

Modèles de dimères sur le tore : Asymptotiques de fonctions de partitions et enroulements

Cédric Boutillier

LPMA – UPMC
DMA – École Normale Supérieure

Journées MAS en l'honneur de Jacques Neveu

Modèles de dimères

- ▶ G graphe biparti sur une surface. Poids sur les arêtes (w_e)
- ▶ **configuration de dimères** \mathcal{C} : couplage parfait de G .
- ▶ **modèle de dimères** : proba sur les config. de dimères

$$\mathbb{P}[\mathcal{C}] \propto \prod_{e \in \mathcal{C}} w_e.$$

- ▶ dualité : conf. de dimères \leftrightarrow pavage de la surface.

Modèles de dimères

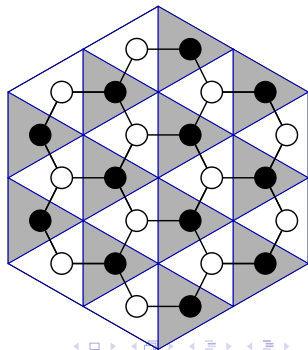
- ▶ G graphe biparti sur une surface. Poids sur les arêtes (w_e)
- ▶ **configuration de dimères** \mathcal{C} : couplage parfait de G .
- ▶ **modèle de dimères** : proba sur les config. de dimères

$$\mathbb{P}[\mathcal{C}] \propto \prod_{e \in \mathcal{C}} w_e.$$

- ▶ dualité : conf. de dimères \leftrightarrow pavage de la surface.

exemple :

G graphe hexagonal
pavages par losanges.



Modèles de dimères

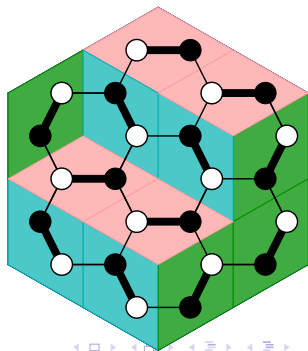
- ▶ G graphe biparti sur une surface. Poids sur les arêtes (w_e)
- ▶ **configuration de dimères** \mathcal{C} : couplage parfait de G .
- ▶ **modèle de dimères** : proba sur les config. de dimères

$$\mathbb{P}[\mathcal{C}] \propto \prod_{e \in \mathcal{C}} w_e.$$

- ▶ dualité : conf. de dimères \leftrightarrow pavage de la surface.

exemple :

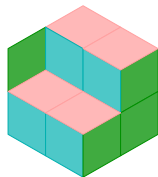
G graphe hexagonal
pavages par losanges.



Dimères et surface aléatoires

Remarque

pavages par losanges \leftrightarrow *paysages de cubes*



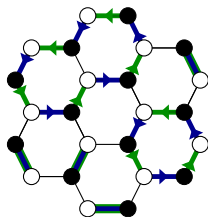
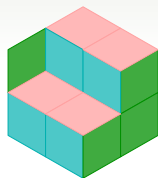
Dimères et surface aléatoires

Remarque

pavages par losanges \leftrightarrow *paysages de cubes*

Interprétation tridimensionnelle
généralisable :

- ▶ Bipartition : orientation naturelle des arêtes $\circ \rightarrow \bullet$
- ▶ Différence de deux configurations \rightarrow cycles orientés.
- ▶ si surface domaine, cycles = lignes de niveau d'une fonction (hauteur).
- ▶ sur un tore : certains cycles non triviaux \rightarrow *périodes*. Loi de cette variable aléatoire ?



Hauteur et champ gaussien sans masse (GFF)

Sur un domaine, on sait que dans certains cas, corrélations polynomiales \Rightarrow convergence de la hauteur vers GFF Φ .

[Kenyon, de Tilière]

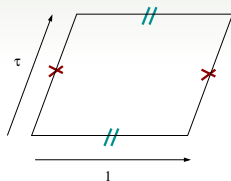
Φ distribution aléatoire.

$$\mathbb{E}[(\Phi, f)_{\nabla}(\Phi, g)_{\nabla}] = (f, g)_{\nabla} = \int_D \nabla f \cdot \nabla g dx dy.$$

Objet invariant conforme.

GFF sur le tore

les tores sont caractérisés, modulo transformations conformes par un paramètre $\tau \in \mathbb{H}$.



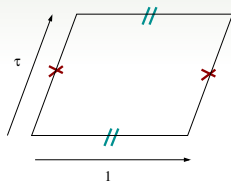
Sur le tore, on peut aussi définir le GFF : série de Fourier aléatoire.

$$\Phi = \sum_{k,l} \frac{N_{k,l}}{\lambda_{k,l}} \mathbf{e}_{k,l}$$

$N_{k,l}$ gaussiennes standard iid, $\mathbf{e}_{k,l}$ fonctions propres du laplacien.

GFF sur le tore

les tores sont caractérisés, modulo transformations conformes par un paramètre $\tau \in \mathbb{H}$.



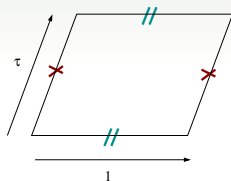
Sur le tore, on peut aussi définir le GFF : série de Fourier aléatoire.

$$\Phi = \sum_{k,l} \frac{N_{k,l}}{\lambda_{k,l}} \mathbf{e}_{k,l}$$

$N_{k,l}$ gaussiennes standard iid, $\mathbf{e}_{k,l}$ fonctions propres du laplacien.
Période : mode 0 à valeurs entières pour $\nabla\Phi$.

GFF sur le tore

les tores sont caractérisés, modulo transformations conformes par un paramètre $\tau \in \mathbb{H}$.



Période : mode 0 à valeurs entières pour $\nabla\Phi$.

Petit calcul :

$$\mathbb{P}[\text{périodes} = (k, \ell)] \propto \exp\left(-\frac{\pi}{2\tau_2}(k^2|\tau|^2 + \ell^2 - 2k\ell\tau_1)\right)$$

Gaussienne discrète (en 1d, fonction caractéristique donné par ϑ de Jacobi).

$$\vartheta(z|\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2ikz} e^{i\pi\tau k^2} = \prod_{l=1}^{\infty} (1+zq^{2l-1})(1+z^{-1}q^{2l-1})(1-q^{2l}).$$

Conjecture naturelle

la hauteur des dimères sur le tore converge vers le GFF.

Pas de résultat de convergence pour le tore (travaux en cours dans ce sens pour certains cas [Dubedat]).

Conjecture naturelle

la période de la hauteur des dimères sur le tore converge vers celle du GFF.

Conjecture naturelle

la période de la hauteur des dimères sur le tore converge vers celle du GFF.

Théorème (B., de Tilière (2007))

C'est le cas pour les pavages par losanges avec la mesure uniforme sur le tore droit. Périodes horizontale/verticale indépendantes.

Conjecture naturelle

la période de la hauteur des dimères sur le tore converge vers celle du GFF.

Théorème (B., de Tilière (2007))

C'est le cas pour les pavages par losanges avec la mesure uniforme sur le tore droit. Périodes horizontale/verticale indépendantes.

Théorème (B. (2010))

Soit un G un graphe périodique biparti sur le tore avec $m \times n$ domaines fondamentaux. Dans la limite $m, n \rightarrow \infty$, la période de la hauteur des dimères converge vers celle du GFF sur un tore continu pour un τ explicite, si et seulement si condition arithmétique.

Théorie de Kasteleyn

Pour un domaine :

$$Z = \sum_{\mathcal{C}} \prod_{e \in \mathcal{C}} w_e = \det K$$

K = matrix de Kasteleyn (d'adjacence bipartie)

$$K_{w,b} = \pm w_e$$

nombre de signe autour de chaque face $f \equiv \frac{\deg f}{2} - 1[2]$.

$$\det K = \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \prod K_{w_i, b_i} = \sum'_{\sigma} \prod_{e \in \sigma} w_e$$

Théorie de Kasteleyn

Pour un domaine :

$$Z = \sum_{\mathcal{C}} \prod_{e \in \mathcal{C}} w_e = \det K$$

K = matrix de Kasteleyn (d'adjacence bipartie)

$$K_{w,b} = \pm w_e$$

nombre de signe autour de chaque face $f \equiv \frac{\text{deg}f}{2} - 1[2]$.

$$\det K = \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \prod K_{w_i, b_i} = \sum'_{\sigma} \prod_{e \in \sigma} w_e$$

Pour un tore : pas de choix de signe pour compenser toutes les signatures

$$Z = \frac{1}{2} \left(-\det K^{00} + \det K^{01} + \det K^{10} + \det K^{11} \right)$$

$K^{\alpha\beta}$: poids arêtes traversant γ_x (resp. γ_y) multipliés par $(-1)^{\alpha}$ (resp. $(-1)^{\beta}$).

Définissons

$$Z(u, v) = \frac{1}{2} \left(-\det K^{00}(u, v) + \det K^{01}(u, v) \right. \\ \left. + \det K^{10}(u, v) + \det K^{11}(u, v) \right)$$

u (resp. v) extra coût pour traverser γ_x (resp. γ_y). à un facteur multiplicatif près, $Z(u, v)$ est la transformée de Laplace de la période.

objectif : asymptotiques précises de la fonction de partition perturbée. [Ferdinand 1967].

Definissons

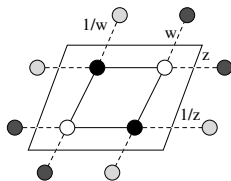
$$Z(u, v) = \frac{1}{2} (-\det K^{00}(u, v) + \det K^{01}(u, v) + \det K^{10}(u, v) + \det K^{11}(u, v))$$

u (resp. v) extra coût pour traverser γ_x (resp. γ_y). à un facteur multiplicatif près, $Z(u, v)$ est la transformée de Laplace de la période.

objectif : asymptotiques précises de la fonction de partition perturbée. [Ferdinand 1967].

$$\det K^{\alpha\beta}(u, w) = \prod_{z^m=(-1)^\alpha u} \prod_{w^n=(-1)^\beta v} P(z, w) \quad (\text{périodicité})$$

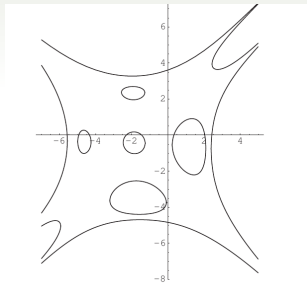
$P(z, w) = \det K_1(z, w)$ sur un domaine fondamental.



Comment calculer $Z(u, v)$?

Beaucoup d'information sur P .

- ▶ $\{(z, w) \in (\mathbb{C}^\times)^2 ; P(z, w) = 0\}$ courbe de Harnack.
- ▶ Amibe : diagramme de phase du modèle de dimères [Kenyon, Okounkov, Sheffield]
- ▶ courbe \rightarrow amibe 2-to-1.
- ▶ origine : (z_0, w_0) and (\bar{z}_0, \bar{w}_0) .



$$P(z, w) = C \prod_j (z - z_j(w))$$

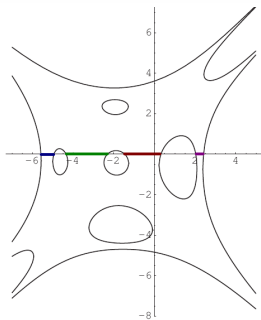
$$\prod_{z, w} P(z, w) = C^{mn} \prod_j \prod_w (z_j(w)^m \pm e^u)$$

Comportement de $z_j(w)$?

$$\prod_{z,w} P(z, w) = C^{mn} \prod_j \prod_w (z_j(w)^m \pm e^u)$$

3 types de contributions pour un déterminant :

- ▶ $|z_j(w)| < 1$: contribution négligeable,
- ▶ $|z_j(w)| > 1$: contribution à l'énergie libre,
- ▶ $|z_j(w)^m| \simeq 1$, ie quand w proche de w_0, \bar{w}_0 . produit de ces termes : produit de deux fonctions ϑ (grâce au triple produit)



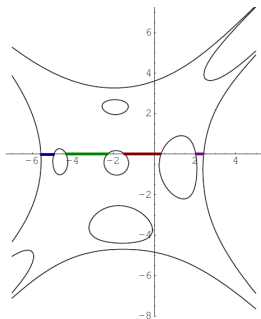
Comportement de $z_j(w)$?

$$\prod_{z,w} P(z, w) = C^{mn} \prod_j \prod_w (z_j(w)^m \pm e^u)$$

3 types de contributions pour un déterminant :

- ▶ $|z_j(w)| < 1$: contribution négligeable,
- ▶ $|z_j(w)| > 1$: contribution à l'énergie libre,
- ▶ $|z_j(w)^m| \simeq 1$, ie quand w proche de w_0, \bar{w}_0 . produit de ces termes : produit de deux fonctions ϑ (grâce au triple produit)

En fait, 4 variantes de fonctions ϑ : une par déterminant.



Asymptotiques de $Z(u, v)$

recombinaison des produits de fonctions ϑ + invariance modulaire :

$$Z_{m,n}(u, v) = \text{Const} \cdot \underbrace{e^{mn \cdot f}}_{\text{energie libre}} \underbrace{e^{\Lambda(m,n,u,v)}}_{\text{hauteur moyenne}} \times$$
$$\sum_{k,l} e^{-\frac{\pi}{2\tau_2}(k^2|\tau^2|+l^2-2\tau_1 kl)} e^{k(u+\{\eta\}+2\frac{|\tau|^2\{\xi\}}{\tau_1})+l(v-2\frac{\{\xi\}\tau_1}{\tau_2})}(1+o(1)),$$

avec $\{\eta\}$ (resp. $\{\xi\}$) partie fractionnaire de $2\pi m \arg z_0$ (resp. $2\pi n \arg w_0$).

$$\tau = \lim_{m,n \rightarrow \infty} - \frac{m \frac{\partial P}{\partial z}}{n \frac{\partial P}{\partial w}} \Bigg|_{z_0, w_0}$$

- ▶ si $(\{\eta\}, \{\xi\}) \neq (0, 0)$, oscillation : pas de convergence.
- ▶ si z_0, w_0 racines de l'unité, convergence pour une sous-suite de m, n .

Phase fermionique et résonance

Condition pour convergence : poids ajustés pour que z_0, w_0 racines de l'unité.

Cette condition arithmétique présente dans [Cimasoni]
(convergence vers opérateurs de Dirac pour graphes isoradiaux).

Interprétation : dans le plan $K^{-1}(b_{x,y}, w) \simeq \text{Im} \left(\frac{z_0^x w_0^y}{b_{x,y} - w} \right)$. Ondes fermioniques. Interférences destructives si longueur d'onde non adaptée au tore.

Conclusions

- ▶ Pour les dimères sur le tore, universalité si résonance des ondes fermioniques associées.
- ▶ Étude fine grâce à la riche structure algébrique de ces modèles (courbes de Harnack, . . .)
- ▶ Ce type de courbes apparaît dans d'autres modèles (CRSF, Ising critique). Informations statistiques ? (en cours).