01. Kardinalzahlen

Definition. Zwei Mengen A und B heißen **gleichmächtig**, $|A| = |B|$, wenn eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ existiert.

Offenbar ist die Gleichmächtigkeit eine Äquivalenzrelation (auf der Klasse aller Mengen).

Jeder solchen Äquivalenzklasse kann ein Symbol zugeordnet werden, die sogenannte **Kardinalzahl**, welche die Mächtigkeit der Mengen in dieser Äquivalenzklasse beschreibt, z.B. $\alpha = |A|$.

Die Mächtigkeit einer Menge ist intuitiv die "Anzahl der Elemente der Menge". Ist A eine endliche Menge mit n Elementen, dann ist die Kardinalzahl von A gleich n .

In der Literatur haben sich die Symbole $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ und $\mathrm{c} = |\mathbb{R}|$ etabliert.

Gilt $|A| = \aleph_0$, dann heißt die Menge A **abzählbar unendlich**. Unendliche Mengen, die nicht abzählbar unendlich sind, heißen **überabzählbar**.

Für Kardinalzahlen kann eine **Ordnungsrelation** erklärt werden:
Seien $\alpha = |A|$ und $\beta = |B|$. Dann gilt $\alpha \leq \beta$ wenn es eine injektive Abbildung $f : A \to B$ gibt.

Satz. (Schröder, Bernstein)
$\alpha \leq \beta$ und $\beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$

Zusätzlich gilt, daß " $\leq$ " eine lineare Ordnung ist (sogar eine Wohlordnung!).

Eine **wohlgeordnete Menge** ist eine linear geordnete Menge, wo jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt. So ist etwa $\mathbb{N}$ mit der üblichen Ordnung wohlgeordnet. $\mathbb{R}$ mit der üblichen Ordnung ist hingegen nicht wohlgeordnet.

Der **Wohlordnungsatz** (der äquivalent zum Lemma von Zorn ist) besagt, daß jede (nichtleere) Menge wohlgeordnet werden kann.

Die Aussage des Wohlordnungssatzes kann aus den üblichen Axiomen der Mengenlehre weder bewiesen noch widerlegt werden, und wird zumeist zu den üblichen Axiomen hinzugenommen.

Für Kardinalzahlen kann nun eine **"Arithmetik"** definiert werden:
Seien $\alpha = |A|$ und $\beta = |B|$ und $A \cap B = \emptyset$.

(i) $\alpha + \beta = |A \cup B|$

(ii) $\alpha \cdot \beta = |A \times B|$

(iii) $\alpha^\beta = |\{f : B \to A\}|$

Satz. Ist $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$ und eine der beiden Mengen unendlich, dann gilt:
$\alpha + \beta = \alpha \cdot \beta = \max\{\alpha, \beta\}$

Satz. Ist $\alpha = |X|$, dann ist die Mächtigkeit der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von X gleich $|\mathcal{P}(X)| = 2^\alpha$.

Beweis. Zwischen den Teilmengen von X und den charakteristischen Funktionen auf X gibt es eine bijektive Entsprechung, $A \mapsto \chi_A$, wobei $\chi_A : X \to \{0,1\}$ mit $\chi_A(x) = 1$ wenn $x \in A$, und $\chi_A(x) = 0$ wenn $x \notin A$. $\square$

Satz. (Cantor)

Ist $\alpha = |X|$, dann ist $\alpha < |\mathcal{P}(X)|$.

Beweis. Die Abbildung $f : X \to \mathcal{P}(X)$ mit $f(x) = \{x\}$ ist offenbar injektiv, also ist $\alpha \leq |\mathcal{P}(X)|$.

Annahme: es gibt eine bijektive Abbildung $g : X \to \mathcal{P}(X)$.

Zu $A = \{x \in X \ : \ x \notin g(x)\}$ gibt es dann ein $y \in X$ mit $g(y) = A$. Daraus folgt aber $y \in A \Leftrightarrow y \notin A$, ein Widerspruch! $\square$

Des weiteren seien folgende wichtige Aussagen angeführt:

- $2^{\aleph_0} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathrm{c}$

- $\forall\, i \in I$ sei $|S_i| \leq \alpha$ und sei $|I| \leq \beta$.

  Dann gilt: $|\bigcup\{S_i \ : \ i \in I\}| \leq \alpha \cdot \beta$

- Die Kontinuumshypothese (CH) besagt, daß c der unmittelbare Nachfolger von $\aleph_0$ ist, d.h. dazwischen gibt es keine weiteren Kardinalzahlen.

  K. Gödel zeigte, daß die Kontinuumshypothese konsistent mit den üblichen Axiomen der Mengenlehre ist. Später bewies P. Cohen, daß die Negation der Kontinuumshypothese ebenfalls konsistent mit den Axiomen der Mengenlehre ist. Damit ist (CH) unabhängig von den Axiomen der Mengenlehre.