkenntnis innerhalb des Teilbereiches hat«. Durch ein *Auswahlverfahren* denkt sich Lorenzen nun eine Folge von Theorien gebildet: Eine willkürlich herausgesuchte Theorie wird mit t_1 bezeichnet. Hat man bereits n ($n \geq 1$) Theorien $t_1, \ldots, t_n$ numeriert, so erhält eine weitere Theorie die Bezeichnung t_{n+1}, wenn »es ein bekanntes Experiment gibt, das von dieser Theorie erklärt wird, nicht jedoch von den bisher numerierten«. »Auf diese Weise läßt sich aus der Menge der zu einer bestimmten Zeit bekannten Theorien eine Teilmenge aussortieren. Dieses Verfahren läßt sich gedanklich in die Zukunft fortsetzen«, so dass man ein abzählbares System H von Theorien erhält.

Im Weiteren wird eine neue Voraussetzung (V) in Form einer *Fortschreitungsbedingung* für die Theorienfolge $t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}, \ldots$ betrachtet: Es gibt in H zu jeder Theorie t_k und zu jedem Experiment e (bekannt oder noch unbekannt), das von t_k nicht erklärt wird oder das t_k widerlegt, eine Theorie t_j, die die von t_k erklärten Experimente mindestens ebenso genau und zusätzlich e erklärt.

[5] Vgl. seine Arbeit: Bemerkung über eine Möglichkeit der Definierbarkeit von Wahrheit. *Ztschr. f. allg. Wissenschaftstheorie* II/1 (1971), S. 63-65.

In dem Fall, dass H endlich ist[6], gewährleistet (V), »daß die Theorie mit der höchsten Nummer die endgültige Lösung des betreffenden Problemkreises darstellt, d. h. es gibt kein bekanntes oder noch unbekanntes Experiment, das von dieser Theorie nicht erklärt wird. Die Umkehrung ist auch richtig.« Die Theorie mit der höchsten Nummer ist nicht falsifizierbar und kann daher »als Wahrheit bezeichnet werden«.

Für abzählbar-unendliches H führt Lorenzen auf H eine Topologie wie folgt ein: Die Abbildung $h : H \longrightarrow \mathbb{R}$ ordne jeder Theorie aus H den Index zu, den sie beim anfänglichen Auswahlverfahren erhalten hat, mithin: $h(t_k) := k$. Auf H wird dann die gröbste Topologie $\mathscr{U}$, bei der h stetig ist, betrachtet. Die offenen Mengen dieser Topologie sind gerade die h-Urbilder der offenen Mengen von $\mathbb{R}$. Das sind aber *alle* Teilmengen von H, d. h. $\mathscr{U}$ ist die feinste (sog. diskrete) Topologie auf H.

Bereits an dieser Stelle ist zu erkennen, dass der zugehörige Konvergenzbegriff eine irgendwie geartete 'Annäherung an die Wahrheit' innerhalb von H nicht wiedergeben kann. Denn eine in H konvergente Folge muss ja mit fast allen Gliedern (das sind: alle bis auf endlich viele) in jeder (beliebig vorgebbaren) Umgebung $U \in \mathscr{U}$ eines Grenzwertes t liegen. Da in $\mathscr{U}$ bereits $U = \{t\}$ eine solche Umgebung ist, sind gegen t strebende Folgen stets quasi-stationär von der Form $t_{n_1}, \ldots, t_{n_k}, t, t, \ldots$. An einem solchen Konvergenzprozess sind immer nur endlich viele Theorien aus H beteiligt, darunter auch diejenige Theorie, die im fraglichen Erkenntnisbereich für die „Wahrheit" steht.

Geht man (im Unterschied dazu) von der Vorstellung aus, dass die „Wahrheit" *nicht* zu H gehört, so wäre sie in irgendeiner Form „außerhalb" von H aufzusuchen. Zu diesem Zweck betrachtet Lorenzen die Überdeckungseigenschaften von H. Es ist leicht zu sehen, dass H ein nicht kompakter, aber lokalkompakter Raum ist. Daher lässt sich nach einem bekannten Satz von P. Alexandroff[7] H durch Hinzunahme eines weiteren Elements u zu einem kompakten Raum H' erweitern. Dessen Topologie $\mathscr{U}'$ ist (bis auf Homöomorphie) eindeutig bestimmt und hat $\mathscr{U}$ als Spur. Die Konstruktion von $\mathscr{U}'$ im Beweis dieses Kompaktifizierungssatzes erfolgt so, dass die offenen Mengen, die u enthalten, gerade die Komplementärmengen (in H') der kompakten Mengen von H sind. Letztere sind aber genau die endlichen Teilmengen von H. Somit liegen in jeder Umgebung von u fast alle Elemente von H, d. h. die Folge der

6 Dieser Fall ist möglich, insoweit das Auswahlverfahren eine Konstellation zulässt, in der *jedes* (bekannte oder noch unbekannte) Experiment bereits durch eine der *vorhandenen* Theorien $t_1, \ldots, t_n$ erklärt wird.

7 Vgl. etwa W. Franz: *Topologie I*, Berlin 1965, S. 74 f.

Theorien $t_1, t_2, t_3, \ldots$ konvergiert gegen das neue (von Lorenzen als „Wahrheit" bezeichnete) Element u in der Topologie $\mathscr{U}'$.

Kritik. – Weshalb u als „Wahrheit" bezeichnet werden kann, bleibt offen. Ein Nachweis etwa dafür, dass u nicht falsifizierbar ist, ist freilich auch nicht möglich, weil die zugrunde gelegte (inhaltlich überhaupt nicht gerechtfertigte) diskrete Topologie *in keinem inneren Zusammenhang* steht mit den Erklärungsleistungen, die an den Theorien festgestellt werden. Das Auswahlverfahren und die Fortschreitungsbedingung (V) verkörpern zwar *Progressionsprinzipien*, mittels derer die numerierte Theorien-Kollektion $H = \{t_1, t_2, \ldots\}$ gebildet wird, doch fließen die darin angesprochenen Beziehungen (der Bestätigung, Erklärung, Widerlegung, usw.) zwischen Theorien t und Experimenten e nicht wirklich in die Definition der Topologie ein und bleiben daher auch ohne Auswirkung.

4. Übergang zu einer Präzisierung

Obwohl der Explikationsversuch von Lorenzen in dieser Form als gescheitert anzusehen ist, enthält er doch zwei erfolgversprechende Grundgedanken: 1) die Einführung von einleuchtenden Progressionsprinzipien für Folgen von Theorien und 2) die Idee, ‘Annäherung an die Wahrheit’ mit Hilfe einer Ein-Punkt-Kompaktifizierung nachzubilden. – Ich werde im Weiteren zeigen, dass man damit zu einer brauchbaren Präzisierung von ‘Wahrheitsannäherung’ gelangt, wenn sich folgende Postulate realisieren bzw. verifizieren lassen:

1. Auf dem Bereich der betrachteten Theorien ist eine Topologie einzuführen, die in natürlicher Weise von einem Begriff der Bestätigung (Bewährung, Erklärung o. ä.) abhängt.
2. Eine Theorienfolge, die „nach bestimmten Bedingungen fortschreitet", enthält eine Teilfolge, die im Sinne der in 1 eingeführten Topologie konvergiert.

Inwieweit Postulat 1 erfüllt ist, kann allein aufgrund von Plausibilitätsüberlegungen entschieden werden. Ob Postulat 2 gilt, lässt sich dann mit mathematischen Methoden überprüfen. Dazu muss natürlich spezifiziert sein, welchen Bedingungen das Fortschreiten einer Theorienfolge unterliegt. Es wird sich herausstellen, dass in Folgen, die im wesentlichen gemäß dem Auswahlverfahren und der Fortschreitungsbedingung (V) (nach H.-P. Lorenzen) gebildet werden, noch Abschnitte mit ‘unbrauchbaren’ Theorien auftreten können. Erst wenn diese aus H entfernt werden, erhält man eine unendliche Teilmenge H', welche die für die Ein-Punkt-Kompaktifizierung erforderlichen Voraussetzungen erfüllt.

Die Art der daraus resultierenden Konvergenz lässt sich durch einen Vergleich mit der Konvergenz von Zahlenfolgen illustrieren. Eine im üblichen Sinne konvergente Folge reeller Zahlen besitzt als Grenzwert stets eine reelle Zahl derart, dass in jeder ihrer Umgebungen fast alle Glieder der Folge liegen. Eine Folge von Theorien, die den Progressionsprinzipien genügt, besitzt aber eher Ähnlichkeit mit den *bestimmt divergenten* Zahlenfolgen, die jeden vorgegebenen (hier etwa: positiven) Wert überschreiten.[8] Für diese Folgen hat sich auch die Sprechweise eingebürgert, dass sie „gegen unendlich streben“. Dahinter steckt nichts anderes als die Erweiterung des Zahlenbereichs um ein zusätzliches Element (∞), mit dem nicht gerechnet wird, das aber – bei geeigneter Modifikation der Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$ – als Grenzwert der bestimmt divergenten Zahlenfolgen fungiert. Die Kompaktifizierung nach Alexandroff ist eine Verallgemeinerung dieses Verfahrens für nicht-kompakte, lokalkompakte topologische Räume.[9]

Einen Erkenntnistheoretiker könnte an der Ein-Punkt-Kompaktifizierung irritieren, dass eine gar nicht näher spezifizierte Theorie als rein formales Element gleichsam *ex nihilo* dem vorhandenen Theorienbestand hinzugefügt wird. Das Hinzufügen erfolgt freilich in einer Weise, die das neue Element mit den alten Elementen geeignet verbindet, und zwar durch eine auf der erweiterten Menge erklärten Topologie (welche diese zu einem kompakten Raum macht). Die kompaktifizierenden Grenzpunkte in $\mathbb{R}$ oder auf der Riemannschen Zahlenkugel haben also nichts Mysteriöses an sich – ebensowenig eine „Grenztheorie“, die einer progressiven Folge von Theorien formal adjungiert wird. Eine andere Frage ist es, ob man dabei von einer ‘Wahrheitsannäherung’ sprechen kann. Dazu wäre nachzuweisen, dass eine solche Grenztheorie nicht falsifizierbar ist.

In den nächsten Abschnitten werde ich einen begrifflichen Rahmen entwickeln, der es erlaubt, das skizzierte Programm durchzuführen.

---

[8] Die Bezeichnung „bestimmt divergent“ verwendet z. B. K. Knopp in *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, 5. Auflage, Berlin [u. a.] 1964, S. 66 f.

[9] Das Verfahren heißt Kompaktifizierung, weil der Umgebungsbegriff für den neu hinzugenommenen Punkt so gefasst wird, dass der Gesamtraum in der modifizierten Umgebungstopologie kompakt ist. Ein weiteres bekanntes Beispiel ist die Abschließung der komplexen Ebene durch Hinzunahme eines „unendlich fernen“ Punktes (Nordpol auf der Riemannschen Zahlenkugel).

5. Einführung einer kanonischen Topologie

Die hier durchzuführende Konstruktion einer Topologie verwendet drei Bestandteile, die im Folgenden nicht weiter spezifiziert werden: zwei beliebige nichtleere Mengen T und E sowie eine zweistellige Relation $R(t,e)$ mit $t \in T$ und $e \in E$. Als Leitfaden bei der Konstruktion kann folgende ungefähre inhaltliche Deutung dienen: T ist ein möglichst umfassendes System von 'einschlägigen' Theorien, E die Menge aller Prüfsätze, die das 'Gegenstandsgebiet' dieser Theorien betreffen, und R ein klassifikatorischer Bestätigungsbegriff. Gilt $R(t,e)$ für eine Theorie t und einen Prüfsatz e, so verwenden wir die Sprechweisen „t bewährt sich an e" oder „t wird durch e bestätigt". Die Elemente von E sollen im Folgenden (gelegentlich) auch *Instanzen* genannt werden.

Anmerkung: Selbstverständlich ist mit dieser inhaltlichen Deutung noch keine präzise Festlegung der Begriffe verbunden. Es wäre überdies höchst unzweckmäßig, die Schwierigkeiten bei klassifikatorischen Bestätigungsbegriffen in die Problematik der Annäherungsidee mit einzubeziehen. Daher geschieht die ganze Konstruktion *relativ* zu irgendeinem Bestätigungsbegriff R. Nachträglich kann man dann immer noch anstelle von R eine konkrete Beziehung zwischen Theorien und zugehörigen Instanzen setzen. Hier gibt es verschiedene Möglichkeiten. Man wählt einen Erklärungsbegriff, den induktiven Begriff der Relevanz oder auch einen an Popper orientierten klassifikatorischen Grundbegriff deduktiver Bestätigung. Die gegenwärtige wissenschaftstheoretische Diskussion zeigt im übrigen, dass keiner dieser Begriffe eindeutig bevorzugt zu werden verdient oder nicht mit irgendwelchen Schwierigkeiten behaftet wäre. – Eine geringfügige Komplikation ist noch kurz zu erörtern; sie tritt dadurch auf, dass klassifikatorische Begriffe deduktiver (sowie auch induktiver) Bestätigung meist für drei Argumente definiert sind: eine Theorie t, einen Komplex a von Voraussetzungen ('Hintergrundwissen') und eine Instanz e. Bei F. v. Kutschera (D5.1-1 in *Wissenschaftstheorie*, München 1972, S. 407 f) findet man z. B. für die deduktive Bestätigung folgende Definition: Eine Theorie t bewährt sich an e bezüglich der Voraussetzungen a – symbolisch $B(t,a,e)$ – genau dann, wenn gilt: 1) Aus $t\&a$ folgt e; 2) e folgt nicht aus a; 3) $\neg a$ folgt nicht aus t. Diese Definition passt nicht ohne weiteres auf das hier zugrunde liegende Modell einer zweistelligen Bestätigungsrelation. Man erzielt aber eine zwanglose Anpassung, wenn man mit Hilfe von B die zweistellige Relation R durch $R(t,e) := (Ea)(a \in A \& B(t,a,e))$ für $t \in T, e \in E$ definiert. Dabei bezeichnet A das in Betracht gezogene System des einschlägigen Hintergrundwissens. Die definitorische Zurückführung von R auf B beruht demnach auf dem einfachen Gedanken, dass eine sinnvolle Bestätigung auch dann vorliegt, wenn das dabei herangezogene Hintergrundwissen nicht im einzelnen spezifiziert wird.

Für die Definition der Topologie ist es zweckmäßig, vorab einige Sprechweisen einzuführen, die ausschließlich von den Mengen T,E sowie der Relation R Gebrauch machen. Zunächst erklären wir zu einer beliebigen Teilmenge X von E eine zweistellige Relation r_X auf T, in der zwei Theorien t,t' aus T genau dann stehen sollen, wenn sie sich an denselben Instanzen aus X bewähren. Ausführlich geschrieben lautet die Definition:

$$r_X(t,t') := (e)(e \in X \supset (R(t,e) \equiv R(t',e))).$$

Für jedes Teilsystem X von Instanzen ist damit offenbar eine Äquivalenzrelation auf T definiert.[10] Zwei Theorien t,t' mit $r_X(t,t')$ mögen deshalb *äquivalent auf X* genannt werden. Die Klasse aller auf X zu t äquivalenten Theorien aus T werde mit $U(t,X)$ bezeichnet. Wir benötigen im Folgenden einige Eigenschaften der Äquivalenzklassen.

Proposition 1. – Es seien X,Y irgendwelche Teilmengen von E und t,t_0 beliebige Theorien aus T. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(1) Wenn $X \subseteq Y$, dann $U(t,Y) \subseteq U(t,X)$;

(2) $U(t,X \cup Y) \subseteq U(t,X) \cap U(t,Y)$;

(3) Wenn $t_0 \in U(t,X)$, dann $U(t_0,X) = U(t,X)$.

Der Beweis ergibt sich aufgrund einfacher logischer Betrachtungen.[11] $\dashv$

Nunmehr bilden wir Äquivalenzklassen $U(t,X)$ nicht mehr zu irgendwelchen Teilmengen X von E, sondern zu den Gliedern aufsteigender, ganz E ausschöpfender Ketten. Genauer: Eine Folge $E_0,E_1,E_2,\ldots$ von Teilmengen von E soll eine *in E kumulierende Kette* heißen, wenn die Bedingung $E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$ erfüllt ist und jedes Element aus E in einem geeigneten Glied der Folge (E_k) vorkommt. Solche kumulierenden Ketten bilden ein formales Analogon zur schrittweisen Erweiterung des auf dem jeweiligen Stand der Wissenschaft erreichten Repertoires von Instanzen, die man zum kritischen

[10] D. h. es ist für beliebiges $X \subseteq E$ zu zeigen: $r_X(t,t)$ (Reflexivität), $r_X(t,t') \supset r_X(t',t)$ (Symmetrie) und $r_X(t,t') \& r_X(t',t'') \supset r_X(t,t'')$ (Transitivität). Man verifiziert diese Eigenschaften mühelos.

[11] Zu (1): Für $t' \in U(t,Y)$ gilt $r_Y(t,t')$ und wegen $X \subseteq Y$ auch $r_X(t,t')$; also $t' \in U(t,X)$. Zu (2): Wegen $X,Y \subseteq X \cup Y$ hat man nach (1): $U(t,X \cup Y) \subseteq U(t,X)$ und $U(t,X \cup Y) \subseteq U(t,Y)$. Daraus folgt die behauptete Inklusion (2). – Zu (3): Für $t_0 \in U(t,X)$ gilt $r_X(t_0,t)$, für $t' \in U(t_0,X)$ analog $r_X(t',t_0)$. Mit der Transitivität von r_X ergibt sich dann $r_X(t',t)$, also $t' \in U(t,X)$. Die umgekehrte Inklusion $U(t_0,X) \supseteq U(t,X)$ ergibt sich durch Vertauschung von t_0 und t.

Prüfen der einschlägigen Theorien heranzieht. Es ist der Grundgedanke bei der folgenden Definition einer Topologie, dass „Nachbarschaftsverhältnisse" unter Theorien nur durch Bezugnahme auf gewisse Instanzenmengen festzulegen sind; eine Abstufung in den Nachbarschaftsverhältnissen kann dann durch eine entsprechende Abstufung im Gesamtsystem E der Instanzen erreicht werden.

Sei (E_k) eine (in E kumulierende)[12] Kette, t eine Theorie aus T. Die Äquivalenzklassen $U(t,E_k)$ $(k=0,1,2,\ldots)$ nennen wir im Folgenden *Abschnittumgebungen von* t, ihre (echten und unechten) Obermengen *Umgebungen von* t. Das System aller Umgebungen von Theorien aus T werde mit $\mathrm{Umg}(R;(E_k))$ bezeichnet; es ist abhängig von der Bestätigungsrelation R sowie von der gegebenen Kette (E_k). Damit kommen wir zu einer für die weiteren Überlegungen grundlegenden Aussage:

Proposition 2. – $\mathrm{Umg}(R;(E_k))$ ist eine Umgebungstopologie auf dem System T von Theorien.

Beweis: Es sind lediglich die vier Umgebungsaxiome zu überprüfen, die dem Begriff der topologischen Struktur zugrunde liegen. Da der Beweis einen guten Einblick in die Wirkungsweise der früheren Definitionen vermittelt, sei er hier ausführlich mitgeteilt.

1. Ein Element t ist in jeder seiner Umgebungen enthalten. Sei nämlich U eine Umgebung von t. Dann ist $U \supseteq U(t,E_n)$ für einen geeigneten Index n. Wegen $t \in U(t,E_n)$ gilt daher auch $t \in U$.

2. Jede Obermenge einer Umgebung U von t ist eine Umgebung von t; denn U umfasst eine Abschnittumgebung von t, und diese ist natürlich auch Teilmenge einer Obermenge von U.

3. Der Durchschnitt zweier Umgebungen von t ist wieder eine Umgebung von t. Seien U_1, U_2 beliebige Umgebungen von t. Es gibt Indizes k_1, k_2 mit $U(t,E_{k_i}) \subseteq U_i$ $(i=1,2)$. Daher gilt $U(t,E_{k_1}) \cap U(t,E_{k_2}) \subseteq U_1 \cap U_2$ und aufgrund Proposition 1,(2) auch $U(t,E_{k_1} \cup E_{k_2}) \subseteq U_1 \cap U_2$. Nun ist aber $E_{k_1} \cup E_{k_2} = E_m$ mit $m = \max(k_1,k_2)$ wegen der ersten Ketteneigenschaft; also ist $U_1 \cap U_2$ als Obermenge der Abschnittumgebung $U(t,E_m)$ eine Umgebung von t.

[12] Für die folgende Definition sowie den daran sich anschließenden Beweis genügt es vorauszusetzen, dass (E_k) irgendeine aufsteigende Kette darstellt. Die Tatsache, dass (E_k) in E kumuliert, wird dabei nicht verwendet; sie ist jedoch in allen später interessierenden Fällen wesentlich, weshalb ich von nun an nicht immer eigens auf diejenigen Schlüsse hinweisen werde, die auch unter schwächeren Voraussetzungen gültig bleiben.

4. Eine Umgebung U von t ist auch Umgebung aller Elemente t' einer geeigneten Umgebung V von t. Zu beliebiger Umgebung U von t wählen wir n so, dass $U(t,E_n) \subseteq U$, und setzen $V := U(t,E_n)$. Damit ist V eine Umgebung von t, und für beliebiges $t' \in V$ liefert Proposition 1,(3) $U(t',E_n) = V$. Also ist U, als Obermenge von V, Umgebung von t'. $\dashv$

Die Abschnittumgebungen $U(t,E_k)$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ bilden eine abzählbare Umgebungsbasis von $t \in T$. Sie sind *offen und abgeschlossen* in der Topologie $\mathrm{Umg}(R;(E_k))$ auf T.[13]

Anmerkung: Der Vollständigkeit halber sei darauf hingewiesen, dass mit Hilfe einer Bestätigungsrelation R nicht nur eine topologische Struktur auf T definiert werden kann. Die spezielle symmetrische Bauart der Abschnittumgebungen gestattet darüberhinaus die Einführung einer *uniformen Struktur* (die in mancher Hinsicht den metrischen Räumen nahesteht). Dieser wichtige Begriff soll hier aber nicht verwendet werden, obwohl sein Gebrauch natürlich für eine gewisse begriffliche Ökonomie sorgt. Nichtsdestoweniger profitieren sämtliche Konvergenzbetrachtungen, z. B. im Zusammenhang mit den noch zu behandelnden Progressionsprinzipien, von der Tatsache, dass im Grunde eine uniforme Struktur vorliegt. – Es soll noch kurz gezeigt werden, wie man im Ausgang von einer vorgegebenen Kette (E_k) zu einer von R abhängigen uniformen Struktur auf T gelangt. Für natürliche Zahlen $n \geq 0$ definieren wir Z_n als die Menge aller Paare von auf E_n äquivalenten Theorien: $Z_n := \{(t',t'') \in T^2 \mid r_{E_n}(t,t'')\}$. Dann bildet das System $\mathrm{Unif}(R;(E_k)) := \{H \subseteq T^2 \mid (En)\, Z_n \subseteq H\}$ eine uniforme Struktur (oder Uniformität) auf T, deren zugehörige Topologie gerade die oben eingeführte Umgebungstopologie $\mathrm{Umg}(R;(E_k))$ ist. Für die entsprechenden Axiome und Definitionen sei etwa auf W. J. Thron, *Topological Structures*, Holt, Rinehardt and Winston 1966, S. 174 f, verwiesen, wo man auch kurze historische Bemerkungen zur Entwicklung der Theorie der uniformen Räume findet.

Die soweit entwickelten Vorstellungen lassen es möglich erscheinen, das hier zu behandelnde Präzisierungsproblem mit den Begriffen der mengentheoretischen Topologie in Angriff zu nehmen. Es bleibt aber noch der Nachweis zu führen, dass die topologischen Sprechweisen, insbesondere der aus der Umgebungstopologie $\mathrm{Umg}(R;(E_k))$ resultierende Konvergenzbegriff, überhaupt sinnvoll sind. Dies kann allein durch eine *Plausibilitätsbetrachtung* geschehen. Sei dazu $t_0, t_1, t_2, \ldots$ eine Folge von Theorien aus T. Sie ist konvergent zu

[13] Zum Nachweis der Offenheit von $U(t,E_k)$ ist zu zeigen, dass jedes $s \in U(t,E_k)$ ein innerer „Punkt“ ist. Nach Proposition 1,(3) ist $U(s,E_k) = U(t,E_k)$ und damit $U(s,E_k)$ eine Umgebung von s, die ganz zu $U(t,E_k)$ gehört. – Für die Abgeschlossenheit ist zu zeigen, dass alle Berührpunkte s von $U(t,E_k)$ zu $U(t,E_k)$ gehören. Ist s Berührpunkt von $U(t,E_k)$, so liegen in jeder Umgebung von s Elemente von $U(t,E_k)$. Somit muss speziell $U(s,E_k) \cap U(t,E_k) \neq \emptyset$ sein, also (da es sich um Äquivalenzklassen handelt) sogar $U(s,E_k) = U(t,E_k)$ und daher $s \in U(t,E_k)$.

einem Grenzwert[14] t ($t \in T$) im Sinne der Umgebungstopologie $\mathrm{Umg}(R;(E_k))$, wenn in jeder Umgebung von t fast alle Glieder der Folge liegen. Das ist gleichbedeutend damit, dass zu jeder ganzen Zahl $n \geq 0$ ein Index N existiert mit $t_k \in U(t, E_n)$ für alle $k \geq N$; d. h. t_k und t sind äquivalent auf E_n für alle $k \geq N$. – Inhaltlich kann man das folgendermaßen beschreiben: Eine wie umfassende Menge von Instanzen aus E man auch vorgibt, stets lässt sich eine Stelle in der Theorienfolge finden, von der ab sich sämtliche Theorien an denselben Instanzen der vorgegebenen Menge bewähren wie t. Dies scheint mir eine natürliche und zwanglose Präzisierung von Vorstellungen zu sein, die man mit der Idee der Annäherung von Theorien an eine „Grenztheorie" verbinden kann. Ich schlage deshalb vor, das zugrunde liegende Umgebungssystem $\mathrm{Umg}(R;(E_k))$ als *kanonische Topologie* bezüglich R und (E_k) zu bezeichnen.

Es soll hier noch auf einen besonderen Umstand bei der Definition der kanonischen Topologie eingegangen werden. Er besteht darin, dass sowohl das Umgebungssystem als auch der Konvergenzbegriff *nur relativ zu einer speziellen Kette* erklärt sind. Dadurch könnte z. B. der Anschein erweckt werden, als hinge die Konvergenz einer Theorienfolge von der individuellen Beschaffenheit der zugrunde liegenden Kette ab. Das trifft aber nur in eingeschränktem Maße zu. Zwar kann sich die Topologie durchaus ändern, wenn man die zugrunde liegende Kette gegen eine andere austauscht, doch ist sie andererseits auch nicht überempfindlich gegenüber derartigen Transformationen, was die folgende Überlegung auf einfache Weise zeigt. Wir wollen sagen, daß eine Kette (E_k) die Kette (E'_k) *überlagert*, wenn es zu jedem Glied E'_s der zweiten Kette ein Glied E_r der ersten Kette gibt, so dass $E_r \supseteq E'_s$ gilt. Zwei Ketten mögen *äquivalent* heißen, wenn sie sich gegenseitig überlagern. Dann erhalten wir folgende Aussage:

Proposition 3. – Die zu äquivalenten Ketten gehörigen Umgebungstopologien auf T sind gleich.

[14] N. B.: Mit jedem solchen Grenzwert t ist auch eine auf E zu t äquivalente Theorie t' Grenzwert der gegebenen Folge. Eindeutigkeit, die dazu berechtigt, von *dem* Grenzwert zu sprechen, erreicht man erst in einer sog. *separierten* Topologie. Diese liegt genau dann vor, wenn zu verschiedenen t, t' disjunkte Umgebungen U von t und U' von t' existieren. Man sagt dann, dass t, t' durch geeignete Umgebungen „getrennt" werden können und nennt den topologischen Raum *hausdorffsch* oder *Hausdorff-Raum*. Im Allgemeinen ist die Topologie $\mathrm{Umg}(R;(E_k))$ nicht separiert. Es wird sich aber weiter unten in Abschn. 6 zeigen, dass eine nach dem in Abschn. 3 erörterten Auswahlverfahren (erstes Progressionsprinzip) gebildete Theorienmenge H (genauer: Menge von Folgengliedern) ein Hausdorff-Raum ist.

Beweis: Wir wählen zwei beliebige äquivalente Ketten (E_k) und (E'_k) und betrachten eine Umgebung $U \in \mathrm{Umg}(R;(E_k))$. U ist Umgebung eines Elements $t \in U$; somit existiert eine ganze Zahl $n \geq 0$ mit $U(t,E_n) \subseteq U$. Da (E'_k) die Kette (E_K) überlagert, gilt $E'_m \supseteq E_n$ für einen geeigneten Index m. Daraus ergibt sich mit Proposition 1,(1) die Inklusion $U(t,E'_m) \subseteq U(t,E_n)$. Also ist auch $U(t,E'_m) \subseteq U$ und $U \in \mathrm{Umg}(R;(E'_k))$. – Dass umgekehrt jede Umgebung aus $\mathrm{Umg}(R;(E'_k))$ auch zu $\mathrm{Umg}(R;(E_k))$ gehört, folgt durch Vertauschung der Rollen von (E_k) und (E'_k) in den vorangegangenen Schlüssen. $\dashv$

Der in Proposition 3 ausgesprochene Sachverhalt zeigt, dass die kanonische Topologie und damit auch der ihr zugehörige Konvergenzbegriff *invariant* sind gegenüber dem Austausch der zugrunde liegenden Kette gegen eine zu ihr äquivalente Kette. Bezeichnet man eine Klasse äquivalenter Ketten als *Kettentypus*, so lässt sich das Resultat auch so formulieren: Eine kanonische Topologie bezüglich R ist bereits durch Angabe eines Kettentypus τ vollständig festgelegt. – Um dies auch in der Schreibweise zum Ausdruck zu bringen, empfiehlt sich gelegentlich die Bezeichnung $\mathrm{Umg}(R;\tau)$ anstelle von $\mathrm{Umg}(R;(E_k))$, wofern (E_k) dem Kettentypus τ angehört.

Die vorangehenden Überlegungen werfen die Frage auf, ob sich für die Präzisierung von ‘Wahrheitsannäherung’ durch Progressionen von Theorien unter Umständen ein bestimmter Kettentypus als geeignet anbietet.

Es überrascht, dass eine ebenso einfache wie plausible Betrachtung zu dem gewünschten Ziel führt. Als Ausgangspunkt dient dabei die Feststellung, dass die in der wissenschaftlichen Praxis tatsächlich vorhandenen Repertoires von Prüfsätzen zu jeder Zeit *endlich* sind. Wenn es vermutlich auch nicht möglich ist, eine absolute Schranke für den Umfang dieser Repertoires anzugeben, so verfügt man dennoch prinzipiell stets nur über eine begrenzte Anzahl von Instanzen. Im Hinblick auf diesen Sachverhalt erscheint es sinnvoll, die kanonische Topologie bezüglich aufsteigender Ketten zu definieren, deren Glieder sämtlich endlich sind. Es sei E eine abzählbar-unendliche Menge von Instanzen und (E_k) eine in E kumulierende Kette. Wir nennen (E_k) *endlich-aufsteigend*, wenn E_k endlich ist für alle Indizes k.

Bemerkenswert ist nun die Tatsache, dass *alle endlich-aufsteigenden Ketten dieselbe kanonische Topologie* (und damit auch denselben Konvergenzbegriff) *induzieren*. Zunächst zeige ich dazu Folgendes:

Proposition 4. – Seien (E_k) und (E'_k) in E kumulierende Ketten. Dann gilt: (1) Sind $(E_k),(E'_k)$ endlich-aufsteigend, so sind sie äquivalent. (2) Ist (E_k) endlich-aufsteigend und äquivalent zu (E'_k), so ist auch (E'_k) endlich-aufsteigend.

Beweis: Zu (1). Aus Gründen der Symmetrie genügt es zu zeigen, dass etwa (E'_k) die Kette (E_k) überlagert. Sei dazu E_n vorgegeben. E_n enthalte genau die Elemente $e_1, \ldots, e_q$ (E_n ist endlich!). Da (E'_k) in E kumuliert, existiert zu jedem der e_i ein Index $k_i \geq 0$ mit $e_i \in E'_{k_i}$ $(1 \leq i \leq q)$. Aufgrund der ersten Ketteneigenschaft gehört die Vereinigung der E'_{k_i} $(1 \leq i \leq q)$ wieder zu (E'_k), genauer gilt: $E_n \subseteq E'_m$ für $m := \max(k_1, \ldots, k_q)$. Also wird (E_k) von (E'_k) überlagert. — Zu (2). Sei $(E'_m$ ein beliebiges Glied der Kette (E'_k). Da diese von (E_k) überlagert wird, hat man $E'_m \subseteq E_n$ für ein geeignetes $n \geq 0$. Nun ist aber E_n endlich, also auch E'_m. $\dashv$

Aus den Behauptungen von Proposition 3 und 4 folgt, dass die Klasse der endlich-aufsteigenden Ketten einen Kettentypus darstellt. Wir wollen ihn den *finitären Kettentypus* nennen und mit τ_0 bezeichnen. Am Beispiel von τ_0 wird ersichtlich, dass völlig verschiedene Ketten zu ein und demselben Typus gehören können. Insbesondere können sich äquivalente Ketten in beliebig langen endlichen Anfangsstücken von einander unterscheiden. Im Hinblick auf die Annäherungsidee bedeutet dies, dass die Nachbarschaftsverhältnisse unter den konkurrierenden Theorien nicht bestimmt werden durch die besondere Richtung und Abfolge, in der sich das Repertoire der zugelassenen Prüfsätze erweitert.

6. Progressionsprinzipien. Eigenschaften von Theorienmengen

Nunmehr sollen zwei Prinzipien für die Progression von Theorien formuliert werden, die im Wesentlichen dem in Abschnitt 3 (nach H.-P. Lorenzen) skizzierten Auswahlverfahren und der Fortschreitungsbedingung (dort mit (V) bezeichnet) entsprechen. Zunächst erörtere ich kurz die Plausibilität der Prinzipien im Hinblick auf das Ziel, die Idee der ‘Wahrheitsannäherung’ zu explizieren. Dann geht es darum zu erkennen, wie sich die Prinzipien auf die Topologie der Theorien auswirken.

Sei $t_0, t_1, t_2, \ldots$ eine Folge von Theorien aus T; ferner bezeichne H die Menge aller Folgenglieder: $H := \{t_k \mid k = 0, 1, 2, \ldots\}$. Wir betrachten folgende *Progressionsprinzipien*:

$$(P_1H) : (k)(Ee)(e \in E \& R(t_k, e) \& (j)(j < k \supset non\ R(t_j, e)))$$
$$(P_2H) : (k)(e)(e \in E \supset (Ej)(R(t_j, e) \& (e')(e' \in E \& R(t_k, e') \supset R(t_j, e'))))$$

(P_1H)[15] gibt sinngemäß das in Abschnitt 3 betrachtete Auswahlverfahren wie-

[15] Das den P_i beigefügte H soll andeuten, dass die Theorien, auf die sich das Prinzip bezieht, dem

der. Es drückt aus, dass die betrachteten Theorien *innovativ* sind, insoweit gewährleistet ist, dass jedes Glied der Folge $t_0, t_1, t_2, \ldots$ von einer Instanz (Experiment) bestätigt wird, an der sich seine Vorgänger nicht bewährt haben. Im Unterschied zu dem von H.-P. Lorenzen beschriebenen Verfahren, das nach endlich vielen Schritten abbrechen kann, erzwingt in (P_1H) der Allquantor '(k)', dass zu *jedem* ganzzahligen Index $k \geq 0$ eine mit k indizierte Theorie mit innovativer Erklärleistung vorkommt. Die Folge (t_k) besteht daher stets aus lauter verschiedenen Elementen; infolgedessen ist die zugehörige Menge H abzählbar-unendlich.

Die (aus (P_1H) sich ergebende) Tatsache, dass die Menge H abzählbar-unendlich ist, werde im Folgenden mit (P_0H) abgekürzt.

Das Prinzip (P_2H) ist eine Vereinfachung der allgemeinen Voraussetzung (V) bei Lorenzen. In (V) wurde verlangt, dass zu jeder Theorie t_k, die sich nicht an einer vorgegebenen Instanz e bewährt, eine Theorie t_j existiert, die sich an allen t_k bestätigenden Instanzen einschließlich e bewährt. Gleichwertig damit ist die einfachere in (P_2H) ausgesprochene *konservative* Forderung, dass überhaupt zu *jeder* Theorie t_k, bei vorgegebener Instanz e, eine solche Theorie t_j existiert (einerlei ob sich nun t_k an e bewährt oder nicht; im Falle $R(t_k, e)$ hat man nämlich bloß $t_j = t_k$ zu setzen, andernfalls ergibt sich die Forderung aus (V)).[16]

Es soll nun untersucht werden, inwieweit sich die Progressionsprinzipien in topologischer Hinsicht auswirken. Dazu ist zunächst die auf T erklärte kanonische Topologie $\mathrm{Umg}(R;\tau)$ (mit einem Kettentypus τ) auf die Teilmenge $H \subseteq T$ der Folgenglieder $t_0, t_1, t_2, \ldots$ zu übertragen. Dazu werden die Durchschnitte (Spuren) $O \cap H$ der in $\mathrm{Umg}(R;\tau)$ offenen Mengen $O \subseteq T$ zu *offenen Mengen von H* erklärt.[17] Die dadurch auf H induzierte Topologie heißt Spurtopologie von T auf H (gelegentlich auch: auf H relativierte Topologie von T). Es ist unmittelbar klar, dass die H-Umgebungen eines Elements $t \in H$ gerade die Spuren der T-Umgebungen von t sind. Daher bilden die $U_H(t, E_k) := U(t, E_k) \cap H$ sowie ihre Obermengen $\subseteq H$ das Umgebungssys-

System H angehören. – Die Buchstaben $i, j, k, \ldots, m, n, \ldots$ fungieren ausschließlich als Variable für natürliche Zahlen, die entsprechenden Quantoren wie '(En)' oder '(k)' können also nicht falsch verstanden werden.

[16] Nicht formalisiert wurde der lediglich rhetorische Zusatz, demzufolge die Erklärung, welche die neue Theorie leistet, »mindestens ebenso genau« zu sein habe wie die Erklärung durch die älteren Theorien. Auf die quantifizierbare Güte von Erklärungen oder Prognosen nimmt H.-P. Lorenzen außer in (V) selbst nirgendwo Bezug.

[17] Vgl. etwa Franz, loc. cit., S. 37.

tem $\mathrm{Umg}_H(R;\tau)$ der auf H relativierten kanonischen Topologie.

Aus dem ersten Progressionsprinzip (P_1H) ergeben sich zunächst einfache Konsequenzen.

Proposition 5. – Es gelte (P_1H). Für eine unendliche Teilmenge $H^* \subseteq H$ gilt dann ebenfalls (P_1H^*).

Beweis: H^* enthalte genau die Folgenglieder $t_{m_0}, t_{m_1}, t_{m_2}, \ldots$, wobei $0 \leq m_0 < m_1 < m_2 < \ldots$. Sei $k \geq 0$ beliebig vorgegeben. Dann existiert gemäß (P_1H) ein $e \in E$ mit $R(t_{m_k}, e)$ und *non* $R(t_j, e)$ für alle $j < m_k$. Wir wählen (ein nichtnegatives) $m_i < m_k$ beliebig und setzen $j = m_i$. Damit hat man auch *non* $R(t_{m_i}, e)$, was für (P_1H^*) zu zeigen war. $\dashv$

Bemerkung: Eine Teilfolge von H ist unendlich genau dann, wenn sie (P_1) erfüllt.

Proposition 6. – Es gelte (P_1H). Dann ist H ein hausdorffscher topologischer Raum (bzgl. der kanonischen Spurtopologie $\mathrm{Umg}_H(R;\tau)$).

Beweis: Sei (E_k) eine in E kumulierende Kette vom Typ τ. Es werden beliebige $t_r, t_s \in H$ mit $t_r \neq t_s$ und (ohne Einschränkung) $r < s$ vorausgesetzt. Nach (P_1H) gibt es dann $e_0 \in E$ mit $R(t_s, e_0)$, jedoch *non* $R(t_r, e_0)$. Da die Kette (E_k) in E kumuliert, gilt $e_0 \in E_m$ für geeignetes m. Damit gilt dann auch $U_H(t_r, E_m) \cap U_H(t_s, E_m) = \emptyset$. Gäbe es nämlich ein beiden Umgebungen gemeinsames Element $t_q \in H$, so hätte man $r_{E_m}(t_r, t_q)$ und $r_{E_m}(t_q, t_s)$, also auch $r_{E_m}(t_s, t_r)$. Wegen $R(t_s, e_0)$ folgt daraus $R(t_r, e_0)$ im Widerspruch zur obigen Wahl von e_0. $\dashv$

Das erste Progressionsprinzip macht demnach aus einer ihm unterworfenen Theorienfolge einen Hausdorff-Raum H. Das hat zur Konsequenz, dass der Grenzwert einer (in H) konvergenten Folge *eindeutig bestimmt* ist (vgl. dazu die Fußnote 14).

Für die späteren Überlegungen (Abschn. 7) benötigen wir eine weitere Eigenschaft von Theorienfolgen. Im Unterschied zu (P_1H) und (P_2H) wird in ihr ausdrücklich Bezug auf eine in E kumulierende Kette (E_k) genommen:

$$(FH):\ (k)(Es)(Em)\ |U_H(t_k, E_s)| \leq m$$

(FH) besagt, dass jede Theorie t_k aus H eine endliche Umgebung besitzt (der Buchstabe 'F' soll hier an „finit" erinnern). Dieses Kriterium spielt eine wesentliche Rolle bei den Überlegungen zur Kompaktheit bzw. Lokalkompaktheit im Beweis des Konvergenzsatzes.

Anmerkung: Kompaktheit und Lokalkompaktheit sind sog. Überdeckungseigenschaften hausdorffscher topologischer Räume (oder ihrer mit Spurtopologie versehenen Teile). Eine Menge K heißt *kompakt*, wenn jede Überdeckung von K mit offenen Mengen eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Ein (hausdorffscher) Raum heißt *lokalkompakt*, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt. Ein Satz von Alexandroff besagt, dass aus einem lokalkompakten, aber nicht-kompakten Raum L durch Hinzunahme eines weiteren Punktes u ein kompakter Raum $L' = L + \{u\}$ wird (sog. Ein-Punkt-Kompaktifizierung). Dabei sind die offenen Mengen von L auch offen in L'; die in L' offenen Mengen, die *u enthalten*, ergeben sich gerade als die mit $\{u\}$ vereinigten Komplemente (in L) kompakter Mengen . Die kompakte Topologie von L' hat die gegebene Topologie von L als Spur. L' ist eindeutig bestimmt (bis auf Homöomorphie).

Proposition 7. – Es gelte (P_1H) und (FH). Eine Teilmenge von H ist genau dann kompakt, wenn sie endlich ist.

Beweis: Wegen (P_1H) ist H hausdorffsch (nach Proposition 6). – Endliche Mengen sind ersichtlich in jeder Topologie kompakt. Sei umgekehrt $X \subseteq H$ als kompakt vorausgesetzt. Wir nehmen indirekt an, dass X abzählbar-unendlich viele Elemente t_{q_j} $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ enthält. Dann existieren nach (FH) Indizes r_j derart, dass die $U_H(t_{q_j}, E_{r_j})$ endlich sind. Diese (offenen) Abschnittumgebungen überdecken X, wegen der Kompaktheit von X also auch endlich viele von ihnen. X kann daher nicht unendlich sein. $\dashv$

Korollar. – H ist lokalkompakt, aber nicht kompakt in der kanonischen Spurtopologie $\mathrm{Umg}_H(R;\tau)$.

Beweis: Aufgrund von (FH) besitzt jedes Element von H eine endliche und damit auch kompakte H-Umgebung; also ist H lokalkompakt. H ist wegen (P_1H) unendlich und daher nicht kompakt. $\dashv$

Abschließend soll noch eine nützliche Folgerung aus dem zweiten Progressionsprinzip gezogen werden:

Proposition 8. – Es gelte (P_2H). Zu jeder endlichen Teilmenge X von E gibt es dann ein $k \geq 0$ mit $R(t_k, e)$ für alle $e \in X$.

Beweis: Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach der Anzahl von X. – Ist $X = \emptyset$, so gilt die Behauptung trivialerweise (für beliebiges k). Wir nehmen daher an, X sei die Menge der $e_0, \ldots, e_n$ $(n \geq 0)$. Im Fall $n = 0$ ist die Behauptung gleichwertig mit $(Ek)R(t_k, e_0)$, was unmittelbar aus (P_2H) folgt. Im Fall $n \geq 1$ verwenden wir die Induktionsannahme für $X \setminus \{e_n\}$ und erhalten $(i)(0 \leq i \leq n-1 \supset R(t_j, e_i))$ für ein geeignetes $j \geq 0$. (P_2H) liefert nun ein $k \geq 0$ mit $R(t_k, e_n)$ und aufgrund von $(e)(e \in E \ \& \ R(t_j, e) \supset R(t_k, e))$ auch: $R(t_k, e_i)$ $(0 \leq i \leq n-1)$. Insgesamt erhält man daraus $R(t_k, e)$ für alle $e \in X$. $\dashv$

7. Ein Konvergenzsatz

Mit dem soweit entwickelten Begriffsrahmen ist es nun möglich, einen Konvergenzsatz für Progressionen von Theorien zu formulieren und zu beweisen.

Es wurde bereits angedeutet, dass bei der Präzisierung dessen, was hier „Konvergenz" bedeutet, ein lokalkompakter und nicht-kompakter Raum L eine Rolle spielt, der durch Hinzunahme eines weiteren Elements u in einen kompakten Raum L^* verwandelt wird (Theorem von Alexandroff über Ein-Punkt-Kompaktifizierung). Die behauptete Konvergenz erweist sich dann als Konvergenz einer gewissen Folge von Elementen aus L gegen das neu hinzugenommene Element u. Die betreffende Folge soll daher *uneigentlich-konvergent* heißen.[18]

Die Bezeichnung „uneigentlich konvergent" ist umso mehr berechtigt, als die Topologie des kompaktifizierten Raums genau genommen nicht mehr die kanonische Topologie bezüglich der gegebenen Bestätigungsrelation R ist. In der Tat ist für das neue Element u die Beziehung $R(u, e)$ $(e \in E)$ gar nicht definiert. Es ist aber möglich, R in geeigneter Weise so zu einer Relation R^* zu erweitern, dass die kompakte Topologie von L^* gerade die kanonische Topologie bzgl. R^* ist.

Es erscheint mir angebracht, den Konvergenzsatz zunächst ohne die im Beweis benötigten Detail-Bezeichnungen zu formulieren. Insbesondere wird auf das Zusatzelement u im Wortlaut kein direkter Bezug genommen. Einige Ergänzungen im Anschluss an den Beweis sollen dann Einzelheiten dieser Art präzisieren.

Konvergenzsatz. – Sei T eine unendliche Menge von Theorien, E eine abzählbar-unendliche Menge von Instanzen und R eine Bestätigungsrelation $\subseteq T \times E$. Ferner werde T mit der kanonischen Umgebungstopologie $\mathrm{Umg}(R; \tau_0)$ versehen ($\tau_0 =$ Typus der endlich-aufsteigenden in E kumulierenden Ketten). Dann enthält jede den Progressionsprinzipien (P_1) und (P_2) genügende Folge von Theorien aus T eine uneigentlich-konvergente Teilfolge.

[18] Uneigentliche Konvergenz entspricht der auf Seite 213 bereits erwähnten *bestimmten Divergenz* reeller Zahlenfolgen.

Beweis: Sei $t_0, t_1, t_2, \ldots$ eine Folge von Theorien, $H = \{t_0, t_1, t_2, \ldots\}$ die Menge der Folgenglieder; es gilt (P_1H) und (P_2H). Aufgrund der Propositionen 3 und 4 können wir uns den Kettentypus τ_0 ohne Einschränkung durch streng monoton aufsteigende (nichtleere endliche) Instanzenmengen $E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ repräsentiert denken, wobei $\bigcup_{k \geq 0} E_k = E$.

1. Wir konstruieren in effektiver Weise eine Teilfolge (t'_k) von (t_k) derart, dass sämtliche Instanzen aus E_s die Theorie t'_s bestätigen (und wegen $E_s \subset E_r$ auch ihre Nachfolger t'_r, $r > s$). Proposition 8 liefert zu jedem $s \geq 0$ (E_s ist endlich) ein geeignetes $k \geq 0$ mit $R(t_k, e)$ für alle $e \in E_s$. Bestimmen wir dann $m(s)$ als das kleinste derartige k, so leistet die Teilfolge der Theorien $t'_s := t_{m(s)}$ das Gewünschte. Wir behaupten: die Menge $H' := \left\{t'_0, t'_1, t'_2, \ldots\right\}$ ist lokalkompakt, aber nicht kompakt (in der kanonischen Spurtopologie $\mathrm{Umg}_{H'}(R; \tau_0)$). Nach Proposition 7 (und zugehörigem Korollar) genügt es dazu, (P_1H') und (FH') zu zeigen.

Zu (P_1H'). – Aufgrund von Proposition 5 ergibt sich (P_1H') bereits aus (P_0H'). Wir zeigen daher, dass H' eine unendliche Teilmenge von H bildet. Zum Beweis werde indirekt angenommen, H' sei endlich. Dies ist genau dann der Fall, wenn fast alle t'_k identisch sind. Daher denken wir uns einen minimalen Index q gewählt mit $t'_{q+j} = t'_q$ für alle $j \geq 1$. Sei nun $e_0 \in E$ beliebig vorgegeben. Wir suchen ein geeignetes n mit $e_0 \in E_n$. Ist $n < q$, so auch $E_n \subset E_q$, und es ergibt sich $R(t'_q, e_0)$, weil $R(t'_q, e)$ für alle $e \in E_q$ gilt. Ist hingegen $n \geq q$, so wird $t'_q = t'_n$ (indirekte Annahme), woraus wiederum $R(t'_q, e_0)$ folgt. Insgesamt erhalten wir also: $(e)(e \in E \supset R(t_{m(q)}, e))$, d. h. $t_{m(q)}$ erweist sich als „nicht-falsifizierbare“ (oder wenn man so will: „alles erklärende“) Theorie. Dem steht allerdings das erste Progressionsprinzip für die ursprüngliche Folge (t_k) entgegen, denn zu vorgegebenem $k > m(q)$ garantiert (P_1H) ein $e \in E$ mit $R(t_k, e)$ & $(j)(j < k \supset \mathit{non}\ R(t_j, e))$; für ein solche e muss insbesondere *non* $R(t_{m(q)}, e)$ gelten. Die Annahme, dass H' endlich ist, führt demnach auf einen Widerspruch.

Zu (FH'). – Um einzusehen, dass jedes Element $\in H'$ eine endliche Abschnittumgebung besitzt, genügt es,

$$(*) \qquad (k)(Es)\,\mathit{non}\ (Ej)(j \geq s\ \&\ r_{E_s}(t'_k, t'_j))$$

zu zeigen. Denn inhaltlich besagt $(*)$: Zu vorliegender Theorie t'_k lässt sich eine hinlänglich große Instanzenmenge E_s finden derart, dass eine Theorie $\in H'$, die zu t'_k auf E_s äquivalent ist, notwendig zu $\left\{t'_0, \ldots, t'_{s-1}\right\}$ gehört. –

Zum Beweis von $(*)$ sei k beliebig gegeben. Da (P_1H') erfüllt ist, gibt es ein e_0 mit $R(t'_{k+1}, e_0)$, aber *non* $R(t'_k, e_0)$. Wir wählen s so, dass $e_0 \in E_s$ gilt, und betrachten irgendein $j_0 \geq s$. Dann ergibt sich $E_s \subseteq E_{j_0}$ und wegen $e_0 \in E_s$ auch $R(t'_{j_0}, e_0)$. Es kann aber unmöglich $r_{E_s}(t'_k, t'_{j_0})$ der Fall sein, weil sonst auch $R(t'_k, e_0)$ gälte entgegen der Wahl von e_0. Damit ist $(*)$ gezeigt.

2. Als lokalkompakter und nicht-kompakter Raum erlaubt H' eine Ein-Punkt-Kompaktifizierung (nach dem Satz von Alexandroff). Durch Hinzunahme eines weiteren Elementes u erhalten wir einen kompakten Raum $H'' = H' \cup \{u\}$, wenn wir die H'-offenen Mengen und die Komplemente (bzgl. H'') kompakter Teilmengen von H' zu H''-offenen Mengen erklären. Aufgrund von Teil 1 des Beweises kann Proposition 7 auf H' angewendet werden. Die kompakten Teilmengen von H' sind somit gerade die endlichen Teilmengen von H'. Infolgedessen enthält eine H''-offene Umgebung von u (neben u) *fast alle* Elemente von H' (denn das bezüglich H'' gebildete Komplement einer endlichen Teilmenge X von H' besteht aus u und allen Elementen von H' mit Ausnahme der endlich vielen, die in X liegen). Somit liegen in jeder Umgebung von u alle $t'_k \in H'$ mit $k \geq N$ für einen geeigneten Index N. Das heißt: Die Folge der Theorien $t'_0, t'_1, t'_2, \ldots$ konvergiert gegen u, ist also uneigentlich-konvergent. $\dashv$

Ergänzung zum Konvergenzsatz. – Das soweit gesicherte Resultat wirft in mathematischer Hinsicht noch Fragen auf, die das neu hinzugenommene Element u betreffen.

Um die uneigentliche Konvergenz $t'_k \to u$ (für $k \to \infty$) als eine „Annäherung an die Wahrheit“ bezeichnen (interpretieren) zu können, ist plausibel zu machen, inwiefern die „Grenztheorie“ als „wahre“ (oder: alles erklärende, universelle, nicht-falsifizierbare) Theorie anzusehen ist. Weder der Konvergenzsatz selbst noch sein Beweis sagt darüber etwas aus. Das liegt an dem Umstand, dass die Umgebungen einer Umgebungsbasis der kompakten H''-Topologie nicht wie die H'-Abschnittumgebungen als Äquivalenzklassen bzgl. R definiert sind, sondern in direkter (sozusagen extensionaler) Weise – durch den Konstruktionsprozess der Ein-Punkt-Kompaktifizierung – als Komplemente kompakter (hier: endlicher) Teilmengen eingeführt werden. Dem Beweis (Teil 2) ist lässt sich freilich entnehmen, wie Umgebungen einer H''-Umgebungsbasis aussehen könnten (hier nur für die Umgebungen von u von Interesse):

$$U_{H''}(u, E_k) := \{u, t'_N, t'_{N+1}, t'_{N+2}, \ldots\}$$

mit $k \geq N$ und einem geeigneten (von k abhängigen) Index N. Diese Menge ist schon deshalb keine Äquivalenzklasse bzgl. R, weil u nicht zum Vorbereich der Relation R gehört. Insofern ist die kompakte H''-Topologie auch nicht kanonisch bzgl. R. An der besonderen Form der $U_{H''}(u, E_k)$, $k \geq 0$, lässt sich aber unschwer ablesen, wie R (auf $H' \times E$ definiert) zu R'' (auf $H'' \times E$ definiert) erweitert werden muss, damit auch die kompakte H''-Topologie kanonisch bzgl. R'' wird. Für beliebiges $e \in E$ wird dazu definiert:

$$\begin{array}{lll} R''(t', e) & :\equiv & R(t', e) \quad (t' \in H'), \\ R''(u, e) & :\equiv & (Em)(j)(j \geq m \supset R(t'_j, e)). \end{array}$$

Es ist ohne weiteres zu sehen, dass mit dieser „natürlichen" Erweiterung von R zu R'' die Äquivalenzrelationen r_{E_k} sinngemäß zu Äquivalenzrelationen r''_{E_k} fortgesetzt werden und eine Theorie t'_j zu $U_{H''}(u, E_k)$ genau dann gehört, wenn $r''_{E_k}(t'_j, u)$ gilt, d. h. die Topologie der kompaktifizierten Menge H'' besitzt nun ebenfalls eine Umgebungsbasis aus Abschnittumgebungen.

Auf dieser Grundlage ergibt sich auch zwangsläufig die *Nicht-Falsifizierbarkeit der Grenztheorie u* in Form der Aussage

$$(e)(e \in E \supset R''(u, e)).$$

Zu vorgegebenem e existiert nämlich ein $m \geq 0$ mit $e \in E_m$. Nach Konstruktion der Teilfolge (H') in Teil 1 des Beweises zum Konvergenzssatz gilt dann $R(t'_m, e)$ und für alle $j \geq m$ aufgrund von $E_m \subseteq E_j$ auch $R(t'_j, e)$, was nach der obigen Erweiterungsdefinition ja gerade $R''(u, e)$ bedeutet.

Anmerkung: Es lassen sich noch weitergehende Informationen gewinnen. Die Paarmengen Z_n aus der Anmerkung S. 217 bilden eine abzählbare Basis der kanonischen Uniformität auf T. Nach einem Satz aus der Metrisationstheorie uniformer Räume (vgl. etwa J. L. Kelley, *General Topology*, 1955[1], 1970, S. 186) existiert daher auf T eine Pseudo-Metrik, welche die gegebene Uniformität erzeugt. Der im Beweis des Konvergenzsatzes aus H' gewonnene (kompaktifizierte) Raum H'' ist darüberhinaus sogar metrisierbar. (Das ergibt sich aus dem Theorem 8.6 bei J. Dugundji, *Topology*, Boston 1966, S. 247, welches besagt, dass die Ein-Punkt-Kompaktifizierung eines lokalkompakten Raums X genau dann metrisierbar ist, wenn X eine abzählbare Basis besitzt. – Für H'' bilden $U_{H'}(t'_k, E_s)$ zusammen mit $U_{H''}(u, E_s)$ eine solche Umgebungsbasis.) Geeignete Distanzfunktionen lassen sich in beiden Fällen konkret angeben (allerdings abhängig von einer Kette (E_k) und nicht nur vom zugehörigen Kettentypus), was hier aber nicht im Einzelnen verfolgt werden soll. Somit erhalten wir die Aussage: *H'' ist ein kompakter metrischer Raum.*

Aus der Allgemeinen Topologie ist bekannt, dass jede Folge in einem kompakten metrischen Raum eine konvergente Teilfolge besitzt. Andererseits bilden aber bereits die Theorien $t'_0, t'_1, t'_2, \ldots$ eine Cauchy-Folge in dem Sinn, dass

$$(s)(En)(p)(q)(p \geq n \;\&\; q \geq n \supset r_{E_s}(t'_p, t'_q))$$

gilt. Beweis: Sei E_s vorgegeben. Nach Konstruktion von H' gilt $(e)(e \in E_s \supset R(t'_j, e))$, wenn nur $j \geq s$; also gilt auch $r_{E_s}(t'_p, t'_q)$ für $p, q \geq s$, da ja für jedes $e \in E_s$ sogar $R(t'_p, e)$ und $R(t'_q, e)$ der Fall ist. – Den vorangehenden Überlegungen der Ergänzung ist ohne weiteres zu entnehmen, dass diese Cauchy-Eigenschaft auch dann noch erhalten bleibt, wenn die Folgenglieder $t'_0, t'_1, t'_2, \ldots$ um u erweitert und die Äquivalenzrelation r_{E_s} zu r''_{E_s} auf $H'' \times H''$ fortgesetzt wird. Infolgedessen ist jede Cauchy-Folge in H'' konvergent, denn sie besitzt eine konvergente Teilfolge und strebt gegen denselben Limes wie diese. Räume, in denen jede Cauchy-Folge konvergiert, nennt man *vollständig*. Allerdings ist in unserem Fall die Ein-Punkt-Kompaktifizierung der Menge H' dasselbe wie ihre Vervollständigung, da *jede* Folge in H'', die unendlich viele verschiedene Glieder enthält, eine gegen u konvergierende Cauchy-Folge ist.

8. Wissenschaftslogische Bewertung

Welche Konsequenzen ergeben sich aus dem Konvergenzsatz im Hinblick auf die Frage nach einer adäquaten Präzisierung der Annäherungsidee? Um die Rede von einer „Annäherung an die Wahrheit“ wenigstens als sinnvolle Sprechweise legitimieren zu können, hatten wir zunächst gefordert, den Begriff „Annäherung“ im Sinne eines Konvergenzprozesses zu interpretieren. Ferner hatten wir uns die Aufgabe gestellt, plausible Bedingungen anzugeben, unter denen eine Folge von Theorien dann in diesem Sinne konvergent ist. Es hat sich nun herausgestellt, dass die in Abschnitt 6 spezifizierten Progressionsprinzipien dazu geeignet sind. Erstens sind sie ohne Verwendung topologischcr Begriffe formulierbar; zweitens entsprechen sie einer plausiblen Idee fortschreitender Verbesserung von Theorien; und drittens – das zeigt der Konvergenzsatz – bilden sie eine hinreichende Bedingung dafür, dass eine ihnen unterworfene Theorienfolge eine uneigentlich-konvergente Teilfolge besitzt. Dabei lässt sich diese Teilfolge in *expliziter und effektiver Weise* mit Hilfe des zweiten Progressionsprinzips aus der gegebenen Folge aussondern. Der zugrundeliegende Begriff der Konvergenz bzw. uneigentlichen Konvergenz ist durch eine Topologie (auf der Gesamtheit der betrachteten Theorien definiert), die von der Beziehung zwischen Theorie und Erfahrungsdatum abhängt. Der „Grenzpunkt“, gegen den die ausgesonderte Teilfolge konvergiert, lässt sich in natürlicher Weise als eine „wahre“ Theorie auffassen, die sich an sämtlichen (in Betracht gezogenen) Erfahrungsinstanzen bewährt.

Um die wissenschaftslogische Bedeutung der vorgeschlagenen Explikation richtig einschätzen zu können, empfiehlt es sich, nun auch zu erörtern, was durch sie *nicht* geleistet wird und was ihrer Anwendbarkeit grundsätzlich entgegensteht. Vor allem ist dabei dem Mißverständnis vorzubeugen, die Progressionsprinzipien sollten als *Kriterien* für ‘Wahrheitsnähe’ oder ‘Annäherung an die Wahrheit’ in die wissenschaftliche Praxis Eingang finden. Ein solcher Gebrauch der dargelegten Resultate ist aus verschiedenen Gründen völlig abwegig. Die wichtigsten dieser Gründe werde ich im Folgenden kurz auseinandersetzen.

Als erster Grund ist zu nennen, dass der Ausgangspunkt beim Aufbau einer kanonischen Topologie für Theorien eine erhebliche Vereinfachung der realen Verhältnisse darstellt. Wenn auch keine besonderen Voraussetzungen über die Art des klassifikatorischen Bestätigungsbegriffs gemacht werden, so liegt doch durchweg die Annahme zugrunde, dass nur ein einziger Bestätigungsbegriff verwendet wird. Bei der Auswahl von Theorien, seien sie nun empirisch oder nicht, kommen aber meist noch andere Gesichtspunkte zur Geltung, und zwar in Form ganz verschiedener, gegebenenfalls nebeneinander eingesetzter Begriffe von Qualifikation. Möglicherweise ist dieser Mangel unseres topologischen Modells durch eine geeignete Komplizierung zu beheben.

Durch keine Maßnahme auszuschalten ist dagegen die idealisierende Annahme, man könne sich auf die Gesamtheit E von einschlägigen Instanzen (Prüfsätzen, Experimenten, etc.) beziehen. Dabei handelt es sich nicht allein um eine Vereinfachung der wirklichen Sachlage, sondern um eine *vollkommen theoretische Konstruktion*. Denn E liegt niemals geschlossen vor; es ist ein potentiell-unendliches System, dessen Erzeugung auf bisweilen recht verschlungenen Wegen erfolgt. Allerdings haben unsere Überlegungen zum finitären Kettentypus gezeigt, dass die (meist wieder von Theorien abhängige) Art der Gewinnung von Instanzen, insbesondere die Reihenfolge ihrer Gewinnung, den Charakter der kanonischen Topologie überhaupt nicht beeinflusst. Wohl aber ergibt sich aus der Annahme, dass E abzählbar-unendlich ist, die praktische Unanwendbarkeit der Progressionsprinzipien; in ihnen wird nämlich von All- und Existenzquantoren Gebrauch gemacht, die sich uneingeschränkt auf das ganze System E beziehen.

Ein weiteres, dem vorangegangenen ähnliches Argument ist noch zu nennen. Es besteht in der Feststellung, dass es überhaupt keine unendliche Folge von Theorien geben kann, die man sinnvollerweise daraufhin überprüfen würde, ob sie den Progressionsprinzipien genügt oder nicht. Denn eine unendliche Theorienfolge ist nur durch Angabe eines Bildungsgesetzes konstruierbar (und wäre damit zwangsläufig trivialisiert): Die in den Progressionsprinzipien formulierten Eigenschaften sind kaum aufgrund eines (deskriptiven) Bildungsgesetzes vorwegzunehmen, da in der Praxis jeder Übergang zu einer neuen Theorie einen ganz individuellen, konstruktiven Gedanken erfordert. Die hier aufgezeigte Schwierigkeit ist von grundsätzlicher Natur. Sowenig es möglich ist, die Progressionsprinzipien auf unendliche Theorienfolgen (praktisch) anzuwenden, so wenig Sinn hat es auch, sie auf (beliebige) *endliche* Anfangsabschnitte solcher Folgen einzuschränken. Denn im Hinblick auf die Frage der 'Annäherung an die Wahrheit' besagt es nichts, dass eine endliche Folge von Theorien den Progressionsprinzipien genügt oder dass dem nicht so ist, und zwar einfach deshalb, weil das Erfülltsein der Progressionsprinzipien überhaupt nicht von der Beschaffenheit irgendwelcher noch so großer endlicher Anfangsabschnitte der betreffenden Theorienfolge abhängt. Das entspricht der aus der Analysis bekannten Tatsache, dass das Konvergenzverhalten einer Folge reeller Zahlen nicht durch Abänderung von endlich vielen Folgengliedern beeinflusst wird. Wie die Konvergenz ist das Erfülltsein der Progressionsprinzipien eine *infinitäre*, d. h. die *gesamte* Folge betreffende Eigenschaft.

Alle diese Überlegungen zeigen, dass die hier durchgeführte Explikation nicht auf bestimmte Situationen in der wissenschaftlichen Praxis angewendet werden kann. Auch wenn der tatsächliche Fortgang wissenschaftlicher Erkenntnis nach dem Modus der Progressionsprinzipien verläuft, so können wir realiter doch niemals von einer 'Annäherung an die Wahrheit' sprechen, sondern höchstens idealiter oder – wenn man so will – *sub specie aeternitatis*. Das ist kein Nachteil. Vielmehr würde man die Idee der Wahrheitsannäherung überhaupt missverstehen, wenn man in ihr ein Kriterium bzw. praktisches Verfahren und nicht nur, wie Popper, ein *regulatives Prinzip* sehen wollte. Lediglich der *Begriff* ist interpretierbar: durch ein in mathematischer Sprache modelliertes Bild.

POSTSKRIPTUM

1. – Die 1971 veröffentlichte Bemerkung von H.-P. Lorenzen (über eine Möglichkeit der *Definierbarkeit von Wahrheit*) lernte ich im Herbst 1972 kennen. Im Sommersemester des folgenden Jahres hatte ich meine eigene (daran korrigierend anknüpfen-

de) formale Fassung fertig, die dann als Kapitel 5 von *Theorie und Rechtfertigung* 1975 erschien. In etwa zeitgleich propagierte Stegmüller (in *Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie*, Bd. II) einen »Non-statement view« von Theorien, angeregt durch J. Sneeds *Logical Structure of Mathematical Physics* (1971). Dieser Sichtweise zufolge sollten für die Beurteilung der Beziehungen einer Theorie zum Erfahrungsfeld sowie ihres Verhältnisses zu anderen Theorien nicht mehr ihre *syntaktischen* Ausdrücke (Terme, Gleichungen, Formeln allgemein) maßgeblich sein, sondern gewisse Gesamtheiten von „Modellen". Stegmüller spricht von einem »Denken in globalen Strukturen« und grenzt es als *makrologische* Betrachtung von der *mikrologischen* Analyse ab, die sich mit Sätzen und logischer Ableitbarkeit zwischen ihnen beschäftigt. Vielmehr besitzt – nach „strukturalistischer" Auffassung – eine empirische (z. B. physikalische) Theorie keinen aussageförmigen Charakter, sondern besteht i. w. aus einem »Strukturkern« K und einer Menge I »intendierter Anwendungen«. Die Grenzziehung verläuft somit in Wahrheit zwischen logisch-syntaktischen und gewissen „strukturtheoretischen" Gebilden. Weshalb diese nun zu einer Makrologik gehören sollen, will sich mir schon deshalb nicht so richtig erschließen, weil eine Theorie auch für einen „Strukturalisten" eine in sich differenzierte und gegliederte Einzelentität darstellt. Schaut man denn auch einmal genauer hin, wie die Reduktion oder Approximation einer Theorie auf bzw. durch eine andere Theorie „strukturalistisch" begründet wird (etwa bei Stegmüller, loc. cit., Bd. II, Teil G, Kapitel 8), so treten an den entscheidenden Stellen die guten alten Terme und Gleichungen auf den Plan: beim Kepler-Newton-Vergleich a. a. O., S. 247, 248, 251 (der ohnehin auf den fundierten mikrologischen Analysen von E. Scheibe beruht) oder bei der Zurückführung einer klassisch-mechanischen Zwergtheorie (nach McKinsey und Suppes) auf die speziell-relativistische Mechanik S. 261 und S. 263. Der barock anmutende „modelltheoretische" Wort-Überbau, den C. U. Moulines et alii über die dazu erforderlichen fundamentalen, an konkreten Formeln durchzuführenden Überlegungen gestülpt haben, ist freilich völlig fehl am Platze. Stegmüller selbst sagt über das zuletzt genannte Beispiel auf S. 264: »Der entscheidende Punkt beim Grenzübergang ist der, daß [. . .] die Folge der c_i gegen ∞ geht«. Das ist für einen Physiker wohl kaum eine Überraschung; und natürlich beruhen auch andere Fälle von Reduktion und Approximation darauf, dass man einen oder mehrere numerische Parameter in den Gleichungen einer Theorie variiert oder bestimmten Grenzprozessen unterwirft.

Mit einer makrologischen Betrachtungsweise hat das wenig zu tun. Diese erfordert nämlich einen weitaus größeren Abstraktionsschritt, bei dem das, was eine Theorie *ist*, zunächst ganz unbestimmt bleibt: analog zu der gebräuchlichen Methode, die Grunddinge und -beziehungen eines axiomatischen Systems undefiniert zu lassen. Man kann z. B. in einer axiomatisierten Geometrie den Ausdruck $I(p,g)$ bilden (und lesen als: Punkt p inzidiert mit Gerade g); doch seine Bedeutung ist einzig durch die Axiome des Systems gegeben, welche die Verwendung von Prädikatzeichen (wie I) festlegen. In ähnlicher Weise kann man sich eine Beziehung $R(t,e)$ zwischen einer (abstrakten)

Theorie t und einer (ebenfalls undefiniert gelassenen) empirischen Instanz e vorstellen (und lesen als: Theorie t erklärt oder bewährt sich an e). Es bleibe einmal (als fraglich) dahingestellt, ob sich schon mit diesen Symbolen und passenden Axiomen etwas Brauchbares entwickeln lässt. Mein eigener Beitrag über Progressionen beschränkt sich auf die Einführung einer „natürlichen“ Topologie bzw. Uniformität und zweier Axiome (P_1), (P_2), ist also allenfalls als ein erster Schritt hin zu den Elementen einer *makrologischen Theorie intertheoretischer Beziehungen* anzusehen. Vermutlich bedarf es hier (nicht anders als auch sonst in der Mathematik) der Einführung weiterer Symbole und Axiome, um zu einem ausdruckfähigeren und reichhaltigeren System mit interessanten Anwendungen zu gelangen.

2. – Stegmüllers o. g. Kapitel 8 über Approximation verwendet »Unschärfemengen«, die zuvor auch G. Ludwig in seiner Monografie *Die Grundstrukturen einer physikalischen Theorie* (Berlin; Heidelberg; New York 1978) benützt hatte. Das dort erörterte »Prinzip der unscharfen Abbildungen« geht davon aus, dass gerade eine *exakte* physikalische Theorie häufig nur ein unzulängliches *idealisiertes* Bild der Wirklichkeit beschreibt. Dessen Relationsaussagen lassen sich mit empirischen Messdaten häufig erst dadurch in Einklang bringen, dass man die darin vorkommenden Größen durch Angabe eines Spielraums »verschmiert«. Ein solcher Spielraum, *Unschärfemenge* genannt, ist eine Menge von „benachbarten“ Wertepaaren. Ludwig definiert sie als sog. uniforme Strukturen, deren Eigenschaften er durch einen »Vergleich von Theorie und Experiment« plausibilisiert (S. 54 f). Die dem zugrunde liegende Theorie der uniformen Räume stammt von A. Weil, der sie 1937 entwickelte (unter anderem, um den in metrischen Räumen erklärten Begriff der gleichmäßig stetigen Abbildung auf eine größere Klasse topologischer Räume zu übertragen).

In § 8 untersucht Ludwig dann auf dieser Basis die »Beziehungen zwischen physikalischen Theorien«. Statt einer „Reduktionsrelation“ präzisiert er, wann eine Theorie t_2 *umfangreicher* ist als eine Theorie t_1. Dabei kann t_1 aus t_2 durch »Einschränkung« (S. 86) hervorgehen oder über ein »Einbettung« (S. 87 f) genanntes Abbildungsverfahren identifiziert werden. Den »besonders wichtigen Sonderfall der ‘approximativen Einbettung’ [. . .], der in fast unendlicher Vielfalt in der Physik eine Rolle spielt« (*Grundstrukturen*, S. 100), beschreibt Ludwig mit Hilfe geeigneter Unschärfemengen. – In der historischen Entwicklung der Physik haben wir es in seinen Augen daher nicht mit Umstürzen zu tun, sondern mit einem »Entwicklungsgang von weniger umfangreicheren zu immer umfangreicheren *PT*’s [physikalischen Theorien, A. S.] als ein immer weiter und weiter verbessertes Aufdecken der Struktur der Welt durch Abbildung in immer besseren mathematischen Bildern« (S. 102). Danach sieht es so aus, als könnten oder sollten Ludwigs Vergleichskonzepte (Einschränkung und Einbettung) die intuitive Idee wiedergeben, auf die Poppers komparativer Verisimilitude-Ansatz zielt (als Grundlage für eine Präzisierung von ‘Wahrheitsannäherung’ von mir in Abschn. 2 zurückgewiesen). Davon kann jedoch, wenn überhaupt, nur in einem begrenzten

Rahmen die Rede sein. Zum einen relativiert Ludwig den darin anklingenden Fortschrittsgedanken wie folgt: »Ist man von einer Theorie PT_1 zu einer „besseren“ PT_2 vorangeschritten, so ist nicht etwa die vorhergehende Theorie PT_1 abgetan, im Gegenteil kommt diese oft erst recht *in ihrem Bereich* zur vollen Wirkung, wenn man ihre Grenzen durch die bessere Theorie PT_2 abzuschätzen gelernt hat; ja, man geht manchmal sogar umgekehrt von einer „guten“ zu einer „schlechteren“ Theorie über, weil nur die schlechtere Theorie wirklich zu *handhabende Lösungsmethoden* für einen bestimmten Erfahrungsbereich liefert und so eine bessere Verfügbarkeit über Naturvorgänge ermöglicht« (S. 81 f). Beispielsweise macht die Spezielle Relativitätstheorie (SRT) trotz des von ihr entworfenen umfangreicheren Bildes die klassische Mechanik deshalb nicht überflüssig, denn diese ist »weiterhin genauso gültig wie eh und je« (S. 82).[19] Zum anderen funktionieren Vergleichsbeispiele wie das zuletzt genannte typischerweise aufgrund von Grenzübergängen an gewissen Parametern (nach Rezepten wie $c \to \infty$ für die Lichtgeschwindigkeit oder $h \to 0$ für das Plancksche Wirkungsquantum). Eine Theorie $t_2(\alpha)$, die einen solchen reellen Parameter α aufweist, beschreibt in diesen und ähnlichen Fällen ein differenzierteres Bild als eine ältere Theorie t_1, und diese wird „approximiert“, wenn sich durch einen geeigneten Grenzprozess bzgl. α eine Theorie t_2' aus $t_2(\alpha)$ ergibt, für die eine Korrespondenz zu t_1 besteht. In dem Sinn „konserviert“ dann $t_2(\alpha)$ die früher von t_1 erbrachten Leistungen in seinem neuen (umfassenderen) Bild.[20] Möchte man umgekehrt damit die Vorstellung verbinden, mit t_1 habe man sich der Theorie $t_2(\alpha)$ angenähert, so liegt auch dann, wenn $t_2(\alpha)$ in einem definierbaren Sinn „besser“ ist als t_1, lediglich ein Vergleichspaar (oder bestenfalls eine überschaubare endliche Menge) von Theorien vor, und die in Abschn. 2 vorgetragenen Einwände bleiben anwendbar.

[19] Inwiefern die SRT als „näher an der Wahrheit“ gelegen anzusehen ist, ist dabei noch eine ganz andere Frage. Höchst kritisch beantworten sie z. B. G. Galeczki und P. Marquardt: *Requiem für die Spezielle Relativität*, Frankfurt am Main 1997.

[20] Diese absichtlich simple Schilderung soll natürlich nicht die viel kompliziertere Einbettungsbeziehung (8.14) wiedergeben, die Ludwig im Rahmen der von ihm beschriebenen Abbildungsprinzipien *en detail* mikrologisch entwickelt hat. Makrologiker (wie Stegmüller, loc. cit., S. 262) geben sich aber schon einmal ein reelles $\varepsilon > 0$ vor, um damit »die Nachbarschaften« ihrer uniformen Hausdorff-Räume zu definieren, die sich auf diese Weise als ganz gewöhnliche Tupel-Räume mit handelsüblicher Metrik entpuppen.

Idealisierungsprozesse – ihr logisches Verständnis und ihre didaktische Funktion[1]

Nicht die Vergleichung der Vorstellungen und ihre Zusammenfassung nach Arten und Gattungen, sondern die Formung der Eindrücke zu Vorstellungen ist daher die ursprüngliche und die entscheidende Leistung des Begriffs.

ERNST CASSIRER

Idealization is a most important process of concept formation (besides recursion and abstraction) mainly known from the construction of ideas in physics. First, the considerations proposed below contain an attempt to make sense of applying a more general notion of idealization to mathematics, too. Its features are discussed by examples from elementary algebra, probability, and geometry supplemented by a proposal for giving a more formalized definition. Second, some didactical functions of 'ideative' concept formation are considered, that is opening up the real world, pointing out the purposes behind mathematical ideas, understanding concepts and methods genetically. As a special case, the author formulates a principle of operative concept formation in geometry teaching.

1. Einleitung: Probleme der Begriffsbildung

Die folgenden Überlegungen zielen auf das Verständnis von Idealisierungsprozessen, die eine bedeutende Rolle bei Begriffsbildungen der Mathematik und der Physik, wie überhaupt bei der Ausprägung wirklichkeitsbezogener Modellvorstellungen in empirischen Wissenschaften spielen. Diese Prozesse schlagen überdies eine Brücke zwischen begrifflicher Genese und axiomatischem System, weshalb ihr Studium auch zu einer dynamischen Sichtweise der Mathematik und ihrer Begrifflichkeit beitragen kann.

---

[1] Veröffentlicht in: *Journal f. Mathematik-Didaktik*, Jg. 1 (1980), Heft 1/2.

Jede Untersuchung von Vorgängen der Begriffsbildung hat mit der Beantwortung zweier fundamentaler Vorfragen zu beginnen: Welche Methoden liegen der Untersuchung zugrunde? Welche Formen der Begriffsbildung sollen und können überhaupt untersucht werden? – Was zunächst die Methode angeht, so dürften etwa von der Psychologie bereitgestellte empirische Verfahren zweifellos eine wichtige Rolle spielen. Es wäre aber eine Fehleinschätzung dieser Verfahren, von ihnen über eine Deskription realer Denkprozesse die Grundlagen für eine kausal-erklärende Theorie zu erwarten, wenn nicht gleichzeitig die Gegenstände der psychologischen Untersuchung, also hier die Formen der Begriffsbildung, durch logische Analyse sichtbar gemacht und hinreichend differenziert werden. Wenigstens zwei Gefahren drohen einem bloß deskriptiven Vorgehen ohne logische Analyse: Man bleibt bei Vorgängen stehen, die noch zu weit entfernt sind von dem, was sich wirklich in der Mathematik abspielt (z. B. Sortieren von Klötzchen, Klassifizieren künstlicher Wörter). Eine bestimmte Form der Begriffsbildung (zumeist die Abstraktion, von der womöglich auch nur vage Vorstellungen zugrunde liegen), wird über Gebühr betont und in den Mittelpunkt der Betrachtungen gestellt.[2]

Somit stellt sich dringlich die Frage nach den logisch unterscheidbaren und präzisierbaren Formen der mathematischen Begriffsbildung. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit nenne ich *Rekursion*, *Abstraktion* und *Ideation* (Idealisierung); auf Unterfälle dieser Schemata soll es dabei hier nicht ankommen. – Unter Rekursion ist die Einführung mathematischer Objekte (Folgen, Operationen, Terme, Formeln und dgl. mehr) durch rekursive Vorschriften zu verstehen. Trotz seiner weiten Verbreitung und seiner Wichtigkeit (u. a. wegen des Zusammenhangs mit der vollständigen Induktion) ist dieses Verfahren ein Stiefkind innerhalb der bisherigen Diskussion über mathematische Begrifflichkeit. Immerhin ist die Rekursion zumindest anthropologisch von Interesse durch ihre Beziehung zu dem, was man in der Phänomenologie als iterierbare Selbstbezüglichkeit des menschlichen Bewusstseins kennzeichnet. Damit verbunden ist wohl auch der Charakter der natürlichen Zahlen als Glieder einer unendlichen (unabschließbaren) Zählreihe, wie vielleicht überhaupt das Phänomen des freien Erzeugens von Objekten in der Mathematik.

Demgegenüber sind Abstraktionsvorgänge seit eh und je ein bevorzugter Untersuchungsgegenstand für Logiker und Psychologen. Mitunter wird allerdings nicht hinreichend deutlich gemacht, worin ein Abstraktionsprozess

[2] Die Aktualität beider Gefahren belegt z. B. die Arbeit [17] sowie manche der dort zitierten Studien.

eigentlich bestehen soll; insbesondere fasst man den Begriff gerne so weit, dass auch solche Vorgänge unter ihn fallen, die ich im Folgenden der Idealisierung zurechnen werde. Es ist aber zweckmäßig, die Abstraktion in Anlehnung an Freges Zahlbegriffsanalysen wie folgt zu verstehen: Ist in einem bestimmten Bereich von Objekten eine Äquivalenzrelation gegeben und sind für äquivalente Objekte x_1, x_2 die Aussagenformen $A(x_1)$ und $A(x_2)$ „gleichwertig" (z. B.: $A(x_1) \leftrightarrow A(x_2)$ beweisbar in einer Theorie T), dann lässt sich $A(x)$ so auffassen, als wäre (innerhalb von T) nicht von Objekten x die Rede, sondern von Klassen aller zu x äquivalenten Objekte. Bei diesem Übergang von Objekt zu Klasse erscheint das Abstrahieren als ein Identifizieren und damit als ein Absehen von bestimmten Eigenschaften äquivalenter Dinge. Das entspricht im Übrigen auch der Auffassung von Abstraktion, wie sie Weyl in [32, S. 23 f] auseinandergesetzt hat. In [22] wird eine entsprechende Darstellung aus Sicht der Mathematik-Didaktik versucht in der Annahme, damit sei der »formale Aspekt jeder Begriffsbildung« (S. 227) beschrieben. Die Mathematik kennt eine Fülle abstraktiver Begriffsbildungen: Zahlen (abstrahiert aus Mengen), Funktionen (abstrahiert aus Termen), Quotientenstrukturen in Algebra und Topologie, u. a. m. Doch erscheint die Begriffsgenese i. allg. vielfältiger als eine Abstraktion. Schon logischem Verständnis erscheint sie als ein Ineinandergreifen verschiedenartiger Prozesse.

In letzter Zeit hat Gorski [13] versucht, die Etappen bei der Durchlaufung solcher Prozesse im Einzelnen darzustellen. Dabei unterscheidet er zwar den abstraktiven Typ von dem der Idealisierung, verengt aber beide Formen auf Sonderfälle »komplizierter und widerspruchsvoller Widerspiegelung der Wirklichkeit« (S. 364). Nun hat man an Begriffen nicht allein abstraktive und allgemeiner: reproduktive Züge zu beobachten. Mindestens ebenso wichtig sind prospektive Leistungen, d. h. die Funktion von Begriffen als Mittel theoretischer Gestaltung von Wirklichkeit. Wollte man den Unterschied zwischen Abstraktion und Ideation schlagwortartig charakterisieren, so müsste man sagen: Abstrahieren ist ein Absehen von bestimmten Eigenschaften, die ein Ding besitzt; Idealisieren ist ein Hineinsehen von Eigenschaften, die ein Ding nicht besitzt. – Diesen Unterschied erkannt und ausführlich herausgearbeitet zu haben, ist ein Verdienst Cassirers (vgl. [5], S. 169 ff, [6] Bd. I, S. 251 ff, Bd. III, S. 332 ff, S. 454 ff). Hier werde ich versuchen, das von Cassirer entworfene Bild von Idealisierung durch ein Schema zu ersetzen, das durch gezieltere Fallstudien und logische Rekonstruktionen einen höheren Genauigkeitsanspruch erfüllt. Natürlich bleibt eine solche Präzisierung (von mir in [27] begonnen) in einem gewissen Sinne auch immer nur eine Annäherung. Im Übrigen halfen dabei etliche (hier nicht immer im Einzelnen zu kennzeichnende) Einsichten, die das Studium von Autoren wie Hilbert, Weyl und Mach sowie H. Dingler und P. Lorenzen zutage förderte. – Auch in der Analytischen Wissenschaftstheorie wurden in jüngster Zeit Untersuchungen zum Konzept der Idealisierung vorgelegt (z. B. [16] und [33]); ich habe mich jedoch hier nicht explizit auf sie bezogen, da sie sich vornehmlich auf physikalische Bereiche mit arithmetischen Quantitäten beschränken.

2. Beispiele von Idealisierungsprozessen

Idealisierungen sind vor allem von der Physik her bekannt. Dort bildet die durch sie geleistete zum Teil starke Vereinfachung ein unentbehrliches Mittel zum Erfassen der Realität. Auf Idealisierungen beruhen z. B. die Vergleiche physikalischer Größen, also etwa die Begriffe „gleich schwer wie“ oder „schwerer als“ (vgl. etwa [10], S. 22 ff). Geläufigere Beispiele sind Begriffe wie „Massenpunkt“, „Geschwindigkeit“, „ideales Gas“, „absolut schwarzer Körper“, „idealer thermodynamischer Prozess“ und dgl. mehr. Am Begriff des idealen Gases möchte ich einige typische Wesenszüge des Idealisierens herausstellen. (Unter einem anderen Ansatz und einer etwas abweichenden Zielsetzung wird dieses Beispiel neben anderen analysiert in [16], S. 13 ff.) In Physikbüchern findet man gelegentlich erläutert, ein ideales Gas sei ein solches, das die Boyle-Mariottesche Zustandsgleichung $p \cdot V = \text{const}$ ($p =$ Druck, $V =$ Volumen) erfüllt. Tatsächlich gibt es aber kein derartiges Gas: die Boyle-Mariottesche Gleichung widerspricht – streng genommen – der Erfahrung. Warum ist sie dann aber für den Physiker, dem es doch um Wirklichkeitserkenntnis geht, überhaupt von Interesse? Was ihn zur (vorläufigen) Annahme der besagten Gleichung motiviert, ist der Umstand, dass eine Reihe realer Gase sie mehr oder weniger gut approximativ erfüllt. Dabei kommt es im Folgenden zu einem charakteristischen Umbau des Systems akzeptierter einschlägiger Aussagen. Einerseits wird ihm das neue Gesetz (als „Erfüllungsnorm“) einverleibt; andererseits begegnet man seiner dadurch entstandenen Inkonsistenz, indem man sich gerade jene Tatsachen (zumindest hypothetisch) ausgeklammert denkt, die als Gründe für diese Widersprüchlichkeit in Frage kommen. Im Beispiel liegen die Gründe im Eigenvolumen der Gasmoleküle sowie in den zwischen ihnen waltenden Kohäsionskräften. Werden diese berücksichtigt, so ergibt sich eine Beziehung der Form $(p + \frac{a}{V^2}) \cdot (V - b) = \text{const}$ ($aV^{-2} =$ Binnendruck, $b =$ Kovolumen), wie sie von van der Waals aufgestellt wurde. Für $a = 0$ und $b = 0$ geht diese Zustandsgleichung offenbar in die von Boyle und Mariotte über. Sofern also Bedingungen vorliegen, unter denen die beiden Parameter a, b „vernachlässigt“ werden können, gilt das Boyle-Mariottesche Gesetz angenähert. Nicht selten sind die Gründe für die nur angenäherte Geltung eines Gesetzes vorab gar nicht ausdrücklich bekannt. Es ist dann eine Aufgabe der Forschung, sie zu finden und soweit wie möglich zu konkretisieren.

Im Einzelnen lassen sich demnach drei Gesichtspunkte festhalten, die bei Idealisierungen eine Rolle spielen:

- Erweiterung eines Systems akzeptierter Aussagen durch Hinzufügen einer „Norm“;
- Ausklammerung von Teilen aus dem erweiterten Gesamtsystem, die dessen Konsistenz verhindern;
- approximative Erfüllung der „Norm“ im alten System.

Ich möchte an drei weiteren Beispielen aufzeigen, dass diese (hier absichtlich noch nicht sehr präzise gefassten) Aspekte auch für mathematische Begriffsbildungen von Bedeutung sein können.

I. – Wir betrachten als „Norm“ eine Aussage wie

(0) $\qquad \exists x(x^2 = 5)$

und fixieren dazu eine Sprache der angeordneten Körper, welche die Konstanten ‘0’,‘1’,‘2’,..., die Funktionszeichen ‘+’ und ‘·’ sowie das Relationssymbol ‘<’ umfasst. Mit $\mathscr{E}$ werde die Menge der in dieser Sprache einschlägigen Aussagen bezeichnet, die im Bereich $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen gültig sind. $\mathscr{E}$ enthält z. B. folgende Aussagen:

(1) $\qquad \forall x \forall y(x+y = y+x \wedge x \cdot y = y \cdot x)$,

(2) $\qquad \forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(x \cdot y = 1)$,

(3) $\qquad \forall x(x^2 < 5 \vee 5 < x^2)$.

Außerdem enthält $\mathscr{E}$ natürlich noch weitere (nicht sämtlich explizit angebbare) Aussagen; z. B. bilden die Axiome, mit denen man üblicherweise ausdrückt, dass $\mathbb{Q}$ ein Körper ist, ein Teilsystem Δ von $\mathscr{E}$. Die Aussagen (1) und (2) gehören zu Δ, (3) hingegen nicht.

In der klassischen Algebra interessiert man sich für die Lösbarkeit von Gleichungen, insbesondere also für die Frage nach der Gültigkeit von (0). Offenbar gehört (0) nicht zu $\mathscr{E}$, mehr noch: es entsteht sogar ein Widerspruch, wenn wir (0) der Menge $\mathscr{E}$ hinzufügen (man beachte dazu Aussage (3)). Gleichwohl ist die Lage nicht aussichtslos – wir können ja nach einem Teilsystem von $\mathscr{E}$ suchen, das mit (0) logisch verträglich ist. Tatsächlich ist etwa Δ ein solches System, d. h. (0) lässt sich widerspruchsfrei mit den üblichen Körper-Axiomen vereinigen. Bekanntlich läuft dies auf die formale Adjunktion von $\sqrt{5}$ zu $\mathbb{Q}$ hinaus: Man setzt $a^2 = 5$ voraus und bestätigt mit Termen der Gestalt $c_1 + c_2 a$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$) formal die Körper-Rechenregeln (genaueres in Abschnitt 4). Damit haben wir zufriedenstellend die Aufgabe gelöst, die „Norm" (0) in einem hinlänglich großen und sinnvoll strukturierten Teilbereich von $\mathscr{E}$ *durchzusetzen*.

Schließlich sei noch die Approximationseigenschaft erwähnt: (0) ist ja in $\mathbb{Q}$ (und insofern in $\mathscr{E}$) approximativ erfüllt in dem Sinn, dass es zu jedem $n \geq 0$ eine rationale Zahl r mit $\mid r^2 - 5 \mid < 10^{-n}$ gibt.

Praktische Bedeutung hat das Verfahren allein hierdurch. Gleichwohl können solche Erweiterungsprozesse in der Mathematik auch von großem theoretischen Wert sein, ohne dass die idealisierenden Zusatzannahmen in einem auf der Hand liegenden Sinn approximativ erfüllt werden. Standardbeispiele sind etwa die (die obige Methode verallgemeinernde) Konstruktion eines Zerfällungskörpers zu vorgegebener algebraischer Gleichung, die Kompaktifizierung topologischer Räume oder die von Hilbert propagierte Auffassung der klassischen Mathematik als das um sog. ideale Aussagen erweiterte Feld des konstruktiv Beweisbaren. Übrigens betrachtet Hilbert in [14] auch derartige Fälle ausdrücklich als ein Idealisieren. Ich möchte daher zumindest noch von *Idealisierungen im weiteren Sinne* (i. w. S.) sprechen, wenn die „Norm" (nur) das Kriterium der approximativen Erfüllung verletzt.[3]

II. – Das nächste Beispiel ist zugegebenermaßen etwas heikel. Es betrifft die in Disputen älteren Datums schon einmal aufgetauchte Auffassung, wonach Wahrscheinlichkeiten eine Art idealisierter Häufigkeiten sind.[4] Ohne hier auf die Probleme des Wahrscheinlichkeitsbegriffs näher einzugehen, möchte ich nur andeuten, wie eine solche These unter den drei genannten Aspekten des Idealisierens betrachtet werden könnte.

Dazu denken wir uns eine Versuchsanordnung mit höchstens abzählbar vielen Resultaten $A_1, A_2, A_3, \ldots$ gegeben. Gewöhnlich wird man in der Praxis die Wahrscheinlichkeiten der A_i durch ihre relativen Häufigkeiten schätzen, d. h.

[3] Eine solche „Verletzung" soll auch in den Fällen gegeben sein, für die nicht einmal ein sinnvoller Begriff von „Approximation" verfügbar ist.

[4] Vgl. [7], Kap. II, insbes. S. 105.

man arbeitet mit Abbildungen h, die jedem aus den A_i gebildeten Ereignis dessen relative Häufigkeit in einer gewissen hinreichend langen Versuchsserie (Folge möglicher Resultate) zuordnen. Diese Häufigkeitsabbildungen lassen sich als diejenigen Funktionen h auf der zugehörigen Ereignisalgebra über der aus sämtlichen A_i bestehenden Menge Ω charakterisieren, die den folgenden Bedingungen genügen[5]:

(i) $h(X) \geq 0$ für alle $X \subseteq \Omega$;

(ii) $h(\Omega) = 1$;

(iii) $h(\bigcup_i X_i) = \sum_i h(X_i)$ für jede abzählbare Familie sich paarweise ausschließender Ereignisse X_i;

(iv) $n \cdot h(\{A_i\})$ ist ganz für geeignetes natürliches n.

Wie man sogleich erkennt, handelt es sich bei (i)-(iii) um die Axiome, die seit Kolmogoroff zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie verwendet werden. Worin besteht nun aber die fragliche Idealisierung des Häufigkeitsbegriffs? Den Angelpunkt bildet die *Forderung*, dass die zugeordneten Zahlenwerte *unabhängig von einer bestimmten Versuchsserie* sein sollen. Dem widerstreitet aber die Bedingung (iv), die sich auf einen als Versuchslänge zu interpretierenden Parameter n bezieht. Indem man diese Bedingung ausklammert, erhält man die gewohnte axiomatische Kennzeichnung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs.

Was nun schließlich das approximative Erfülltsein der genannten Forderung anbelangt, so sind dazu zwei Standpunkte möglich:

1. Man beruft sich auf die Erfahrungstatsache, dass zwei verschiedene hinreichend lange Versuchsreihen angenähert dieselben Häufigkeitswerte liefern. Diese Begründung macht zugleich plausibel, weshalb man überhaupt die Forderung der Unabhängigkeit aufstellen möchte.

2. Man erinnert an ein Gesetz der großen Zahl, etwa an das Bernoullische Theorem, wonach eine Abweichung der relativen Häufigkeit nach n Versuchen vom theoretischen Wahrscheinlichkeitswert p um mindestens $\varepsilon > 0$ eine Wahrscheinlichkeit $\leq p(1-p)/(\varepsilon^2 n)$ besitzt. Ist also n groß, so wird die Abweichwahrscheinlichkeit klein.

Hier entsteht nun eine Schwierigkeit dadurch, dass man die schwindende Abweichwahrscheinlichkeit inhaltlich so aufzufassen hat, als wäre damit ein

---

[5] Vgl. etwa [15], S. 10.

praktisch immer seltener werdendes Ereignis gemeint. Aber worauf gründet sich der Zusammenhang von (axiomatisch fundierter) Wahrscheinlichkeit und praktischem Gewissheitsgrad? Das Gesetz der großen Zahl kann jedenfalls keine Begründung dafür liefern. Es sagt darüber ja erst dann etwas aus, wenn wir seine Limesaussage *inhaltlich* verstehen dürfen, wenn also der fragliche Zusammenhang bereits gesichert ist. So kann eine Begründung nur noch in einer These oder Hypothese liegen, die unabhängig vom Bernoullischen Satz besteht und besagt, dass Ereignisse mit „sehr kleinen" Wahrscheinlichkeiten „praktisch" auszuschließen seien. Eine solche Interpretationsregel geht auf Cournot (einen Philosophen des 19. Jahrhunderts) zurück. Cournots Prinzip schlägt die Brücke von der Theorie zur Anwendung und wird ganz zu Unrecht gelegentlich für eine triviale Klausel gehalten. Doch wer sagt uns, ob und wann es angewendet werden darf? Wir wissen ja nicht einmal, wann eine wirkliche Anwendung überhaupt vorliegt, weil z. B. nicht präzisiert wird, wann eine Wahrscheinlichkeit „sehr klein" ist. Nach van der Waerden handelt es sich sogar um eine »Willensentscheidung, die nicht theoretisch zu rechtfertigen ist und von Fall zu Fall verschieden ausfallen kann« ([30], S. 68). Auch bei Kolmogoroff findet sich dieser Grundsatz.[6] Alles in allem wird man sich daher wieder (zumindest teilweise) auf empirisches Wissen berufen müssen, wenn man das approximative Erfülltsein der Forderung „Wahrscheinlichkeit unabhängig von Versuchsserie" einsichtig machen will.

Der skizzierte Vorgang ist sicherlich nicht der einzige in der Stochastik, der die Züge einer Idealisierung trägt. In ähnlicher Weise idealisierend sind die meisten Annahmen über Merkmalverteilungen in einer Grundgesamtheit, wie sie bei statistischen Untersuchungen zugrunde gelegt werden. Hingewiesen sei auch auf den neuerlichen Versuch P. Lorenzens in [18], den Begriff der Laplaceschen Versuchsanordnung über Normen an die Herstellung von Zufallsgeneratoren ideativ – wegen des Handlungsbezugs sogar operativ – einzuführen und auf dieser Basis das Bernoullische Theorem als Beweis (!) dafür auszuwerten, dass Wahrscheinlichkeiten idealisierte Häufigkeiten sind.

III. – Mein drittes Beispiel ist die Geometrie. Hier ist es eine weithin akzeptierte Ansicht, dass es die geometrischen Dinge, von denen in den Axiomen die Rede ist, allenfalls als ideale Gebilde gibt. Nicht selten findet man den Vorschlag, sich etwa eine ideale Ebene durch Abstraktion aus einer Vielzahl realer, nur angenähert ebener Flächen entstanden zu denken. Man kann sich ja

[6] Siehe Regel B in [30], S. 68.

beispielsweise auch Zahlen durch Abstraktion aus Mengen entstanden denken.

Hugo Dingler hat erkannt, dass hier zwei ganz verschiedene Prozesse vonstatten gehen. Seit Cantor und Frege wissen wir die Gleichzahligkeit (oder Gleichmächtigkeit) von Mengen ohne Rückgriff auf den Zahlbegriff zu erklären. Damit gelingt die gewünschte abstraktive Bildung des Zahlbegriffs. Was wäre jedoch für reale Flächen die entsprechende Äquivalenzbeziehung, nach der abstrahiert werden soll? Eine solche Beziehung ist nicht bekannt und kann es Dingler zufolge auch gar nicht sein.

Der Abstraktionstheorie hält Dingler[7] entgegen:

»Selbst wenn in der Natur eine absolut genaue Ebene vorkommen würde, wären wir nicht einmal in der Lage dies festzustellen. Würden wir willkürlich eine bestimmte Fläche zur Grundfläche der Geometrie wählen und ernennen, so würden alle ‘Unebenheiten’ dieser empirischen Fläche in die Definition miteingehen, und ihre Reproduktion könnte nur immer mit jener beschränkten Genauigkeit geschehen, die an der Definitionsfläche vorhanden war. Wenn man meinen sollte, man müsse von jenen Unebenheiten ‘abstrahieren’, so müssen wir fragen von welchen? Wird diese Frage irgendwie beantwortet, so ist dies nur möglich aufgrund einer Idee, die unbemerkt hinter dieser Antwort steckt.«

Bündig formuliert lautet Dinglers These: *Die Begriffe der Geometrie sind nicht abstraktiv, sondern ideativ gebildet*.

Diese Auffassung hat Lorenzen aufgegriffen und bis zu einem gewissen Grade mathematisch präzisiert. Ich werde den Grundgedanken im Rahmen meines Schemas von Idealisierung zu umreißen versuchen. Ausgangspunkt ist ein System von Aussagen, in denen zwar geometrische Wörter wie „Ebene“, „Gerade“ oder „parallel“ vorkommen, diese Wörter jedoch ausschließlich im Sinne physischer Formen gedeutet werden, z. B. anhand der Seiten, Kanten und Ecken eines Ziegelsteins. Dieses System macht man nun zu einer Geometrie, indem man es um Normen erweitert, die den Grundtermini ideale Eigenschaften vorschreiben. Z. B. verlangen Dingler und Lorenzen von einer Ebene E eine *innere Homogenität*: Was von einem Punkt P von E in Bezug auf E gilt, soll auch von jedem anderen Punkt P' von E in Bezug auf E gelten. – Eine entsprechende Forderung für die nicht mit E inzidierenden Punkte beschreibt die äußere Homogenität (durch die ebene von sphärischen und zylindrischen Flächen unterschieden werden). Ähnliche Normen benutzt Lorenzen für das Parallelsein und das Senkrechtstehen; auch in ihnen werden

[7] Vgl. [9], S. 134 f.

Eigenschaften vorgeschrieben, die an realen Körpern immer nur unvollkommen auftreten. Um die Normen insgesamt geltend zu machen, müssen nun eventuell gewisse vorgeometrische „Sachverhalte“ preisgegeben werden, weil sie zu den idealen Anforderungen im Widerspruch stehen. Welche das sind, hängt davon ab, auf welchen Realbereich sich die vorgeometrischen Aussagen beziehen. Andererseits bleiben auch eine Reihe von Sachverhalten bestehen, etwa solche topologischer Natur. Als Beispiel erwähne ich die Aussage, dass eine Gerade jede Ebene durchstößt, die zwischen zwei ihrer (der Geraden) Punkte verläuft.

Schließlich haben wir ein System, in dem die alten Sprachteile in einem neuen Sinn verwendet werden. Dabei sind die hinzugekommenen Normen im alten System approximativ erfüllt; jedoch nicht in dem Sinn, dass ideale Verhältnisse mit beliebiger Genauigkeit durch reale anzunähern sind. Vielmehr heißt approximativ hier: Die Abweichungen realer Verhältnisse von den Normen der Idealisierung lassen sich *unterhalb einer gewissen Schranke halten*, die für die meisten bisher bekannten praktischen Zwecke bedeutungslos ist. Nähere Einzelheiten dazu schildern Lorenzen und Schwemmer in [19].[8]

3. Präzisierungsvorschlag

Nach diesen Beispielen möchte ich den hinter ihnen stehenden Begriff der Idealisierung formal etwas präziser fassen. Dabei kommen drei Aussagensysteme $\mathscr{E}, \mathscr{N}, \mathscr{E}'$ ins Spiel. $\mathscr{E}$ spielt die Rolle des mit einer „Norm“ $\mathscr{N}$ zu idealisierenden Bereichs, und es soll erklärt werden, wann $\mathscr{E}'$ als Idealisierung von $\mathscr{E}$ bzgl. $\mathscr{N}$ anzusehen ist; die zu $\mathscr{E}'$ und $\mathscr{N}$ gehörende Sprache möge die Sprache von $\mathscr{E}$ umfassen. Wir schreiben wie üblich $\Gamma \vdash \mathfrak{A}$ für die logische Ableitbarkeit von $\mathfrak{A}$ aus der Formelmenge Γ. Gilt $\Gamma \vdash \mathfrak{A}$ für alle $\mathfrak{A}$ mit $\Delta \vdash \mathfrak{A}$, so heiße Δ *Teiltheorie* von Γ. Ist außerdem auch Γ Teiltheorie von Δ, so nennen wir Δ und Γ *äquivalent*. Vor dem Hintergrund der drei eingangs genannten Kriterien lässt sich nunmehr erklären, wann $\mathscr{E}'$ *Idealisierung von* $\mathscr{E}$ bzgl. $\mathscr{N}$ sein soll:

1. $\mathscr{E}'$ ist widerspruchsfrei.
2. Es gibt eine Teiltheorie Δ von $\mathscr{E}$ derart, dass $\mathscr{E}'$ und $\Delta \cup \mathscr{N}$ äquivalent sind.
3. $\mathscr{N}$ ist in $\mathscr{E}$ „approximativ erfüllt“.

[8] Eine kritische Betrachtung des Dinglerschen Programms unter didaktischen Gesichtspunkten erfolgt in [28] (im vorliegenden Band enthalten) und ausführlicher in [4].

Von diesen Bedingungen ist allein die dritte noch ziemlich vage gehalten. Wie die Beispiele gezeigt haben, kann „approximative Erfüllung“ recht Unterschiedliches bedeuten. Es ist daher eine durchaus nicht-triviale Aufgabe, eine für alle oder doch wenigstens für viele wichtige Fälle brauchbare Explikation dieses Begriffs zu entwickeln. [9]

Gleichwohl gestattet auch die hier gegebene unvollständige Präzisierung des Idealisierungsbegriffs bereits einige allgemeinere Einsichten zu gewinnen, zumindest lässt sie Ansätze zu einer Theorie der ideativen Begriffsbildung erkennen. Beginnen wir dazu bei der Bedingung (2) der oben gegebenen Explikation. Ihr zufolge wird die Norm $\mathscr{N}$ mit einer Teiltheorie Δ des bis dahin zugrunde gelegenen Systems $\mathscr{E}$ in Einklang gebracht. Wäre etwa $\mathscr{E} \cup \mathscr{N}$ widerspruchsfrei, so wäre dies der einfache Fall, dass die ideale Forderung bereits im alten Bereich durchsetzbar ist und damit die Idealisierung lediglich als eine Erweiterung von $\mathscr{E}$ erscheint. Im Allgemeinen verhält es sich dagegen keineswegs so, d. h. $\mathscr{E} \cup \mathscr{N}$ wird widerspruchsvoll sein. Um zu einer konsistenten Idealisierung zu gelangen, hat man daher die Menge $\mathscr{E}$ in geeigneter Weise „auszudünnen“. Ungeeignet wäre dazu etwa das Verfahren, die Vereinbarkeit von $\mathscr{N}$ mit den *Teilmengen* von $\mathscr{E}$ zu prüfen. Diese Methode ist unbrauchbar, weil sie sklavisch von der jeweils gegebenen Axiomatik der Theorie $\mathscr{E}$ selbst abhängt. Maßgeblich ist ja nicht $\mathscr{E}$ selbst, sondern alles, was in dem durch $\mathscr{E}$ beschriebenen Bereich gültig ist, d. h. die Menge aller Folgerungen aus $\mathscr{E}$. Es wäre natürlich wünschenswert, einen möglichst umfassenden Teil dieser Menge, und das heißt eben: eine *maximale Teiltheorie* von $\mathscr{E}$ mit der Norm

[9] Einen ersten Eindruck von den Schwierigkeiten des Problems vermitteln die Erörterungen von Apostel in [1, S. 24 ff]. Zuvor hatte Simon [29] einen Vorschlag ausgearbeitet, wonach approximative Erfüllbarkeit in Bezug auf ein vorgegebenes Maß als Erfüllbarkeit modulo einer Nullmenge zu präzisieren wäre. Apostel kritisiert hieran zurecht die Abhängigkeit von einer Maßfunktion, die ja immer mehr oder weniger willkürlich anzunehmen ist, und kommt zu der Meinung, die Hauptarbeit in dieser Frage sei noch keineswegs geleistet. Allerdings scheinen mir seine eigenen Hinweise ebensowenig brauchbare Anhaltspunkte für eine Lösung des Problems zu liefern, da sie durchweg auf die gänzlich vage gelassene Redeweise von Mengen zurückgreifen, die sich nicht allzusehr von einer vorgegebenen Gesamtheit unterscheiden (vgl. [1], S. 25). Ein anderer Gedanke wurde von Scheibe in [23] entwickelt und in [24] weiter erläutert. Scheibe geht es darum, einen Reduktionsbegriff für Theorien $\mathscr{E}, \mathscr{E}'$ zu konstruieren, der beschreiben soll, wann $\mathscr{E}$ durch $\mathscr{E}'$ „approximativ erklärt“ wird. Das Verfahren beruht auf topologischen Beziehungen zwischen den möglichen Anwendungsfällen der Theorien, hat aber ebenfalls den Nachteil, dass die zugehörige Topologisierung noch vergleichsweise willkürlich ist. Überhaupt enthält wohl keiner der zahlreichen Ansätze, die in den 1970er Jahren zur Explikation „approximativer Gültigkeit (Wahrheit)“ erschienen sind, eine endgültige Klärung. Von den Arbeiten, die logische und topologische (metrische) Verfahren einsetzen, seien erwähnt: [16, 21, 26, 31, 33]. Eine Vereinheitlichung der Ansätze steht noch aus.

$\mathscr{N}$ in Einklang zu bringen. Wie man eine solche findet, lässt sich vermutlich nicht allgemein beschreiben. Immerhin lässt sich aber zeigen, dass stets eine maximale Idealisierung (i. w. S.) von $\mathscr{E}$ bezüglich $\mathscr{N}$ existiert, falls nur $\mathscr{N}$ selbst eine konsistente Formelmenge ist.

Der Beweis hierzu besteht in einer standardmäßigen Anwendung des Zornschen Lemmas auf das durch $\subseteq$ induktiv geordnete System aller Teiltheorien Δ von $\mathscr{E}$, für die $\Delta \cup \mathscr{N}$ widerspruchsfrei ist. Für dann garantiertes maximales Δ^0 ist leicht zu verifizieren, dass $\mathscr{E}' := \Delta^0 \cup \mathscr{N}$ eine (bzgl. der Teiltheoriebeziehung) maximale Idealisierung i. w. S. ist. – Allerdings ist die so konstruierte Menge $\mathscr{E}'$ keineswegs eindeutig bestimmt, da die $\subseteq$-Maximalität die Teiltheorie Δ^0 nicht eindeutig festlegt. Man kann sich sogar (mittels des Joint-Consistency-Theorem von Craig-Robinson) davon überzeugen, dass für verschiedene maximale Teiltheorien von $\mathscr{E}$ die zugehörigen Idealisierungen niemals äquivalent sind.

Ein weiterer Punkt ist Hilberts Widerspruchsfreiheitsdoktrin. H. Luckhardt hat sie in [20] wie folgt rekonstruiert: Die Widerspruchsfreiheit einer (klassischen) Theorie ist notwendig und hinreichend dafür, dass alle in ihr beweisbaren realen Aussagen gültig sind.[10] Dabei sind reale Aussagen für Hilbert die Aussagen der quantorfreien rekursiven Arithmetik.

Der Begriff der Idealisierung veranlasst nun eine geeignete Verallgemeinerung dieses Realitätsbegriffs zu einem Konzept 2. Stufe, auf das bezogen die Luckhardtsche Rekonstruktion immer noch bestehen bleibt. Hilberts Argumente in Fragen der Widerspruchsfreiheit erscheinen so auch von einer noch allgemeineren methodischen Warte aus als präzisierbar. Der Grundgedanke ist dabei folgender: Sei $\mathscr{E}'$ eine Idealisierung von $\mathscr{E}$. An einen Realitätsbegriff für Aussagen der $\mathscr{E}$ und $\mathscr{E}'$ gemeinsamen Sprache werden nunmehr die Bedingungen gestellt:

1. Es gibt reale Aussagen.
2. Ist $\mathfrak{A}$ eine reale Aussage, so auch das Negat $\neg\mathfrak{A}$.
3. Jede reale Aussage ist in einer $\mathscr{E}$ und $\mathscr{E}'$ gemeinsamen Teiltheorie entscheidbar.

Ein Begriff von „realer Aussage“ mit diesen drei Eigenschaften ist – wie die dritte von ihnen zeigt – relativ zu einer gegebenen Idealisierung $\mathscr{E}'$ von $\mathscr{E}$ erklärt, allgemeiner: relativ zu einem Paar $(\mathscr{E}, \mathscr{E}')$ von Formelmengen. Ist $\mathscr{E}$ widerspruchsfrei, so verifiziert man ohne Mühe die folgende Behauptung: $\mathscr{E}'$ ist

[10] Vgl. hierzu auch [25], S. 116.

widerspruchsfrei genau dann, wenn jede in $\mathscr{E}'$ beweisbare und (bzgl. $(\mathscr{E}, \mathscr{E}')$) reale Aussage auch in $\mathscr{E}$ beweisbar ist.

Soweit diese Andeutungen. Schließlich sind auch allgemeinere methodologische Einsichten zu erwarten, von denen insbesondere didaktische Untersuchungen profitieren können. Im folgenden Abschnitt werden einige diesbezügliche Möglichkeiten aufgezeigt.

4. Didaktische Funktion ideativer Begriffsbildung

Die didaktische Funktion von Idealisierungsprozessen ist vielfältiger Natur und soll hier in ihren drei wichtigsten Teilen skizziert werden. Die Aufgliederung in Teilfunktionen dient lediglich einer bequemeren Diskussion; tatsächlich sind sie nur höchst selten voneinander unabhängig oder treten getrennt auf. Gemeint sind die folgenden Gesichtspunkte:

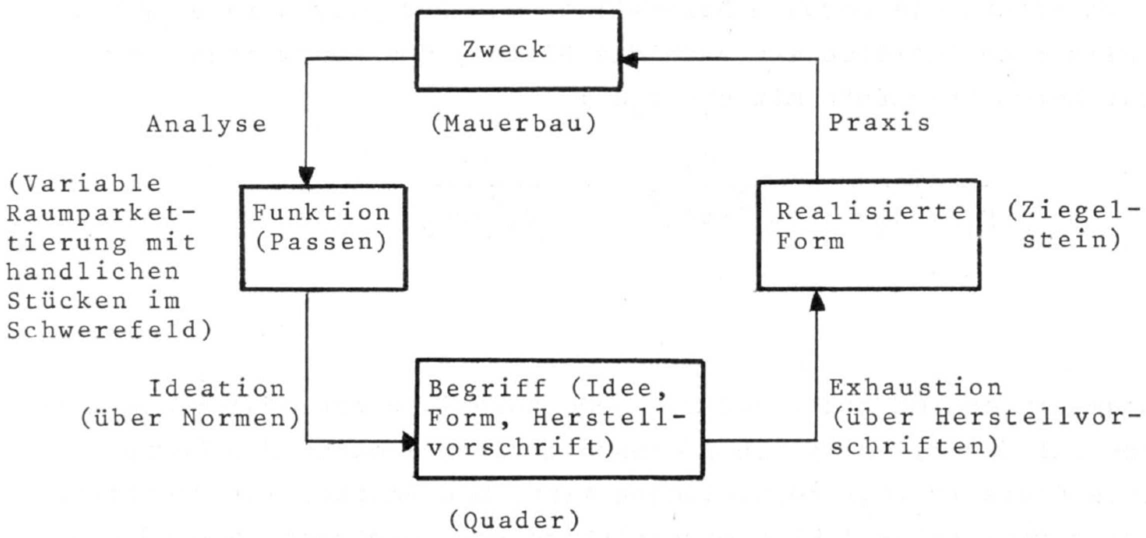
- Erschließung der Realität
- Bewusstmachen von Zwecken
- Konstruktion von Genesen

Gewöhnlich wird das Problem der Realitätserschließung im Lernprozess mit dem Begriff des Modells oder des Modellierens verbunden. Idealisierungen im gerade entwickelten Sinne (auch i. w. S., d. h. ohne „Approximation“) sind eine besondere und auch eine besonders wichtige Form des Modellierens, wie wir es im mathematischen und naturwissenschaftlichen Denken vorfinden. Allerdings herrscht vielfach die Ansicht, ein Modell bestehe in einer mehr oder weniger vergröbernden Abbildung (oder gar einer „Widerspiegelung“) realer Verhältnisse und Situationen. Zweifellos ist jedes Modellieren bis zu einem gewissen Grade auch ein Reproduzieren. Was aber die Analyse ideativer Begriffsbildung zeigt, das ist die hervorragende Funktion gerade jener Voraussetzungen, die das Abweichen des Modells von der Wirklichkeit im jeweiligen Fall veranlassen und qualitativ bestimmen. Hierbei spielt dann die „Approximation“ eine Schlüsselrolle. Auf ihr beruht die praktische Anwendbarkeit von Idealisierungen, von ihr hängt auch der Sinn ab, in dem eine solche Anwendung „praktisch“ ist. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist dies ein anderer Sinn als in der Geometrie.

In engem Zusammenhang damit steht die Frage, woher eigentlich die Normen der Idealisierungsprozesse stammen. Eine Norm wird ja nicht durch Abbilden der Wirklichkeit gewonnen; vielmehr ist sie überhaupt erst einmal an die Realität heranzutragen und in ihr (gewöhnlich durch Exhaustion) durchzusetzen. Dingler spricht deshalb nicht von Widerspiegelung, sondern geradezu plastisch von einer „Ergreifung“ des Wirklichen. (Im Begriff der Erschließung sollte man sich beide Aspekte vereint denken.) Im Ergreifen des Wirklichen klärt sich denn auch die Herkunft ideativer Normen. Normen prägen neue gedankliche Objekte (Begriffe, Theorien), die man zur Erfüllung bestimmter (inner- oder häufiger: außermathematischer) Zwecke benötigt (vgl. dazu auch [11]). Wenn wir z. B. von der Häufigkeit zur Wahrscheinlichkeit übergehen, so geschieht das unter anderem mit der Zielvorstellung, bestimmte Parameter (wie Versuchslänge) in unseren Aussagen zu unterdrücken und diese so in höherem Maße vergleichbar zu machen. Die Zwecke, die das schrittweise Erweitern des Zahlbegriffs anregen, findet man zu einem großen Teil in Problemen des Gleichungslösens (siehe [8]). Physikalische Situationen werden nicht selten unter mehr heuristischen Zielsetzungen ideativ behandelt. So wird im eingangs genannten Beispiel zur Gasgleichung durch den ersten Ansatz das Nachdenken gerade auf die konsistenzstörenden Ursachen gelenkt, was dann zu einer Verbesserung der ursprünglichen Norm führt. Nun sind die genannten Gesichtspunkte für sich genommen keineswegs neu. Es kommt aber darauf an, sie didaktisch zu nutzen. Das ist möglich, wenn dem Lernenden bewusst wird, dass sich hier überhaupt Begriffsveränderungen abspielen und dass diese an Zwecke und Zielvorstellungen gebunden sind. Es genügt allerdings nicht, bloß die Zweckhaftigkeit allgemein bewusst zu machen; entscheidend ist vielmehr *die Diskussion der konkreten Zwecke selbst* (vgl. dazu das „teleologische Prinzip“ in [4]).

Eines der wichtigsten Anwendungsfelder des geschilderten Ansatzes ist zweifellos die Geometrie. Zurecht setzt sich heute immer mehr die (auch nicht neue) Erkenntnis durch, dass der Geometrie im Unterricht eine allzu einseitig auf die axiomatische Methode ausgerichtete Behandlung keineswegs angemessen ist. Dem sucht man durch eine größere Vielfalt von Sichtweisen sowie von Formen des Zugangs zu Begriffen zu begegnen. Allerdings tritt bei herkömmlichem (z. B. definitorischem, exemplarischem, zeichnerischem und damit beziehungsweise an Sprache, Anschauung und Konstruktion gebundenem) Vorgehen der besondere ideative Charakter geometrischer Begriffsbildung stark in den Hintergrund oder kommt häufig gar nicht zum Vorschein. Geometrische Formen und Sachverhalte sind hingegen weder bloß sprachlich gegeben noch sind sie einfach Anschauungstatsachen oder Ergebnisse von Konstruktionen. Wie bei den Zeichengeräten des Konstrukteurs handelt es sich um Artefakte, um von Menschenhand zur Erfüllung bestimmter Zwekke Hergestelltes. Die Herstellung erfolgt dabei anhand einer vermöge Ideation vorgefassten Idee vom Herzustellenden. Es kommt also nicht allein darauf an, im bereits vorhandenen Formenvorrat die vielfältigen Zwecke von Ebenen, Quadern, Zylindern, Dreiecken, Schraubenlinien, regulären Sechsecken etc. sowie deren entsprechende Formfunktionen herauszulesen. Vielmehr sind die geometrischen Begriffe auch *operativ* zu bilden, d. h. es sind von bestimmten Zwecken ausgehend Normen zur Herstellung von Formen zu entwickeln, die jene Zwecke erfüllen.[11] Die Normen, zumeist Homogenitätsforderungen, werden in Handlungsvorschriften zur ihrer (exhaustiven) Realisierung umgesetzt und sind damit inhaltliche Grundlage der ihnen entsprechenden Begriffe (zum *Prinzip der operativen Begriffsbildung* siehe Figur 1).

Das skizzierte Schema der operativen Begriffsbildung ist ein angemessenes Instrument, um den Geometrieunterricht umwelterschließend und wirklichkeitsbezogen zu gestalten. Weitere Erläuterungen und Einzelheiten dazu findet man in [2, 3, 4, 28]. Die genannten Arbeiten enthalten unter anderem mehr oder weniger weit ausgeführte Ansätze zur Konstruktion einschlägiger Genesen.



Figur 1 : Schema der operativen Begriffsbildung in der Geometrie (in Klammern ist ein Beispiel für den Begriff des Quaders angedeutet)

Die Eignung zu genetischen Konstruktionen ist allerdings nicht auf das operative Schema beschränkt, sie ergibt sich vielmehr ganz allgemein aus der Herausarbeitung ideativer Prozesse im mathematischen Denken.

[11] Allgemeiner könnte man eine ideative Begriffsbildung operativ nennen, wenn die zugehörige Norm als Handlungsvorschrift gedeutet werden kann.

Abschließend möge dies am Beispiel der Algebra skizziert werden. Hier ist die formale Adjunktion ein typischer Fall ideativen Vorgehens (siehe I in Abschn. 2). Bewegen wir uns etwa im System der in $\mathbb{Q}$ gültigen Aussagen, so lässt sich dort die Aussage $\exists x(x^2 = 5)$ widerlegen. Die formale Adjunktion eines a mit $a^2 = 5$ ist dann als ein Verfahren beschreibbar, die Norm $\exists x(x^2 = 5)$ in unserem System durchzusetzen. Dazu setzt man $a^2 = 5$ voraus (!) und findet für jeden rationalen Term $\varphi(x)$ eine Darstellung $\varphi(a) = c_1 + c_2 a$ mit geeigneten Bruchnamen c_1, c_2. Es gelten ja zunächst einfache Gleichheiten wie $a^3 = 5a$ und $a^4 = 25$ oder allgemeiner $a^{2n} = 5^n$ und $a^{2n+1} = 5^n a$. Daraus folgt sofort die besagte Darstellbarkeit für polynomiales $\varphi(x)$. Schließlich funktioniert auch die Bildung des Kehrwerts, und zwar durch Erweitern mit $c_1 - c_2 a$:

$$\frac{1}{c_1 + c_2 a} = \frac{c_1}{c_1^2 - 5c_2^2} - \frac{c_2}{c_1^2 - 5c_2^2} \cdot a$$

Insgesamt ergibt sich, dass man jede Anwendung rationaler Operationen auf die Elemente von $\mathbb{Q}$ einschließlich a durch die Angabe eines Paars (c_1, c_2) beschreiben kann. Das Rechnen mit geordneten Paaren rationaler Zahlen erscheint so von vornherein gebunden an das Rechnen mit Termen („formalen Ausdrücken"), und es dürfte dann niemanden verwundern, dass dabei ein neuer Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ herauskommt.

In Lehrtexten der Algebra wird dieses probeweise Hantieren mit hypothetischen Annahmen (Normen) gerne unterschlagen und der Aufbau von $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ vornehmlich mengentheoretisch drapiert – eine Maßnahme, die leicht den Blick für Sinn und Genese einer so fundamentalen Vorgehensweise (der z. B. auch die komplexen Zahlen ihre „Existenz" verdanken) zu trüben geeignet ist.[12] Nebenbei sei bemerkt, dass der allgemeine Kern des *Permanenzprinzips* im Begriff der Idealisierung i. w. S. enthalten ist: Ein Bereich wird erweitert unter Wahrung möglichst vieler in ihm geltender Gesetzlichkeiten. – Bekanntlich wurde dieses Prinzip, besonders in älteren Darstellungen, gern bei der Aufgabe hinzugezogen, die verschiedenen Erweiterungen der Zahlbereiche zu erläutern. Danach lässt sich das Rechnen mit reellen Wurzelwerten wie $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$, etc. rein formal dem Rechnen mit komplexen Zahlen vergleichen. Dennoch liegt hier ein Unterschied vor. Geschichtlich äußert er sich darin, dass man erst relativ spät bereit war, komplexe Zahlen und das Rechnen

[12] Vgl. dazu die Bemerkungen in [8] und [11] sowie die Ehrenrettung des sog. Permanenzprinzips durch Freudenthal [12], S. 205 ff und S. 215 ff.

mit ihnen als „sinnvoll“ anzuerkennen. Vermutlich hat dazu nicht unbeträchtlich die Tatsache beigetragen, dass man imaginäre Zahlen nicht in einer Weise durch andere „anerkannte“ Größen approximieren kann, wie das bei den reellen Wurzeln durch Brüche möglich ist.

Literatur

1. Apostel, L.: Towards the formal study of models in the non-formal Sciences. In: H. Freudenthal (ed.): *The concept and the role of the model in mathematics and natural and social science*, Dordrecht 1961.
2. Bender, P.: Umwelterschließung im Geometrieunterricht durch operative Begriffsbildung. *Der Mathematikunterricht* 24/5 (1978), S. 25-87.
3. Bender, P.; Schreiber, A.: The Principle of Operative Concept Formation in Geometry Teaching. *Educational Studies in Mathematics* 11 (1980), S. 59-90.
4. Bender, P.; Schreiber, A. : *Operative Genese der Geometrie*, Wien und Stuttgart 1985.
5. Cassirer, E.: *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*. Untersuchungen über die Grundfragen der Erkenntniskritik, 2.Aufl., Berlin 1923.
6. Cassirer, E.: *Philosophie der symbolischen Formen*, Bde. I-III, Berlin 1923-1929, 4. Aufl., Darmstadt 1964.
7. Czuber, E.: *Die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Leipzig und Berlin 1923.
8. Dieudonné, J.: Die Abstraktion in der Mathematik und die Entwicklung der Algebra. In: C. Gattegno (Hrsg.): *Zur Didaktik der Mathematik*, Bd. l, Hannover 1969, S. 36-45.
9. Dingler, H.: *Die Ergreifung des Wirklichen*, Kap. I-IV, mit einer Einleitung herausgeg. von K. Lorenz u. J. Mittelstraß, Frankfurt am Main 1969.
10. Essler, W. K.: *Wissenschaftstheorie II: Theorie und Erfahrung*, Freiburg und München 1971.
11. Fischer, R.: Einige Ansätze zur Philosophie im Mathematikunterricht. In: *Materialien und Studien* Bd. 12: Zum Verhältnis von Mathematik und Philosophie im Unterricht der Sekundarstufe II/Kollegschule, IDM Bielefeld 1978.
12. Freudenthal, H.: *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Band 1, Stuttgart 1973.
13. Gorski, D. P.: Über abstrakte und idealisierte Objekte, über deren methodologischen und gnoseologischen Status. In: P. Suppes (ed.): *Logic, Methodology and Philosophy of Science IV*, Amsterdam 1973, S. 357-366.
14. Hilbert, D.: Über das Unendliche. *Math. Ann.* 95 (1925), S. 161-190.
15. Hinderer, K.: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie*, Berlin; Heidelberg; New York 1972.
16. Krajewski, W.: *Correspondence Principle and Growth of Science*, Dordrecht; Boston 1977.

17. Laux, J.: Theorien der Begriffsbildung (mit besonderer Berücksichtigung der Entwicklung natürlicher Zahlen). In: *Beiträge zum Mathematikunterricht* 1969, Teil 1, Hannover 1970, S. 143-156.
18. Lorenzen, P.: Zur Definition von „Wahrscheinlichkeit". In: P. Lorenzen: *Konstruktive Wissenschaftstheorie*, Frankfurt am Main 1974, S. 209-218.
19. Lorenzen, P.; Schwemmer, Q.: *Konstruktive Logik, Ethik und Wissenschaftstheorie*, Mannheim 1973.
20. Luckhardt, H.: Über Hilberts reale und ideale Elemente. *Arch. math. Logik* 17 (1975), S. 61-70.
21. Niiniluoto, I.: Truthlikeness: Comments on Recent Discussion. *Synthese* 38 (1978), S. 281-329.
22. Rinkens, H.-D.: Betrachtungen zur Begriffsbildung aus der Sicht der Mathematikdidaktik. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht* 1973, Hannover 1974, S. 224-229.
23. Scheibe, E.: The Approximative Explanation and the Development of Physics. In: P. Suppes (ed.): *Logic, Methodology and Philosophy of Science IV*, Amsterdam 1973, S. 931-942.
24. Scheibe, E.: Gibt es Erklärungen von Theorien? *Allg. Zeitschrift für Philosophie* 1 (1976), S. 26-45.
25. Schreiber, A.: *Theorie und Rechtfertigung*, Braunschweig 1975.
26. Schreiber, A.: Das Induktionsproblem im Lichte der Approximationstheorie der Wahrheit. *Zeitschrift f. allg. Wissenschaftstheorie* 8 (1977), S. 77-90.
27. Schreiber, A.: Was ist unter Idealisierung in der Mathematik zu verstehen? In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Hannover 1977, S. 230-233.
28. Schreiber, A.: Die operative Genese der Geometrie nach Hugo Dingler und ihre Bedeutung für den Mathematikunterricht. *Der Mathematikunterricht* 24/5 (1978), S. 7-24.
29. Simon, H. A.: Definable Terms and Primitives in Axiom Systems. In: Henkin et al. (eds.): *The Axiomatic Method with special Reference to Geometry and Physics*, Amsterdam 1959.
30. van der Waerden, B. L.: Der Begriff Wahrscheinlichkeit. *Studium Generale* 4 (1951), S. 65-68.
31. Weston, T. S.: Approximate Truth and Valid Operators. *The Journal of Symbolic Logic* 46 (1981), S. 688.
32. Weyl, H.: *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, 3., wesentlich erweiterte Auflage, München und Wien 1966.
33. Wojcicki, R.: The Semantic Conception of Truth in the Methodology of Empirical Sciences. In: J. Pelc (ed.): *Semiotics in Poland 1894-1969*, Warschau 1979.

SUPPLEMENT

1. – Als eine raffinierte Variante von Idealisierung könnte man die *Erzwingungsmethode* („forcing“) ansehen, die P. J. Cohen 1963 als erster erdacht und benutzt hat, um die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese[13] zu beweisen, genauer: um zu zeigen, dass die negierte CH mit den übrigen Axiomen der Mengenlehre nach Zermelo-Fraenkel (ZF) verträglich ist. Dazu wird einem Grundmodell M von ZFC (C steht hier für das Auswahlaxiom) eine gewisse Menge G von Bedingungen so hinzugefügt, dass CH in der entstandenen sog. generischen Erweiterung $M[G]$ ungültig wird, $M[G]$ aber gleichwohl noch ein Modell von ZFC darstellt. Dieser Effekt lässt sich dadurch erzielen, dass die Bedingungsmenge G im Grundmodell M approximiert wird.

2. – Das im Aufsatz heuristisch vorgeführte Beispiel einer quadratischen Körpererweiterung ist nur ein spezieller Fall *formaler Adjunktion* in der Algebra. In algebraischen Erweiterungen von $\mathbb{Q}$, welche Teilkörper von $\mathbb{R}$ sind, lassen sich Irrationalitäten dabei durch rationale Folgen approximieren; in beliebigen Körpererweiterungen ist dies im Allgemeinen natürlich nicht mehr möglich. Auch andere Strukturen, z. B. Gruppen, gestatten die Hinzufügung neuer Elemente. Das ursprüngliche Gebilde findet sich dann in ein umfassenderes Gebilde desselben Typs eingebettet.[14]

3. – Nachtrag zum *Prinzip der Permanenz*: Das Operationsmuster, eine Gesamtheit von Dingen so zu erweitern, dass möglichst viele der bestehenden Gesetzlichkeiten auch nach der Erweiterung noch erhalten bleiben, hat H. Hankel in seiner *Theorie der complexen Zahlensysteme* (1867) wie folgt formuliert: »Wenn zwei in allgemeinen Zeichen der arithmetica universalis ausgedrückte Formen einander gleich sind, so sollen sie einander auch gleich bleiben, wenn die Zeichen aufhören, einfache Größen zu bezeichnen, und daher auch die Operationen einen irgend welchen anderen Inhalt bekommen«.

Man hat dabei stets im Auge zu behalten, dass die Permanenz lediglich eine Forderung ist und es auf einem ganz anderen Blatt steht, ob und wieweit es gelingt, diese auch tatsächlich widerspruchsfrei durchzusetzen. Eine irgendwie geartete logische Garantie gibt es dafür nicht. Beim Übergang etwa von

---

[13] Die Kontinuumshypothese (CH) ist die Aussage: $2^{\omega} \cong \omega_1$, d. h.: Die Potenzmenge der natürlichen Zahlen besitzt dieselbe Mächtigkeit wie die Menge der reellen Zahlen.

[14] Vgl. etwa die ältere Arbeit B. H. Neumann: Adjunction of elements to groups, *J. London Math. Soc* 18 (1943), S. 4-11. Es wird ein Verfahren untersucht, Lösungen von Gleichungen wie $x^m = g$ in einer Gruppe zu adjungieren: »a process which bears a superficial resemblance to the algebraic extension of a field«.

den reellen zu den komplexen Zahlen geht die Ordnung verloren, und schreitet man weiter zu den Quaternionen fort: auch das Kommutativgesetz der Multiplikation. Ein bekannter Satz von Frobenius präzisiert die Aussage, wonach zusätzliche Erweiterungen dann nicht mehr möglich sind, ohne dass die Erweiterung nicht einmal mehr ein Schiefkörper ist.

Das Induktionsproblem im Lichte der Approximationstheorie der Wahrheit[1]

Die folgenden Ausführungen enthalten einen Beitrag zum Problem der Induktion. Den bisher bekannt gewordenen Interpretationen induktiver Regeln wird eine weitere zur Seite gestellt. Sie beruht auf der von Popper propagierten Idee der Annäherung an die Wahrheit, genauer: auf einer geeigneten topologischen Präzisierung dieser Annäherungsidee. Wie sich dabei herausstellt, ist die approximationstheoretische Deutung der allgemeinen Induktion zwar stringent, aber nicht induktivistisch, d. h. sie liefert keine irgendwie geartete Rechtfertigung induktiver Regeln.

1. Das Induktionsproblem seit Hume

Die alte Frage nach der Möglichkeit synthetischer Erkenntnis ist immer noch ein philosophisches Problem ersten Ranges. In den Naturwissenschaften stellt sie sich hauptsächlich als Problem der Induktion, d. h. als Frage nach der Rechtfertigung des Übergangs von endlich vielen auf Beobachtung beruhenden Einzelaussagen zu einer allgemeinen Hypothese. Nach allem, was bisher über das Induktionsproblem veröffentlicht wurde, darf man die These wagen, dass die Suche nach einer *Rechtfertigung* induktiver Regeln als gescheitert anzusehen ist.

Die radikalste Kritik an allen Rechtfertigungsversuchen stammt bekanntlich von David Hume.[2] Popper, der in seiner *Logik der Forschung* das Induktionsproblem an die Spitze der erkenntnislogischen Grundfragen gesetzt hat, gibt dort auch erstmalig eine bündige Rekonstruktion des Humeschen Gedankenganges (1934, 1971^4, S. 3 ff). Eine kurze Version dieser Überlegungen ist nach Stegmüller (1971, S. 16 f) folgendermaßen zu formulieren: Jede wie auch immer geartete Induktionsregel führt von Aussagen $A_1, \ldots, A_n$, in denen unser

[1] Veröffentlicht in: *Zeitschrift f. allgemeine Wissenschaftstheorie* 8/1 (1977), S. 77-90.

[2] Dargestellt in seinem *Treatise of Human Nature* von 1738 sowie im *Enquiry concerning Human Understanding* von 1748.

Beobachtungswissen enthalten ist, zu Aussagen A, »in denen wir unser angebliches Wissen über Nichtbeobachtetes mitteilen«. Nun ist aber der Gehalt von A, d. h. die Menge der logischen Folgerungen von A, nicht in der Folgerungsmenge der $A_1, \ldots, A_n$ enthalten. Also führt eine Induktionsregel von wahren Prämissen im allgemeinen nicht wieder zu einer wahren Konklusion. Fazit: Eine Rechtfertigung induktiver Regeln als »wahrheitskonservierender Erweiterungsschlüsse« ist illusorisch.

Nach dem Untergang des Induktivismus bleibt für den Erkenntnistheoretiker das, was Stegmüller »Nachfolgerprobleme« nennt (a. a. O., S. 14). So entsteht z. B. für Popper die Aufgabe, sein nicht-induktivistisches Programm der deduktiven Prüfung von Hypothesen (oder Theorien) zu explizieren und als adäquaten Ersatz für die vermeintliche Anwendung induktiver Regeln auszuweisen.[3]

Ein anderes, ebenfalls von Popper ausgehendes Nachfolgerproblem besteht darin, die Idee der Annäherung an die Wahrheit zu präzisieren; für Popper ist nämlich diese regulative Idee, verbunden mit deduktiver Theorienprüfung, und nicht irgendein induktives Vorgehen Leitfaden des Erkenntnisfortschritts.[4]

Hier möchte ich noch folgende Möglichkeit wahrnehmen: Wenn sich induktive Regeln schon nicht als wahrheitskonservierende Erweiterungsschlüsse deuten und damit rechtfertigen lassen, so gibt es doch vielleicht noch andere Interpretationen, die den faktischen[5] Gebrauch induktiver Prinzipien zumindest in irgendeiner Weise erhellen.

Um eine solche Erörterung hinreichend zu konkretisieren, beziehe ich alle folgenden Überlegungen auf die generalisierte Form der sog. enumerativen Induktion. Ich schreibe sie als Schema eines Übergangs auf:

$$\text{(I)} \qquad F(a_0), F(a_1), \ldots, F(a_n) \;\Rightarrow\; \forall x F(x)$$

Hier bezeichnen die Konstanten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ gewisse Individuen eines Bereichs (Grundmenge von Dingen), $F(a_i)$ die (i. a. empirische) Aussage, dass an a_i die Eigenschaft F festgestellt wurde ($0 \leq i \leq n$). Das Induktionsprinzip (I) bringt dann zum Ausdruck, dass ein (durch $\Rightarrow$ angedeuteter) Übergang von den singulären Aussagen $F(a_0), \ldots, F(a_n)$ zu der generellen Aussage $\forall x F(x)$

[3] Mit diesem hier nicht weiter erörterten Problem beschäftigt sich vergleichsweise ausführlich Stegmüller (1971, S. 20-52).

[4] Vgl. dazu Popper (1973, S. 70 ff). Im folgenden Abschnitt werde ich einen knappen Abriss der Verisimilitude-Problematik geben.

[5] Gleichwohl werden in der Praxis induktive Prinzipien nur implizit, stillschweigend und nicht in Form allgemeiner methodischer Regeln verwendet.

(gelesen: Für alle Individuen x des zugrunde liegenden Bereiches gilt: x hat die Eigenschaft F) vorgenommen wird. – Als was kann nun dieser in (I) vollzogene 'Übergang vom Besonderen zum Allgemeinen' interpretiert werden? Nach v. Kutschera[6] sind hier im wesentlichen vier Möglichkeiten zu erörtern: die Auffassung von (I) als gewöhnlicher Schluß, als Wahrscheinlichkeitsschluß, als bedingte Wahrscheinlichkeitsaussage und schließlich als Annahmeregel.

Dass der fragliche Übergang in (I) nicht als gewöhnlicher Schluss zu interpretieren ist, war bereits das Ergebnis der eingangs skizzierten Humeschen Kritik. Man könnte stattdessen an folgende Deutung denken: Wenn die Ausgangsdaten $F(a_0), \ldots, F(a_n)$ wahr sind, so liefert (I) zwar i. a. nicht wieder eine wahre, so doch wenigstens eine wahrscheinliche Aussage. Aber auch diese probabilistische Version gestattet keine Rechtfertigung von (I), ganz gleich welche Auffassung von Wahrscheinlichkeit man dabei zugrunde legt (vgl. Kutschera loc. cit., S. 203-208). Ein wohl auf J. M. Keynes zurückgehendes Verfahren transformiert Induktionsregeln in Grenzwertsätze der subjektivistischen Wahrscheinlichkeitstheorie.[7] Danach wird die induktiv gewonnene Hypothese H um so wahrscheinlicher (im Sinne einer subjektiven Wahrscheinlichkeit w), je größer die Anzahl der sie bestätigenden Instanzen wird:

$$(\mathrm{I_w}) \quad \lim_{n\to\infty} w(H \mid F(a_0) \wedge \ldots \wedge F(a_n)) = 1.$$

Ist H die in (I) vorkommende Generalisierung $\forall x F(x)$, so wird $(\mathrm{I_w})$ allerdings falsch, da der fragliche Grenzwert der Folge der bedingten Wahrscheinlichkeiten dann gleich Null ist. Darin liegt nichts Widersinniges, denn die endlich vielen bestätigenden Fälle »bilden immer nur einen verschwindenden Anteil des Gesamtbereichs all der unendlich vielen Objekte, wie groß n auch immer ist« (Kutschera loc. cit., S. 211). Dagegen ist $(\mathrm{I_w})$ unter gewissen geeigneten Voraussetzungen gültig, wenn H lediglich konstatiert, dass auch das noch nicht geprüfte Individuum a_{n+1} die Eigenschaft F besitze, d. h. wenn $H = F(a_{n+1})$. Dies hält Kutschera für die einzige »konsistente und adäquate Interpretation der induktiven Schlüsse« (loc. cit., S. 210, S. 251).

Auch die zuletzt betrachtete Interpretation, wonach (I) eine Regel darstellt, die uns aufgrund bestimmter empirischer Daten eine Hypothese anzunehmen

---

[6] Vgl. F. v. Kutschera (1972, S. 189 ff). Im Weiteren gebe ich nur eine informelle und zwangsläufig oberflächliche Übersicht über die bei Kutschera ausführlich referierten Diskussionen und Ergebnisse. Mehr ist für die vorläufige Einordnung meines eigenen Beitrages in die aktuelle Diskussion nicht vonnöten.

[7] Vgl. dazu auch A. Pap (1955, S. 97 ff).

oder zu verwerfen gestattet, führt auf eine Reihe epistemologischer Schwierigkeiten, für deren systematische Diskussion wieder auf Kutschera (loc. cit., S. 228-251) verwiesen sei.

Die Interpretation von (I), die ich in dieser Studie entwickeln möchte, unterscheidet sich vollkommen von den vier eben genannten Deutungsversuchen. Am meisten ist sie vielleicht der probabilistischen Auffassung (I_w) verwandt, denn wie dort wird der Übergang $\Rightarrow$ in (I) als *Konvergenz* einer Aussagenfolge interpretiert. Allerdings handelt es sich dabei nicht um eine Maß-Konvergenz, sondern um Konvergenz im Sinne einer „natürlichen“ Umgebungstopologie für Aussagensysteme. Eine Verallgemeinerung dieser Topologie habe ich erstmals in *Theorie und Rechtfertigung* (1975, S. 183 ff) eingeführt, um das von Popper aufgestellte Problem einer Approximationstheorie der Wahrheit zu lösen. Für die angekündigte topologische Interpretation des Induktionsprinzips (I) ist nun lediglich vonnöten, meine Lösung des Verisimilitude-Problems in der Grundidee zu verfolgen. Dies geschieht im nächsten Abschnitt unter Berücksichtigung weiterer in jüngster Zeit entstandener Beiträge zu diesem Themenkreis. Im Anschluss daran erfolgt eine detaillierte Anwendung der dargestellten Ideen auf das fragliche Induktionsprinzip.

2. Zu der Idee der Annäherung an die Wahrheit und den Versuchen ihrer Präzisierung

Die Vorstellung, dass wir mit unserer Erkenntnis die Wahrheit nur angenähert erreichen, hatte von jeher einen Platz im philosophischen Denken. Bemerkenswert ist ihre erstmalige systematische Verwendung in der von Ch. S. Peirce begründeten Erkenntnistheorie. Peirce begreift Wahrheit als ideale („letzte“) Meinung einer indefiniten Gemeinschaft von Forschenden, die trotz der Fallibilität einzelner Theorien doch der Zielpunkt des Erkenntnisprozesses im Ganzen ist (vgl. Peirce 1967, S. 104 ff). Es ist verständlich, dass diese spekulative teleologische Vorstellung in der neueren Wissenschaftstheorie kaum verbreitet ist.[8]

Gegenwärtig hat Popper verschiedene Wiederbelebungsversuche am Be-

[8] Vgl. die Kritik Quines (1960, S. 23) sowie den wenig glücklichen Versuch von Bavink (1947). P. Bernays (1953, S. 130) bemüht sich um eine Modifikation der Friesschen Vernunftlehre im Sinne einer „Wahrheitsannäherung“. Vgl. zu den genannten Arbeiten Schreiber (1975, S. 90, S. 170 f). Einen neuen Zugang zur Sprechweise von „Wahrheitsgraden“ sucht N. Rescher (1973, S. 197 ff, S. 356 ff) im Rahmen seiner Kohärenztheorie der Wahrheit.

griff der Wahrheitsnähe unternommen, deren jüngster Stand in seiner Aufsatzsammlung *Objective Knowledge* (1972) verzeichnet ist. Popper sieht die Hauptaufgabe beim Gebrauch dieses Begriffs darin, zu erklären, wann eine Theorie t_2 der Wahrheit näher kommt als eine Theorie t_1. Zu diesem Zweck entwickelt er ein komparatives Konzept von Wahrheitsnähe (loc. cit., S. 60 ff) sowie eine davon verschiedene quantitative Fassung (S. 358 ff). Beide Versionen operieren mit der Differenz zwischen Wahrheitsgehalt und Falschheitsgehalt einer Theorie.

Die Initiativen von Popper sind auf vielfache Kritik und Ablehnung gestoßen. Einige Autoren lehnen die Idee einer Annäherung an die Wahrheit überhaupt als sinn- oder nutzlos ab, ungeachtet einer möglichen Präzisierung dieser Idee. Zu dieser Gruppe gehören z. B. A. J. Ayer (1974), G. S. Robinson (1971) oder auch K. Hübner (1974). Man vermisst ein Kriterium, um entscheiden zu können, ob wir uns auf dem Weg zur Wahrheit befinden (Ayer); man verwirft das Bemühen um »formale und mechanische Definitionen« einer derartigen Idee (Robinson); oder man hält den Gedanken der Annäherung schon deswegen für »absurd, weil wir von dieser Wahrheit unendlich weit entfernt sein müßten, wollten wir nicht annehmen, wir würden sie doch eines Tages endgültig erkennen. Ist sie aber unendlich weit, so bleiben wir auch immer gleich weit von ihr entfernt, nämlich unendlich« (Hübner 1974, S. 296 f.). Ich möchte auf diese Einwände hier nicht näher eingehen, sondern lediglich anmerken, dass sie meiner Ansicht nach auf einem Missverständnis der Annäherungsidee beruhen[9], an dem Popper vielleicht nicht ganz unschuldig ist.

Eine andere Gruppe von Autoren akzeptiert wohl das intuitive Konzept der Wahrheitsnähe, hat aber im Einzelnen vernichtende Kritik an den Popperschen Präzisierungsversuchen geübt. Ich erwähne hier nur die (teilweise unabhängig voneinander entstandenen) Arbeiten von P. Tichý (1974), J. H. Harris (1974) und D. Miller (1974a, 1974b). Das Ergebnis dieser Untersuchungen lautet mehr oder weniger einhellig: Die von Popper entwickelten Definitionen von Wahrheitsnähe sind vollkommen inadäquat und außerdem mit der ihnen zugrunde liegenden intuitiven Idee unvereinbar. Popper, dem diese Resultate schon vor ihrer Veröffentlichung bekannt wurden, hat sie ohne Um-

[9] Eine Erwiderung Poppers auf Ayer findet man in Schilpp (1974, S. 1100 ff). Den Einwänden Robinsons entgegnet D. Miller (1972, S. 50 ff). Was Hübners Bemerkung betrifft, so stellt sie schon deshalb keinen wirklichen Einwand dar, weil sonst auch der allgemeine Konvergenzbegriff der Mathematik abzulehnen wäre; vgl. dazu Schreiber (1975, S. 181 f). Dagegen ist Stegmüller recht zu geben, wenn er Wahrheitsähnlichkeit als Zuverlässigkeitskriterium für Hypothesen ablehnt (vgl. 1971, S. 47 f).

schweife anerkannt[10], vermutlich in der Zuversicht, dass die geleisteten technisch anspruchsvollen Analysen eine verbesserte Explikation hervorbringen werden. Tatsächlich finden sich bei den genannten Autoren auch Ansätze zur Verbesserung, z. B. bei Tichý (1974, S. 159) und bei Miller (1974b, S. 179). Alles in allem wird jedoch der von Popper gesteckte Rahmen nicht überschritten, die Verfasser diskutieren lediglich das komparative oder das quantitative Verisimilitude-Konzept. Ich habe (1975, S. 172 ff) Gründe dargelegt, wonach *ein komparatives Konzept von Wahrheitsnähe noch nicht für eine adäquate Explikation der Annäherungsidee ausreicht*. Es ist hier nur daran zu erinnern, dass Popper selbst davon spricht, eine Annäherung an die Wahrheit könnte in einer Art von metrischem oder topologischem Raum denkbar sein (vgl. 1963, S. 232). Wenn man dies aber akzeptiert, so hat die intuitive Annäherungsidee nurmehr Sinn in Anwendung auf eine potentiell unendliche Folge von „Theorien“, die sich der „Wahrheit“ nähern.

Der vermutlich erste Versuch, die Annäherungsidee im Sinne eines Konvergenzprozesses zu präzisieren, stammt von H.-P. Lorenzen (1971). Allerdings bedarf der Weg, auf dem Lorenzen dieses Ziel erreichen möchte, einer gründlichen Revision, wie ich sie an anderer Stelle ausführlich dargelegt habe (vgl. 1975, S. 179 ff). Die hauptsächlichen Ergebnisse meiner Kritik an Lorenzen sind die folgenden:

a) Die gewünschte Explikation der Annäherungsidee macht es erforderlich, auf Theoriensystemen eine geeignete (in gewissem Sinne natürliche) Topologie zu definieren. Die von Lorenzen vorgeschlagene Topologie ist völlig unbrauchbar und unangemessen.

b) Eine Folge von Theorien, die eine ‘Annäherung an die Wahrheit’ darstellen soll, muss gewissen Prinzipien der Progression unterworfen sein.[11] Lorenzen gibt zwar solche Bedingungen an, stellt jedoch keine Beziehung zur topologischen Struktur her.

c) Die von Lorenzen betrachtete Konvergenz ist dem Typ nach eine uneigentliche Konvergenz (gegen das bei einer Kompaktifizierung des Grundraumes nach Alexandroff neu hinzugenommene Element). Dieser Gedanke ist entscheidend. ‘Annäherung an die Wahrheit’ wird danach topologisch zu ver-

---

[10] Siehe Poppers Anm. 165 a in Schilpp (1974, S. 1192).

[11] In seiner neueren Arbeit „The rationality of scientific revolutions“ (1975) hat Popper zwei Bedingungen (»rational criteria of progress in science«, S. 72) vorgeschlagen, die mit den Progressionsprinzipien von H.-P. Lorenzen sehr verwandt sind (vgl. S. 82 f). Siehe hierzu auch Schreiber (1975, S. 187).

gleichen sein mit der ‘Annäherung an Unendlich’ (d. h. der eigentlichen Divergenz) von Zahlenfolgen. Die Folge der natürlichen Zahlen z. B. konvergiert (auf dem kompaktifizierten Zahlenstrahl) gegen Unendlich. In einem ähnlichen Sinne wird die Konvergenz geeigneter Theorienfolgen gegen ein ‘ideales’ (konkret gar nicht zu spezifizierendes) Grenzelement ‘Wahrheit’ aufgefasst.

Um die so verstandene Annäherungsidee auf das Induktionsproblem anzuwenden, ist eine Diskussion der Punkte b) und c) nicht vonnöten.[12] Denn im Induktionsprinzip (I) tritt das fragliche Grenzelement schon in expliziter Form, nämlich als Hinterglied des induktiven Übergangs auf. Deshalb kann ich mich im Folgenden darauf beschränken, die im Punkt a) geforderte Topologie für Theorien in ihren Grundzügen auseinanderzusetzen und inhaltlich plausibel zu machen.[13]

Zunächst betrachten wir eine Gesamtheit T von Dingen, unter denen wir uns Theorien irgendeiner Art vorstellen. Es spielt dabei vorläufig noch keine Rolle, was als ‘Theorie’ zu gelten hat. Die Konstruktion einer Umgebungstopologie auf T erfolgt unabhängig davon, ob die Elemente von T Satzsysteme, generelle Hypothesen oder Theorienstrukturen im Sinne von Sneed-Stegmüller[14] sind. Neben T denken wir uns ein System E gegeben, dessen Elemente als Repräsentanten unseres Erfahrungswissens über ein gewisses Gebiet gelten sollen. Auch die Natur dieser *Instanzen* bleibe vorerst offen; es könnte sich um experimentell gewonnene empirische Prüfsätze, um numerische Konstanten, aber auch um Theorien handeln, mit denen Theorien größerer Allgemeinheit verglichen werden. Zwischen Theorien aus T und Instanzen aus E denken wir uns weiter eine klassifikatorische Bestätigungsrelation R etabliert: $R(t,e)$. Was hierunter für $t \in T$ und $e \in E$ jeweils sinnvollerweise zu verstehen ist, hängt natürlich von der Art der Elemente t und e ab. Enthält T etwa generelle Hypothesen, E dagegen Sätze einer zugrundeliegenden Beobachtungssprache, so wäre folgende Definition von R ein mögliches Beispiel für das hier Intendierte: $R(t,e)$ gelte genau dann, wenn ein lediglich Hintergrundwissen enthaltender Satz a existiert, so dass e aus t und a folgt, e nicht aus a und das Negat von a nicht aus t folgt.[15] Allgemein sollte dementsprechend unter $R(t,e)$ stets eine

[12] Ich verweise dazu auf meine Arbeit (1975), S. 187 ff.

[13] Dabei werden ausführliche Beweise und unnötige technische Details übergangen, für die ich den Leser auf meine Untersuchungen in *Theorie und Rechtfertigung* (1975, S. 182-187) verweise.

[14] Siehe dazu W. Stegmüller (1973, S. 120 ff).

[15] Diese Bestätigungsrelation beruht auf einer Definition von v. Kutschera (1972, S. 402 f). Vgl.

Aussage verstanden werden, in der die Verträglichkeit von t und e oder der bestätigende Charakter von e für t zum Ausdruck kommen. Die Relation R geht wesentlich in die Konstruktion einer Topologie auf T ein.

Worin besteht nun aber eine Topologie auf T? Eine Topologie auf T liegt dann vor, wenn jeder Theorie $t \in T$ ein System $\mathscr{U}(t)$ von Teilmengen von T, sogenannter Umgebungen von t, zugeordnet ist und für diese Systeme die üblichen Umgebungsaxiome[16] erfüllt sind. Es ist also anzugeben, welche Teilmengen von T als Umgebungen einer Theorie $t \in T$ angesehen werden sollen; dann ist in einem weiteren Schritt zu überprüfen, ob diese Umgebungen eine Topologie auf T im Sinne der Umgebungsaxiome festlegen. Sind diese Schritte erst einmal vollzogen, so steht damit ein Konvergenzbegriff für Folgen von Theorien fest: Eine Folge $t_0, t_1, t_2, \ldots$ konvergiert (im Sinne der zugrundeliegenden Topologie) gegen t, wenn in *jeder* Umgebung U von t *fast alle* Glieder der Folge liegen, d. h. wenn eine Nummer N existiert, so dass $t_n \in U$ für alle $n \geq N$.

Um ein geeignetes Umgebungssystem einer Theorie t festlegen zu können, bedarf es noch einer weiteren Vorüberlegung. Man stelle sich dazu eine Theorie $t' \in T$ vor, für die $R(t', e)$ genau dann gilt, wenn $R(t, e)$ der Fall ist; beide Theorien bewähren sich demnach an denselben empirischen Instanzen $e \in E$. Da wir uns in E alle möglichen einschlägigen Instanzen vereinigt denken wollen, besteht zwischen t und t' kein Unterschied hinsichtlich ihres Vermögens, mit der Erfahrung im Einklang zu stehen (was nicht ausschließt, dass t und t' sich in anderen Hinsichten dennoch unterscheiden). Tatsächlich kann diese Art der Äquivalenz aber niemals konstatiert werden, weil zu einem gegebenen Zeitpunkt – von trivialen Fällen abgesehen – nicht alle Daten e aus E bekannt sind. Wir müssen uns daher im allgemeinen damit begnügen, die Äquivalenz von Theorien t, t' relativ zu dem jeweils faktisch erreichten Wissensstand, also in Bezug auf eine Teilmenge X von E, zu überprüfen. Gilt dann für jedes $e \in X$ $R(t, e)$ genau dann, wenn $R(t', e)$ gilt, so mögen die Theorien t, t' *äquivalent auf* X heißen, symbolisch: $r_X(t, t')$.

Man bestätigt leicht, dass zu jedem Teilsystem X von Instanzen r_X eine Äquivalenzrelation auf T darstellt. Durch r_X wird daher T in Klassen zuein-

auch Schreiber (1975, S. 183). Weitere klassifikatorische Bestätigungsbegriffe findet man in Kap. 5 bei Kutschera (1972).

[16] Siehe dazu etwa W. Franz (1965, S. 15). Die Umgebungsaxiome lauten: [U0]: $T \in \mathscr{U}(t)$; [U1]: $t \in U$ für jedes $U \in \mathscr{U}(t)$; [U2]: Wenn $U \in \mathscr{U}(t)$ und $V \supseteq U$, so $V \in \mathscr{U}(t)$; [U3]: Wenn $U_1, U_2 \in \mathscr{U}(t)$, so $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{U}(t)$; [U4]: Zu $U \in \mathscr{U}(t)$ gibt es ein $V \in \mathscr{U}(t)$, so dass $U \in \mathscr{U}(t')$ für alle $t' \in V$.

ander auf X äquivalenter Theorien zerlegt. Die Klasse, der t angehört, bezeichnen wir mit $U(t,X)$. Zu Umgebungen von t kommen wir nun durch folgende Überlegung: Der anfängliche Wissensstand sei in einer Teilmenge E_0 von E enthalten, nach einer gewissen Zeit werde der neue Wissensstand durch E_1 repräsentiert, wobei natürlich $E_0 \subseteq E_1$. Diese sukzessive Erweiterung des Wissensstandes denken wir uns unbegrenzt fortgesetzt und damit wiedergegeben durch eine potentiell unendliche Folge von Instanzenmengen $E_0, E_1, E_2, \ldots$, für die $E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$ gilt. Eine solche Folge (E_k) von Teilsystemen von E heiße kurz *Kette*. Zu gegebener Kette (E_k) betrachten wir die Klassen $U(t,E_i)$ $(i = 0,1,2,\ldots)$ und nennen sie *Abschnittumgebungen* von t; jede (echte oder unechte) Obermenge einer Abschnittumgebung von t heiße *Umgebung von t*. Das System aller Umgebungen von Elementen aus T, bezeichnet mit $\mathrm{Umg}(R;(E_k))$, ist dann in der Tat eine Umgebungstopologie auf T.[17] Eine Theorienfolge $t_0, t_1, t_2, \ldots$ konvergiert demnach gegen $t \in T$, wenn es zu jedem Glied E_n der zugrundeliegenden Kette eine Nummer N gibt, so dass für alle $k \geq N$ die Theorien t_k und t auf E_n äquivalent sind; in intuitiver Sprechweise: *wenn bei jedem Stand des Erfahrungswissens fast alle Theorien der Folge dieselben Bewährungsproben bestehen wie t*. Angesichts dieser Deutungsmöglichkeit heiße das System $\mathrm{Umg}(R;(E_k))$ *kanonische Topologie bezüglich R und (E_k)*.

Offensichtlich hängt die kanonische Topologie von der Bestätigungsrelation R, aber auch von der jeweiligen Kette ab. Wichtig ist in diesem Zusammenhang, dass die Abhängigkeit von der jeweiligen Kette nicht so ausgeprägt ist, wie man vielleicht anfangs vermuten möchte. Dazu stellen wir uns einmal eine Kette (E_k) folgender Art vor: Jeder in der Kette $E_0, E_1, E_2, \ldots$ vorkommende Wissensstand, etwa E_n, werde auch (i. a. zu einem anderen Zeitpunkt) in $E'_0, E'_1, E'_2, \ldots$ ‘erreicht’, genauer: es gibt ein m mit $E'_m \supseteq E_n$. Wir vereinbaren für diesen Fall die Sprechweise, die Kette (E'_k) *überlagere* die Kette (E_k). Sämtliche Ketten, die sich mit einer gegebenen Kette wechselseitig überlagern, bilden einen *Kettentypus* τ. Es lässt sich nun unschwer verifizieren, dass eine kanonische Topologie bezüglich R bereits durch Angabe eines Kettentypus festgelegt ist. – Man wird sich hier fragen müssen, welche Ketten denn eigentlich als ‘realistisch’ anzusehen sind und zu welchen Typen sie gehören. Naheliegend ist die Bedingung, jedes Kettenglied solle endlich sein, da wir

[17] Es liegt sogar eine uniforme Struktur auf T vor, vgl. Schreiber (1975, S. 185). Da diese Struktur ferner durch eine abzählbare Basis erzeugt wird, folgt aus der Metrisationstheorie der uniformen Räume (s. Kelley 1955, S. 186), dass man auf T eine Quasimetrik einführen kann, deren zugehörige Topologie gerade $\mathrm{Umg}(R;(E_k))$ ist.

zu jedem Zeitpunkt nur über eine begrenzte Anzahl von Wissensdaten verfügen (Endlichkeitsbedingung). Weiter sei die Folge $E_0, E_1, E_2, \ldots$ so angelegt, dass jedes e aus E in einem geeigneten Instanzensystem E_n enthalten ist (Ausschöpfungsbedingung). Man kann nun beweisen: Sämtliche Ketten, die diesen beiden Bedingungen genügen, gehören zu ein und demselben Typus τ_0 (im Folgenden bezeichnet als *finitärer* Kettentypus). Dieser Umstand hat die bemerkenswerte Folge, dass die Umgebungstopologie auf T nicht davon abhängt, welche Kette des Typs τ_0 man jeweils zugrunde legt.[18] Insbesondere gilt: *Zu allen E ausschöpfenden Ketten mit endlichen Gliedern gehört derselbe Konvergenzbegriff.*

3. Das Äquivalenzlemma

Vor der eigentlichen Anwendung der im vorangehenden Abschnitt entwickelten Begriffe auf das Induktionsproblem ist hier[19] die Frage zu verfolgen, wie die Klasse der Grenzwerte einer Theorienfolge beschaffen ist. Auf diese Frage lässt sich eine befriedigende Antwort geben, von der in Abschnitt 4 zweckmäßiger Gebrauch gemacht wird. Das Ergebnis lautet kurz: *Die Grenzelemente einer konvergenten Theorienfolge bilden eine Klasse auf E äquivalenter Theorien (Äquivalenzlemma).* Dabei ist nur vorauszusetzen, dass der Kettentypus τ der Topologie $\mathrm{Umg}(R;\tau)$ aus E ausschöpfenden Ketten (E_k) besteht.

Der Beweis des Äquivalenzlemmas beruht wesentlich auf einer Art von Stetigkeitseigenschaft der Relation R bezüglich der kanonischen Topologie $\mathrm{Umg}(R;\tau)$. Ist $\mathscr{U}$ irgendeine Umgebungstopologie auf T, so heiße R in *e stetig bzgl.* $\mathscr{U}$, wenn gilt: Ist $t \in T$ Grenzwert einer (im Sinne von $\mathscr{U}$) konvergierenden Folge (t_k) mit $R(t_i, e)$ für fast alle i, so gilt: $R(t, e)$.[20]

1) Zunächst beweise ich für jedes $e \in E$, dass R in e bzgl. $\mathrm{Umg}(R;\tau)$ stetig ist. – Dazu sei $e \in E$ beliebig sowie eine gegen t strebende Folge $t_0, t_1, t_2, \ldots$ vorgegeben, für die eine Nummer N_1 mit $R(t_k, e)$ $(k \geq N_1)$ existiert. Nun suchen wir ein Kettenglied E_n, das e enthält (Ausschöpfungsbedingung!) und eine Nummer N_0 derart, dass t_k und t auf E_n äquivalent sind für alle $k \geq N_0$. Wählt man $k \geq \max(N_0, N_1)$, so ergibt sich $r_{E_n}(t_k, t)$ und $R(t_k, e)$, also wegen $e \in E_n$ auch $R(t, e)$.

[18] Daher soll die Umgebungstopologie nur noch mit Bezug auf den Kettentypus (anstelle der Kette) mit $\mathrm{Umg}(R;\tau_0)$ bezeichnet werden.

[19] Dieser und der folgende Abschnitt enthalten neue Resultate, die sich nicht in meiner Arbeit (1975) finden, weshalb die betreffenden Beweise vollständig ausgeführt werden.

[20] Diese Formulierung ist gegenüber der ursprünglichen Fassung (1977), S. 85, dahingehend verbessert, dass nun der Bezug auf die Instanz e ausdrücklich zur Geltung kommt.

2) Nunmehr lässt sich die Behauptung des Äquivalenzlemmas leicht beweisen. Sei dazu $t_0, t_1, t_2, \ldots$ als eine (im Sinne von $\mathrm{Umg}(R;\tau)$) konvergente Folge vorausgesetzt. Wir haben zwei Teilbehauptungen zu verifizieren:

(a) Zwei Grenzwerte t', t'' von (t_k) sind auf E äquivalent.

(b) Sind t', t'' auf E äquivalent und ist t' Grenzwert von (t_k), so ist auch t'' Grenzwert von (t_k).

Zu (a): Sei $e \in E$ beliebig vorgegeben, und es gelte $R(t', e)$. Wir suchen einen Index $s \geq 0$ mit $e \in E_s$ und von diesem abhängig eine Nummer N_s derart, dass $t_k \in U(t', E_s)$ für $k \geq N_s$. Wegen $R(t', e)$ folgt damit $R(t_k, e)$ für $k \geq N_s$ und weiter $R(t'', e)$ aufgrund der unter 1) bewiesenen Stetigkeitseigenschaft von R. Völlig analog zeigt man umgekehrt, dass $R(t'', e)$ auch $R(t', e)$ impliziert.

Zu (b): Da t' Grenzwert von (t_k) ist, lässt sich zu jedem $j \geq 0$ eine Nummer N_j finden, so dass $r_{E_j}(t', t_k)$ für $k \geq N_j$ gilt. Die Theorien t'', t' sind wegen $E_j \subseteq E$ natürlich auch auf E_j äquivalent, d. h. $r_{E_j}(t'', t')$. Somit folgt aufgrund der Transitivität von r_{E_j} die Äquivalenz von t'' und t_k $(k \geq N_j)$ auf E_j. Das bedeutet aber die Konvergenz von (t_k) gegen t''. –

Bemerkung: Wäre die kanonische Topologie separiert, d. h. hätten irgend zwei verschiedene Theorien auch disjunkte Umgebungen, so besäße eine konvergente Folge genau einen Grenzwert (s. Franz 1965, S. 60). Im Allgemeinen ist dies jedoch nicht der Fall, jedenfalls nicht, solange nicht ausgeschlossen wird, dass verschiedene Theorien auf E äquivalent sein können. Aus demselben Grunde ist die kanonische Topologie auch nur aus einer Quasimetrik und nicht aus einer Metrik zu gewinnen (s. Fußnote 17). Das stimmt mit dem Umstand zusammen, dass quasimetrische Räume i. a. nicht separiert sind, weil in ihnen verschiedene Punkte nicht notwendig auch einen positiven Quasiabstand haben. In quasimetrischen Räumen gilt jedoch eine dem hier bewiesenen Äquivalenzlemma entsprechende Behauptung, wonach die Klasse der Grenzwerte einer gegen x konvergierenden Punktfolge aus genau denjenigen Punkten besteht, die von x den Quasiabstand 0 besitzen.

4. Eine topologische Deutung des generellen Induktionsprinzips

Nach diesen Erläuterungen zu den Problemen der Induktion und der Annäherungssprechweise für Theorien komme ich zu der im Titel angekündigten Verbindung beider Problemkreise. Vom Standpunkt Poppers ist eine derartige Verbindung prima facie ausgeschlossen. Denn nach Popper arbeiten wir zwar an der Verbesserung unserer Theorien, bedienen uns dabei aber keiner induktiver Prinzipien. In der topologischen Interpretation des generellen Induktionsprinzips (I) $F(a_0), \ldots, F(a_n) \Rightarrow \forall x F(x)$, die ich gleich entwickeln werde, löst sich dieser scheinbare Widerspruch vollständig auf. Der Grund ist einfach darin zu sehen, dass bei dieser Deutung (I) als Konvergenzaussage, nicht dagegen als Schluss-Schema von singulären Prämissen auf generelle Konklusionen aufgefasst wird.

Die angestrebte Interpretation von (I) bedient sich der kanonischen Topologie bezüglich einer geeigneten Relation R und des finitären Kettentypus' τ_0. Zur Spezifizierung von R gehen wir von einem abzählbaren Individuenbereich E aus, der die in den Vordergliedern von (I) bezeichneten Objekte $a_0, a_1, a_2, \ldots$ umfasst; und zwar sei die Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ gerade eine Abzählung von E. Sodann betrachten wir eine formale Sprache $\mathscr{L}$, die außer Variablen $x, y, z, \ldots$ sowie Funktions- und Prädikatensymbolen zu jedem $e \in E$ genau eine Individuenkonstante $\dot{e}$ enthält. Dabei sollen sich die Objekte aus E und ihre $\mathscr{L}$-Namen in folgendem Sinne entsprechen: $\mathscr{E} = (E; J)$ sei eine semantische Interpretation von $\mathscr{L}$, und es gelte $J(\dot{e}) = e$ für alle $e \in E$, d. h. in $\mathscr{E}$ wird die Konstante $\dot{e}$ durch das Objekt e interpretiert.[21] Nun fassen wir die in (I) vorkommenden Aussagen als Aussagen der Sprache $\mathscr{L}$ auf. 'Theorien' in dem hier gegebenen Zusammenhang sind also Aussagen einer formalen Sprache (1. Stufe); genauer wollen wir festlegen: Das System T bestehe aus allen Aussagen der Form $\forall x \Phi(x)$, wobei $\Phi(x)$ eine $\mathscr{L}$-Formel mit x als einziger freien Variablen ist. Damit definieren wir dann R wie folgt:

$$R(\forall x \Phi(x), e) \text{ genau dann, wenn } \mathscr{E} \models \Phi(\dot{e}), \quad (e \in E).$$

Dieser Definition zufolge soll e als eine die Allaussage $\forall x \Phi(x)$ „bestätigende Instanz" gelten, wenn die Einsetzung des $\mathscr{L}$-Namens für e in $\Phi(x)$ zu einer in $\mathscr{E}$ gültigen (wahren) Aussage $\Phi(\dot{e})$ führt. R ist also abhängig von der jeweils zugrunde gelegten Interpretation der Sprache $\mathscr{L}$.

Nach den allgemeinen Voraussetzungen der topologischen Interpretation folgt nun der sie ermöglichende

Satz. Sei $F(x)$ eine $\mathscr{L}$-Formel mit genau der freien Variablen x. Dann gibt

[21] Interpretationen einer Sprache (erster Stufe) finden sich üblicherweise in einführenden Lehrbüchern der Formalen Logik, z. B. F. v. Kutschera: *Elementare Logik*, Wien / New York 1967, S. 136 ff. – Die im Folgenden benutzte Schreibweise $\mathscr{E} \models A$ besagt: „Die Aussage A gilt bei der Interpretation $\mathscr{E}$."

es eine Folge (G_n) von Allaussagen in T mit den Eigenschaften:

(1) G_k ist logisch äquivalent zu $F(\dot{a}_0) \wedge \ldots \wedge F(\dot{a}_k)$.

(2) (G_n) konvergiert gegen $\forall x F(x)$ im Sinne der kanonischen Topologie $\mathrm{Umg}(R; \tau_0)$.

(3) $\forall x F'(x)$ ist genau dann Grenzwert von (G_n), wenn $F'(x)$ und $F(x)$ denselben Bereich von $\mathscr{E}$-Individuen definieren.

Zur Erläuterung sei hier vorausgeschickt, dass die Folge der durch logische Konjunktion ($\wedge$) verbundenen singulären $\mathscr{L}$-Aussagen $F(\dot{a}_i)$ selbst nicht gegen $\forall x F(x)$ konvergieren kann. Denn die Topologie ist nur auf T, also einem System von *All*aussagen der Sprache $\mathscr{L}$ erklärt. Behauptung (1) stellt eine Lösung dieser Schwierigkeit dar: Die Folge der „singulären“[22] Aussagen wird ersetzt durch eine Folge von generellen Aussagen, und zwar dergestalt, dass beide Folgen aus gliedweise zueinander logisch gleichwertigen Aussagen bestehen. – Behauptung (3) charakterisiert die Klasse aller Grenzaussagen der nach (2) konvergenten Aussagenfolge (G_n). Danach gehen alle diese Grenzaussagen aus der Klasse der zu $F(x)$ extensional gleichen $\mathscr{L}$-Formeln hervor, indem man in jeder Formel die frei vorkommende Variable durch den Allquantor bindet.

Zum Beweis des Satzes zeigen wir nun die Eigenschaften (1)-(3).

(1): Mit $F_k^*(x)$ bezeichnen wir die $\mathscr{L}$-Formel $x = \dot{a}_k \rightarrow F(x)$; diese Formel dient im Folgenden als ‘Ersatz’ für $F(\dot{a}_k)$. Weiter sei G_n die $\mathscr{L}$-Aussage $\forall x(F_0^*(x) \wedge \ldots \wedge F_n^*(x))$. Offensichtlich ist G_n ein Element von T, und es gilt[23]

$$\vdash G_n \leftrightarrow (F(\dot{a}_0) \wedge \ldots \wedge F(\dot{a}_n)).$$

Von dieser Äquivalenz überzeugt man sich mühelos durch einfache prädikatenlogische Umformungen. Zur Illustration gebe ich einen knappen (nur halbformalen) Beweis der Implikation von rechts nach links. Nach der Regel der $\wedge$-Beseitigung hat man zunächst

$$(F(\dot{a}_0) \wedge \ldots \wedge F(\dot{a}_n)) \rightarrow F(\dot{a}_s) \quad (0 \leq s \leq n).$$

[22] „Singulär“ natürlich nur in Bezug auf die äußere Generalisierung $\forall x$. Nach Ersetzung der Variablen x durch eine Konstante $\dot{e}$ können immer noch Allquantoren in der pränexen Form von $F(\dot{e})$ vorkommen.

[23] Das Ableitbarkeitszeichen ‘$\vdash$’ steht hier ohne Bezug auf eine Formelmenge, was bedeutet, dass die rechts von ihm stehende Formel schon *rein logisch* beweisbar ist.

Ferner liefert die Ersetzung von u durch $\dot{a}_s$ im Gleichheitsschema $F(u) \to (x = u \to F(x))$ die $n+1$ Implikationen

$$F(\dot{a}_s) \to F_s^*(x) \quad (0 \leq s \leq n),$$

woraus sich insgesamt mittels Kettenschluss

$$(F(\dot{a}_0) \wedge \ldots \wedge F(\dot{a}_n)) \to F_s^*(x) \quad (0 \leq s \leq n)$$

ergibt. Fasst man die Hinterglieder dieser Implikationen konjunktiv zusammen, so liefert die abschließende hintere Generalisierung (x kommt nicht frei in $F(\dot{a}_0) \wedge \ldots \wedge F(\dot{a}_n)$ vor!) die Implikation $(F(\dot{a}_0) \wedge \ldots \wedge F(\dot{a}_n)) \to G_n$.

(2): Wir repräsentieren zunächst den finitären Kettentypus τ_0 durch eine E ausschöpfende Kette endlicher Instanzenmengen $E_0, E_1, E_2, \ldots$. Sei irgendeine Abschnittumgebung $U(\forall x F(x), E_n)$ von $\forall x F(x)$ vorgegeben. Zu E_n wählen wir N als das Maximum der Indizes i mit $a_i \in E_n$, was möglich ist aufgrund der Endlichkeit der Kettenglieder. Wir zeigen für alle $k \geq N$: G_k ist zu $\forall x F(x)$ auf E_n äquivalent. Sei dazu $e \in E_n$ beliebig vorgegeben, etwa $e = a_p$.

Aus $R(\forall x F(x), e)$ folgt $\mathscr{E} \models F(\dot{e})$ und damit aus rein logischen Gründen auch $\mathscr{E} \models F_i^*(\dot{e})$ für $i \geq 0$. Konjunktive Zusammenfassung dieser Aussagen ergibt $\mathscr{E} \models F_0^*(\dot{e}) \wedge \ldots \wedge F_k^*(\dot{e})$, also $R(G_k, e)$ für jedes k (erst recht also für jedes $k \geq N$).

Nun gelte umgekehrt $R(G_k, e)$ für alle $k \geq N$. Nach Definition der G_k erhalten wir $\mathscr{E} \models F_0^*(\dot{a}_p) \wedge \ldots \wedge F_k^*(\dot{a}_p)$. Es ist $R(\forall x F(x), e)$ zu zeigen. Aufgrund der Maximalität von N ist $k \geq N \geq p$. Unter den $k+1$ Formeln $F_0^*(\dot{a}_p), \ldots, F_k^*(\dot{a}_p)$ kommt daher auch die Formel $F_p^*(\dot{a}_p)$ vor, es gilt also $\mathscr{E} \models \dot{a}_p = \dot{a}_p \to F(\dot{a}_p)$ und somit nach Abtrennung des logisch wahren Vorderglieds: $\mathscr{E} \models F(\dot{a}_p)$, d. h. $R(\forall x F(x), e)$. – Insgesamt haben wir also nachgewiesen, dass in jeder Umgebung von $\forall x F(x)$ fast alle Glieder der Folge $G_0, G_1, G_2, \ldots$ liegen, d. h.: (G_n) konvergiert gegen $\forall x F(x)$ im Sinne der Topologie $\mathrm{Umg}(R; \tau_0)$.

(3): Nach (2) und dem Äquivalenzlemma (Abschnitt 3) ist ein Element $\forall x F'(x)$ aus T genau dann Grenzwert der Folge (G_n), wenn es zu $\forall x F(x)$ auf E äquivalent ist, wenn also für beliebiges $e \in E$: $R(\forall x F'(x), e)$, d. h. $\mathscr{E} \models F'(\dot{e})$, genau dann gilt, wenn $R(\forall x F(x), e)$, d. h. $\mathscr{E} \models F(\dot{e})$, der Fall ist. Das heißt aber, dass $F'(x)$ und $F(x)$ denselben Bereich von $\mathscr{E}$-Individuen definieren.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. $\dashv$

Es verdient angemerkt zu werden, dass die Menge aller in $\mathscr{E}$ gültigen $\mathscr{L}$-Aussagen aus T abgeschlossen ist im Sinne der zugrunde gelegten kanonischen Topologie.[24] Hierin drückt sich topologisch der „wahrheitskonservierende“ Charakter der betrachteten Konvergenz aus: Eine konvergente Folge in $\mathscr{E}$ wahrer Aussagen hat stets eine in $\mathscr{E}$ wahre Aussage als Grenzwert.

Zum Abschluss noch einige Bemerkungen über das Verhältnis der topologischen Interpretation des Induktionsproblems zum sogenannten Induktivismus. Wenn man unter Induktivismus ein Vorhaben zur *Rechtfertigung* 'induktiver Regeln' wie (I) versteht, so hat die hier vorgelegte Deutung nichts mit Induktivismus zu tun. Eine Rechtfertigung von (I) verlangt ja die Angabe von Gründen für die Annahme von $\forall x F(x)$ auf der Grundlage von $F(a_0), \ldots, F(a_n)$, was ein völlig illusorisches Programm darstellt. Demgegenüber expliziert die topologische Interpretation die folgende Auffassung: *Die sukzessive Anhäufung der singulären Fälle in* $F(a_0) \wedge F(a_1) \wedge F(a_2) \wedge \ldots$ *führt zu einer immer besseren Annäherung an die generelle Hypothese* $\forall x F(x)$. – Im Übrigen lässt sich auf dem Boden dieser Auffassung erneut die Unmöglichkeit plausibel machen, (I) als eine Regel zu rechtfertigen. Dazu nehmen wir an, jemand verträte den Standpunkt: „Da die topologische Auffassung die Konvergenz von $F(a_0) \wedge F(a_1) \wedge F(a_2) \wedge \ldots$ gegen $\forall x F(x)$ beweist, ist die Annahme von $\forall x F(x)$ auf der Basis von hinreichend vielen Einzelfällen $F(a_0), \ldots, F(a_n)$ vernünftig.“

Wer so argumentieren wollte, würde den infinitären Charakter der Konvergenz völlig verkennen. Tatsächlich liegt immer nur ein *endlicher* Abschnitt der Folge $F(a_0) \wedge F(a_1) \wedge F(a_2) \wedge \ldots$ vor, und das sichert bei weitem nicht die Annahme, man erhielte auch faktisch eine gegen $\forall x F(x)$ konvergierende Folge. Die Konvergenz einer Folge kann bekanntlich niemals durch endlich viele ihrer Glieder beeinflusst werden. Daher ist die Frage, ob eine Folge tatsächlich verifizierter Einzelfälle im hier gemeinten Sinne konvergiert, *vollkommen gegenstandslos*, da ja niemals die gesamte Folge, sondern nur ihre endlichen Anfangsstücke konkret vorliegen. Eine Konvergenzaussage bei alleiniger Kenntnis endlicher Anfangsstücke hat infolgedessen (wie übrigens auch in der Mathematik) den Charakter einer Vermutung. Wie groß ein Anfangsstück sein muss, um diese Vermutung als 'vernünftig' erscheinen zu lassen, das ist eine reine Ermessensfrage und kann nicht Gegenstand theoretischer Erwägungen werden. Denn die Tatsache lässt sich nicht wegdiskutieren,

---

[24] Dazu hat man bloß zu überlegen, dass $t \in T$ in $\mathscr{E}$ gültig ist, wenn bereits in jeder Umgebung von t in $\mathscr{E}$ gültige Aussagen aus T vorkommen (t ist dann ein sog. Berührungspunkt der fraglichen Menge). Allgemeiner gilt sogar bei beliebiger kanonischer Topologie die Aussage: Alle Klassen auf E äquivalenter Theorien sind abgeschlossen.

dass auch 'vernünftig' erscheinende Vermutungen in der Zukunft enttäuscht werden können. Es ist zu keinem Zeitpunkt auszuschließen, dass sich $F(e)$ für eine Instanz $e = a_m$ als falsch herausstellen wird. Endlich viele Falsifikationen dieser Art würden zwar die Konvergenz der Einzelfallfolge nicht zerstören, es handelte sich dann aber nurmehr um Konvergenz gegen eine faktisch widerlegte Grenzaussage $\forall xF(x)$. (Teil (3) des oben bewiesenen Satzes zeigt überdies, dass man in diesem Fall $\forall xF(x)$ nicht gegen eine Aussage $\forall xF'(x)$ austauschen kann, die nicht dieselben Ausnahmen besitzt wie $\forall xF(x)$.) Es ist aber nicht einmal ein Grund für das Auftreten nur endlich vieler F-Ausnahmen denkbar; daher hat es auch prinzipiell keinen Sinn, angesichts faktisch vorliegender Anfänge von Einzelfallfolgen das Wort 'Konvergenz' auch nur in den Mund zu nehmen. Die hier gegebene (vermutlich aber jede) approximationstheoretische Auslegung von Induktionsprinzipien muss ihrer Natur nach abstrakt und deskriptiv bleiben; sie liefert kein wirkliches Kriterium, sondern lediglich die Präzisierung einer Sprechweise.[25]

Literatur

1. Ayer, A. J.: Truth, Verification and Verisimilitude. In: Schilpp (1974), S. 684-692.
2. Bavink, B.: Die Bedeutung des Konvergenzprinzips für die Erkenntnistheorie der Naturwissenschaften. In: *Zeitschrift für philosophische Forschung*, Bd. 2 (1947), S. 111-130.
3. Bernays, P.: Über die Fries'sche Annahme einer Wiederbeobachtung der unmittelbaren Erkenntnis. In: Specht, M.; Eichler, W. (Hrsg.): *Leonard Nelson zum Gedächtnis*, Frankfurt/M.; Göttingen 1953, S. 113-131.
4. Franz, W.: *Topologie I. Allgemeine Topologie*, 2. verb. Aufl., Berlin 1965.
5. Harris, J.: Popper's Definitions of 'Verisimilitude'. *Brit. J. Phil. Sci.* 25 (1974), S. 160-166.
6. Hübner, K.: Zur Frage des Relativismus und des Fortschritts in den Wissenschaften. *Ztschr. f. allg. Wissenschaftstheorie* V (1974), S. 285-303.
7. Hume, D.: *A Treatise of Human Nature*, Vol. I, London 1738.
8. — : *Philosophical Essays concerning Human Understanding* (späterer Titel: *An Enquiry concerning etc.*), London 1748.
9. Kelley, J. L.: *General Topology*. New York; Toronto; London; Melbourne 1955.
10. Kutschera, F. v.: *Wissenschaftstheorie*. Grundzüge der allgemeinen Methodologie der empirischen Wissenschaften, München 1972.

[25] In ähnlichem Sinn gilt dies auch für den allgemeinen Fall der Annäherung einer Theorienfolge an eine Grenztheorie; siehe die Schlussausführungen von *Theorie und Rechtfertigung* (1975), S. 194 f.

11. Lorenzen, H.-P.: Bemerkung über eine Möglichkeit der Definierbarkeit von Wahrheit. *Ztschr. f. allg. Wissenschaftstheorie* II (1971), S. 63-65.
12. Miller, D.: The Truth-Likeness of Truthlikeness. *Analysis* 33 (1972), S. 50-55.
13. —: Popper's Qualitative Theory of Verisimilitude. *Brit. J. Phil. Sci.* 25 (1974), S. 166-177 [1974a].
14. —: On the Comparison of False Theories by their Bases. *Brit. J. Phil. Sci.* 25 (1974), S. 178-188 [1974b].
15. Pap, A.: *Analytische Erkenntnistheorie*. Kritische Übersicht über die neueste Entwicklung in USA und England, Wien 1955.
16. Peirce, Ch. S.: *Schriften I.* Zur Entstehung des Pragmatismus. Mit einer Einführung herausgeg. von K.-O. Apel, Frankfurt a. M. 1967.
17. Popper, K. R.: *Logik der Forschung*, 1. Aufl. 1934, 4. verb. Aufl. Tübingen 1971.
18. —: *Conjectures and Refutations. The Growth of Scientific Knowledge*, New York-Evanston 1963.
19. —: *Objective Knowledge* (Oxford 1972), zitiert nach der dt. Übers.: *Objektive Erkenntnis. Ein evolutionärer Entwurf*, Hamburg 1973.
20. —: The rationality of scientific revolutions. In: Rom Harré (ed.): *Problems of Scientific Revolution: Progress and Obstacles to Progress in the Sciences*. The Herbert Spencer Lectures 1973. Oxford 1975, S. 72-101.
21. Quine, W. V.: *Word and Object*, New York 1960.
22. Rescher, N.: *The Coherence Theory of Truth*, Oxford 1973.
23. Robinson, G. S.: Popper's Verisimilitude. *Analysis* 31 (1971), S. 194-196.
24. Schilpp, P. A. (ed.): *The Philosophy of Karl Popper*. *The Library of Living Philosophers*, vol. XIV. La Salle, Illinois 1974.
25. Schreiber, A.: *Theorie und Rechtfertigung*, Braunschweig 1975.
26. Stegmüller, W.: *Wissenschaftliche Erklärung und Begründung*, Berlin; Heidelberg; New York 1969.
27. —: Das Problem der Induktion: Humes Herausforderung und moderne Antworten. In: H. Lenk (Hrsg.), *Neue Aspekte der Wissenschaftstheorie*. Braunschweig 1971, S. 13-74.
28. *Theorie und Erfahrung*, 2. Halbbd.: *Theorienstrukturen und Theoriendynamik*, Berlin; Heidelberg; New York 1973.
29. Tichý, P.: On Popper's Definitions of Verisimilitude. *Brit. J. Phil. Sci.* 25 (1974), S. 155-160.

POSTSKRIPTUM

Den Artikel zum Induktionsproblem hatte ich Anfang 1976 verfasst und (etwas übermütig) gewagt, ihn Karl Popper zur Ansicht zuzusenden. In meinem Anschreiben vom 11. Juni 1976 hieß es:

> „Sie haben in Conj. & Ref. [Nr. 18 des Literaturverzeichnisses, A. S.] mehrfach die Explikation eines komparativen Verisimilitude-Konzeptes als Hauptaufgabe herausgestellt. Die bisherigen einschlägigen Bemühungen in dieser Frage sind mir bekannt, auch der jüngste Beitrag von Herrn Tichý in Brit. J. Phil. Sci. 1976 [Nr. 29 des Literaturverzeichnisses, A. S.]. Ich halte diese Arbeiten für sehr bedeutsam. Dennoch erscheint mir ein (adäquates) komparatives Konzept von Verisimilitude *allein* noch nicht als ausreichend, wenn man erklären will, was ‘Annäherung an die Wahrheit’ bedeutet. Sie selbst haben, ebenfalls in Conj. & Ref. auf S. 232, auf eine mögliche Konvergenz in einem topologischen oder metrischen Raum hingewiesen. *Dieser* Gedanke bildet die Grundlage für die Definition von Wahrheitsannäherung in meinem Buch *Theorie und Rechtfertigung* [. . .] Was schließlich das Induktionsproblem angeht, so werden Ihre negativen Resultate durch meine topologische Interpretation nur bekräftigt. Diese Interpretation ist wohl konsistent und intuitiv sinnvoll, das Induktionsproblem wird in ihr aber gewissermaßen aufgelöst.“

Schon wenig später (datiert vom 21. Juni 1976) kam die Antwort aus Fallowfield. Popper bedankte sich für Brief und Manuskript und schrieb:

> „Ich habe beides sorgfältig gelesen und mein Eindruck (for what it is worth) ist ausgezeichnet. Aber Ihr Buch von 1975 kenne ich nicht (ich habe es hier in der Universitätsbibliothek bestellt). – Ich kann Ihre Arbeit fachmännisch *nicht* beurteilen; ich habe, wie gesagt, einen sehr guten Eindruck und ich hoffe, dass alles richtig ist. Kritik: die Seite 14 [entspricht Seite 268 in diesem Band; A. S.] hat mich enttäuscht. Ich habe eine an einem einfachen Beispiel (oder etwa Newton-Einstein) erläuternde Zusammenfassung erwartet. Statt dessen sind das nur alte (1934) Resultate. Zeile 17, »reine Ermessungsfrage« ist zu schwach, und sogar etwas irreführend: es wird suggeriert, dass man hier eine Ermessungs-Metrik einführen könnte, was ich für falsch halte. – Zu Seite 1 möchte ich feststellen dass, wenn auch Stegmüller’s Version vielleicht die ‘kürzeste’ ist, er doch für viele Jahre ein Carnapscher Induktivist war, trotz meiner Schriften; und dass ich viele Jahre mit meiner Hume-Renaissance vollkommen allein stand. Es ist daher vielleicht etwas irreführend, wenn jetzt

> meine und seine Stellungnahme als »Nachfolgerprobleme« zusammengeworfen werden. – Hinsichtlich Ihrer Bemerkung auf Seite 2, unmittelbar vor Anmerkung 3 (»Leitfaden des Erkenntnisfortschrittes«) möchte ich Sie auf Seite 82-83 meiner Arbeit 'The Rationality of Scientific Revolutions' hinweisen, die ich Ihnen gleichzeitig (zusammen mit einer ähnlichen Arbeit) schicke. Ich wüsste gerne, wie diese Analyse (S. 82-83) von Ihrem Standpunkt gesehen aussieht. — Mit den allerbesten Wünschen für einen durchschlagenden Erfolg Ihrer Untersuchungen, Ihr Karl Popper."

Mit einer so wohlwollenden Stellungnahme war ich begreiflicherweise zufrieden (zumal sie den Herausgebern der Zeitschrift für Allgemeine Wissenschaftstheorie die Annahme des Artikels zur Publikation erleichterte). Poppers Missfallen daran, dass ich mich reichlich unkritisch auf Stegmüllers »Nachfolgerprobleme« eingelassen hatte, ist nur zu gut nachvollziehbar, und mehr noch seine Kritik an meiner törichten Redeweise von einer »Ermessensfrage«. Gerade weil es nicht einmal »Gegenstand theoretischer Erwägungen werden« kann, ob eine Folge, von der man lediglich ein (endliches) Anfangsstück kennt, gegen einen Grenzwert strebt, gibt es in dieser Frage auch keinerlei Ermessen.[26] Allerdings scheint mir die Enttäuschung darüber, dass im Fazit meines Präzisierungsversuchs nichts wirklich Konkretes herauskommt, darauf hinzudeuten, dass Popper noch das *komparative* Bild zweier Theorien vor Augen hatte, von denen die eine 'näher an der Wahrheit' liegt als die andere. Anzeichen dafür ist wohl das von ihm erwartete (und vermisste) Beispiel à la „Newton-Einstein". In meinem Ansatz, Wahrheitsannäherung *durch unendliche Folgen als bloße Sprechweise* zu rekonstruieren, haben solche Vergleichsstudien (wie sie z. B. E. Scheibe durchgeführt hat), ersichtlich keinen Platz (was natürlich nicht heißen soll, dass sie nicht sinnvoll und aufschlussreich sein können). – Der Brief, der die Manuskriptsendung an Popper begleitete, schloss mit der Bemerkung, das fragliche Problem (der Induktion) werde »gewissermaßen aufgelöst«. Die doppelte Bedeutung, die hier im Wort 'auflösen' anklingt, passt nicht schlecht zu der berühmten lakonischen Wendung, die Wittgenstein 1918 ins Vorwort seines *Tractatus* geschrieben hatte: dass sich nämlich am Ende herausstelle, »wie wenig damit getan ist, daß die Probleme gelöst sind«.

Schließlich möchte ich noch auf die Frage eingehen, ob und wie sich die auf den Seiten 82-83 von „The Rationality of Scientific Revolutions" (Nr. 20 des Literaturverzeichnisses) geschilderte Analyse von meiner Warte aus darstellt. Popper gibt dort zwei Kriterien, und es wird rasch klar, dass es sich um Dinge handelt, die er bereits in Kapitel 10 von *Conjectures and Refutations* [18] zur Sprache gebracht hatte (siehe die Liste (1)-(6) auf S. 232 ebda.). Die Denkweise ist komparativ, d. h. Popper spricht

[26] Die merkwürdige Befürchtung Poppers, es werde hier womöglich »eine Ermessungs-Metrik« suggeriert (die er »für falsch« hielt), ist nicht mit seinen gelegentlichen Hinweisen auf eine Behandlung des Verisimilitude-Konzepts in der Begrifflichkeit topologischer oder metrischer Räume zu vereinbaren.

davon, wann eine *neue* Theorie t_2, als die bessere, einer *alten* Theorie t_1 vorzuziehen sei. In „The Rationality ..." stellt er vor allem zwei Punkte heraus:

> »First, in order that a new theory should constitute a discovery or a step forward it should conflict with its predecessor; that is to say, it should lead to at least some conflicting results. [...] In this sense, progress in science —or at least striking progress— is always revolutionary. My second point is that progress in science, although revolutionary rather than merely cumulative, is in a certain sense always conservative: a new theory, however revolutionary, must always be able to explain fully the success of its predecessor.«

Im Großen und Ganzen ist Poppers erster Punkt eine Zusammenfassung seiner Kriteriumsliste aus [18, S. 232]; so lautet etwa das Kriterium (4): »t_2 has passed tests which t_1 has failed to pass«. Der zweite Punkt erscheint aber auch bereits an anderer Stelle (desselben Kapitels), etwa [18, S. 242]. Beide Postulate hatte ich in *Theorie und Rechtfertigung* [25] für die Zwecke meiner Begriffsexplikation von „wissenschaftlichem Fortschritt" verwendet, allerdings nicht in Bezug auf ein zum Vergleich stehendes Theorienpaar (t_1,t_2), sondern in Bezug auf eine potentiell unendliche (d. h. beliebig fortsetzbar zu denkende) Folge von Theorien: $t_1,t_2,t_3,\ldots$ Die entsprechenden Eigenschaften sind dabei in Form von Progressionsprinzipien (P_1) und (P_2) formuliert, von denen das erste ausdrückt, dass die fragliche Theorienfolge *innovativ*[27] ist, während das zweite ihren *konservativen* Charakter beschreibt. Immerhin erweisen sich (P_1), (P_2) zusammen als hinreichende Bedingung dafür, dass eine Theorienfolge[28] gegen eine ‘ideale Theorie’ strebt, und zwar in einem ähnlichen Sinn, in welchem eine (nach oben) unbeschränkte Zahlenfolge gegen das uneigentliche Element ∞ konvergiert. Verbindet man den Begriff „Wahrheit" mit dieser ‘idealen Theorie’, so hat es eine gewisse Berechtigung zu sagen, eine innovative und konservative Folge von Theorien stelle eine „Annäherung an die Wahrheit" dar. Das ist nicht allzu viel und vermutlich weniger als das, was Popper mit seiner Forderung meint »that progress in science can be assessed rationally« [20, S. 83].

---

[27] Mit Absicht habe ich einen vorsichtigeren Terminus gewählt. Das Attribut „revolutionär" schließt eine Wertung ein, die voraussetzt, dass die betreffenden Theorien auch in ihren inhaltlichen Details bekannt sind. Solche mikrologischen Aspekte bildet mein Modellierungsansatz nicht ab; er ist vielmehr makrologisch in dem Sinn, dass die Entitäten, welche die Rolle von ‘Theorien’ übernehmen, völlig abstrakt (undefiniert) bleiben und nur durch Relationen (wie R) bestimmbar sind. – Was der Makrologik bislang fehlt (aber durchaus erreichbar scheint), ist die Möglichkeit, „Konflikte" (Popper) abzubilden. Dass eine Theorie t nicht durch die empirische Instanz e bestätigt wird, d. h. *non* $R(t,e)$ gilt, muss keineswegs bedeuten, dass t und e in einer widersprüchlichen Beziehung stehen. Würden wir uns die Instanzen e aus E als Dinge mit Satzcharakter denken, so ist dann durchaus – bei geeignet erweiterter Relation R – durch $R(t,\neg e)$ ein Konflikt zwischen Theorie und Erfahrung darstellbar. In dieser Richtung ist das Modell freilich noch nicht ausgebaut.

[28] Streng genommen handelt es sich um eine (effektiv herstellbare) Teilfolge der gegebenen Folge.

Aspekte der Approximation in der Modellbeziehung[1]

The article deals with certain aspects of approximation which play a role in modelling nature or in approaching to the truth by sequences of theories. Some of the Popperian ideas about „verisimilitude“ (and the related comparative concept of „truthlikeness“ elaborated by Niinuluoto et al.) are discussed. In the main part of the paper, the author presents, from a macrological point of view, a sketch of his topological framework for a metatheory of theory-progression and intertheory relations.

1. Modelle, Theorien, Verisimilitude

Nach gängiger Auffassung ist die Modellbeziehung eine mehrstellige Relation zwischen einem Modell (Theoriekonstrukt), dem dadurch abgebildeten Original (Objektzusammenhang, Weltausschnitt) und dem Zweck der Modellierung, nach dem sich häufig auch die Exaktheitsstufe für die Anwendung des Modells richtet (vgl. Stachowiak 1973). Bei Bedarf lassen sich noch weitere Bestimmungsmomente einbeziehen, z. B. ein Zeitindex oder ein abgegrenztes Repertoire zugelassener Konstruktionsmittel. Schon die mancherlei Relativierungen, die in eine solche Konzeption einfließen, bezeugen den gegenüber der herkömmlichen Auffassung von ‘Theorie’ pragmatisch eingeschränkten Erkenntnisanspruch. Ein Modell ist von vornherein ein technologisch ausgerichtetes Instrument, das einen klar abgesteckten Wirklichkeitsausschnitt (i. a. nur) *angenähert* abbildet, d. h. seine als wesentlich erachteten Aspekte funktionell nachbildet, dies aber für den Zweck seiner Anwendung noch hinreichend genau.

Theorien im klassischen Verständnis, vor allem der Physik, ordnen sich zwar grundsätzlich auch dem hier skizzierten Modellbegriff unter, wurden und

[1] Erschienen in: *Grundlagenstudien aus Kybernetik und Geisteswissenschaft / Humankybernetik* 48/4 (2007), S. 171-182. – Die im Folgenden wiedergegebene Fassung enthält geringfügige Korrekturen zumeist redaktioneller Natur.

werden jedoch – wie z. B. die moderne Quantenfeldtheorie oder Stringtheorie – auf einen weiter gefassten wie tiefer liegenden Gegenstandsbereich bezogen, und dies i. a. mit dem Anspruch, Erklärungen für alle dort auftretenden Phänomene liefern zu können.

Zum einen wird deutlich: Das Original, das so verstandene Theorien abbilden wollen, ist als zusammenhängendes Ganzes überhaupt nicht verfügbar bzw. referenzierbar, allenfalls fragmentarisch und dann auch nur indirekt (etwa durch Experimente). Ineins damit wechselt der Richtungssinn der approximativen Modellierung, indem nun – umgekehrt – idealisierte Gebilde und Gesetze (als Theorie/Modell-Konstituenten) angenähert werden durch von der Beobachtung gelieferte und aufgrund störender Effekte mehr oder weniger verzerrte „Bilder" (z. B. reale Bahnen von Himmelskörpern oder empirische Merkmalverteilungen im Vergleich zu den idealen Grenzgebilden der Mechanik bzw. der Wahrscheinlichkeitstheorie).

Zum anderen zeigt aber die Erfahrung auch, dass Theorien/Modelle – unabhängig von der Spannweite ihres Wahrheitsanspruchs – scheitern können, was K. Popper im Ausgang von seiner *Logik der Forschung* (1934; 1971) zur Entwicklung einer fallibilistischen Position veranlasst hat. Danach sind prinzipiell alle Theorien, die allgemeine empirische Gesetzlichkeiten konstatieren, falsifizierbar, kommen aber immerhin noch der Wahrheit (unterschiedlich) nahe und sollen nach einem noch zu explizierenden Grad von „Verisimilitude" bewertet werden.

2. Ein kritischer Blick auf Präzisierungsversuche

Bei den Theorien, um die es in Poppers Verisimilitude-Idee geht, handelt es sich nicht um Modelle im eingangs skizzierten Sinn, die man mit ihren Originalen vergleichen kann; es ist daher auch nicht möglich, aus dieser Abweichung ein Maß ihrer Wahrheitsähnlichkeit zu gewinnen (wie dies bei mathematischen Approximationen der Fall ist, z. B. bei einer Kurve durch einen geeigneten Streckenzug oder bei einer stetigen Funktion durch ein Polynom). Popper hat daraus die Konsequenz gezogen, Verisimilitude als einen *komparativen* Begriff zu bestimmen, der bzgl. zweier vorliegender Theorien ausdrückt, welche von beiden „näher an der Wahrheit" liegt.

In Kapitel 11 von *Conjectures and Refutations* (1963) gibt Popper seine eigene (fehlerhafte) Lösung des Problems. Eine Theorie t wird dort als Menge $Cn(t)$ der Folgerungen aus einem (endlichen) Axiomensystem aufgefasst und dichotom zerlegt in einen

Wahrheitsgehalt $Cn_T(t)$ (= Menge der wahren Aussagen aus $Cn(t)$) und einen Falschheitsgehalt $Cn_F(t)$. Eine Theorie t_2 ist dann – nach Poppers Definitionsvorschlag – mindestens so nahe an der Wahrheit wie eine Theorie t_1, wenn $Cn_T(t_1)$ eine Teilmenge von $Cn_T(t_2)$ ist und $Cn_F(t_2)$ eine Teilmenge von $Cn_F(t_1)$. Zunächst Hempel, dann Tichý und Miller haben durch eine einfache Überlegung gezeigt, dass diese Definition inadäquat, weil gleichbedeutend ist mit der Äquivalenz der fraglichen Theorien t_1, t_2 (und zwar für den Fall tatsächlich falsifizierter Theorien; siehe dazu Zwart 1998, S. 9).

Die lebhafte Diskussion um Poppers Definition hat zu zahlreichen Verbesserungsvorschlägen und Weiterentwicklungen geführt. Einen Überblick und zugehörige Analysen dazu gibt S. D. Zwart in seiner Dissertation (1998), und mit I. Niiniluotos umfangreicher Monografie *Truthlikeness* liegt bereits seit 1987 eine Gesamtdarstellung vor, die das Thema auf systematische Weise als Teilgebiet der philosophischen Logik und Wissenschaftstheorie darzustellen versucht.

In mehreren Hinsichten freilich bleibt an den Ansätzen im Umkreis dieses von Popper definierten Forschungsprogramms Kritik zu üben. Als „Theorien" fungieren i. a. aussagenförmige Ausdrücke einer mehr oder weniger reichhaltigen Logiksprache. Die Wahrheitsähnlichkeit eines solchen Ausdrucks wird dann typischerweise dadurch (rekursiv) bestimmt, dass man zu ihm eine gewisse Normalform aus Konstituenten herstellt, für welche bereits eine metrische Struktur (d.h. ein Abstandsmaß) vorausgesetzt wird. Wodurch diese Metriken sich im Einzelfall sachlich rechtfertigen und nicht vielmehr nur *ad hoc* angenommen werden (müssen), bleibt in der Regel offen. Zudem erweist sich die so explizierte Beziehung als nicht-invariant gegenüber einem Wechsel der zu Grunde liegenden Sprache (und der damit verbundenen Übersetzung der Theorie-Aussage; vgl. dazu etwa Pearce 1989), ganz zu schweigen von der Frage, wie realistisch überhaupt die Annahme ist, wissenschaftliche Theorien ließen sich in derart eingeschränkten Systemen darstellen wie sie z. B. Niiniluoto (1987) benutzt. Dass dieser *Trivialisierungseinwand* ernst zu nehmen ist, belegen eindringlich die skeptischen Schlussfolgerungen, zu denen Kieseppä (1995) in seinen Analysen des Verisimilitude-Konzepts und der darauf gegründeten wissenschaftslogischen Approximationsidee gelangt.

Die Anläufe zur Präzisierung von Verisimilitude waren übrigens schon in den 1970-er Jahren nicht die einzigen Versuche, der Idee einer „Annäherung an die Wahrheit" eine logisch exakte Gestalt zu geben. Um hier nur einige wenige zu nennen: Nach dem Muster von Tarskis Semantik eine approximative Erfüllungsbeziehung (z. B. für Formeln des Prädikatenkalküls erster Stufe) zu entwickeln, war ein von Popper mehrfach geäußertes Desiderat und wurde in der Folge von Weston (1977, 1981) bearbeitet, allerdings ohne dabei das eigentliche Ziel in letztlich zufriedenstellender Form zu erreichen. Hauptsächlich an konkreten physikalischen Theorien orientierten sich die Fallstudien und Analysen zur äpproximativen Erklärung"von Scheibe (1973), Ludwig (1978) oder Ehlers (1986). Anknüpfend an „strukturalistische“ Ideen (wie sie von Sneed und Stegmüller propagiert wurden) haben Moulines (1976, 1980) und, in aktuellerer Fassung, Balzer/Lauth/Zoubek (1993) Begriffsentwürfe zur approximativen Theorieanwendung bzw. zu einer von ihnen so genannten „Kinematik“ naturwissenschaftlicher Theorien vorgelegt und untersucht. – Zwischen diesen höchst rudimentären Ansätzen und der Verisimilitude-Nachfolge gibt es freilich bislang, wenn überhaupt, nur sehr schwache Wechselwirkungen, was zum nicht geringen Teil der mangelnden Vergleichbarkeit der Begriffsbildungen in diesen „Schulen“ geschuldet ist.

3. Übergang zu makrologischer Betrachtungsweise

Zum überwiegenden Teil streben die bisher genannten Präzisierungsversuche einen effektiven, auf wissenschaftliche Theorien in realistischer Weise anwendbaren Vergleichsbegriff an, der aussagt, bis zu welchem Grad eine Theorie „der Wahrheit nahekommt“ bzw. dass eine Theorie einer anderen (konkurrierenden) in dieser Hinsicht überlegen oder gleichwertig ist. Diese Zielsetzung stellt uns vor zwei grundsätzliche Schwierigkeiten. Zum einen verlangt sie, dass genau gesagt wird und Übereinkunft darüber besteht, was wir unter einer „Theorie“ zu verstehen haben, und darüber hinaus, nach welchen Verfahren die internen Bausteine (Konstituenten) einer Theorie zu bewerten und in das Gesamtergebnis (Wahrheitsnähe der Theorie) einzurechnen sind. Die zu Grunde liegende Betrachtungsweise soll deshalb *mikrologisch* genannt werden.

Zum anderen bleibt aber (unabhängig von einer Lösung des ersten Problems) dann immer noch ein kritischer Einwand gegen die komparative Begriffsform als solche bestehen. Eine Folge immer besserer (wahrheitsähnlicherer) Theorien, wie sie der wissenschaftliche Fortschritt hervorbringen mag, kann nämlich keineswegs ohne weiteres als eine „Annäherung an die Wahrheit“ (hier: an einen wahren Theorierepräsentanten aus besagter Folge) angesehen werden. Hierauf hatte schon Ayer (1974) hingewiesen und dabei insbesondere auf das Fehlen eines Kriteriums aufmerksam gemacht. Nicht zuletzt eine solche Vorstellung von „Konvergenz“ hat auch Popper vorgeschwebt (vgl. seine Anspielung auf topologische und metrische Räume auf S. 232 von

Conjectures and Refutations), vielleicht angelehnt an Ch. S. Peirce, für den Realität einen Grenzbegriff darstellte und der die „wahre Meinung“ (der Wissenschaft) als ideale Grenze dachte, die sich auf lange Sicht im prinzipiell offenen, unabschließbaren Forschungsprozess, gleichsam als dessen Horizont, abzeichnet. Aus der Mathematik wissen wir aber nur zu gut, dass eine wachsende Größe ihr Wachstum beliebig fortsetzen kann, ohne einen vorgegebenen endlichen Wert jemals zu erreichen oder zu überschreiten (etwa bei asymptotischem Verlauf einer Funktion). Andererseits ist unter bestimmten Voraussetzungen durchaus gesichert, dass eine wachsende Folge über alle Grenzen wächst; nur haben die Vertreter einer komparativen Wahrheitsähnlichkeit (nach Popper) nirgendwo derartige Voraussetzungen tatsächlich benannt oder gar als hinreichend für die unterstellte Konvergenz nachgewiesen.[2]

Zwei typische Beispiele mögen die landläufige Einstellung gegenüber diesem Problem verdeutlichen.

1. Kuipers (1984) weist mit Recht darauf hin, dass aus Sicht der Praxis nicht viel damit gewonnen ist, wenn wir die Wahrheitsnähe einer Theorie unter Bezug auf eine ideale „wahre Theorie“ definieren (vgl. seine Def. 1). Was vielmehr interessiere, sei die messbare Verbesserung einer Theorie bzw. die Wahl einer Theorie, die in empirischer Hinsicht (als beschreibendes und erklärendes Modell) mehr leistet als ihre Konkurrenten. Nach Kuipers soll nun aber allein die Anwendung einer entsprechend gefassten Regel (»rule of success« in Def. 4) als Kriterium des Fortschritts genügen. Die von Kuipers formulierten Propositionen beziehen sich ausschließlich auf komparative Begriffe und sind trivial. Allerdings wird das Erfordernis, eine präzisierte Fassung von „Fortschritt“ aus dem „Erfolgskriterium“ herzuleiten, nicht erfüllt und nicht einmal wirklich gesehen. Das von Popper und Lakatos geforderte »novelty-requirement for progress« (S. 251) wird lediglich als Nebenprodukt betrachtet, nicht als Bedingung für einen konvergenten Forschungsprozess.

2. Bei Niiniluoto (1987) spielt die Idee einer „progressiven“ Folge von Theorien praktisch keine Rolle; in seiner Truthlikeness-Monografie tritt sie dennoch einmal kurz auf (S. 460). Seinem vorrangigen Interesse an einem Ähnlichkeitsbegriff entsprechend nimmt auch Niinuluoto zunächst auf eine „wahre Theorie“ Bezug und verlangt monotones Wachstum der »truthlikeness« der Folgenglieder. Vorsorglich weist er aber darauf hin, dass damit die betreffende Folge noch nicht notwendig auch schon „gegen die Wahrheit konvergiert“. Dies soll erst dann der Fall sein, wenn der Abstand,

[2] Dies ist vielleicht dem Umstand zuzuschreiben, dass (wie bei Popper selbst) das komparative Konzept in vielen (nicht allen) Fällen gedanklich auf ein Theorien-*Paar* fixiert bleibt und nur ausnahmsweise mit einer Theorien-*Folge* in Verbindung gebracht wird. Mathematisch entspricht das einer Situation, in der man zwar über einen Begriff von Größenvergleich (hier: $\leq$) verfügt, aber von diesem ausgehend nicht zum Begriff einer monotonen Zahlenfolge vorstößt.

den die Folgenglieder von der „wahren Theorie“ besitzen, gegen Null strebt. Die Frage der Progression ist damit, wie im Übrigen das gesamte Explikationsunternehmen dieses Autors, auf die Wahl einer vorab bereits gegebenen Metrik verschoben. Der Ad-hoc-Charakter derartiger (rein formal natürlich korrekter, inhaltlich aber trivialer) Bedingungen liegt freilich auf der Hand.

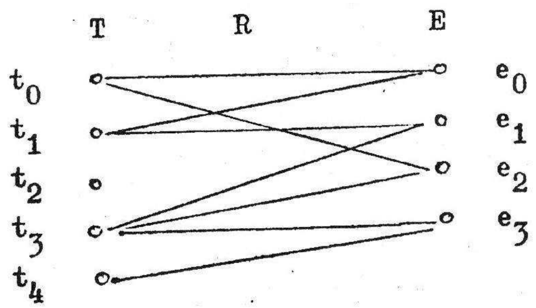
Zu einer Klärung des Fragenkomplexes bzgl. Konvergenz etc. gelangt man am ehesten durch geeignete Abstraktionen, d. h. hier: durch Absehen von näheren inhaltlichen oder strukturellen Bestimmungen des Theoriebegriffs sowie einer auf Theorien und „empirischen Instanzen“ (Beispielen, Bewährungsproben, Experimenten) bezogenen Bestätigungsrelation R. Das abstrahierende Vorgehen kennzeichnet den Übergang zu einer *makrologischen* Betrachtungsweise. Bei dieser werden, unabhängig von der inneren Natur und logischen Struktur der untersuchten Elemente („Theorien“, „Instanzen“), lediglich diejenigen intertheoretischen Beziehungen studiert, die sich mit Hilfe von R und gewissen Familien von Instanzenmengen ausdrücken lassen. Seit Hilbert ist die Verfahrensweise geläufig, geometrische Systeme bzgl. Mengen undefinierter Elemente („Punkte“, „Geraden“ usw.) und undefinierter Grundrelationen (z. B. „Inzidenz“) aufzubauen, deren Gebrauchsweise einzig durch Axiome geregelt ist. In analoger Weise lässt sich das allgemeine begriffliche Rahmenwerk einer metatheoretischen Makrologik entwickeln, indem man von einer beliebigen Menge T (von „Theorien“ t), einer beliebigen Menge E (von „empirischen Instanzen“ e) und einer zwischen beiden etablierten zweistelligen Relation R (intuitiv zu deuten als Bestätigung, Bewährung oder Erklärung) ausgeht (vgl. Schreiber 1975). Nachträglich lassen sich alle diese formalen Bestandteile dann immer noch mit konkreten Deutungen belegen (Interpretationen im Sinne semantischer Modelle; vgl. Schreiber 1975, S. 183 u. 194 sowie Schreiber 1977). Ein makrologisches Metamodell erlaubt es, von feinstrukturellen Unterschieden abzusehen, wie sie in disparaten Ansätzen wissenschaftstheoretischer „Schulen“ sichtbar werden. Es könnte daher eventuell als eine allgemeine formale Plattform dienen, auf der ein (wenn auch kleiner brauchbarer) Teil dieser Ansätze sich einbinden und bis zu einem gewissen Grade harmonisieren lassen.

4. Eine natürliche Topologie für abstrakte Theorien

Im Rahmen dieses Artikels beschränken wir uns darauf zu skizzieren, in welcher Weise man bei makrologischer Betrachtung zu einer in gewissem Sinn

„natürlichen“ Topologie gelangt, mit der sich Nachbarschaften zwischen abstrakten Theorien – wir sprechen künftig kurz nur von Theorien – beschreiben lassen. Die Nagelprobe dieser Begriffsbildungen wird dann unter anderem in dem Nachweis liegen, dass eine potentiell unendliche *progressive* Folge von Theorien in einem präzisierbaren Sinn gegen die „Wahrheit“ konvergiert. Progressivität wird dabei aufgefasst als Synthese einer »rule of success« (Kuipers) und einem geeigneten »novelty-requirement« (Popper)[3].

Ausgangspunkt unserer formalen Metatheorie sind Tripel (T,E,R) aus den bereits oben bezeichneten (nichtleeren) Mengen T und E von *Theorien* bzw. *Erfahrungsinstanzen* (wobei man sich E am besten einschlägig, d. h. auf einen abgegrenzten Forschungsgegenstand bezogen vorstellt) sowie einer zwischen beiden Mengen vermittelnden Bewährungsrelation R. Die darin enthaltene Gegenüberstellung von Theorie und Empirie lässt sich als bipartiter Graph veranschaulichen, im Fall endlicher Mengen beispielsweise wie in Figur 1. – Eine Verbindungskante von t_i nach e_j symbolisiert $R(t_i,e_j)$, was z. B. heißen kann: Theorie t_i erklärt den experimentellen Effekt e_j. Theorie t_2 (im Diagramm) erklärt nichts, ist daher „wertlos“; t_3 erklärt alles, was t_4 erklärt und darüberhinaus mehr, während t_3 und t_1 nicht unmittelbar zu vergleichen sind, da jede (außer e_1) noch mindestens eine weitere Instanz erklärt, die ihre Konkurrentin nicht erklärt.



Figur 1

Zunächst sei angedeutet, dass und wie die komparativen Begriffsbildungen (nach Popperschem Vorbild) sich in diesem Rahmen einführen lassen. Es erweist sich hier (und generell) als nützlich, bestimmte Begriffe von vornherein auf variable Teilmengen X von E zu relativieren. Ein solches X kann dann dazu dienen, den jeweils aktuellen Stand bekannter empirischer Instanzen wiederzugeben (während wir uns in E im Prinzip sämtliche potentiellen Erfahrungsinstanzen enthalten denken). Sind s,t Theorien $\in T$, so schreiben wir $s \leq_X t$, wenn für alle $e \in X$ mit $R(s,e)$ auch gilt: $R(t,e)$, d. h. t erklärt (oder wird bestätigt durch) alle Instanzen aus X, die s erklärt. Die Relation $\leq_X$ ist

[3] Der historischen Gerechtigkeit halber ist anzumerken, dass Popper schon viel früher, spätestens jedoch (Anfang der 1960-er Jahre) in *Conjectures and Refutations* Bedingungen dieser Art formuliert (und vergleichsweise differenziert erörtert) hat. Vgl. dazu das Postskriptum auf Seite 273

reflexiv und transitiv und damit eine Quasiordnung (keine teilweise Ordnung). Man beachte: Aus $s \leq_X t$ und $t \leq_X s$ folgt keinesfalls $s = t$, beide Theorien bewähren sich lediglich an denselben Instanzen aus X. Diesen Fall geben wir durch eine zweistellige Relation wieder: $r_X(s,t)$. Ist etwa im obigen Beispiel $X = \{e_0, e_1\}$, so hat man $r_X(t_2,t_4)$, aber z. B. nicht $r_X(t_0,t_1)$.

Offensichtlich ist r_X für beliebige Teilmengen X von E reflexiv, symmetrisch und transitiv, d. h. eine Äquivalenzrelation auf T, und gibt somit Anlass zu einer Zerlegung von T in Klassen zueinander äquivalenter Theorien. Auf der leeren Menge ($X = \emptyset$) sind alle Theorien äquivalent.

Es bezeichne $U(t,X)$ die Menge aller zu t auf X äquivalenten Theorien, und ferner $N(X)$ die Menge aller auf X äquivalenter Paare von Theorien aus T. Um zu einer in gewissem Sinn naheliegenden Topologie auf T zu gelangen, müssen in einem Vorbereitungsschritt zunächst geeignete Systeme $\mathscr{D}$ von Instanzenmengen (Teilmengen von E) in Betracht gezogen werden. Ihre Verwendung ermöglicht es nämlich, den Umstand abzubilden, dass ein fortschreitender Prozess der Forschung (auf dem Gebiet, auf das sich E bezieht) dem jeweils aktuellen Repertoire verfügbarer Instanzen hin und wieder neue Elemente hinzufügt. Am einfachsten ist es, sich dazu $\mathscr{D}$ als System abzählbar vieler Instanzenmengen $X_0, X_1, X_2, \ldots$ vorzustellen, die bzgl. der Inklusion eine aufsteigende Folge bilden, d. h. $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots$, und vereinigt ganz E ausschöpfen (vgl. die *in E kumulierenden Ketten* in: Schreiber 1975, S. 184). Es genügen aber bereits *gerichtete Systeme* $\mathscr{D}$, von denen lediglich verlangt wird, dass zu beliebigen $X, Y \in \mathscr{D}$ stets eine Menge $Z \in \mathscr{D}$ existiert mit $X \subseteq Z$ und $Y \subseteq Z$.

Die Bedeutung dieser definitorischen Vorbereitungen liegt in der Möglichkeit, auf der Theorienmenge T allein unter Bezug auf R und $\mathscr{D}$ in kanonischer Weise Nachbarschaftsstrukturen zu etablieren. Grundlegend dafür sind die beiden folgenden Aussagen[4]:

a) Ist $\mathscr{D}$ ein gerichtetes System von Teilmengen von E, die ganz E ausschöpfen, so bilden die Obermengen der Äquivalenzklassen $U(t,X)$, $X \in \mathscr{D}$, ein Umgebungssystem auf T. T wird dadurch zu einem topologischen Raum (und seine Topologie heiße hier *natürlich*).

b) Die Obermengen von $N(X)$, $X \in \mathscr{D}$, bilden eine uniforme Struktur auf T, deren zugehörige Topologie gerade die natürliche Topologie von T ist.

Eine erste bemerkenswerte Beobachtung ist festzuhalten: Die natürliche To-

[4] Auf Beweise muss hier und im Folgenden verzichtet werden. Es sei dazu auf Schreiber (1975, 1977) sowie die mathematische Standardliteratur verwiesen, z. B. Kelley (1955).

pologie auf T hängt – entgegen erstem Anschein – nicht wesentlich davon ab, wie die Instanzenmengen innerhalb von $\mathscr{D}$ geschichtet sind. Um diesen Sachverhalt genauer zu fassen, wollen wir von gerichteten Systemen $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ sagen, dass $\mathscr{D}$ von $\mathscr{D}'$ *überlagert* wird, wenn zu jedem $X \in \mathscr{D}$ ein $Y \in \mathscr{D}'$ solcherart existiert, dass $X \subseteq Y$ gilt. Sich wechselseitig überlagernde gerichtete Systeme heißen *kofinal*, wodurch offensichtlich eine Äquivalenzrelation definiert ist. Wir verwenden abstrahierend den Begriff „Kofinalitätstyp“ für die zugehörigen Äquivalenzklassen gerichteter Systeme. Tatsächlich hängt – wie sich zeigen lässt – die natürliche Topologie (ebenso wie die ihr zugeordnete Uniformität) nicht direkt vom vorliegenden System $\mathscr{D}$ ab, sondern allein von seinem Kofinalitätstyp $\kappa(\mathscr{D})$, d. h. kofinale Systeme erzeugen dieselbe natürliche Topologie. Ist insbesondere E höchstens abzählbar und sind sämtliche Mengen aus $\mathscr{D}$ und $\mathscr{D}'$ endlich, so gilt (wie leicht zu sehen ist): $\kappa(\mathscr{D}) = \kappa(\mathscr{D}')$. Bezeichnen wir den daraus resultierenden gemeinsamen *finitären Kofinalitätstyp* mit κ_0, so erhält man folgende Aussagen:

1. Alle gerichteten Systeme vom Kofinalitätstyp κ_0 erzeugen dieselbe natürliche Topologie auf T.
2. Sämtliche in E kumulierenden Ketten aus endlichen Instanzenmengen sind kofinal vom Typ κ_0.

Als Folgerung aus 1 und 2 ergibt sich, dass sämtliche in E kumulierenden Ketten aus endlichen Instanzenmengen dieselbe Topologie auf T induzieren, die wir auch κ_0-Topologie oder *finitäre natürliche Topologie* (f. n. T.) nennen wollen. Deutet man die zugehörigen gerichteten Systeme (wie oben) als Abbilder der historischen Repertoireerweiterungen um immer neue empirische Instanzen, so gelangt man zu dem Fazit:

Die Reihenfolge, in der empirische Instanzen im Verlauf des (infinit gedachten) Forschungsprozesses in Erscheinung treten, hat keinerlei Einfluss auf die Nachbarschaftstrukturen der f. n. T.

Auf dieser Grundlage können wir nun daran gehen, die Idee einer progressiven Theorienfolge mit der Theorie konvergenter Folgen zu verbinden. Dazu werde $t_0, t_1, t_2, \ldots$ als eine (potentiell) unendliche Folge von Elementen aus T vorausgesetzt und auf der Menge H der Folgenglieder t_i die Relativtopologie der auf T eingeführten f. n. T. betrachtet. Definiert man nun den Begriff „progressive Folge“ von Theorien $t_0, t_1, t_2, \ldots$ in geeigneter Weise, so hat dies, wie gleich zu sehen sein wird, bemerkenswerte Konsequenzen für den zugehörigen topologischen Raum H.

Die diversen Regeln bzw. regulativen Forderungen, die Popper selbst[5] und in der auf ihn bezogenen Nachfolgediskussion zur Versimilitude auch andere (wie Kuipers 1984) immer wieder vorgeschlagen haben, wurden zwar so gut wie ausschließlich auf eine rein komparativ gedachte Wahrheitsähnlichkeit bezogen; aus ihnen lassen sich aber ebensogut auch Kriterien herausdeuten, welche die Verbesserung von Theorien *in potentiell fortsetzbaren Sequenzen* beschreiben. – Wir destillieren aus den genannten Vorschlägen zwei charakteristische Eigenschaften heraus, die eine *progressive* Theorienfolge $t_0, t_1, t_2, \ldots$ definieren sollen:

(P_1): Für jedes $k \geq 0$ existiert ein $e \in E$ mit $R(t_k, e)$, aber *non* $R(t_j, e)$ für $j < k$.

(P_2): Für jedes $k \geq 0$ und jedes $e \in E$ gibt es $j \geq 0$ derart, dass $R(t_j, e)$ und $t_k \leq_E t_j$.

(P_1) ist ein rein innovatives Prinzip und besagt in anschaulicher Interpretation, dass sich jede Theorie (der betrachteten Folge) an einer Instanz bewährt, mit der ihre Vorgänger nicht fertig werden. (P_2) ist ein innovatives und konservatives Prinzip, demzufolge ein gegebenes Erfahrungsdatum irgendwann einmal durch eine Theorie erklärt wird, die zugleich die Erklärungsleistungen bereits akzeptierter Theorien mindestens wiederholt (möglicherweise sogar übertrifft).

Erfüllt nun $t_0, t_1, t_2, \ldots$ die Progressionsprinzipien (P_1) *und* (P_2), so erweist sich der zugehörige topologische Raum H (der Folgenglieder) als Hausdorff-Raum mit einer abzählbaren Basis. Ferner ist H lokalkompakt, aber nicht kompakt in der relativierten f. n. T. Auf H lässt sich dann der bekannte Satz von Alexandroff über Ein-Punkt-Kompaktifizierung[6] anwenden (siehe etwa Kelley 1955, S. 150). Demzufolge wird H durch Hinzunahme eines zusätzlichen einzelnen Punktes (hier: einer nicht in H vorkommenden 'Theorie' u) zu einem kompakten Raum H^*. Im Weiteren ergibt sich, dass die ursprüngliche Folge eine uneigentlich-konvergente Teilfolge besitzt. Es ist dies eine Folge (von Elementen aus H), die im kompaktifizierten Raum H^* gegen das neue

[5] Dazu gehören etwa die von Popper (1963, S. 232) aufgestellten Postulate (4), (5), (6) sowie – noch eindeutiger – die Erörterungen in Abschnitt VIII: Popper 1975.

[6] Der geläufigste Spezialfall der Ein-Punkt-Kompaktifizierung ist die Hinzunahme eines Elements ∞ zur Menge der reellen Zahlen (Punkte auf dem Zahlenstrahl). Damit werden dann bestimmt-divergente Folgen, die über jeden endlichen Wert hinaus wachsen, „uneigentlich-konvergent", d. h. sie streben gegen *unendlich* (d. i. der neu hinzugenommene „unendlich ferne" Punkt ∞).

Element u konvergiert. Bemerkenswert daran ist: u erfüllt die Relation $R(u,e)$ für alle $e \in E$, d. h. u ist eine universal gültige (bewährte) Theorie in dem E zu Grunde liegenden Gegenstandsbereich.[7]

Dieses hier in Umrissen beschriebene *Konvergenztheorem* kann so interpretiert werden: Leiten (P_1) und (P_2) den Forschungsverlauf als regulative Prinzipien, so ist die Sprechweise von einer „Annäherung an die Wahrheit" in der Tat zu rechtfertigen, wenngleich auch nur aus metatheoretischer Perspektive und *in einem idealen (uneigentlichen) Sinn*. Konvergenz ist ein infinitärer Begriff, der auf die grundsätzlich immer nur *endlichen* Theoriesequenzen, die in der Realität auftreten, nicht anwendbar ist. Zum Vergleich: In der Mathematik gelingt es durch geeignete Konstruktion einer Topologie, dem Begriff „konvergent gegen ∞" für Zahlenfolgen einen präzisen Sinn zu verleihen. In völlig analoger Weise gelingt es in makrologischer Betrachtungsweise, den Begriff einer „gegen die Wahrheit konvergierenden" Theorienfolge zu explizieren. Das Konvergenztheorem besagt dann, *dass* (P_1) *und* (P_2) *hinreichende Kriterien für die Wahrheitsannäherung in diesem Sinne sind*. Wem es gefällt, mag dies als formale Rehabilitierung der fiktionalen – z. B. von W. V. Quine heftig kritisierten – Idee von Peirce werten, wonach Wahrheit eine Art „letzte" Meinung im Prozess der Forschung darstellt.

5. Probleme der Metrisierung

Abschließend soll hier zumindest ansatzweise auf die weitergehende Frage eingegangen werden, unter welchen Bedingungen sich aus der f.n.T. der Theorienmenge T ein numerisches Maß für den Abstand zwischen zwei Theorien gewinnen lässt. In mikrologischen Untersuchungen über „verisimilitude" und „truthlikeness" (allen voran Niinuluoto 1987) wird Distanzmaßen beträchtliche Aufmerksamkeit geschenkt. Immerhin legen es die kombinatorisch aus Einzelmerkmalen aufgebauten Ausdrücke, die dort als „Theorien" verwendet werden, nahe, diverse Metriken an ihnen auszuprobieren: neben klassischen Metriken der Mathematik vornehmlich die seit langem aus der Statistik bekannten Abstandsmaße ähnlicher Merkmalkomplexe (siehe etwa Bock 1974).

Aus makrologischer Sicht stellt sich die Frage, ob und wie ein Abstandsmaß für Theorien zu gewinnen sei, in der präzisen Form des Metrisierungsproblems für einen Raum mit natürlicher Topologie. Es sei hier daran erinnert,

[7] Vgl. dazu die Überlegungen zur „Absolutheit" von u: Schreiber 1975, S. 194. Streng genommen muss man sich die Relation R in geeigneter Weise zu einer Relation $\subseteq H^* \times E$ fortgesetzt denken; man vgl. Seite 226 f in diesem Band.

dass unter einer *Metrik auf* T eine Abbildung d verstanden wird, die je zwei Elementen $s,t \in T$ eine nichtnegative reelle Zahl $d(s,t)$ derart zuordnet, dass für alle $s,t,u \in T$ gilt:

(1) $d(s,t) = d(t,s)$

(2) $d(s,t) + d(t,u) \geq d(s,u)$ (Dreiecksungleichung)

(3) $d(s,s) = 0$

(4) $s = t$, falls $d(s,t) = 0$

Ist Eigenschaft (4) nicht erfüllt, so heißt d *Pseudometrik*. Entsprechend nennt man (T,d) einen *metrischen* bzw. *pseudometrischen* Raum. In einem (pseudo)metrischen Raum lassen sich offene Kugeln um ein Element $t \in T$ definieren, das sind die Mengen aller Punkte $s \in T$, die von t einen Abstand $d(t,s) < r$ haben ($r > 0$, Radius der Kugel). Pseudometrische (und erst recht metrische) Räume sind auf kanonische Weise zugleich topologisch; ihre Teilmengen, die Kugeln enthalten, bilden ein Umgebungssystem. Umgekehrt ist keinesfalls in jedem topologischen Raum eine Metrik oder Pseudometrik definierbar, die seine Topologie auf die beschriebene Weise hervorbringt.

Nun besagt ein bekanntes Metrisationstheorem (Alexandroff und Urysohn), dass ein uniformer Raum genau dann pseudometrisierbar ist, wenn er eine abzählbare Basis besitzt (vgl. etwa Kelley 1955, S. 186). – Hieraus ergibt sich sofort die Existenz einer Pseudometrik auf einer beliebigen mit der κ_0-Topologie versehenen Theorienmenge T. Es bilden nämlich die $N(X_k)$, $k = 0,1,2,\ldots$, für jede in E kumulierende Kette $X_0, X_1, X_2, \ldots$ endlicher Teilmengen eine abzählbare Basis der Uniformität, welche die f. n. T. erzeugt. Dass hier eine Pseudometrik statt einer Metrik ins Spiel kommt, ist keineswegs ein Nachteil. Vielmehr ist es angemessen, zwei Theorien, deren Abstand null ist, nicht als identisch anzusehen.

Der Metrisationssatz enthält zwar nur eine Existenzaussage, wird aber bewiesen, indem man eine Pseudometrik mit den behaupteten Eigenschaften konstruiert. Im Falle der f. n. T. liegen aber viel speziellere Verhältnisse vor als im allgemeinen Fall, die es gestatten, eine geeignete Pseudometrik δ auf einfachere und direkte Art anzugeben. Dies geschieht relativ zu einer gegebenen in E kumulierenden Kette $X_0, X_1, X_2, \ldots$ mit einem Anfangsglied X_0, das wir (ohne Einschränkung) als leer voraussetzen wollen. Es seien dann $s,t \in T$ beliebig angenommen. Sind die Theorien auf ganz E äquivalent, d. h. gilt $r_E(s,t)$, so werde $\delta(s,t) = 0$ gesetzt. Andernfalls gibt es ein maximales $n \geq 0$, für das s und t auf X_n äquivalent sind; in diesem Fall werde $\delta(s,t) = (1+n)^{-1}$ definiert.

Für diese Funktion lässt sich zeigen:

1. δ ist eine Pseudometrik auf T mit Werten im Intervall $[0,1]$.
2. δ erzeugt auf T die finitäre natürliche Topologie (κ_0-Topologie).
3. δ ist eine Ultra-Pseudometrik, d. h. sie erfüllt folgende Verschärfung der Dreiecksungleichung: $\max(\delta(s,t),\delta(t,u)) \geq \delta(s,u)$.
4. $\delta(s,t) = 1$ genau dann, wenn s und t auf keiner der Instanzenmengen $X_0, X_1, X_2, \ldots$ äquivalent sind.

Um Abstände zwischen Theorien mittels δ zu berechnen, muss man hinlänglich viele Instanzenmengen $X_0, X_1, X_2, \ldots$ kennen. Das Vorgehen möge anhand des Beispiels illustriert werden, das zu Beginn von Abschnitt 4 als bipartiter Graph dargestellt ist. Angenommen, X_k enthalte genau die nummerierten Instanzen e_0 bis e_{k-1} ($k > 0$) und keine der Theorien t_0 bis t_4 bewähre sich an anderen als den in Figur 1 abgebildeten Instanzen. Dann lässt sich am Diagramm ablesen: t_0 und t_1 sind nur auf X_1 äquivalent, und daher ist $\delta(t_0,t_1) = (1+1)^{-1} = 1/2$. Alle übrigen Paare verschiedener Theorien sind ausschließlich auf der leeren Menge X_0 äquivalent, weshalb ihr δ-Abstand $(1+0)^{-1} = 1$ beträgt.

Eine Umnummerierung der Instanzen kann allerdings bewirken, dass sich die Abstände zwischen zwei Theorien ändern. Ist z. B. $X_1 = \{e_2\}$ (und entstehen die folgenden Instanzenmengen durch schrittweises Hinzufügen der übrigen e_0, e_1, usw.), so sind t_0 und t_1 auf keiner Instanzenmenge (außer X_0) äquivalent und wir erhalten $\delta(t_0,t_1) = 1$.

Schon diese einfache Überlegung macht deutlich: Ein Abstandsmaß, das wie δ durch Bezug auf die Indizierung von Instanzenmengen definiert wurde, kann i. a. nicht mehr invariant sein kann gegenüber einer Umnummerierung der Indizes. (Entsprechendes gilt auch für die Pseudometrik, die zum Beweis des allgemeinen Metrisationssatzes konstruiert wird.) Darin liegt ein fundamentaler Unterschied gegenüber der natürlichen Topologie, die einzig vom Kofinalitättyp des gerichteten Systems abhängt.

Ein ähnliches Manko haftet den Ad-hoc-Metriken an, die im Truthlikeness-Ansatz eingesetzt werden und laut Pearce (1989) Abstandswerte liefern, die von gewissen linguistischen Besonderheiten der Theorie-Darstellung abhängen, d. h. sich bei einer Übersetzung in eine andere Sprache ändern.

Literatur

1. Ayer, A. J.: Truth, Verification and Verisimilitude, in: P. A. Schilpp (ed.): *The Philosophy of Karl Popper II*. La Salle, Illinois 1974, S. 684-692.
2. Balzer, W.; Lauth, B.; Zoubek, G.: A Model for Science Kinematics. *Studia Logica* 52 (1993), S. 519-548
3. Bock, H. H.: *Automatische Klassifikation*, Göttingen 1974.
4. Ehlers, J.: On Limit Relations Between, and Approximative Explanations of, Physical Theories, in: B. Marcus et al. (eds.): *Logic, Methodology and Philosophy of Science VII (Proceedings)*. Amsterdam 1986, S. 387-403.
5. Kelley, J. L.: *General Topology*, Van Nostrand, 1955.
6. Kieseppä, I. A.: A Note on the Structuralist Account on Approximation, in: Kuokkanen (1995), S. 49-52.
7. –: Assessing the Structuralist Theory of Verisimilitude, in: Kuokkanen (1995), S. 95-108.
8. Kuipers, T. A. F.: Approaching the Truth with the „Rule of Success". *Philosophia Naturalis* 21 (1984), S. 244-253.
9. Kuokkanen, M.: *Idealization VII: Structuralism – Idealization and Approximation*. Amsterdam; Atlanta 1995.
10. Ludwig, G.: *Die Grundstrukturen einer physikalischen Theorie*. Berlin; Heidelberg; New York 1978.
11. Moulines, C. U.: Approximate Application of Empirical Theories: A General Explication. *Erkenntnis* 10 (1976), S. 201-227.
12. –: Intertheoretic Approximation: The Kepler-Newton Case. *Synthese* 45 (1980), S. 387-412.
13. Niiniluoto, I.: *Truthlikeness*. Synthese library Vol. 195. Dordrecht 1987.
14. Pearce, D.: Review: Niiniluoto (1987). *The Journ. of Symbolic Logic* 54 (1989), S. 297-300.
15. Popper, K.: *Logik der Forschung*, 1. Aufl. 1934, 4. verb. Aufl. Tübingen 1971.
16. –: *Conjectures and Refutations. The Growth of Scientific Knowledge*. New York; Evanston 1963.
17. –: The rationality of scientific revolutions, in: R. Harré (ed.): *Problems of Scientific Revolutions: Progress and Obstacles to Progress in the Sciences*. Oxford 1975, S. 72-101.
18. Scheibe, E.: Die Erklärung der Keplerschen Gesetze durch Newtons Gravitationsgesetz, in: E. Scheibe; G. Süßmann (Hrsg.): *Einheit und Vielheit. Festschrift für Carl Friedrich v. Weizäcker zum 60. Geburtstag*. Göttingen 1973, S. 98-118.
19. Schreiber, A.: *Theorie und Rechtfertigung*, Brauschweig 1975.
20. –: Das Induktionsproblem im Lichte der Approximationstheorie der Wahrheit. *Zeitschrift f. allg. Wissenschaftstheorie* VIII/1 (1977), S. 77-90.
21. Stachowiak, H.: *Allgemeine Modelltheorie*. Wien [u. a.] 1973.

22. Weston, T. S.: Approximate Truth. *The Journal of Symbolic Logic* 42 (1977), S. 157-158.
23. –: Approximate Truth and Valid Operators. *The Journal of Symbolic Logic* 46 (1981), S. 688.
24. Zwart, S. D.: *Approach to the Truth. Verisimilitude and Truthlikeness*. Amsterdam: ILLC Dissertation Series, 1998.

* * *

Schlussbemerkungen

So vieler Worte ich gehört habe, keiner kommt so weit, zu erkennen, daß das Geistige etwas von allem Getrenntes ist.

HERAKLIT

1. — Mathematik ist eine – und wohl die einzige – beweisende Disziplin. Die Geltung ihrer Lehrsätze wird gesichert, indem man sie auf Grundsätze (Axiome) oder andere Lehrsätze, die schon bewiesen sind, zurückführt. Wie sicher ihre Ergebnisse sind, hängt daher nur noch von den Axiomen und den Methoden der Zurückführung ab. In ihren Aussagen wiederum sind Begriffe enthalten, von denen in Beweisen zu entscheiden ist, ob sie auf bestimmte Dinge oder Sachverhalte zutreffen oder nicht. So verstanden ist Mathematik immer auch ein *Denken in Begriffen*.

In der geschichtlichen Entwicklung lässt sich das wachsende Bestreben ablesen, den mathematischen Diskurs von der empirischen Realität unabhängig zu machen. Dazu mussten die Begriffe von dieser ablöst werden. Das bekannteste Beispiel dazu bietet die Geometrie, die erst Ende des 19. Jahrhunderts von Hilbert zu einem völlig abstrakten, von empirischen Schlacken befreiten axiomatischen System ausgestaltet wurde. Einer radikalen Abstraktion wie dieser hatte bis dahin die Auffassung entgegengestanden, in geometrischen Aussagen werde (mindestens der Intention nach) etwas über die Punkte, Ebenen und Konfigurationen des realen Raumes behauptet. Auch die (viel jüngere) Wahrscheinlichkeitsrechnung könnte man in ähnlichem Sinn für eine „physikalische“ Theorie halten. Wenige Dekaden später hatte aber Kolmogoroff auch für sie, nach dem Muster von Hilberts *Grundlagen der Geometrie*, eine formal-axiomatische Gestalt (als Maßtheorie) entwickelt.

Die Ablösung der Begriffe von der Wirklichkeit stellt eine *Distanz* zwischen den Theorien und ihren Anwendungsfeldern her. Unter anderem ist das der Preis für die *Präzisierung* der Begriffe, ohne die es kein strenges beweisendes Verfahren gäbe. In einer treffenden Sentenz – eine Art Unschärferelation für Begriffe – hat Albert Einstein dies auf den Punkt gebracht: »Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.« – Zur Wirklichkeit, auf die sich Begriffe beziehen, gehören aber nicht nur physische Objekte, sondern auch der Inhalt anschaulicher Vorstellungen. Deren methodische Ausklammerung erscheint durchaus als eine produktive Facette der Distanzierung. Lässt der Begriff sich nun freier weiterentwickeln und ausdifferenzieren, so kann sein Anschauungsgehalt aber immer noch eine heuristische Rolle dabei spielen.

2. — Mathematisches Denken ist demnach in erster Linie ein *formales* Umgehen mit Begriffen. Bei dieser Aussage dürfte sich so manches philosophische Haar sträuben, und das erst recht angesichts jener Übergriffe, deren sich Logiker schuldig machen, sobald sie sich anschicken, epistemologische Konzepte (wie „Evidenz“ oder „Wahrheitsannäherung“) formal zu präzisieren oder, wie es in modischem Jargon heißt, rational zu rekonstruieren. Etwas rekonstruieren oder wiederherstellen möchte man, weil es verloren ging oder *weil man glaubt*, es verloren zu haben. Aber wer „hatte“ jemals (und in welchem Sinn) solche Begriffe? – Hegel spottete, man brauche keine Anatomie und Physiologie zu studieren, um gehen oder verdauen zu können. Um bei mathematischen Begriffen zu bleiben: Es ist möglich, ein Dreieck mit Zirkel und Lineal zu konstruieren, ohne über einen allgemeinen Begriff von „Konstruktion“ zu verfügen; ebenso ist es möglich, eine Berechnung durchzuführen, ohne zu wissen, was eine berechenbare Funktion ist. Will man hingegen etwas über ganze Klassen von Konstruktionen oder Berechnungen beweisen (z. B. die Nicht-Konstruierbarkeit einer Figur), so kommt man in der Regel ohne eine Explikation dieser Begriffe nicht weiter.

Gelegentlich wird beklagt, in formalen Präzisierungen seien der ursprüngliche Sinn und der Vorstellungsgehalt eines Begriffs nicht mehr anzutreffen. Das kann durchaus zutreffen. Doch ist dem entgegenzuhalten, dass eine ‘Rekonstruktion’ ohnehin gewöhnlich nur beansprucht, Teilaspekte wiederzugeben, die es etwa erlauben, eine bestimmte These oder intuitive Behauptung zu überprüfen. Überhaupt sind Formalisierungen kein Selbstzweck. Zwischen „Tasse“ und „Becher“ lässt sich eine scharfe Grenze nicht ziehen, und im Alltag genügen diese vagen Begriffe vollauf, allerdings dann sicher nicht mehr, wenn eine Maschine Tassen und Becher trennen soll. Auch in den Wissenschaften ist es nicht ratsam, einer starren Methodologie zu folgen und Begriffe *voreilig* zu schärfen oder formal zu exaktifizieren. Erkenntnis kommt nicht zustande, ohne dass man sich einer noch beweglichen Sache begrifflich geschmeidig anpasst.

3. — Die wachsende Distanzierung zur Wirklichkeit hat Gegenbewegungen hervorgerufen. In unterschiedlichen Ansätzen (nicht selten zu „Forschungsprogrammen" ausgedehnt) wird in ihnen das Ziel verfolgt, die Kluft zwischen Begriff und Gegenstand zu überbrücken, den verloren geglaubten Bezug zur Wirklichkeit wieder oder überhaupt erst herzustellen. Im Hinblick auf eine formalistisch aufgefasste Axiomatik war für die Wissenschaftsphilosophie eine *Rechtfertigungsfrage* entstanden: Was spricht eigentlich dafür, eine Zusammenstellung von Formeln, die streng genommen *keine Bedeutung* (mehr) haben, als Grundlage der Mathematik zu akzeptieren? Hilbert genügte als Minimalforderung an ein Axiomensystem die Widerspruchsfreiheit, deren Sicherung er sich von einer eigens dazu geschaffenen finiten (und insofern noch Bedeutung ausdrückenden) Beweistheorie erhoffte.[1] Alternative Begründungstheorien *außerhalb* dieser Grundlagenkonzeption setzen zumeist prinzipieller an und unterlaufen in gewissem Sinn die eingeengte Fragestellung.

Zwei Klassen solcher Vorhaben können hier genannt werden. Zur ersten gehören Versuche, eine methodisch gereinigte Form der Anschauung als Quelle von Geltung (wieder) einzusetzen. Beispiele dafür sind der Brouwersche Intuitionismus oder die von Husserl entwickelte Phänomenologie. Hier sind unter der Leitung einer Ur-Intuition bzw. von Evidenz deren *Gegebenheiten* anzuerkennen: als eine den Begriffszeichen unterliegende tiefere, sprachunabhängige und sinnstiftende Schicht. Eine zweite Klasse von Antworten bilden Doktrinen, die den Gegenstand als *konstitutive* Leistung (wenn nicht gar Erzeugnis) von Begriffen hinstellen. Hierzu zählen Dinglers operativistische »Ergreifung des Wirklichen« oder die daran anknüpfenden Versuche, apriorische Proto-Formen wissenschaftlicher Gebiete der Physik und Mathematik konstruktivistisch aufzubauen (Lorenzen und sog. Erlanger Schule).

Das Gemeinsame der hier ins Spiel kommenden schematisierten Anschauungs- und Handlungsformen liegt in ihrer häufig *produktiven*, mindestens aber unterstützenden Rolle bei der Erkenntnisgenese. Daher leisten die genannten Auffassungen am ehesten Brauchbares, wenn es um Prozesse der Entwick-

[1] Mit Gödels Unvollständigkeitssätzen von 1931 wurde dann klar, dass sich nicht einmal für die Arithmetik natürlicher Zahlen ein solcher Nachweis erbringen lässt.

lung oder der Anpassung von Wissen geht: z. B. mathematische Lernvorgänge oder das Lösen von Problemen. An die Stelle exakter Begriffe treten dann mit Absicht vage gehaltene und allgemein gefasste Konzepte, die vorwissenschaftlich (lebensweltlich) verwurzelt sind und als Richtschnur in Prozessen der Wissensentwicklung dienen können. Die in der Didaktik diskutierten „fundamentalen Ideen“ eines Fachs gehören dazu ebenso wie die „Strategien“ der Heuristik (in der Nachfolge der Forschungen Pólyas und seines Schülers Lakatos). Natürlich wird mit Auslegungen dieser Art die dogmatische Plattform der diversen konstruktivistischen „Aufbau“-Programme verlassen.

4. — Trotz all dieser in ihren Grenzen sinnvollen und legitimen Abmilderungen kann sich nichts daran ändern, dass in der Erkenntnissituation selbst eine Dichotomie von Begriff und Gegenstand angelegt ist. Wer über die Dinge und Sachverhalte der ihm gegebenen Wirklichkeit urteilen will, braucht Begriffe dazu. Wer seine Urteile dann mit anderen Urteilenden austauschen und erörtern möchte, wird nicht umhinkommen, die dabei benützten Begriffe hinsichtlich ihrer Leistung (Verständlichkeit, Abbildungskraft, u. dgl.) zu prüfen, wo erforderlich zu präzisieren und in ein wechselseitiges Verhältnis zu bringen. Naturgemäß führt das zu einer inneren Differenzierung und sogar einer gewissen relativen Verselbständigung der Begriffssphäre. Aus solcher Perspektive mag der Formalismus als das Schicksal des rational-wissenschaftlichen Denkens erscheinen. Er ist nur das im Großen sich abzeichnende und ausweitende Bild der in jedem einzelnen Erkenntnisakt wirksamen Scheidung und Entgegensetzung von Erkennendem und Erkanntem.[2]

Entgegensetzung bedeutet nicht notwendig auch eine Entzweiung, bei der sämtliche Beziehungen abgeschnitten werden.[3] Auf der Seite des Begriffs

[2] Immer wieder ist versucht worden, diese fundamentale Konstellation „wegzuphilosophieren“; so von Fichte, der (Kants Vernunftkritik überdehnend) die Realität als Hervorbringung seines Bewusstseins „erklärte“, oder von Hegel, der in seiner *Phänomenologie des Geistes* glaubte, das als Anderssein vergegenständlichte Wissen durch »die Anstrengung des Begriffs« in sich zurückführen zu können: als *absolutes* Wissen, in dem Begriff und Gegenstand (auf wahrhaft unbegreifliche Weise) *identisch* werden. – Als einstweilen letzte Nachzügler idealistischer Erzeugungsfantasien treten seit einiger Zeit die diversen Spielarten des Konstruktivismus auf den Plan. Auch und gerade die Pädagogik und die Fachdidaktiken sind von dieser reichlich naiven Realitätsauffassung befallen, welche die durchaus nachweisbaren Formungsleistungen des Subjekts im Erkenntnisprozess in ihrer *konstituierenden* Wirkung freilich *bei weitem* überschätzt.

[3] Der Salomonknoten auf der Titelseite des Buchs soll in erster Linie die unauflösliche, aber stets dichotome Einheit von Begriff und Gegenstand versinnbildlichen, ohne die Wissen nicht zustandekommt. Darüberhinaus verkörpert er ein Objekt, dessen Symmetrie und Verschlingungscharak-

steht schließlich ein empirisches Subjekt, das seinem Umfeld und den Dingen darin durch den eigenen Leib verbunden ist – in einer Art von »Kommunion«, wie es einmal in Merleau-Pontys *Phänomenologie der Wahrnehmung* heißt. In meinen methodenkritischen Überlegungen habe ich diesem Unternehmen zwar nur einen geringen Beitrag zum Verständnis exaktwissenschaftlicher (zumal geometrischer) Begriffsbildung zugestanden (Seite 107 in diesem Band). Dafür werden in ihm aber *andere* Möglichkeiten erschlossen, den Betreibern einer begrifflich hypertrophierten Rationalität »ein Gefühl für die Undurchdringlichkeit der Welt« zurückzugeben, das »die klassische Wissenschaft« noch gehabt haben mag.[4] So sehr der Versuch sein Recht hat, die Realität in möglichst klaren und wohldefinierten Begriffsgefügen nachzubilden, so unzweifelhaft stoßen wir dabei immer wieder auch an Grenzen angesichts des noch nicht Eindeutigen, des noch nicht in jeder Hinsicht Bestimmten oder des nicht einmal Bestimmbaren.

---

ter (im Sinne der Knotentheorie) seinerseits die mathematische Begriffsbildung herausfordert.

[4] Merleau-Ponty, *Das Auge und der Geist*, Reinbek b. Hamburg 1967, S. 13.

Verzeichnis ausgewählter Schriften

Die hier chronologisch zusammengestellten Schriften bilden eine Auswahl aus meinen veröffentlichten Arbeiten auf den Gebieten: Mathematik und ihre Didaktik, Erkenntnistheorie und Wissenschaftsphilosophie, Computerunterstützter Unterricht. Titel, die in diesen Band (ggfs. auszugsweise) aufgenommen wurden, sind durch einen Stern (*) gekennzeichnet. – Stand: Dezember 2010 (A. S.).

›Eine Bemerkung über abgeschlossene Wortmengen‹, *Grundlagenstudien aus Kybernetik u. Geisteswissenschaft* 16 (1975), 61-63.

* *Theorie und Rechtfertigung. Untersuchungen zum Rechtfertigungsproblem axiomatischer Theorien in der Wissenschaftstheorie*, Vieweg-Verlag: Braunschweig, 1975, 204 S.

›Über allgemeine semiotische Eigenschaften von Wortmengen‹, *Grundlagenstudien aus Kybernetik u. Geisteswissenschaft* 17 (1976), 87-95.

›Über Spiele mit Quoten‹, *Elemente der Mathematik* 32 (1977), 118-123.

›Die relativistische Geschwindigkeitenaddition als algebraische Verknüpfung‹, *Der mathematische u. naturwissenschaftliche Unterricht* 30 (1977), 346-349.

* ›Das Induktionsproblem im Lichte der Approximationstheorie der Wahrheit‹, *Zeitschrift f. allgemeine Wissenschaftstheorie* 8 (1977), 77-90.

* ›Anmerkungen zum Verhältnis von Mathematik und Empirie‹, *Materialien und Studien*, Bd. 12, IDM (Institut für Didaktik der Mathematik): Bielefeld 1978, 244-257.

* ›Eine methodische Schwierigkeit in P. Lorenzens operativer Begriffslehre‹, *Zeitschrift für philosophische Forschung* 32 (1978), 99-102.

›Logische Form und Invarianz‹, *Philosophia Naturalis* 17 (1978), 66-69.

›Zur algebraischen Analyse der Kettenregel‹, *Mathematisch-physikalische Semesterberichte* 25 (1978), 79-96.

›Zur Behandlung der Differentiationsregeln im Unterricht‹, *mathematica didactica* 1 (1978), 119-128.

* ›Die operative Genese der Geometrie bei Hugo Dingler und ihre Bedeutung für den Mathematikunterricht‹, *Der Mathematikunterricht* 24 (1978), 7-24.

›Über die vollständige Induktion und das sog. induktive Schließen‹, *Beiträge zum mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht*, Heft 35 (1979), 20-31.

* ›Universelle Ideen im mathematischen Denken – ein Forschungsgegenstand der Fachdidaktik‹, *mathematica didactica* 2 (1979), 165-171.

›Probleme bei der Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs‹, *mathematica didactica* 2 (1979), 235-246.

›The Principle of Operative Concept Formation in Geometry Teaching‹ (zusammen mit P. Bender), *Educational Studies in Mathematics* 11 (1980), 59-90.

* ›Idealisierungsprozesse – ihr logisches Verständnis und ihre didaktische Funktion‹, *Journal f. Mathematikdidaktik* 1 (1980), 42-61.

* ›Zur Anpassungsdynamik subjektiver Wahrscheinlichkeiten‹, *Grundlagenstudien aus Kybernetik u. Geisteswissenschaft* 21 (1980), 117-125.

›Subjektive Wahrscheinlichkeit und Gesetz der großen Zahlen‹. In: W. Dörfler, R. Fischer (Hrsg.): *Stochastik im Schulunterricht*, Beiträge zum 3. Internationalen Symposium für Didaktik der Mathematik vom 29.9. bis 3.10.1980. Hölder-Pichler-Tempsky: Wien; Teubner: Stuttgart, 1981, 209-215.

* ›Methodenkritische Überlegungen zu Merleau-Pontys Phänomenologie der Raumerfahrung‹, *Philosophia Naturalis* 18 (1981), 423-437.

* ›Auf dem Wege zu einer logischen Analyse des Evidenzbegriffs‹, *Allgemeine Zeitschrift f. Philosophie* 6 (1981), 60-68.

›Wahrscheinlichkeit und Metawissen‹, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Heft 2 (1982), 83-89.

* ›Rezension von H. Steinbring: Zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, Bielefeld 1980‹, *Zentralblatt f. Didaktik der Mathematik*, Heft 4 (1982), 233-236.

›Parallelfiguren – ein Problemfeld für umwelterschließenden Geometrie-Unterricht‹, *mathematica didactica* 5 (1982), 139-153.

* ›Anmerkungen zum Verhältnis von Mathematik und Empirie‹, Neuabdruck des gleichnamigen Artikels (1978) in: H. G. Steiner (Hrsg.): *Mathematik – Philosophie – Bildung*, IDM-Reihe *Untersuchungen zum Mathematikunterricht* 4. Aulis-Verlag: Köln, 1982, 285-295.

* ›Bemerkungen zur Rolle universeller Ideen im mathematischen Denken‹, *mathematica didactica* 6 (1983), 65-76.

* ›Rezension von R. Inhetveen: Konstruktive Geometrie – Eine formentheoretische Begründung der euklidischen Geometrie. Bibliographisches Institut: Zürich 1983‹, *Zentralblatt f. Didaktik der Mathematik* Heft 5 (1984), 171-173.

›Iterative Prozesse‹ (überarbeitete Fassung der am 23. Juni 1981 an der RWTH gehaltenen Antrittvorlesung), *Mathematische Semesterberichte* 31 (1984), 95-119.

›Einleitung‹ zum Nachdruck von W. Kusserow: *Los von Euklid!* (Leipzig 1928) in der Reihe *Klassiker der Mathematikdidaktik*, Band 5, Verlag Schöningh: Paderborn, 1985, E5-E9.

Operative Genese der Geometrie (zusammen mit P. Bender). Schriftenreihe *Didaktik der Mathematik* der Universität für Bildungswissenschaften in Klagenfurt, Band 12, Hölder-Pichler-Tempsky: Wien; Teubner: Stuttgart, 1985 (463 S.)

›Ebene Polygone und ihre Schachtelung‹, *mathematica didactica* 8 (1985), 21-44.

›Äquatorbänder – Stadionbahnen – Meilenzonen. Ein Ausflug in die Geometrie der Parallelfiguren‹, *Mathematiklehren*, Heft 17 (1986), 38-41.

* ›Mathematik als Experiment‹ (Antrittsvorlesung an der Pädagogischen Hochschule Flensburg, gehalten am 4. November 1987). In: P. Bender (Hrsg.): *Mathematikdidaktik – Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter*, Cornelsen-Verlag: Berlin, 1988, 154-165.

›Computer-Based Training (CBT) als Instrument bankbetrieblicher Bildungsarbeit‹ (zusammen mit F. Feldgen), *Betriebswirtschaftliche Blätter* 39 (1990), 164-168.

›Lernprogramm Beleihungswertermittlung. Ein Pilotprojekt zum computerunterstützten Lernen in der deutschen Sparkassenorganisation‹, *Betriebswirtschaftliche Blätter* 39 (1990), 169-174.

›Bausteine für Lernprogramme: Beschreibung und Implementierung‹. In: H.-J. Friemel, G. Müller-Schönberger, A. Schütt (Hrsg.): *Forum '90 – Wissenschaft und Technik. Neue Anwendungen mit Hilfe aktueller Computer-Technologien (Proceedings)*; Trier, Oktober 1990, *Informatik-Fachberichte* Nr. 259. Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg-New York, 1990, 333-348.

›Entwicklung didaktischer Software auf Autorensystembasis‹, *Zentralblatt f. Didaktik der Mathematik* Heft 3 (1990), 92-104.

›Rezension von K. Eckel: Didaktiksprache. Grundlagen einer strengen Unterrichtswissenschaft. Böhlau-Verlag: Köln/Wien 1989‹, *Zentralblatt f. Didaktik der Mathematik* Heft 3 (1990), 114-116.

›Eine Didaktik-Umgebung für adaptives Lernen (DUAL)‹, *Grundlagenstudien aus Kybernetik u. Geisteswissenschaft* 33 (1992), 25-31.

›Entwicklung von Computer-Based Training für die bankberufliche Aus- und Weiterbildung‹ (zusammen mit T. Merino). In: C. Seidel (Hrsg.): *Computer Based Training. Erfahrungen mit interaktivem Computerlernen*, Verlag für Angewandte Psychologie: Stuttgart, 1993, 137-148.

›Queneau, Mathematik und Potentielle Literatur‹, *mathematica didactica* 17 (1994), 72-92.

›Mathematische Lernbausteine in Software-Umgebungen – ihre Entwicklung, Integration und flexible Nutzung‹, 13 S. In I. Janiszczak (Hrsg.): *Einsatz des Computers im Mathematikunterricht*, Tagungsband zum Workshop der Universität Essen und der Planungstagung Mathematik der Bezirkregierung Köln (Dezernat 45.3) und Düsseldorf: Essen, 1997.

CBT-Anwendungen professionell entwickeln, mit 131 Abbildungen, Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg, 1998 (410 S.)

›Ein logischer Rahmen für die Antwortanalyse in Lehrprogrammen‹, *Grundlagenstudien aus Kybernetik u. Geisteswissenschaft* 42 (2001), 145-154.

›Project ZERO: Developing online material for mathematics teacher education‹. In: Borovcnik / Kautschitsch (eds.): *Technology in Mathematics Teaching*, Proc. of ICTMT 5 Klagenfurt 2001, *Schriftenreihe Didaktik der Mathematik*, Bd. 25, öbv & hpt: Wien, 2002, 171-174. – ›Projekt ZERO: Die Entwicklung von Online-Materialien für die Mathematiklehrer-Ausbildung‹, erweiterte Fassung in dt. Sprache (11 S.): CD-ROM-Beilage zu den Proc.

* ›Rand als mathematische Idee‹ (zusammen mit H. Wellstein), *Zeitschrift f. Kultur- u. Bildungswissenschaften* (Flensburger Universitätszeitschrift), Heft 13 (2002), 19-32.

* ›Auf der Suche nach der verlorenen Wirklichkeit. Zu Herkunft und Bedeutung des Konstruktivismus in der Mathematik‹, *Zeitschrift f. Kultur- u. Bildungswissenschaften* (Flensburger Universitätszeitschrift), Heft 14 (2003), 17-29.

* ›Bemerkungen über einige Argumente in Diskussionen zum Beweisen‹. In: Peter-Koop, A.; Bikner-Ahsbahs, A. (Hrsg.): *Mathematische Bildung – mathematische Leistung*, Verlag Franzbecker: Hildesheim / Berlin, 2007, 117-127.

* ›Aspekte der Approximation in der Modellbeziehung‹, *Grundlagenstudien aus Kybernetik u. Geisteswissenschaft* 48 (2007), 171-182.

›Gewinnabsicherung bei Wetten mit festen Auszahlungsquoten‹, Kap. 28 in: B. Luderer (Hrsg.): *Die Kunst des Modellierens. Mathematisch-ökonomische Modelle*, Vieweg + Teubner Verlag: Wiesbaden, 2008, 459-476.

›B-adische Teilbarkeitstests im Vergleich‹, *Elemente der Mathematik* 64 (2009), 13-20.

›Die Jensensche Ungleichung‹ (zusammen mit E. Vargyas), *Der Mathematikunterricht* 55/5 (2009), 16-32.

Mathematische Begriffsbildung ist ein zentrales Thema für das Verständnis von Mathematik in erkenntnistheoretischer, logischer sowie auch didaktischer Hinsicht. Die Beiträge in diesem Buch behandeln das Thema in vier Schwerpunkten: (I) Grundlegende Aspekte des Verhältnisses von Mathematik und Erfahrung; (II) Bedeutung und Rolle allgemeiner (fundamentaler) Leitideen im mathematischen Denken und Problemlösen; (III) Gebietsspezifische Studien: zur Phänomenologie der Raumerfahrung, zur operativen Genese der Geometrie und zum Wahrscheinlichkeitsbegriff; (IV) Mathematische Modellierung epistemologischer Begriffe (Evidenz, Idealisierung, Induktion). Ferner wird eine makrologische Betrachtungsweise entwickelt, mit der es möglich ist, die Idee der Annäherung an die Wahrheit durch Progressionen von Theorien zu präzisieren.

Das Buch bietet Mathematikern, Philosophen, Fachdidaktikern und allen an allgemeinen Grundlagenfragen Interessierten ein inhaltsreiches Programm aus orientierenden Überblicken, begriffslogischen Fallstudien, kritischer Diskussion und metatheoretischer Modellierung.

Logos Verlag Berlin

ISBN 978-3-8325-2883-6