

# Topologie et Intégrale de Chemin

Jonathan BERTOLACCINI

24 juin 2011

## Résumé

Pour calculer l'intégrale de chemin sur des espaces non simplement connexes il est nécessaire d'effectuer un changement de topologie, en utilisant le revêtement universel, en comparant les deux démarches, et en abordant l'effet Aharonov-Bohm. Il sera nécessaire d'utiliser des notions d'homotopie.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	L'intégrale de chemin . . . . .	2
1.1.1	Le propagateur . . . . .	2
1.1.2	Particule libre . . . . .	2
1.2	Quelques notions sur la topologie, en images . . . . .	3
<b>2</b>	<b>D'une topologie à l'autre : <math>M \rightarrow M^*</math></b>	<b>3</b>
2.1	Propagateur d'une particule sur un cercle . . . . .	3
2.1.1	Dans $M$ avec l'équation de Schrödinger . . . . .	3
2.1.2	Dans $M^*$ en utilisant l'homotopie . . . . .	4
2.1.3	Lien entre les deux approches ? . . . . .	6
<b>3</b>	<b>L'effet Aharonov-Bohm</b>	<b>7</b>
3.1	Présentation, première conséquence . . . . .	7
3.2	Lien avec l'homotopie et la topologie . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Conclusion et ouverture</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Annexe</b>	<b>9</b>
5.1	Formule de Poisson et Invariance modulaire . . . . .	9
5.2	Résolution détaillée : Particule sur un cercle . . . . .	10
	<b>Références</b>	<b>10</b>

# 1 Introduction

## 1.1 L'intégrale de chemin

### 1.1.1 Le propagateur

L'amplitude de transition d'un état vers un autre est une quantité importante en mécanique quantique, elle permet de faire des prédictions et de les confirmer par l'expérimentation. Cette amplitude est donnée par l'opérateur évolution  $\hat{U}(t_f, t_i)$  pris entre l'état initial  $|x_i\rangle$  et l'état final  $|x_f\rangle$ , on la nomme : propagateur, noté  $G$  et on écrit  $G(x_f, t_f; x_i, t_i) := \langle x_f | \hat{U}(t_f, t_i) | x_i \rangle$ . L'idée avec l'intégrale de chemin est de discrétiser le temps et l'espace. En insérant le relation de fermeture sur la position puis l'impulsion on montre que

$$G(q', t'; q, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i \varepsilon}} \right)^{N+1} \int \prod_N dq(\tau) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[q(\tau)]\right) \quad (1.1)$$

Il faut bien comprendre qu'ici l'action étant une fonctionnelle de la position, il faut donc intégrer sur toutes les positions possibles. Le coefficient de normalisation est apparu grâce à l'intégration sur les impulsions.

### 1.1.2 Particule libre

On considère une particule libre, donc il n'y a pas de potentiel. Plaçons nous dans un espace à une dimension (la généralisation étant simple). Son propagateur s'écrit sous forme continue, mais en discrétisant le temps, et l'espace on peut l'écrire sous la forme (1.3).

$$G(x_f, t_f; x_i, t_i) = \int_{x_i, t_i}^{x_f, t_f} \prod_N dx(\tau) e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 d\tau} \quad (1.2)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon} \right)^{\frac{N+1}{2}} \int dx_1 \dots dx_n e^{\frac{im}{2\hbar\varepsilon} \sum_{j=0}^N (x_{j+1} - x_j)^2} \quad (1.3)$$

où  $x_i = x_0$ ,  $x_f = x_{N+1}$  et  $\varepsilon = \frac{t_f - t_i}{N+1}$ . Quand on développe la somme dans l'exponentielle, on voit que certains termes apparaissent deux fois. Exemple pour  $j = 0, 1$  :  $(x_1 - x_0)^2 + (x_2 - x_1)^2$ . Par récurrence, nous calculerons l'action totale. En utilisant l'égalité suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dv \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-a(v-u)^2} \sqrt{\frac{b}{\pi}} e^{-b(w-v)^2} = \sqrt{\frac{ab}{\pi(a+b)}} e^{-\frac{ab}{a+b}(w-u)^2} \quad (1.4)$$

on arrive au résultat final à l'expression du propagateur pour la particule libre :

$$G(x_f, t_f; x_i, t_i) = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(t_f - t_i)}} e^{-\frac{m}{2i\hbar(t_f - t_i)}(x_f - x_i)^2} \quad (1.5)$$

## 1.2 Quelques notions sur la topologie, en images

Illustrons la connexité :

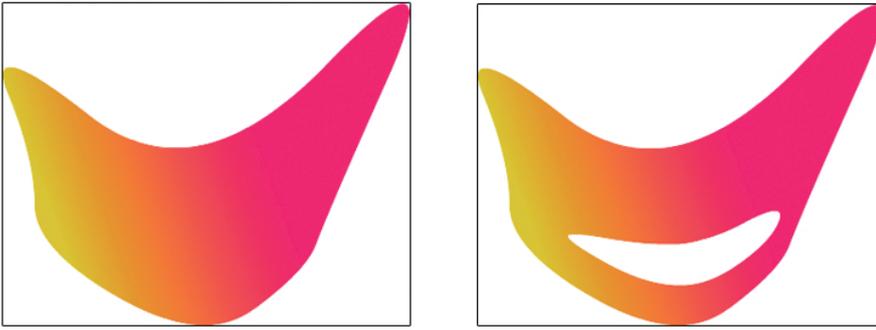


FIGURE 1 – A gauche le domaine est simplement connexe, alors qu'à droite il ne l'est pas puisqu'il y a un trou.

L'homotopie consiste à déformer continument les chemins. Sur la figure 2, on peut déformer  $\gamma_3$  pour le rendre identique à  $\gamma_1$ , on peut le faire aussi pour  $\gamma_2$ .

Illustrons l'homotopie pour des chemins :

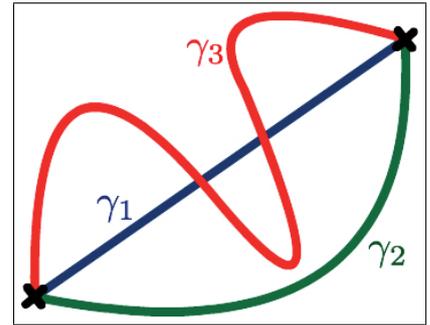


FIGURE 2 – Les chemins  $\gamma_2$  et  $\gamma_3$  sont homotopes à  $\gamma_1$

## 2 D'une topologie à l'autre : $M \rightarrow M^*$

### 2.1 Propagateur d'une particule sur un cercle

#### 2.1.1 Dans $M$ avec l'équation de Schrödinger

Considérons une particule se déplaçant sur une trajectoire circulaire. On peut penser à un électron piégé sur un réseau 1D avec conditions aux limites périodiques. Dans le cas d'un mouvement réduit à une trajectoire circulaire, il nous suffit seulement d'avoir un paramètre, que l'on nomme  $\varphi$ .

Déterminons l'amplitude de probabilité pour passer d'un état  $\varphi_1$  en  $t_1$  à  $\varphi_2$  en  $t_2$ , on appelle cette quantité : propagateur pour passer de  $\varphi_1$  à  $\varphi_2$ . On le note généralement en mécanique quantique,  $G(\varphi_2, t_2; \varphi_1, t_1)$ . Et par définition  $G(x_2, t_2; x_1, t_1) := \langle x_2 | \hat{U}(t_2, t_1) | x_1 \rangle$

Ecrivons donc l'équation de Schrödinger appliquée au cercle (on a posé  $\hbar = 1$ )

$$-\frac{1}{2I} \frac{\partial^2 \psi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = i \frac{\partial \psi(\varphi)}{\partial t} \quad (2.1)$$

Cherchons les solutions de (5.10) sous forme d'états stationnaires, c'est à dire en découplant la partie spatiale de la partie temporelle, avec pour condition limite périodique  $\psi(0, t) = \psi(2\pi, t) \quad \forall t$ . Au final

$$\psi(\varphi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\varphi\sqrt{2IE}} e^{-iE(t-t_0)} \quad (2.2)$$

En temps normal on souhaiterait que  $\psi$  soit univaluée, c'est à dire que  $\psi(\varphi, t) = \psi(\varphi + 2\pi, t)$ . Mais comme nous plongerons le système dans un champ magnétique, nous introduisons d'ores et déjà un déphasage pour chaque tour parcouru sur le cercle. Nous donnerons sa signification plus tard, dans le cadre de l'effet Aharonov-Bohm. En demande donc que  $e^{i\delta} \psi(\varphi, t) = \psi(\varphi + 2\pi, t) \quad \delta \in \mathbb{R}$ . En utilisant (2.2) on trouve après simplification  $\exists m \in \mathbb{Z} / 2\pi m + \delta = 2\pi\sqrt{2IE}$  d'où

$$E_m = \frac{1}{2I} \left( m + \frac{\delta}{2\pi} \right)^2 \quad m \in \mathbb{Z} \quad (2.3)$$

On peut donc réécrire  $\psi$  en fonction de  $m$  et  $\delta$  uniquement, que l'on note  $\psi_m$

$$\psi_m(\varphi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\varphi(m + \frac{\delta}{2\pi})} e^{-\frac{i}{2I} (m + \frac{\delta}{2\pi})^2 (t-t_0)} \quad (2.4)$$

Nous pouvons donc passer à l'expression du propagateur  $G$ , et en introduisant la relation de fermeture sur les états stationnaires  $|\psi_m\rangle$

$$G(\varphi_2, t_2; \varphi_1, t_1) := \langle \varphi_2, t_2 | \hat{U}(t_2, t_1) | \varphi_1, t_1 \rangle = \sum_m \psi_m(\varphi_2) \psi_m^*(\varphi_1) e^{-iE_m(t_2 - t_1)} \quad (2.5)$$

Nous sommes amenés à poser, pour simplifier le calcul de  $G$ ,  $\varphi := \varphi_2 - \varphi_1$  et  $T := t_2 - t_1$

$$G(\varphi_2, t_2; \varphi_1, t_1) = \sum_m \frac{1}{2\pi} \exp \left[ -\frac{iT}{2I} \left( \frac{\delta}{2\pi} \right)^2 \right] \exp \left( i \frac{\varphi \delta}{2\pi} \right) \exp \left[ im \left( \varphi - \frac{T\delta}{2\pi I} \right) \right] \exp \left( -im^2 \frac{T}{2I} \right) \quad (2.6)$$

Puisque qu'on remarque une somme sur  $m$  et sur  $m^2$  dans l'exponentielle, on peut encore exprimer ce propagateur à l'aide de la fonction Theta de Jacobi qui est définie ainsi

$$\theta_3(z, t) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2 t} e^{2inz} \quad \text{Im}(t) \geq 0 \quad (2.7)$$

Il suffit pour cela de procéder au changement de variables suivant

$$z := \frac{\varphi}{2} - \frac{T\delta}{4\pi I} \quad \text{et} \quad t := -\frac{T}{2\pi I} \quad (2.8)$$

Ici la variable  $t$  est réelle donc  $\theta_3$  devient une série de Fourier et est donc convergente.

On déduit l'expression finale du propagateur.

$$\boxed{G(\varphi_2, t_2; \varphi_1, t_1) = \frac{1}{2\pi} \exp i \left( \frac{\delta\varphi}{2\pi} - \frac{\delta^2 T}{8I\pi^2} \right) \theta_3 \left( \frac{\varphi}{2} - \frac{T\delta}{4\pi I}, -\frac{T}{2\pi I} \right)} \quad (2.9)$$

Etonnamment, on peut exprimer le propagateur à l'aide de la fonction Theta de Jacobi, qui est utilisée par exemple : en théorie des cordes, ou en théorie du soliton. Déterminons l'expression du propagateur en utilisant cette fois-ci l'intégrale de chemin et l'homotopie, il nous faudra aussi changer de topologie.

### 2.1.2 Dans $M^*$ en utilisant l'homotopie

Le cercle  $M$  est assimilable à la variété du groupe  $SO(2) \simeq S^1$ . La métrique naturelle pour ce groupe est triviale, elle ne dépend que d'un paramètre : l'angle que l'on représente ici par la fonction du temps  $\varphi(t)$ . Le lagrangien est donc  $L = \frac{1}{2I} \dot{\varphi}^2$ . Au changement de notation près, ce lagrangien est identique à celui d'une particule libre, avec pour seule différence que ici  $p(\varphi) \in [0, 2\pi]$ .

On note  $M := S^1$ , et son revêtement universel est  $M^* := \mathbb{R}$ . Le long de l'axe réel ( $M^*$ ) on peut juxtaposer des copies du cercle. Pour les différencier, on introduit un entier relatif  $n$ , que l'on appelle "nombre d'enroulement". Pour un tour du cercle dans le sens trigonométrique, on compte +1, dans le sens anti-trigonométrique, on compte -1.

Pour caractériser un chemin sur le cercle, il faut connaître trois données : la position initiale, la position finale, et le nombre d'enroulement pour passer de l'une à l'autre.

Soient deux chemins  $\gamma_i$  et  $\gamma_j$  qui ont même position initiale et finale sur  $S^1$ , mais un nombre d'enroulement différent ( $n_i \neq n_j$ ), alors il n'existe pas de transformation continue permettant de déformer  $\gamma_i$  pour le rendre identique à  $\gamma_j$ . On dit que  $\gamma_i$  et  $\gamma_j$  appartiennent à deux classes d'homotopie différentes. Une classe d'homotopie est définie par le nombre d'enroulement  $n$ .

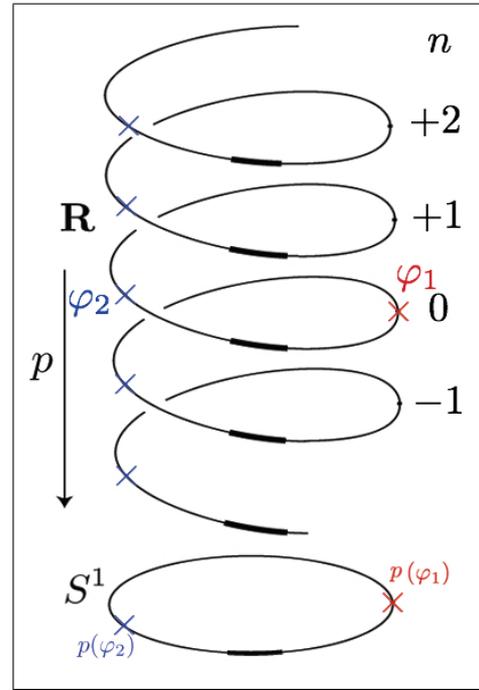


FIGURE 3 – Revêtement universel du cercle

La somme sur tous les chemins dans  $S^1$  s'écrit comme une somme sur toutes les classes d'homotopie dans  $\mathbb{R}$  d'où l'expression du propagateur définie sur  $\mathbb{R}$

$$K(\varphi_2, t_2; \varphi_1, t_1) = \underbrace{\sum_{p(\varphi)} e^{iS[p(\varphi(t))]}_{\text{dans } S^1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\sum_{\varphi(t) \in g_n} e^{iS[\varphi(t)]}_{\text{dans } \mathbb{R}} \quad (2.10)$$

avec  $g_n(t) = \{\forall t \in [t_0, t_1] \quad \varphi(t) \text{ est continue, } \varphi(t_0) = \varphi_0, \varphi(t_1) = \varphi_1 \text{ et } n \text{ est fixé}\}$ . Nous n'avons pas retenu les chemins différentiables puisqu'ils sont de mesure nulle (cf. Intégrale de Wiener). Résultat  $\sum_{\varphi(t) \in g_n} e^{iS[\varphi(t)]}$  est égale au propagateur de la particule libre sur  $\mathbb{R}$  pour  $n$  fixé.

$$K(\varphi_2, t_2; \varphi_1, t_1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n k_n(\varphi_2, t_2; \varphi_1, t_1) \quad \text{avec} \quad |a_n| = 1 \quad (2.11)$$

et  $k_n$  est le propagateur pour une particule libre sur  $\mathbb{R}$ .

Nous avons ajouté un facteur phase  $a_n$  pour chaque classe d'homotopie puisque le propagateur est définie à une phase près, indépendante de  $\varphi(t)$ . Pour déterminer son expression exacte, imaginons que  $\varphi(t_2)$  s'arrête un tour plus tôt, alors le propagateur  $k_n$  devient  $k_{n-1}$ . Comme le propagateur est défini à une phase près notons la  $e^{i\delta}$ , et que les  $k_n$  sont linéairement indépendants, on peut écrire  $a_{n+1} = e^{i\delta} a_n$ ,  $a_0 = 1$  et donc  $a_n = e^{i\delta n}$ . Ce facteur de phase dépend donc du nombre d'enroulement.

Donnons l'expression du propagateur libre  $k_n$ . Pour cela on peut remarquer que n'importe quel  $\varphi(t_1)$  peut être choisi dans  $\mathbb{R}$  (cf. Fig. 3), l'essentiel étant de conserver le nombre d'enroulement dans  $S^1$  entre  $p(\varphi(t_1))$  et  $p(\varphi(t_2))$ . Si  $p$  est l'application telle que  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ . On peut résumer ceci :

$$\begin{cases} \text{Dans } S^1 : & \gamma_{S^1}(p[\varphi_1], p[\varphi_2], n_{S^1}) \\ \text{Dans } \mathbb{R} : & \gamma_{\mathbb{R}}(\varphi_1, \varphi_2 + 2\pi n_{S^1}) \end{cases} \quad (2.12)$$

Nous avons vu, en introduction que le propagateur pour une particule libre s'écrit  $G(x, t; y, t_0) = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(t-t_0)}} e^{-\frac{m}{2i\hbar(t-t_0)}(x-y)^2}$  ce qui devient dans notre cas :

$$k_n(\varphi_2, t_2; \varphi_1, t_1) = \left(\frac{I}{2i\pi T}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{iI}{2T}(\varphi - 2\pi n)^2\right) \quad (2.13)$$

En développant le carré, et en regroupant les termes en  $n^2$  et en  $n$

$$K(\varphi_2, t_2; \varphi_1, t_1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{I}{2i\pi T} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{iI}{2T}\varphi^2\right) \exp\left[in\left(\delta - \frac{2\pi I\varphi}{T}\right)\right] \exp\left(in^2 \frac{2\pi^2 I}{T}\right) \quad (2.14)$$

Procédons au changement de variables suivant pour faire apparaître  $\theta_3(z', t')$

$$z' := \frac{\delta}{2} - \frac{\pi I\varphi}{T} \quad \text{et} \quad t' := \frac{2\pi I}{T} \quad (2.15)$$

Le propagateur s'écrit donc comme une fonction  $\theta_3$

$$\boxed{K(\varphi_2, t_2; \varphi_1, t_1) = \left(\frac{I}{2i\pi T}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{iI}{2T}\varphi^2\right) \theta_3\left(\frac{\delta}{2} - \frac{\pi I\varphi}{T}, \frac{2\pi I}{T}\right)} \quad (2.16)$$

### 2.1.3 Lien entre les deux approches ?

On est en droit de se demander si les expressions (2.9) et (2.16) sont égales. On remarque que la variable jouant le rôle de  $t$  dans les deux fonctions  $\theta_3(z, t)$  sont inverses l'une de l'autre et de signe opposé. Nous sommes donc tenté d'utiliser la relation de modularité. (cf. annexe pour une démonstration possible).

$$\theta_3(z, t) = (-it)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{z^2}{i\pi t}} \theta_3\left(\frac{z}{t}, -\frac{1}{t}\right) \quad (2.17)$$

Posons correctement les choses :

$$G = \frac{1}{2\pi} \exp i \left( \frac{\delta\varphi}{2\pi} - \frac{\delta^2 T}{8I\pi^2} \right) \theta_3(z, t) \quad \text{et} \quad K = \left( \frac{I}{2i\pi T} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{iI}{2T}\varphi^2\right) \theta_3(z', t') \quad (2.18)$$

Il nous faut vérifier avant tout que la variable  $z'$  est obtenue par la transformation suivante  $z' \leftarrow \frac{z}{t}$ , pour pouvoir utiliser (2.17)

$$\frac{z}{t} = \left( \frac{\varphi}{2} - \frac{T\delta}{4\pi I} \right) \left( -\frac{2\pi I}{T} \right) = \frac{\delta}{2} - \frac{\pi I\varphi}{T} =: z' \quad (2.19)$$

Nous pouvons donc utiliser la relation de modularité. Puisque  $t'$  est obtenue par la transformation suivante  $t' \leftarrow -\frac{1}{t}$ . En utilisant (2.8) on trouve  $\frac{z^2}{i\pi t} = -i \left( \frac{T\delta^2}{8\pi^2 I} + \frac{I\varphi^2}{2T} - \frac{\delta\varphi}{2\pi} \right)$

Nous pouvons donc réécrire le propagateur  $G$ , en remplaçant la fonction  $\theta_3$  via la relation (2.17)

$$G = \frac{1}{2\pi} \exp i \left( \frac{\delta\varphi}{2\pi} - \frac{\delta^2 T}{8I\pi^2} \right) \left( \frac{2\pi I}{iT} \right)^{1/2} \exp -i \left( \frac{T\delta^2}{8\pi^2 I} + \frac{I\varphi^2}{2T} - \frac{\delta\varphi}{2\pi} \right) \theta_3(z', t') \quad (2.20)$$

$$= \left( \frac{I}{2\pi iT} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{iI}{2T}\varphi^2\right) \theta_3(z', t') =: K \quad (2.21)$$

Les deux propagateurs, calculés dans des espaces topologiques différents  $(M, M^*)$  sont égaux. Et étonnamment c'est la relation d'invariance modulaire qui permet de mettre en exergue ce point. Encore plus surprenant, d'un côté on somme sur les états de vitesse angulaire proportionnelle à  $m$  et de l'autre on somme sur le nombre de tours  $n$  et au final on obtient le même propagateur.

### 3 L'effet Aharonov-Bohm

#### 3.1 Présentation, première conséquence

Qu'est ce que l'effet Aharonov-Bohm :

On sépare un faisceau d'électrons en deux chemins, qui contournent un solénoïde confiné tel que le champ magnétique qu'il émet est lui aussi confiné, les électrons voyagent donc seulement dans une région à champ  $B$  nul, et pourtant si on projette les électrons sur un écran, on observe la création de figures d'interférence.

Un changement de jauge locale sur  $(V, \mathbf{A})$  peut être compensé par un facteur de phase sur  $\psi$ . En effet l'équation de Schrödinger pour une particule dans un champ s'écrit  $(i\partial_t - ieV)\psi = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - ie\mathbf{A})^2\psi$ .

L'action de  $p_\mu - ieA_\mu$  sur  $e^{if(x,t)}\psi$  pour cette transformation de jauge :  $A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{i}{e}\partial_\mu f(x,t)$  est bien invariante. On peut choisir (cf. eq.(3.1))  $f(x,t) = e \int_{\gamma_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$  et donc mettre  $\psi$  sous la forme

$\psi_j(x) = \psi_j^{A=0}(x) \exp\left(ie \int_{\gamma_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}\right)$ . On retrouve donc ce facteur de phase dans l'expression du propagateur :

$$K = \sum_{\gamma} e^{iS_{A=0}[x]} \times e^{ie \int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}$$

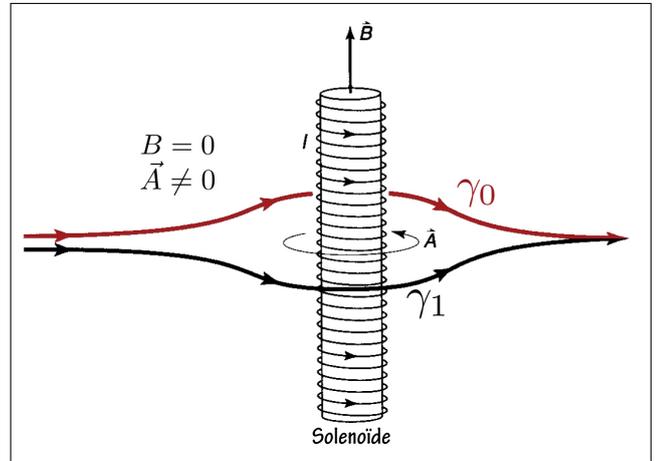


FIGURE 4 – Schéma idéal de l'expérience d'Aharonov-Bohm réalisée en 1959

La phase relative de  $\psi = \psi_0 + \psi_1$  est donc  $\left(\int_{\gamma_0} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} - \int_{\gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}\right) = \Phi_B$ , où  $\Phi_B$  représente le flux de  $\mathbf{B}$  passant par la surface fermée, délimitée par  $\gamma_0 - \gamma_1$ . (En utilisant la formule de Stokes et le fait que  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ).

On peut remarquer que la circulation de  $\mathbf{A}$  est invariante de jauge, puisque toute intégrale du gradient d'une fonction sur un chemin fermé est nul.

Si le flux est un nombre entier de quanta de flux, alors il n'y a pas de changement de phase relatif.

Si l'on fait varier le flux dans le solénoïde, on observe la création de figures d'interférence, bien que les particules ne ressentent pas le champ magnétique. Ceci prouve que la quantité électromagnétique mise en jeu est le potentiel vecteur, ou plus précisément la circulation du potentiel vecteur.

#### 3.2 Lien avec l'homotopie et la topologie

On souhaite déterminer le propagateur  $K$ , en utilisant le fait qu'ici l'espace  $M$  n'est pas simplement connexe, mais son revêtement universel oui. En effet, comme on peut le voir sur la figure 4, on peut assimiler les deux chemins à une boucle fermée, délimitant une surface, à laquelle il faut retirer la surface du solénoïde, que l'on considère comme impénétrable, et par déformation continue, on se ramène au cercle  $S^1$ , problème traité dans la section 2.1.1.

Le lagrangien du système est le suivant :  $L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + e\mathbf{A} \cdot \dot{x}$ . D'où le propagateur suivant

$$K = \sum_{\gamma} e^{iS} = \sum_{\gamma} e^{iS_0} e^{ie \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{A} \cdot \dot{x} d\tau} = \sum_{\gamma} e^{iS_0} e^{ie \int_{x_0}^{x_1} \mathbf{A} \cdot dx} \tag{3.1}$$

Or les électrons traversent une région à champ magnétique nul, que l'on écrit encore  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ . Sur  $M^*$ , simplement connexe, on peut utiliser le lemme de Poincaré (qui consiste en un changement de jauge qui fait disparaître  $\mathbf{A}$ ) et dire qu'il existe une fonction  $\phi$  sur  $M^*$  uniquement telle que  $\mathbf{A} = \nabla\phi$ . Et donc  $\mathbf{A} \cdot \dot{x} = \frac{d\phi}{dt}$ . On peut donc écrire le propagateur sur  $M^*$  :  $K' = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i[\phi(1) - \phi(0)]} K_n$

On choisit  $\mathbf{A} = \frac{\Phi_B}{2\pi} \nabla \theta$ , vecteur potentiel en dehors d'un solénoïde infini. On peut remarquer que cela correspond à une transformation de jauge locale faisant disparaître le potentiel vecteur. On obtient ainsi l'expression du propagateur de l'effet AB

$$K_{AB} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp [i\delta(\theta_f - \theta_i + 2\pi n)] K_n \quad (3.2)$$

Avec le facteur de phase  $\delta = \frac{e\Phi_B}{2\pi}$ , et le propagateur  $K_n$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

(S'il n'y avait pas de solénoïde, l'espace  $M$  serait simplement connexe, et on ne peut pas accepter que le propagateur soit multi-évalué, donc on fixerait  $\delta = 0$ .)

Remarque : quand on s'intéresse au problème de décohérence, on laisse parcourir la somme sur toutes les classes d'homotopie. (ref. [8])

## 4 Conclusion et ouverture

Nous n'avons hélas pas eu le temps d'aborder cet aspect là du problème, mais l'effet Aharonov-Bohm peut s'interpréter en faisant appel à la phase de Berry. Pour plus d'informations nous vous renvoyons vers l'ouvrage de D. J.Griffiths. (ref. [6])

Pour  $M$  un espace, et  $\hat{H}$  un hamiltonien quelconque. Si  $M$  n'est pas simplement connexe, alors  $\hat{H}$  ne décrit plus la dynamique du système, donc la représentation de l'hamiltonien comme un opérateur différentiel ou multiplicatif ne serait plus adéquate, en particulier se pose le problème de l'hermiticité.(ref. [9])

Prenons l'exemple d'une particule libre confinée dans une boîte, l'hamiltonien n'est pas spécifié comme un opérateur tant que les conditions aux limites ne sont pas fixées. Ici les conditions aux limites jouent le rôle de données dynamiques.

Nous avons appliqué la mécanique quantique sur un espace particulier  $SO(2)$ , mais derrière ceci se cache un vaste sujet de recherche, intimement lié à la topologie : la Mécanique Quantique des espaces non simplement connexes.

## 5 Annexe

### 5.1 Formule de Poisson et Invariance modulaire

Démontrons la relation d'invariance modulaire, en utilisant la formule de sommation de Poisson. Démontrons tout d'abord la formule de sommation de Poisson : Soit la fonction périodique

$$g(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) \quad (5.1)$$

avec  $f(x)$  fonction continue de  $x$ .

On voit que  $g(x)=g(x+1)$

Utilisons le principe de Hecke : *Une fonction périodique peut toujours être développée en série de Fourier.*

Notons  $a_k$  les coefficients de Fourier de  $g(x)$  :

$$a_k := \int_0^1 g(x)e^{-2\pi ikx} dx = \int_0^1 \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) \right] e^{-2\pi ikx} dx \quad (5.2)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)e^{-2\pi ikx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi ikx} dx \quad (5.3)$$

On peut donc réécrire  $g(x)$  ainsi

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x')e^{-2\pi ikx'} dx' \quad (5.4)$$

et en posant  $x = 0$  on retrouve la formule de Poisson.

Enonçons les quatres conditions nécessaires pour que (5.4) soit vraie :

1.  $f(x)$  fonction continue pour tout  $x$
2. la série  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$  converge uniformément, pour un intervalle fini de  $x$
3. l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$  converge
4. la série  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_k|$

On peut en utilisant (5.4) déduire la formule de transformation pour  $\theta_3$

Prenons la fonction  $f(x) = e^{i\pi x^2}$ ,  $Im(t) > 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi(x+n)^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(i\pi t x'^2 - 2i\pi ikx')} dx' \quad (5.5)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi t(x' - \frac{k}{t})^2} dx' e^{-\frac{i\pi k^2}{t}} \quad (5.6)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi(x^2 + 2nx + n^2)} = \sqrt{\frac{1}{-it}} e^{-\frac{i\pi k^2}{t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi ikx - i\pi k^2/t} \quad (5.7)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi(2nx + n^2)} = \sqrt{\frac{1}{-it}} e^{-it\pi x^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi ikx - i\pi k^2/t} \quad (5.8)$$

En posant  $x := \frac{z}{\pi t}$  on trouve

$$\theta_3(z, t) = (-it)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{z^2}{i\pi t}} \theta_3\left(\frac{z}{t}, -\frac{1}{t}\right) \quad (5.9)$$

## 5.2 Résolution détaillée : Particule sur un cercle

Ecrivons donc l'équation de Schrödinger appliquée au cercle (on a posé  $\hbar$ )

$$-\frac{1}{2I} \frac{\partial^2 \psi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = i \frac{\partial \psi(\varphi)}{\partial t} \quad (5.10)$$

Cherchons les solutions de (5.10) sous forme d'états stationnaires, c'est à dire en découplant la partie spatiale de la partie temporelle :

$$\psi_m(\varphi, t) = u_m(\varphi)v_m(t) \quad (5.11)$$

$u_m(\varphi)$  (resp.  $v_m(t)$ ) est une fonction continue, dérivable, et non nulle pour tout  $\varphi$  (resp.  $t$ ).

On injecte  $\psi_m$  dans (5.10), et on divise par  $\psi_m$

$$-\frac{1}{2I} \frac{\partial_\varphi^2 u_m(\varphi)}{u_m(\varphi)} = i \frac{\partial_t v_m(t)}{v_m(t)} = E \quad (5.12)$$

Ces deux fonctions ne dépendent pas des mêmes variables, donc elles sont égales à une constante que l'on note  $E$ .

On trouve après intégration que  $v_m(t) = C e^{-iE(t-t_0)}$   $t > t_0$ , on choisit la constante  $C$  égale à l'unité et on identifie  $v_m$  à l'opérateur évolution.

On résout l'équation différentielle du second ordre portant sur  $u_m(\varphi)$

$$u_m(\varphi) = A \exp(i\alpha_0 \varphi) + B \exp(-i\alpha_0 \varphi) \quad \text{avec} \quad \alpha_0 := \sqrt{2IE}$$

En utilisant la condition limite périodique  $u_m(0) = u_m(2\pi)$  on exprime la constante  $B$  en fonction de  $A$  :  $B = A e^{i2\pi\alpha_0}$ . Comme  $\varphi \in [0, 2\pi]$  on a  $u_m(\varphi) = A(e^{i\alpha_0\varphi} + e^{-i\alpha_0\varphi})$ . On souhaite que la particule ne tourne que dans un sens à la fois sur le cercle, donc on ne garde qu'une seule exponentielle.

Déterminons la valeur de la constante  $A \in \mathbb{R}$  par normalisation de la fonction d'onde  $\psi$

$$A^2 \left[ \frac{e^{i2\alpha_0\varphi}}{i2\alpha_0} \right]_0^{2\pi} = 1 \quad A \in \mathbb{R} \Rightarrow 2\pi A^2 \frac{\sin(2\alpha_0 2\pi)}{2\alpha_0 2\pi} = 1$$

En multipliant par  $2\pi$  on fait apparaître un sinus cardinal, on prend la limite à basse énergie et finalement  $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ .

Au final

$$\boxed{\psi(\varphi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\varphi\sqrt{2IE}} e^{-iE(t-t_0)}} \quad (5.13)$$

## Références

- [1] L.S Schulman : *Approximate Topologies*, J.Math.Phy, Vol 12, No.2,1971
- [2] L.S Schulman : *Techniques and Applications of Path Integration*, Dover Publication, 2005
- [3] L.S Schulman : *A path integral for Spin*, Physical Review, Vol 176, No.5, 1968
- [4] L.S Schulman : *Green's function for an electron in a lattice*, Physical Review, Vol 188, No.3, 1969
- [5] R.Bellman : *A brief introduction to Theta functions*, Holt, Rinehart and Winston, 1961
- [6] D. J. Griffiths : *Introduction to Quantum Mechanics*, Prentice Hall, 1995 (page 231)
- [7] G.Morandi and E.Menossi : *Path-integrals in multiply-connected spaces and the Aharonov-Bohm effect*, Eur. J. Phys. 5 49, 1984
- [8] C.Texier, G.Montambaux : *Quantum oscillations in mesoscopic rings and anomalous diffusion* J.Phys. A :Math. Gen Vol.38 3455-3471, 2005
- [9] Wightman : *Theoretical Physics* (Proceedings of the Fifth Eastern Theoretical Physics Conference at Brown University,1966), D.Feldman, Ed. Benjamin Inc. Publishers, 1967
- [10] Baym : *Lectures on Quantum Mechanics*,W.A. Benjamin Inc. Publishers, 1973