Introduction

Henri Poincaré[1] (Nancy, 1854 ; Paris, 1912) a dominé les mathématiques et la physique théorique de son temps ; il fut sans doute le mathématicien le plus adulé de son vivant, et il reste aujourd'hui l'une des figures scientifiques mondiales les plus emblématiques.

Son œuvre, lentement assimilée tout au long du vingtième siècle, est d'une profondeur phénoménale, mais aussi d'une variété extraordinaire[2]. En mathématiques, dont il a enrichi presque toutes les parties existantes, il a créé de toutes pièces de nouvelles branches (théorie des fonctions automorphes, théorie des systèmes dynamiques, topologie algébrique) et il a ouvert la voie à la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes et à la théorie des développements asymptotiques. Il a complètement rénové la mécanique céleste, découvert à cette occasion le chaos déterministe, trouvé de nouvelles formes d'équilibre des astres et proposé un scénario pour la formation des étoiles doubles. En physique, il est l'un des pères de la théorie de la relativité restreinte, dont il envisage les conséquences jusque sur le mouvement des astres. Il a d'ailleurs exercé une influence constante sur le développement spectaculaire de la physique de son temps : il participe à tous les grands débats, fournit la première explication correcte de plusieurs expériences et en suscite même de nouvelles[3].

Son enseignement est resté légendaire. Dans ses leçons de physique mathématique (puis de mécanique céleste) à la Sorbonne, il passe au crible les principales théories existantes, les reformule, les corrige ; il présente et discute les expériences et observations les plus récentes. Ces cours, qui ont presque tous été rédigés[4] puis publiés et largement diffusés, ont beaucoup contribué (soit par eux-mêmes, soit par les idées qu'il concevait à leur occasion et qu'il diffusait parallèlement) à la mise au point et à l'acceptation des nouvelles théories (de Maxwell, Lorentz, Boltzmann,...).

En philosophie des sciences, il a été l'un des acteurs majeurs des grands débats épistémologiques de son temps ; en particulier, son *occasionnalisme pragmatique* (comme l'appelle Gerhard Heinzmann) a nourri les réflexions tout au long du vingtième siècle. De plus, ses ouvrages populaires sur la science, au style extraordinairement limpide, eurent un énorme succès auprès du grand public : *La science et l'hypothèse* a été traduit en au moins 23 langues ; en moins de dix ans, on en vendit en France plus de 16000 exemplaires ; les gens le lisaient dans les jardins publics, dans les cafés.

« Spécialiste universel », c'est lui qui enquête (en tant qu'ingénieur des mines) sur les causes du coup de grisou au puits du Magny (1879) ; c'est vers lui que se tournent non seulement les mathématiciens, mais aussi les physiciens, comme Hertz lorsqu'il n'arrive pas à calculer la vitesse de propagation d'une onde le long d'un fil sinueux, ou Becquerel lorsqu'il se trouve en désaccord avec Alfred Potier sur une question de polarisation rotatoire ; c'est à lui (avec Darboux et Appell) que la justice demande un avis d'expert sur la validité scientifique des arguments d'Alphonse Bertillon dans l'affaire Dreyfus[5] ; c'est

[1] Ce nom provient, semble-t-il, de « poing carré » : cf. *Œuvres* de Poincaré, tome 2, p. ix, note (1).

[2] On trouvera une liste des publications de Poincaré ainsi que de nombreuses références bibliographiques concernant sa vie et son œuvre, sur le site : http ://www.univ-nancy2.fr/poincare/

[3] Voir les tomes 9 et 10 de ses *Œuvres*, et sa correspondance avec les physiciens : celle-ci, rassemblée par André Coret et Scott Walter, est en cours d'édition par les Archives Henri Poincaré : http ://www.univ-nancy2.fr/poincare/chp/prjregionh.html

[4] Par des étudiants ou auditeurs : Jules Blondin, Émile Borel, Jules Drach, René Baire, Albert Quiquet...

[5] Voir l'article *Autour de l'Affaire Dreyfus : Henri Poincaré et l'action politique*, par Laurent Rollet :

à lui que l'Académie des sciences demande de superviser la nouvelle mesure de l'arc méridien de Quito ; il présidera (à trois reprises) le Bureau des Longitudes ; etc.

Ses *Œuvres* scientifiques, en 10 tomes(6) sont réparties comme suit :

Tome 1 : équations différentielles.

Tome 2 : fonctions automorphes.

Tome 3 : intégration algébrique d'équations différentielles ; groupes continus ; intégrales abéliennes ; résidus des intégrales doubles ; équations intégrales.

Tome 4 : fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables ; fonctions abéliennes ; séries trigonométriques.

Tome 5 : arithmétique.

Tome 6 : géométrie algébrique ; topologie algébrique.

Tome 7 : mécanique analytique ; mécanique céleste : masses fluides en rotation ; problème des trois corps ; séries trigonométriques de la mécanique céleste (travaux sur les méthodes de Lindstedt, de Gyldén).

Tome 8 : mécanique céleste et géodésie : fonction perturbatrice et périodes des intégrales doubles ; figure de la Terre ; théories des marées, de la Lune, des planètes ; quadratures mécaniques ; hypothèses cosmogoniques ; rapports sur les opérations géodésiques de l'Équateur.

Tomes 9-10 : physique mathématique ; physique théorique.

Ses traités de physique mathématique et théorique abordent presque tous les thèmes importants de son époque : Théorie du potentiel et mécanique des fluides, théorie mathématique de la lumière, électricité et optique, thermodynamique, théorie de l'élasticité, théorie des tourbillons, oscillations électriques, capillarité, théorie analytique de la chaleur, calcul des probabilités, théorie du potentiel newtonien. (il a fait aussi un cours de théorie cinétique des gaz, qui n'a jamais été rédigé).

Ajoutons ses *Leçons de mécanique céleste* (3 tomes), ses *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*, un *Cours d'astronomie générale* (autographié). Ses *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* ne sont pas le fruit d'un enseignement (c'est une œuvre de recherche), mais elles sont rédigées comme un cours.

Mentionnons enfin ses ouvrages de philosophie des sciences : *La science et l'hypothèse*, *La valeur de la science*, *Science et méthode*, *Dernières pensées* (recueil posthume)

Comme on le verra en comparant ce qui précède avec la table des matières du présent ouvrage, nous n'allons aborder ici qu'*une partie* des thèmes auxquels Poincaré a contribué (il est impossible d'être exhaustif en un seul volume !), en soulignant surtout la modernité de ses idées et certaines de leurs répercussions actuelles. Les textes, écrits par des experts de renommée internationale, sont abordables par tout étudiant de mastère (ou même de licence) en mathématiques ou en physique. Ils comportent plusieurs niveaux de lecture, et les chercheurs (en particulier les doctorants) pourront aussi y trouver des idées utiles pour leur travail quotidien.

Voici un survol des thèmes abordés dans ce livre.

Géométrie hyperbolique, fonctions automorphes, applications à l'arithmétique (chapitres 1, 2 et 3).

Henri Poincaré s'est fait connaître sur la scène mathématique internationale en 1881-1882 par sa théorie des fonctions automorphes. C'est une sorte d'apothéose des mathématiques du 19-ième siècle, où se rencontrent la théorie des groupes, l'analyse complexe, les fonctions elliptiques et modulaires, les équations différentielles, les surfaces de Riemann, la géométrie hyperbolique, les formes quadratiques ; et ce sera un modèle privilégié de ses réflexions sur la philosophie des sciences.

---

http ://www.univ-nancy2.fr/poincare/perso/rollet/lolo.htm

6Gauthier-Villars, 1916-1954. Rééditées par J. Gabay, 1995-2005. Un tome 11 contient quelques articles, un extrait de sa correspondance mathématique, et le *Livre du centenaire* de sa naissance.

La propriété essentielle des fonctions automorphes sur un domaine D de $\mathbb{C}$ est une sorte de périodicité généralisée : $f(\frac{az+b}{cz+d}) = f(z)$ pour un certain groupe discontinu d'homographies $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ appliquant D sur lui-même. On demande aussi que f soit méromorphe sur D.

Après le cas déjà connu des *fonctions elliptiques*, qui sont les fonctions automorphes sur $\mathbb{C}$ pour un groupe de translations selon un réseau $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, le cas le plus utile est celui des fonctions automorphes sur un disque[(7)] : c'est ce que Poincaré appelle les « *fonctions fuchsiennes* ». On n'en connaissait que des cas très particuliers. En interprétant les homographies du disque comme des déplacements du plan non euclidien de Lobatchevski (plan hyperbolique), Poincaré parvient à construire géométriquement *tous* les groupes discontinus d'homographies du disque (« *groupes fuchsiens* ») ; il leur associe des fonctions « *thetafuchsiennes* » (aujourd'hui appelées *formes automorphes*), qu'il obtient sous forme de séries (aujourd'hui connues sous le nom de *séries de Poincaré*) ; et il en déduit *toutes* les fonctions fuchsiennes, comme quotients de telles séries.

Quand D n'est plus un disque (ou un demi-plan), Poincaré parle de fonctions « *kleinéennes* », et les groupes correspondants (« *groupes kleinéens* ») s'obtiennent par la géométrie hyperbolique en dimension 3. Felix Klein, mécontent des adjectifs « *fuchsien* » (il estime que c'est faire trop d'honneur à Fuchs) et « *kleinéen* » (qu'il considère comme un lot de consolation), les remplacera par « *automorphe* » (un terme emprunté à Cayley)[(8)].

Les fonctions automorphes permettent d'obtenir ce célèbre *théorème d'uniformisation* : toute courbe algébrique plane $P(x, y) = 0$, où P est un polynôme irréductible, peut être paramétrée sous la forme $x = f(z)$, $y = g(z)$, où f et g sont des fonctions rationnelles (cas des courbes de genre 0), ou elliptiques (courbes de genre 1), ou fuchsiennes de même groupe (courbes de genre $\geqslant 2$)[(9)]. Un énoncé géométrique équivalent est que toute surface de Riemann compacte et connexe est analytiquement isomorphe à la sphère de Riemann, ou au quotient du plan complexe par un réseau $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, ou au quotient du disque par un groupe fuchsien.

Mais la véritable motivation de Poincaré était l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients algébriques, c'est-à-dire $d^n u/dx^n + a_{n-1}(x, y)d^{(n-1)}u/dx^{(n-1)} + \cdots + a_0(x, y)u = 0$ où les a_i sont des fonctions rationnelles et où x et y sont liés par une relation algébrique $P(x, y) = 0$: on peut construire un paramétrage fuchsien (ou rationnel, ou elliptique, pour les genres 0 et 1) $x = f(z)$, $y = g(z)$ tel que les solutions soient des fonctions méromorphes de z ayant des propriétés de transformation particulières (fonctions « *zetafuchsiennes* ») : une homographie du groupe fuchsien de f et g appliquée à z se traduit par un changement de base dans l'espace des solutions.

Les fonctions et formes automorphes et leurs groupes sont des outils constamment utilisés aujourd'hui dans divers domaines des mathématiques et même en physique (ils interviennent dans le calcul des amplitudes de collision en théorie des cordes), et l'actuelle théorie des représentations automorphes (en pleine effervescence, autour du *programme de Langlands*) en est une lointaine héritière.

Le chapitre 1 présente le *disque de Poincaré*, dont la géométrie hyperbolique est la clé qui a conduit Poincaré à la construction des groupes fuchsiens : il montre à quel point cet objet est naturel, riche et omniprésent dans les mathématiques d'aujourd'hui. Le chapitre 2 raconte la découverte des fonctions et groupes fuchsiens, en suivant et en expliquant le récit que Poincaré lui-même en a fait (on y trouvera la confirmation que les mathématiciens transforment le café en théorèmes, et un témoignage fort intéressant sur le rôle de l'inconscient dans la découverte mathématique), tout en faisant le point sur des aspects actuels. Le chapitre 3 expose l'application des séries de Poincaré à la théorie analytique des nombres, des exemples de progrès qui en ont résulté et de nouveaux espoirs (peut-être un lien avec la question des *nombres premiers jumeaux* !).

Équations différentielles ordinaires, systèmes dynamiques (chapitres 4 et 5).

---

[7] Ou sur un demi-plan : on passe de l'un à l'autre par une homographie.

[8] Poincaré répond à Klein par ces mots de Faust, qui pourraient servir d'épigraphe à sa philosophie : « *Name ist Schall und Rauch* », c'est-à-dire : « *le nom* [n']*est* [que] *bruit et* [écran de] *fumée* ».

[9] Ce théorème, découvert sans preuve rigoureuse dès 1881 par Poincaré et Klein, sera prolongé aux courbes analytiques en 1907, par Poincaré et (indépendamment) Koebe (chacun en donnant une preuve rigoureuse).

La plupart des équations différentielles ne peuvent pas être résolues explicitement. Avant Poincaré, on se contentait donc d'étudier les solutions au voisinage d'un point. Poincaré lui-même a développé cette approche dans sa thèse de doctorat (1879), et il y est revenu plusieurs fois : ces recherches (parallèlement à son étude des séries trigonométriques de la mécanique céleste) le conduisent à poser les bases, en 1885 et 1886, de la théorie classique des développements asymptotiques.

Mais Poincaré comprend qu'on a surtout besoin de connaître l'allure globale des courbes intégrales. Or on n'avait, pour cela, aucun outil. Il va donc les créer (*Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, première partie : 1881). Il considère une équation différentielle $dx/X = dy/Y$, où X, Y sont des polynômes en x et y. Pour tenir compte du comportement à l'infini, il compactifie le plan des (x, y) en une sphère par projection centrale. Deux orbites ne peuvent se rencontrer qu'en un point singulier (un point où X et Y s'annulent) : Poincaré montre que génériquement il n'y en a que trois sortes : les *nœuds*, où se rencontrent une infinité d'orbites ; les *cols*, où se croisent deux orbites ; les *foyers*, où les orbites s'enroulent en spirales. Sous certaines conditions, il existe aussi des *centres*, qui sont entourés par des orbites périodiques ; bien que non génériques, les centres sont importants en mécanique (ils correspondent à une forme de stabilité) : Poincaré étudie donc leurs conditions d'existence (problème du centre, théorème de Poincaré-Lyapounov).

Poincaré montre que pour un champ (X, Y) générique sur la sphère, les nombres de nœuds, cols et foyers sont liés par la relation $N - C + F = 2$, analogue à la relation d'Euler entre les nombres de sommets, d'arêtes et de faces d'un polyèdre convexe. Il constate que l'analogie subsiste sur des surfaces algébriques quelconques (correspondant aux équations différentielles de la forme $P(x, y, y') = 0$ où P est un polynôme). Plus tard, Heinz Hopf (1926) montrera qu'elle subsiste aussi sur les variétés de toutes dimensions (formule de Poincaré-Hopf) — Poincaré ayant entre-temps généralisé la formule d'Euler aux polyèdres (convexes ou non) de dimension quelconque et inventé les outils topologiques nécessaires.

Une idée clé de Poincaré est celle de section transverse (« *arc sans contact* ») : c'est un arc de courbe qui n'est tangent au champ (X, Y) en aucun point ; une orbite qui le rencontre le traverse nécessairement. Poincaré ramène l'étude d'une orbite à celle de ses points d'intersection successifs avec un tel arc (« *théorie des conséquents* »). Cela lui permet de démontrer qu'une orbite sur la sphère ne peut avoir que trois destinées : soit elle aboutit à un point singulier, soit elle se referme sur elle-même (orbite périodique), soit elle s'enroule asymptotiquement autour d'une orbite périodique isolée (que Poincaré appelle un « *cycle limite* ») : c'est le *théorème de Poincaré-Bendixson* (car généralisé plus tard par Bendixson aux champs continûment dérivables). Cela restreint tellement l'ensemble des comportements possibles que Poincaré peut déterminer l'allure des courbes intégrales pour des exemples explicites d'équations. En 1886, il généralise partiellement ses méthodes en dimension supérieure. Le théorème de Poincaré-Bendixson n'y est plus valable (il ne l'était déjà plus sur des surfaces de dimension 2 de genre non nul, comme le tore).

Le chapitre 4 propose un survol introductif de la théorie des cycles limites : application de Poincaré, phase asymptotique, accrochage de fréquences, Poincaré-Bendixson, problème de la majoration du nombre de cycles limites (16-ième problème de Hilbert, théorie de Bautin), problème du centre, lien avec les équations d'Abel, en soulignant les avancées récentes.

Le chapitre 5 présente le théorème du centre de Poincaré-Lyapounov, avec les grandes lignes d'une très belle preuve géométrique (Moussu, 1981) ; pour cela, on y apprend à « voir dans $\mathbb{C}^2$ » par tomographie. On y trouvera aussi le lien avec l'intégrabilité au sens de Liouville, les centres dégénérés, et le cas « hyperbolique ».

Mécanique céleste et problèmes apparentés (chapitres 6-10).

Dès le début de ses recherches sur les courbes définies par des équations différentielles (1881), Poincaré mentionne des applications possibles à la mécanique céleste, en particulier à la question de la stabilité d'un système solaire idéalisé sur une durée indéfinie. Jusque-là on pensait que ce problème serait résolu dès qu'on aurait réussi à exprimer les solutions du problème des N corps par des séries trigonométriques absolument convergentes, car on croyait que la somme d'une telle série serait nécessairement bornée : Poincaré fait remarquer qu'il n'en est rien (1882). En 1883, il prouve, par un argument géométrique très simple, l'existence de familles infinies de solutions périodiques dans le problème des trois corps avec deux masses suffisamment petites. Il estime « *improbable* » que les séries trigonométriques de la mécanique céleste convergent pour les solutions *voisines* des solutions périodiques : il a en tête l'exemple des cycles limites qu'il a découverts dans d'autres systèmes dynamiques (« *Je connais, en effet, des problèmes tout à fait analogues où la convergence n'a pas lieu* » : *Œuvres*, tome 4, p. 590). Mais il ajoute déjà (sans détailler, pour le moment) que même si elles divergeaient, ces séries trigonométriques pourraient fournir d'excellentes approximations en pratique. Dans un article de 1884, on le voit commencer à étudier les solutions voisines des solutions périodiques qu'il a découvertes dans le problème des trois corps. Tout cela le conduit à son mémoire *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, couronné par un prix du roi de Suède, et qui paraît en 1890[10] : Poincaré donne une nouvelle preuve (analytique) de l'existence de solutions périodiques ; la moitié d'entre elles sont linéairement instables et leur étude lui fournit trois résultats importants : (1) il existe des « *solutions asymptotiques* », qui s'enroulent autour des solutions périodiques linéairement instables, dans le futur ou dans le passé : un comportement bien différent des mouvements presque périodiques rencontrés jusque-là en mécanique céleste ; (2) les développements en séries trigonométriques usuels de la mécanique céleste divergent en général (mais il montre aussi le parti qu'on peut en tirer malgré tout, grâce à sa théorie des séries asymptotiques) ; (3) il n'existe pas d'autres intégrales premières holomorphes (quantités constantes sur *chaque* trajectoire du système) que celles déjà connues[11] (s'il en avait existé suffisamment, et si elles avaient vérifié certaines conditions, un théorème de Liouville aurait garanti que le système est intégrable par quadratures après un changement de coordonnées convenable[12]). Poincaré se tourne alors vers les quantités conservées sur des *paquets* de trajectoires : il les appelle des « *invariants intégraux* » ; en langage actuel ce sont des mesures invariantes sur l'espace des phases[13]. (Il redécouvre, après Liouville puis Boltzmann, le théorème d'invariance du volume dans l'espace des phases d'un système hamiltonien.) Et il démontre son *théorème de récurrence*, sous la forme suivante : *s'il existe une mesure invariante positive, et si l'espace des phases est de mesure finie, alors les trajectoires issues d'une région de mesure non nulle dans l'espace des phases repasseront une infinité de fois dans cette région, sauf pour des positions initiales dont la probabilité (la mesure) est nulle.* Poincaré montre que ce théorème s'applique au problème restreint des trois corps. (Les trajectoires asymptotiques dans le futur, mentionnées au point (1) ci-dessus, font évidemment partie des exceptions.) Avec les invariants intégraux et sa théorie des conséquents, Poincaré prouve aussi l'existence d'une infinité de solutions *doublement asymptotiques* « *homoclines* », c'est-à-dire qui s'enroulent dans le passé *et* dans le futur autour d'une *même* solution périodique : leur étude le conduit à la découverte de l'enchevêtrement des variétés stable et instable (formées des solutions asymptotiques respectivement dans le futur et dans le passé, pour une solution périodique donnée) et de ce qu'on appelle aujourd'hui le *chaos déterministe*. Poincaré reprend et développe considérablement ses méthodes et ses résultats dans les trois tomes de ses *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (1892-1899), qui restent aujourd'hui une

---

[10] L'annonce du concours, publiée en 1885, précisait que le prix serait décerné le 21 janvier 1889 (jour du soixantième anniversaire du roi de Suède), que les mémoires devaient être soumis avant le 1er juin 1888 et qu'ils devaient être inédits. Poincaré s'est donc consacré d'abord à d'autres travaux et n'a repris le sujet qu'au dernier moment. La publication a encore été retardée, après la remise du prix, parce que Poincaré, pressé par le temps, n'avait pas rédigé les preuves détaillées, et qu'en le faisant pour répondre aux questions des éditeurs il a découvert et dû rectifier une importante erreur (voir le chapitre 8, dans ce volume).

[11] Poincaré le prouve, dans son mémoire, pour le problème *restreint* des trois corps (mouvement plan, deux corps ayant des orbites circulaires et le troisième une masse négligeable). Dans les *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (tome 1, 1892) il étend le résultat au problème général des trois corps, à condition que deux d'entre eux aient des masses assez petites.

[12] Les résultats de Poincaré n'excluent pas la possibilité de résoudre le problème des N corps par des séries convergentes pour toute valeur du temps (ce qui était d'ailleurs la question initialement posée pour le prix) : une telle solution a été obtenue (sous des conditions génériques) par Karl Sundman en 1909 pour $N = 3$ et par Qiudong Wang en 1991 pour N quelconque.

[13] Espace des états du système (que Gibbs appelait des « *phases* »). Pour un système mécanique à N degrés de liberté, c'est l'espace des coordonnées généralisées et des vitesses généralisées, ou éventuellement une sous-variété obtenue en fixant l'énergie et les autres invariants du mouvement.

importante source d'inspiration.

Poincaré est parti de l'existence de solutions périodiques, « *seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable* » (*Méthodes nouvelles*, t. 1, 1892). Par la suite, il a continué à chercher d'autres familles de telles solutions. Il essaye (1896) une méthode variationnelle, mais elle convient mieux pour les interactions en $1/r^{n+1}$ avec $n > 1$ qu'avec $n = 1$. Dans son dernier article sur la mécanique céleste (1912), il parvient à prouver, grâce à un théorème de géométrie (le théorème de Poincaré-Birkhoff), que les solutions périodiques sont extrêmement abondantes, au moins dans le problème restreint des trois corps. Depuis qu'une généralisation du théorème de Poincaré-Birkhoff en dimension supérieure a été établie par Charles Conley et Eduard Zehnder (1984), cette abondance de solutions périodiques a été retrouvée dans des systèmes dynamiques beaucoup plus généraux et fait l'objet de recherches actives aujourd'hui.

Le chapitre 6 présente une brève histoire des travaux sur les orbites périodiques du problème des trois corps : la théorie de la Lune de Newton (1687), qui introduit le problème restreint des trois corps et obtient une solution périodique en première approximation ; la théorie de Hill (1877), qui complète celle de Newton et fournit une famille de solutions rigoureusement périodiques ; Poincaré, qui prolonge la famille de solutions de Hill, puis les idées clés de ses diverses preuves d'existence de solutions périodiques du problème des trois corps ; enfin des exemples récents d'orbites périodiques du problème des N corps, obtenues par une approche variationnelle.

Le chapitre 7 traite d'un problème analogue à celui de l'existence d'orbites périodiques, à savoir l'existence de géodésiques fermées sur une sphère déformée. On y trouvera les idées essentielles des deux preuves de Poincaré (par une méthode de continuité, puis par une méthode variationnelle) en dimension 2, de celle de Birkhoff (1917) valable en toutes dimensions ; puis le cas des variétés de topologie plus compliquée (par la théorie de Morse) ; la question de l'existence d'une infinité de géodésiques fermées sur une sphère déformée de dimension 2 : Poincaré (1912), Birkhoff (1917), John Franks (1992), Nancy Hingston (1993), Victor Bangert (1993) ; l'analogue pour les sphères en dimension supérieure reste à faire.

Le chapitre 8 présente certains des principaux résultats du mémoire couronné du prix du roi de Suède, explique l'erreur de Poincaré et sa découverte, en corrigeant cette erreur, du « treillis des intersections homoclines » ; il explique aussi dans quelle mesure on a pu, aujourd'hui, « démêler » ce treillis.

Le chapitre 9 discute du théorème de récurrence de Poincaré et de ses limitations, et explique notamment pourquoi une illustration qui en a été proposée dans des articles de vulgarisation n'illustre *en aucun cas* le véritable théorème de Poincaré.

Les résultats obtenus par Poincaré en mécanique céleste servent de guides dans beaucoup d'autres domaines, où l'on peut appliquer les concepts et méthodes qu'il a inventés. Le chapitre 10 donne quelques exemples actuels de ce genre de transfert d'idées en mécanique des fluides[14], pour étudier différents cas d'advection chaotique et de comportement diffusif aux temps longs.

Parmi les nombreuses autres contributions de Poincaré à la mécanique céleste, non évoquées dans ce recueil, mentionnons son étude des formes d'équilibre des fluides en rotation (1885). Aux formes déjà connues (ellipsoïdes, anneaux) Poincaré en ajoute de nouvelles (en forme de poire). Il établit son théorème de « l'échange des stabilités » : sous certaines conditions, lorsque deux courbes de solutions se croisent, les solutions d'une des branches perdent la stabilité tandis que celles de l'autre l'acquièrent (il appelle donc « *forme de bifurcation* » la solution au point de croisement). Poincaré déduit de là un scénario possible pour la formation de certains systèmes d'astres doubles (qui précise notablement une hypothèse de George Darwin, 1878) : un ellipsoïde, initialement presque sphérique, s'aplatit en se refroidissant, tout en restant de révolution ; puis il atteint le point où la stabilité passe aux ellipsoïdes d'axes inégaux ; puis il bifurque vers une forme de poire, se creuse encore et finit par se partager en

[14] C'est un juste retour des choses, puisque Poincaré s'était inspiré de la mécanique des fluides pour étudier les « invariants intégraux ».

deux corps distincts[15]. Poincaré applique aussi son théorème d'échange des stabilités à des familles d'orbites périodiques.

Fonctions de plusieurs variables complexes (chapitre 11).

La première incursion de Poincaré dans la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes (1883) est sa preuve qu'une fonction *méromorphe* sur $\mathbb{C}^2$ est le quotient de deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^2$. (Weierstrass avait prouvé le résultat analogue pour les fonctions d'une seule variable mais n'avait pu l'établir pour les fonctions de deux variables.)[16] En reprenant sa méthode, il obtiendra en 1898 une preuve entièrement nouvelle d'un théorème de Riemann et Weierstrass, selon lequel une fonction méromorphe de p variables, $2p$ fois périodique, est un quotient de « fonctions theta ».

En 1907, il s'intéresse au problème d'appliquer une hypersurface (tridimensionnelle) analytique réelle de $\mathbb{C}^2$ sur une autre par un isomorphisme analytique, soit localement (il y a un isomorphisme au *voisinage* de chaque point de la surface), soit globalement : il découvre que c'est généralement impossible, même localement (alors que pour des courbes dans $\mathbb{C}$ c'est toujours possible localement), et que, sous certaines conditions, dès que l'application est possible localement elle l'est globalement. Ces résultats sont à l'origine de la théorie des structures CR (pour « Cauchy-Riemann »), qu'on a vues intervenir par la suite dans un grand nombre de problèmes de mathématiques et de physique (y compris dans la théorie de la relativité générale).

Mais la contribution la plus célèbre de Poincaré à la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes est sa théorie des résidus (1887). Depuis l'époque de Cauchy, on voulait étendre le théorème des résidus aux fonctions de plusieurs variables, mais après plus de quarante ans d'efforts on n'avait fait presque aucun progrès. C'est Poincaré qui a débloqué la situation. Au passage, Poincaré obtient les conditions pour qu'une forme différentielle de degré arbitraire soit fermée (c'est-à-dire que son intégrale sur un bord soit toujours nulle) ; son raisonnement conduit à la « formule de Stokes » généralisée : elle est implicite dans son mémoire de 1887 ; elle sera explicitée d'abord par Volterra en 1889 (inspiré par le mémoire de Poincaré), puis (sous une forme encore plus simple) par Poincaré lui-même en 1899, dans ses *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (à propos des « invariants intégraux ») ; Poincaré utilisera aussi un cas particulier de cette formule dans ses travaux de topologie (pour des calculs d'homologie).

Le chapitre 11 présente le résidu de Poincaré, sous le point de vue cohomologique (dû essentiellement à Poincaré et mis en œuvre par Jean Leray), puis sous le point de vue des courants (plus récent), et son application dans les mathématiques contemporaines ; on voit aussi comment il renouvelle un problème déjà considéré par Poincaré en 1885, à savoir une généralisation d'un célèbre théorème d'Abel (*la « trace » d'une forme rationnelle est rationnelle*) et sa réciproque.

Topologie algébrique et conjecture de Poincaré (chapitre 12).

Poincaré rencontrait dans presque toutes ses recherches des problèmes de topologie (des problèmes d'*analysis situs*, comme on disait alors). Il écrit : « *Une méthode qui nous ferait connaître les relations qualitatives dans l'espace à plus de trois dimensions pourrait, dans une certaine mesure, rendre des services analogues à ceux que rendent les figures. Cette méthode ne peut être que l'*Analysis situs *à plus de trois dimensions.* [...] *J'avais besoin des données de cette Science pour poursuivre mes études sur les courbes définies par les équations différentielles et pour les étendre aux équations différentielles d'ordre supérieur et, en particulier, à celles du problème des trois corps. J'en avais besoin pour l'étude des fonctions non uniformes de deux variables. J'en avais besoin pour l'étude des périodes des intégrales multiples et pour l'application de cette étude au développement de la fonction perturbatrice. Enfin, j'entrevoyais dans l'*Analysis situs *un moyen d'aborder un problème important de la théorie des groupes, la recherche des groupes discrets ou des groupes finis contenus dans un groupe continu donné.* »[17] Mais cette « Science » était balbutiante : on voyait (ou croyait voir) des propriétés, on ne prouvait à peu près

[15] Pour une discussion moderne du scénario de Poincaré, voir par exemple http ://citebase.eprints.org/cgi-bin/citations ?id=oai :arXiv.org :astro-ph/9505008

[16] Et il faudra attendre la thèse de Pierre Cousin (1894) pour étendre le résultat aux fonctions de n variables.

[17] Poincaré : *Œuvres*, t. 6, p. 183.

rien, faute d'outils fiables. Poincaré va créer une théorie puissante (la topologie algébrique), en deux temps. Dans un premier mémoire (*Analysis situs*, 1895), il donne une définition des variétés (en fait, des sous-variétés analytiques de $\mathbb{R}^n$) au moyen de cartes, fixe la définition précise de l'intégrale d'une forme différentielle sur une variété, introduit la notion d'homologie et étudie son lien avec les intégrales de formes différentielles fermées (en reprenant les idées de son mémoire de 1887 sur les résidus des intégrales doubles) ; il considère les dimensions des espaces d'homologie, qu'il appelle les « *nombres de Betti* » (parce qu'il croit qu'elles coïncident avec des nombres déjà introduits par Enrico Betti) et donne une importante formule de symétrie sur les « nombres de Betti » des variétés *fermées*[(18)] orientables (*dualité de Poincaré*). Il étudie les décompositions de variétés en pièces homéomorphes à des polyèdres, en se laissant guider par l'analogie avec sa théorie (évoquée ci-dessus[(19)]) des groupes fuchsiens (où le plan hyperbolique était décomposé en polygones, images les uns des autres par le groupe) et kleinéens (où l'espace hyperbolique de dimension 3 était décomposé en polyèdres). Cela le conduit à définir le *groupe fondamental* d'une variété. Il observe que deux variétés homéomorphes ont le même groupe fondamental (à isomorphisme près). Il constate que dans l'uniformisation d'une surface de Riemann (voir ci-dessus) le groupe fuchsien n'est autre que le groupe fondamental de la surface ; il en déduit que deux variétés *fermées* de dimension 2 qui ont les mêmes « nombres de Betti » sont homéomorphes. Mais il constate que ce n'est plus vrai pour des variétés *fermées* de dimension 3 : il donne des exemples de telles variétés qui ont les mêmes « nombres de Betti » que la sphère S^3, mais un groupe fondamental différent. Enfin, il généralise la formule d'Euler pour les polyèdres en dimension quelconque, convexes ou non : la somme alternée des faces de différentes dimensions est constante, et cette constante est la somme alternée des « nombres de Betti ».

L'un des exemples considérés par Poincaré dans son mémoire montre que ses « nombres de Betti » ne sont pas toujours égaux à ceux de Betti, et que la formule de dualité n'est pas valable pour ces derniers ; mais Poincaré ne s'en s'apercevra que lorsque Heegaard, utilisant la définition de Betti, trouvera un (autre) contre-exemple à la formule de dualité (1898). Heegaard signale d'ailleurs une affirmation douteuse dans la preuve de la formule de dualité. Poincaré décide donc de revenir sur la question. Dans un premier *complément à l'Analysis situs* (1899), il redéfinit l'homologie au moyen de triangulations (homologie simpliciale), fondant ainsi la topologie algébrique sur des bases solides, et il donne une nouvelle démonstration de la formule de dualité (il comble aussi le trou de sa première démonstration). Dans un deuxième *complément* (1900), il adjoint à ses « nombres de Betti » de nouveaux invariants topologiques, les *coefficients de torsion*. On se souvient que dans son mémoire de 1895, Poincaré avait constaté que deux variétés fermées de dimension 3 peuvent avoir les mêmes nombres de Betti sans être homéomorphes : il était donc naturel de se demander si deux variétés fermées de dimension 3 ayant les mêmes nombres de Betti *et* les mêmes coefficients de torsion sont homéomorphes. Dans son cinquième *complément* (1904), Poincaré montre qu'il n'en est rien : il construit un exemple de variété de dimension 3 ayant mêmes nombres de Betti et mêmes coefficients de torsion que la sphère S^3 mais un groupe fondamental différent[(20)]. Poincaré conclut qu'il resterait une question à traiter : existe-t-il une variété de dimension 3 dont le groupe fondamental soit trivial (c'est-à-dire que toutes les courbes fermées dans cette variété peuvent être continûment contractées en un point), et qui ne soit cependant pas homéomorphe à S^3 ? L'hypothèse qu'il n'en existe pas est devenue célèbre sous le nom de *conjecture de Poincaré*. Grigori Perelman (2003) a proposé une preuve de cette conjecture, et même plus généralement de la *conjecture de géométrisation de Thurston*, selon laquelle huit géométries homogènes suffisent pour construire toutes les variétés de dimension 3 (la seule des huit dont le groupe fondamental soit trivial étant la sphère)[(21)] : la stratégie, élaborée par Richard Hamilton en 1982, consiste à laisser évoluer la métrique selon une équation différentielle liée à la courbure et analogue à

[18] Au sens où l'on parle de *surfaces fermées*. Plus précisément, il s'agit de variétés connexes, sans bord et compactes.

[19] Voir le paragraphe sur la géométrie hyperbolique et les fonctions automorphes.

[20] Cet *espace dodécaédral* de Poincaré a été envisagé récemment (2003) comme modèle cosmologique.

[21] La vérification de la preuve de Perelman est toujours en cours, mais les idées qu'il a introduites à cette occasion lui ont d'ores et déjà valu la médaille Fields (qu'il a d'ailleurs refusée) en août 2006.

l'équation de propagation de la chaleur, ce qui tend à homogénéiser la métrique, et il s'agit de montrer qu'on ne peut aboutir qu'aux huit géométries de Thurston ; mais la courbure peut exploser en certains endroits, et Perelman montre comment on peut réparer par chirurgie et relancer le processus, jusqu'à la convergence.

Le chapitre 12 expose les grandes lignes de la stratégie de Hamilton et de la preuve de Perelman.

Équations aux dérivées partielles de la physique mathématique (chapitre 13).

En 1886, Poincaré devient titulaire de la chaire de *Physique mathématique et calcul des probabilités* à la Sorbonne. Parallèlement, il commence des recherches sur les aspects mathématiques de la théorie du potentiel électrique et de la théorie analytique de la chaleur (1887).

Le chapitre 13 expose plusieurs contributions de Poincaré à la théorie mathématique des équations aux dérivées partielles de la physique, notamment sa solution du *problème de Dirichlet* (existence de fonctions harmoniques dans un domaine donné avec des conditions au bord prescrites) par la *méthode de balayage* (1887, 1890) ; l'inégalité de Poincaré (1890, 1894) ; la première preuve rigoureuse de l'existence de toute la suite des valeurs propres du laplacien sur un domaine borné quelconque de $\mathbb{R}^3$ (avec des fonctions propres nulles au bord), qu'il obtient comme zéros d'une certaine fonction analytique (1894) ; enfin, la solution générale de l'équation des télégraphistes (1893).

Probabilités (chapitres 14 et 15).

Quand, dans son mémoire *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, Poincaré avait démontré son théorème de récurrence (voir ci-dessus), il avait précisé que les conditions initiales des trajectoires non récurrentes étaient de *probabilité* nulle. « *Ce mot n'a par lui-même aucun sens : j'en donne dans mon Mémoire une définition précise* », insiste-t-il dans un compte-rendu de son mémoire en 1891. De fait, il semble que ce soit cette question, et plus précisément lors de la révision de son mémoire (voir le chapitre 3 de la thèse d'Anne Robadey[(22)]), qui ait amené Poincaré à réfléchir à la notion de probabilité et à forger une approche personnelle de la question. Il constate notamment que n'importe quel « invariant intégral » (mesure invariante) positif et fini sur tout l'espace des phases fournit une notion valable de probabilité.

C'est en 1894 que Poincaré choisit d'enseigner les probabilités. Son cours sera publié en 1896 ; une édition remaniée et augmentée paraîtra en 1912. C'est de ce cours de Poincaré que nous viennent les expressions « *fonction caractéristique* » (au sens probabiliste) et « *loi normale* ». Darboux, dans son *Éloge historique d'Henri Poincaré*[(23)] (1913) écrit : « *Ce traité de Poincaré ne me paraît pas avoir été estimé à toute sa valeur. J'en suis assuré, il figurera dignement à côté des chefs-d'œuvre de Laplace et de Bertrand. J'y signalerai particulièrement une introduction très fine sur les lois et la définition du hasard, des chapitres sur la probabilité du continu, où Poincaré éclaircit un paradoxe célèbre proposé par Bertrand ; ceux aussi qu'il a consacrés à la théorie des erreurs et à la loi célèbre de Gauss. Bertrand s'était borné à critiquer et à démolir. Poincaré a commencé à reconstruire.* »

Le chapitre 14 expose ces apports du cours de Poincaré et d'autres aspects originaux, notamment les relations qu'il introduit entre la théorie des probabilités et la théorie des groupes.

Le chapitre 15 traite plus particulièrement des *probabilités géométriques* : partant du problème de l'aiguille de Buffon, il présente un théorème de Poincaré et en donne deux applications relativement récentes : la première montre (suivant Edelman et Kostlan, 1995) comment ce théorème permet de retrouver très simplement une estimation (due à Mark Kac, 1943) du nombre moyen de zéros réels d'un polynôme aléatoire réel de grand degré ; la seconde, due à Michel Mendès France (1987), est une illustration du lien subtil qui existe entre « désordre » et « confusion ».

Les groupes continus (groupes de Lie) et leurs algèbres (chapitre 16).

En 1899, date de la mort de Sophus Lie, Poincaré publie un article sur les « *groupes continus* » (groupes de Lie) et leurs algèbres : il plonge toute algèbre de Lie réelle de dimension finie dans une

[22] *Différentes modalités de travail sur le général dans les recherches de Poincaré sur les systèmes dynamiques* (Paris, 3 janvier 2006), disponible sur : http ://halshs.ccsd.cnrs.fr/view_by_stamp.php ?label=CRHST

[23] *Œuvres* d'Henri Poincaré, t. 2, p. xxxiv.

algèbre de polynômes symboliques dans laquelle le crochet de Lie prend la forme d'un simple crochet de commutation ($[A, B] = AB - BA$), et qui n'est autre que ce qu'on appelle aujourd'hui l'*algèbre enveloppante* de l'algèbre de Lie ; son existence constitue le *théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt*. Poincaré en déduit une preuve conceptuellement simple du troisième théorème fondamental de Lie (version locale), selon lequel toute algèbre de Lie réelle de dimension finie est isomorphe à celle d'un (germe de) groupe de Lie.

Le chapitre 16 relate le contexte historique de cette contribution de Poincaré à la théorie des groupes de Lie, présente la preuve de Poincaré, certains développements apparus durant le 20-ième siècle, et enfin un analogue récent (2003) du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt dans le cadre des algèbres de Leibniz, qui sont une généralisation des algèbres de Lie.

Le principe de relativité et le groupe de Poincaré (chapitre 17).

La découverte de la relativité du temps est comme un surprenant puzzle. En 1886 Poincaré s'intéresse aux travaux philosophiques d'Auguste Calinon sur les fondements de la mécanique, et en particulier sur la notion quantitative de temps. Poincaré souligne aussi un problème qualitatif : celui de la simultanéité. En 1893, il entre au Bureau des Longitudes ; mesurer une longitude revient à déterminer l'heure de Paris (ou de Greenwich) pour la comparer à l'heure locale ; pour cela, on utilisait alors le télégraphe par câbles sous-marins[24]. Le rapprochement le conduit, en 1898, à un article philosophique intitulé *La mesure du temps*, dans lequel Poincaré explique que la notion de simultanéité pour des phénomènes distants suppose le choix d'une procédure de synchronisation par échange de signaux. En 1900, il s'aperçoit que la variable de temps formelle qui intervient dans les formules de transformation de Lorentz a une interprétation physique très simple : c'est le temps que l'on mesure dans le référentiel donné si l'on y synchronise les montres par échange de signaux à la vitesse de la lumière dans le vide. Par ailleurs, dès 1895, Poincaré avait été conduit (principalement par l'analyse de l'expérience de Michelson et Morley) à étendre le principe de relativité à l'électromagnétisme et même à toute la physique. En 1904-1905, il obtient des résultats qui seront consignés dans son article intitulé *Sur la dynamique de l'électron* : les transformations de Lorentz forment un « groupe continu » (un groupe de Lie), dont il donne l'algèbre ; il donne la formule d'addition des vitesses, les transformations du champ électromagnétique et des sources, l'invariance de $\vec{E}^2 - \vec{B}^2$, $\vec{E} \cdot \vec{B}$ et $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$; l'idée qu'en remplaçant le temps par une variable imaginaire les transformations de Lorentz s'interprètent comme des rotations dans un espace à quatre dimensions ; l'idée que le principe de relativité, étant valable pour toute la physique, impose une modification de la loi de la gravitation, tout en limitant les choix ; il donne l'ordre de grandeur de ces corrections relativistes (v^2/c^2), l'application possible à l'avance du périhélie de Mercure (mais ces corrections de relativité restreinte n'expliquent qu'une partie de l'avance) ; l'idée d'ondes de gravitation, en citant comme conséquence éventuellement observable l'accélération des mouvements orbitaux des astres[25].

Le chapitre 17 présente certaines de ces contributions de Poincaré. Il donne une preuve (due à Jean-Marc Lévy-Leblond) des formules de transformation de Lorentz, sous des hypothèses très simples et générales : l'espace est homogène et isotrope, les transformations forment un groupe (condition de Poincaré), il existe des chaînes causales. Puis il explique le rôle du groupe de Poincaré (groupe des déplacements de l'espace-temps) en physique quantique (théorème de Wigner) et mentionne le fait que c'est essentiellement le seul groupe de symétrie possible pour la théorie quantique des champs (théorèmes de Coleman-Mandula et de Haag-Lopuszański-Sohnius). Enfin, il expose un argument expliquant pourquoi il est naturel que l'électromagnétisme galiléen n'ait pas été découvert avant celui de

[24]Einstein sera également confronté à des problèmes pratiques de synchronisation : entré en 1902 au Bureau de brevets de Berne, il devra y expertiser des demandes de brevets concernant la synchronisation électrique des horloges des villes. Voir le livre de Peter Galison : *Einstein's clocks, Poincaré's maps*, 2003 ; trad. fr. : *L'Empire du temps : les horloges d'Einstein et les cartes de Poincaré*, Robert Laffont (Paris), 2005.

[25]C'est effectivement par ce moyen (accélération des mouvements orbitaux dans un pulsar binaire) qu'on a vérifié l'existence des ondes de gravitation, ce qui a valu le prix Nobel de physique à Joseph H. Taylor et Russell A. Hulse en 1993. Mais les calculs corrects relèvent de la théorie de la relativité générale d'Einstein.

la relativité restreinte.

Physique appliquée (chapitre 18).

Poincaré s'est intéressé à de nombreuses questions de physique appliquée : télégraphie (il résout l'équation des télégraphistes en 1893, et il enseigne de 1904 à 1910 à l'École professionnelle des Postes et Télégraphes), électrotechnique, propagation des ondes... Pour expliquer les phénomènes observés dans l'expérience de Gouy sur la polarisation par diffraction, il fait le premier calcul asymptotique correct de la diffraction par un écran en forme de biseau (1892, 1896).

En 1909, il calcule la diffraction d'une onde hertzienne par la Terre : il obtient que l'amplitude décroît exponentiellement dans la zone d'ombre, ce qui a conforté l'hypothèse que les ondes transmises par Marconi d'un bout à l'autre de l'Atlantique n'étaient pas transmises par diffraction mais par réflexions sur l'océan et l'ionosphère. Le calcul de Poincaré inaugurait un nouveau champ de recherche, celui des effets exponentiellement petits dans les solutions d'équations différentielles.

Le chapitre 18 expose le calcul de Poincaré, puis la méthode ultérieure de Fock ; il présente ensuite la méthode de Kruskal et Segur (1985) qui (contrairement à celles de Poincaré et de Fock) ne nécessite pas que l'on obtienne d'abord une expression explicite des solutions, et il illustre cette méthode par un exemple (l'équation des ondes de Korteweg-de Vries perturbée par un petit terme d'ordre 5).

Philosophie des sciences (chapitre 19).

Poincaré semble avoir toujours été intéressé par la philosophie des sciences. L'intervention inattendue de la géométrie hyperbolique dans ses recherches sur les fonctions automorphes (1880) ne pouvait que renforcer son intérêt pour les fondements de la géométrie : des questions de géométrie euclidienne concernant des systèmes de triangles curvilignes s'interprétaient simplement en termes de géométrie hyperbolique et cette interprétation permettait d'en trouver la solution. En pareil cas, on a tout intérêt à se placer au point de vue de la géométrie hyperbolique, non qu'elle soit plus « vraie » que la géométrie euclidienne, mais parce qu'elle est ici plus *commode* (« *on ne peut pas plus dire que la géométrie euclidienne est vraie et la géométrie de Lobatchevski fausse, qu'on ne pourrait dire que les coordonnées cartésiennes sont vraies et les coordonnées polaires fausses* »[(26)]). À l'inverse, quand on étudie les mouvements des corps solides (à commencer par les mouvements de nos propres membres), la description la plus commode utilise le langage de la géométrie euclidienne, car « *l'expérience nous apprend que les divers mouvements possibles de ces corps sont liés à fort peu près par les mêmes relations* » que les déplacements euclidiens (Poincaré, *Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie*, 1887) ; « *nous pourrions énoncer les faits mécaniques en les rapportant à un espace non euclidien qui serait un repère moins commode, mais tout aussi légitime que notre espace ordinaire ; l'énoncé deviendrait ainsi beaucoup plus compliqué ; mais il resterait possible* » (*La science et l'hypothèse*, chap. VI). Ainsi, les hypothèses fondamentales de la géométrie ne sont ni des cadres inévitables de la pensée, ni des faits expérimentaux : ce sont des choix commodes, compte tenu des observations.

L'époque était aussi à l'examen critique des fondements de la mécanique : la *Mechanik* de Mach paraît en 1883 ; l'*Étude critique sur la mécanique* de Calinon en 1885... Poincaré étend à la mécanique les idées qu'il a déjà exprimées sur les hypothèses fondamentales de la géométrie. (Il publiera en 1897 et 1901 deux articles sur les fondements de la mécanique, dont il reprendra l'essentiel dans *La science et l'hypothèse* en 1902.) Puis, de la mécanique, il passe à toute la physique. Dans son enseignement de physique, il dresse, à chaque fois, un « *tableau d'ensemble* » de toutes les théories disponibles ; car « *il serait dangereux de se borner à l'une d'elles ; on risquerait ainsi d'éprouver à son endroit une confiance aveugle et par conséquent trompeuse. Il faut donc les étudier toutes et c'est leur comparaison qui peut surtout être instructive.* »[(27)] Cela n'exclut pas, bien évidemment, d'élaguer : on ne doit conserver que les hypothèses « *fécondes* ».

Poincaré étend aussi sa réflexion à l'analyse mathématique, à l'arithmétique, à la logique. À partir de 1893, date de la création de la *Revue de métaphysique et de morale*, Poincaré y publiera un ou

[26]Poincaré, *Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie*, 1887.

[27]Préface de la *Théorie mathématique de la lumière*, cours de l'année 1887-1888, publié en 1889.

deux articles presque tous les ans jusqu'à la fin de sa vie. L'essentiel de ces articles (et d'autres publiés ailleurs) formera la matière de ses célèbres recueils de philosophie des sciences (déjà mentionnés plus haut), publiés à partir de 1902.

Le chapitre 19 propose un survol de la philosophie de Poincaré, que Gerhard Heinzmann appelle très justement *occasionnalisme pragmatique*, puisque selon ce point de vue, l'expérience n'est pour notre esprit qu'une occasion d'exercer ses facultés et d'en prendre conscience, et parce que son critère est pragmatique (on choisit les hypothèses qui permettent de travailler efficacement). Il explique et illustre cette philosophie successivement en arithmétique, en géométrie, en physique. Il présente aussi les vues de Poincaré en logique.

Remerciements.

Un grand merci aux auteurs, bien sûr, pour ces textes d'une qualité exceptionnelle, ainsi qu'à Matthieu Gendulphe, Pierre de la Harpe, Cyril Mauvillain, et bien sûr aux Éditions Belin.

Éric Charpentier, Étienne Ghys, Annick Lesne.