

Interpolare polinomială

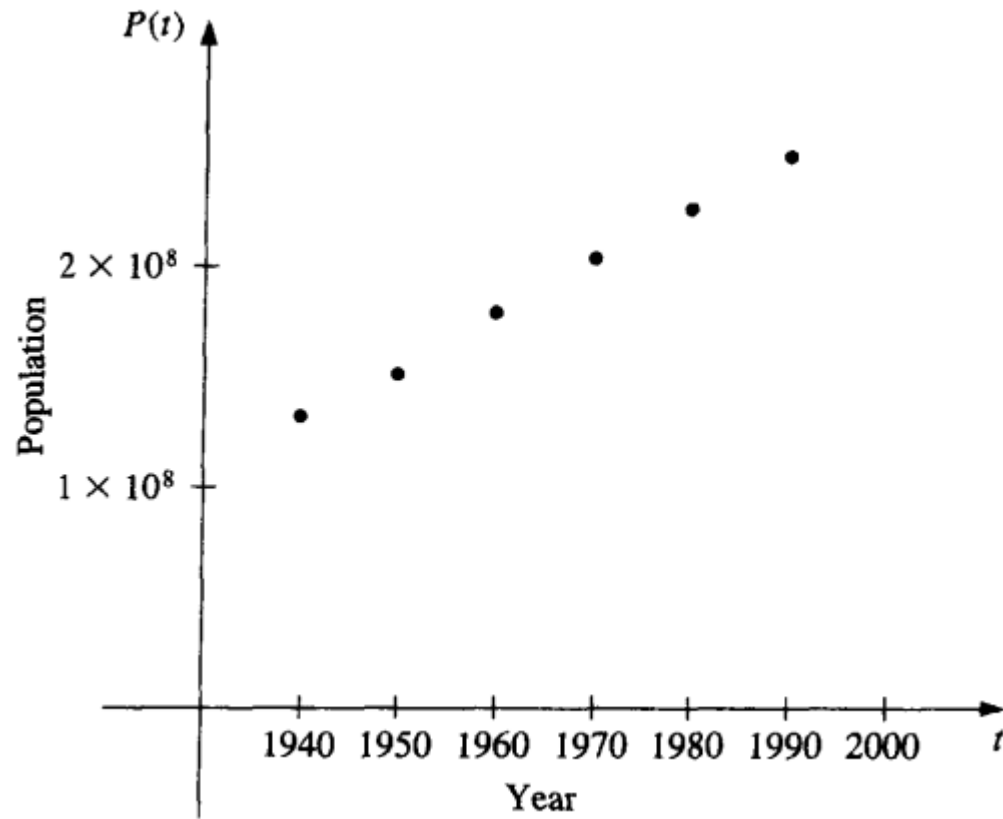
1. Introducere

Exemple:

(Burden, Richard L.; Faires, J. Douglas: Numerical Analysis, 8th ed., pages 104–105, ISBN 0534392008.)

A census of the population of the United States is taken every 10 years. The following table lists the population, in thousands of people, from 1940 to 1990.

Year	1940	1950	1960	1970	1980	1990
Population (in thousands)	132,165	151,326	179,323	203,302	226,542	249,633



Care a fost populația în 1996, care va fi populația în 2000?

Variația densității aerului

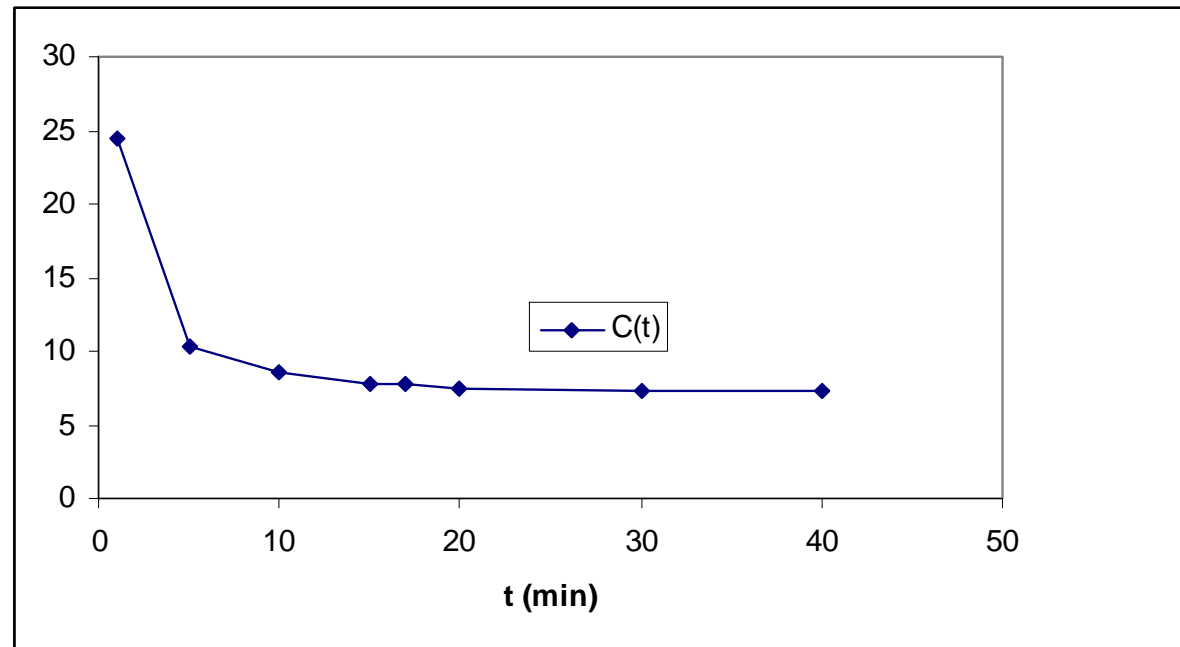
TABLE 15.1 Density (ρ), dynamic viscosity (μ), and kinematic viscosity (ν) as a function of temperature (T) at 1 atm as reported by White (1999).

$T, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{kg/m}^3$	$\mu, \text{N} \cdot \text{s/m}^2$	$\nu, \text{m}^2/\text{s}$
-40	1.52	1.51×10^{-5}	0.99×10^{-5}
0	1.29	1.71×10^{-5}	1.33×10^{-5}
20	1.20	1.80×10^{-5}	1.50×10^{-5}
50	1.09	1.95×10^{-5}	1.79×10^{-5}
100	0.946	2.17×10^{-5}	2.30×10^{-5}
150	0.835	2.38×10^{-5}	2.85×10^{-5}
200	0.746	2.57×10^{-5}	3.45×10^{-5}
250	0.675	2.75×10^{-5}	4.08×10^{-5}
300	0.616	2.93×10^{-5}	4.75×10^{-5}
400	0.525	3.25×10^{-5}	6.20×10^{-5}
500	0.457	3.55×10^{-5}	7.77×10^{-5}

Fie datele obținute prin metode experimentale date în tabelul de corespondență

t (min)	1	5	10	15	17	20	30	40
$C(t)$	24,5	10,30	8,50	7,8	7,70	7,45	7,30	7,25

Reprezentarea grafică a datelor din acest tablou este



Evoluția concentrației $C(t)$ (mg/L) în funcție de timpul t .

Noțiunea de interpolare s-a introdus pentru nevoia de găsi o estimare a unei funcții f într-un punct x pentru care experimental nu s-a putut realiza. Grafic se poate da o estimare dar aceasta poate conține erori semnificative.

Interpolare liniară

Interpolarea liniară presupune că variația dintre două puncte experimentale este de natură liniară.

Fie funcția f măsurată experimental în două puncte a și $a+h$ cu pasul h foarte mic, fie $a < x < a+h$. Atunci valoarea $f(x)$ se poate aproxima prin

$$f(x) \approx f(a) + (x - a) \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (7.5)$$

Din definiția derivatei unei funcții într-un punct putem scrie

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Prin urmare putem scrie

$$f(x) \approx f(a) + (x - a)f'(x)$$

Exemplu: Considerând datele experimentale prezentate în exemplul 1 estimați $C(7)$ prin formula interpolării liniare.

Soluție: Pentru a estima valoarea $t = 7$ sau 8 e necesar să cunoaștem valoarea concentrației în două puncte a și $a+h$ cu $a < t < a+h$

$$C(t) \approx C(a) + (t - a) \frac{C(a+h) - C(a)}{h}$$

Avem $5 < 7 < 10$, prin urmare $a = 5$ și $h = 5$

$$C(7) \approx C(5) + (7 - 5) \frac{C(10) - C(5)}{5} = 10,30 + 2 \frac{8,5 - 10,30}{5} = 9,58 \text{ mg / L}$$

Avem $5 < 8 < 10$, prin urmare $a = 5$ și $h = 5$

$$C(7) \approx C(5) + (8 - 5) \frac{C(10) - C(5)}{5} = 10,30 + 3 \frac{8,5 - 10,30}{5} = 9,22 \text{ mg / L}$$

Interpolare parabolică

Interpolarea parabolică presupune că variația între trei puncte experimentale este de tip parabolic.

O funcție f dată experimental în trei puncte $a-h$, a și $a+h$ cu pasul h foarte mic. Fie $a-h < x < a+h$, atunci $f(x)$ este dată de

$$f(x) \approx f(a) + (x-a) \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} + \frac{(x-a)^2}{2} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} \quad (7.6)$$

Exemplu: Considerând datele experimentale prezentate în exemplul 1 estimați $C(7)$ prin formula interpolării parabolice.

Soluție: Este necesar de a cunoaște valorile experimentale ale funcției C în trei puncte învecinate lui $t = 7$, pentru care $a-h < t < a+h$, adică $C(a-h)$, $C(a)$ și $C(a+h)$.

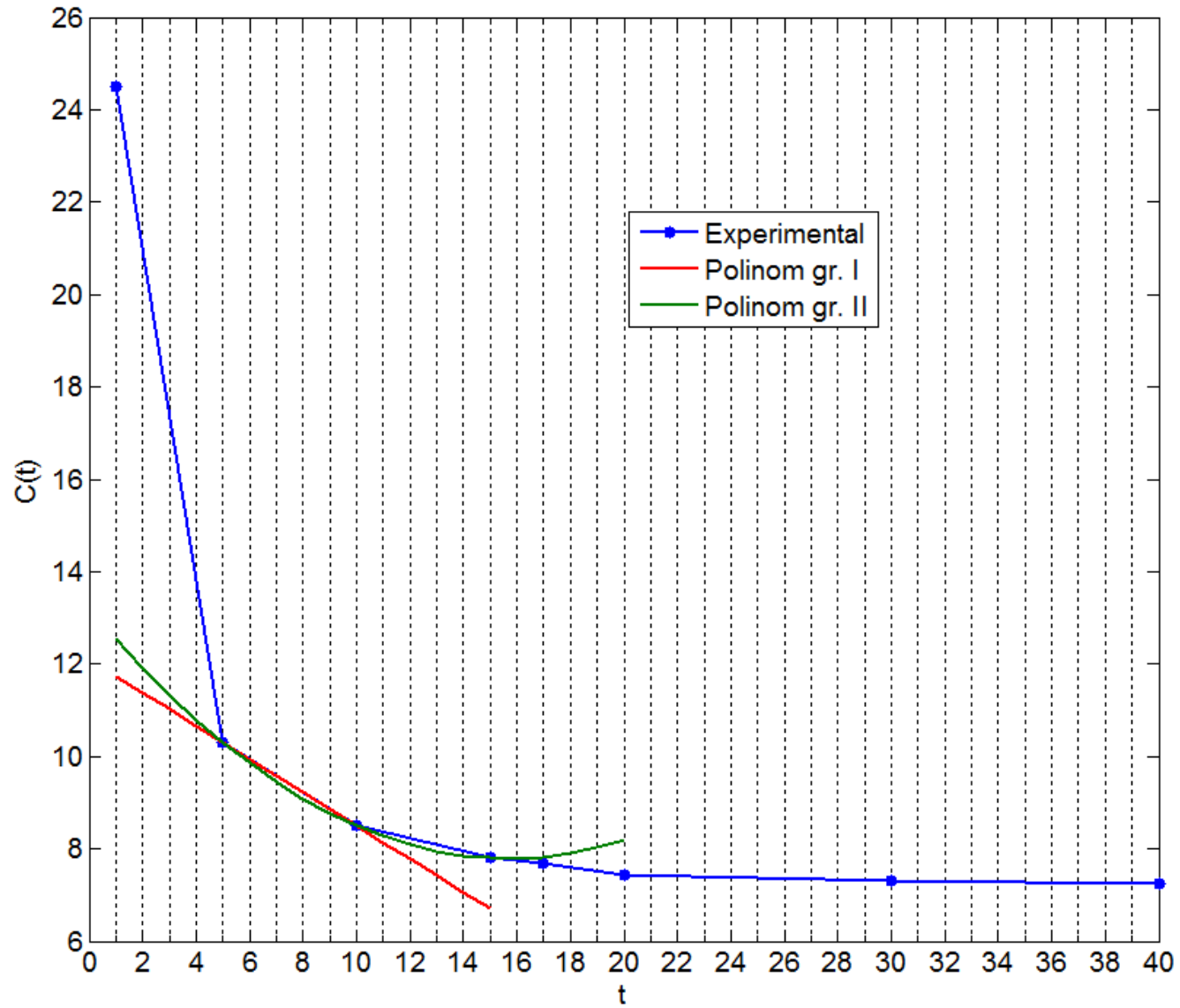
Luăm $a = 10$ și $h = 5$ atunci

$$C(7) \approx C(10) + (7-10) \frac{C(15) - C(5)}{10} + \frac{(7-10)^2}{2} \frac{C(15) - 2C(10) + C(5)}{25}$$

$$C(7) \approx 8,5 - 3 \frac{7,8 - 10,3}{10} + \frac{(-3)^2}{2} \frac{7,8 - 2(8,5) + 10,3}{25} \approx 9,45 \text{ mg/L}$$

$$C(8) \approx C(10) + (8-10) \frac{C(15) - C(5)}{10} + \frac{(8-10)^2}{2} \frac{C(15) - 2C(10) + C(5)}{25}$$

$$C(8) \approx 8,5 - 2 \frac{7,8 - 10,3}{10} + \frac{(-2)^2}{2} \frac{7,8 - 2(8,5) + 10,3}{25} \approx 9,088 \text{ mg/L}$$



Interpolare liniară și parabolică

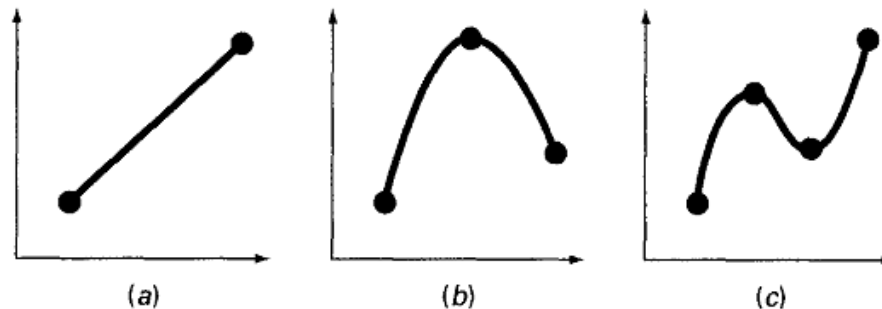
În general când se dau un număr de puncte și n informații referitoare la aceste puncte (valori ale unei funcții, și/sau valori ale derivatelor funcțiilor în punctele respective) putem construi un polinom de grad $n-1$ numit polinom de interpolare ce va trece prin acele puncte.

Exemplu: Fie punctele x_1 și x_2 și valorile cunoscute $f(x_1)$, $f'(x_1)$ și $f(x_2)$. Atunci putem construi polinomul $P(x)$ de grad 2 ce trece prin punctele x_1 și x_2 rezolvând sistemul cu necunoscutele a, b, c :

$$P(x_1) = a x_1^2 + b x_1 + c = f(x_1)$$

$$P'(x_1) = 2 a x_1 + b = f'(x_1)$$

$$P(x_2) = a x_2^2 + b x_2 + c = f(x_2)$$



Examples of interpolating polynomials: (a) first-order (linear) connecting two points, (b) second-order (quadratic or parabolic) connecting three points, and (c) third-order (cubic) connecting four points.

2. Interpolare Lagrange

(R. Trîmbițaș, 2005. Analiza numerică. O introducere bazată pe MATLAB, Presa Universitară Clujeană)

Observația 5.3.1. Funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, se numește absolut continuă pe I dacă $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ astfel încât oricare ar fi un sistem finit de subintervale disjuncte ale lui I $\{(a_k, b_k)\}_{k=1, \dots, n}$ cu proprietatea $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$ să avem

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

◇

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim

$$H^n[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \in C^{n-1}[a, b], f^{(n-1)} \text{ absolut continuă pe } [a, b]\}.$$

Orice funcție $f \in H^n[a, b]$ admite o reprezentare de tip Taylor cu restul sub formă integrală

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt.$$

Teorema (Peano). Fie L o funcțională reală, continuă, definită pe $H^n[a, b]$. Dacă $\text{Ker}L = \mathbb{P}_{n-1}$ atunci

$$Lf = \int_a^b K(t) f^{(n)}(t) dt,$$

unde

$$K(t) = \frac{1}{(n-1)!} L[(\cdot - t)_+^{n-1}] \quad (\text{nucleul lui Peano}).$$

Funcția

$$z_+ = \begin{cases} z, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

se numește *parte pozitivă*, iar z_+^n se numește *putere trunchiată*. ◇

Fie intervalul închis $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și o mulțime de $m + 1$ puncte distincte $\{x_0, x_1, \dots, x_m\} \subset [a, b]$.

Teorema *Există un polinom și numai unul $L_m f \in \mathbb{P}_m$ astfel încât*

$$\forall i = 0, 1, \dots, m, \quad (L_m f)(x_i) = f(x_i);$$

acest polinom se scrie sub forma

$$(L_m f)(x) = \sum_{i=0}^m f(x_i) \ell_i(x),$$

unde

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^m \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Polinomul $L_m f$ definit astfel se numește polinom de interpolare Lagrange a lui f relativ la punctele x_0, x_1, \dots, x_m , iar funcțiile $\ell_i(x)$, $i = \overline{0, m}$, se numesc polinoame de bază (fundamentale) Lagrange asociate acelor puncte.

Sursa MATLAB 5.11 Interpolare Lagrange

```
function fi=lagr(x,y,xi)
%LAGR - calculeaza polinomul de interpolare Lagrange
% x,y -coordonatele nodurilor
% xi - punctele in care se evalueaza polinomul

if nargin ~=3
    error('numar ilegal de argumente')
end
[mu,nu]=size(xi);
fi=zeros(mu,nu);
np1=length(y);
for i=1:np1
    z=ones(mu,nu);
    for j=[1:i-1,i+1:np1]
        z=z.*(xi-x(j))/(x(i)-x(j));
    end;
    fi=fi+z*y(i);
end
```

Exemplu (Ward Cheney, David Kincaid, Numerical Mathematics and Computing, Sixth edition, 2008)

Write out the cardinal polynomials appropriate to the problem of interpolating the following table, and give the Lagrange form of the interpolating polynomial:

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	1
$f(x)$	2	-1	7

Solution

$$\ell_0(x) = \frac{(x - \frac{1}{4})(x - 1)}{(\frac{1}{3} - \frac{1}{4})(\frac{1}{3} - 1)} = -18 \left(x - \frac{1}{4}\right) (x - 1)$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x - \frac{1}{3})(x - 1)}{(\frac{1}{4} - \frac{1}{3})(\frac{1}{4} - 1)} = 16 \left(x - \frac{1}{3}\right) (x - 1)$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x - \frac{1}{3})(x - \frac{1}{4})}{(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4})} = 2 \left(x - \frac{1}{3}\right) \left(x - \frac{1}{4}\right)$$

Therefore, the interpolating polynomial in Lagrange's form is

$$p_2(x) = -36 \left(x - \frac{1}{4}\right) (x - 1) - 16 \left(x - \frac{1}{3}\right) (x - 1) + 14 \left(x - \frac{1}{3}\right) \left(x - \frac{1}{4}\right) \quad \blacksquare$$

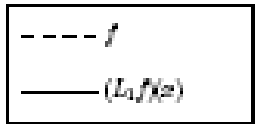
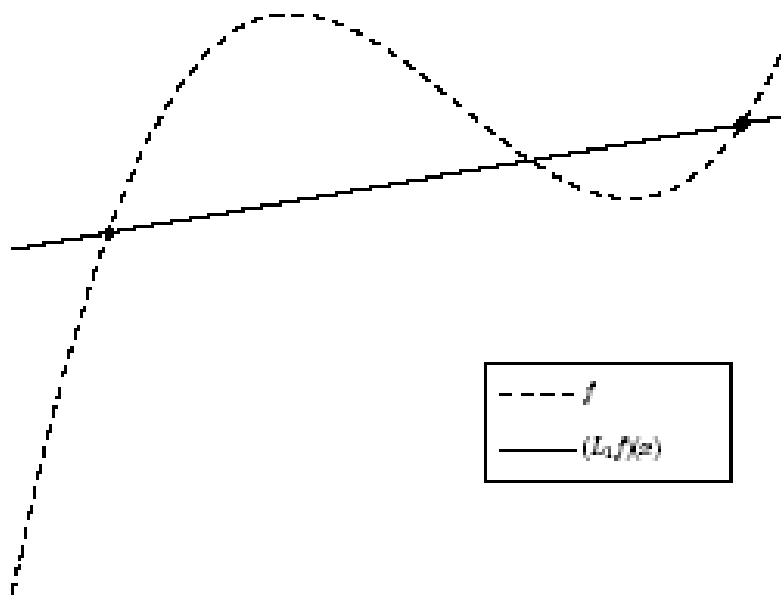
Exemplu Polinomul de interpolare Lagrange corespunzător unei funcții f și nodurilor x_0 și x_1 este

$$(L_1 f)(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1),$$

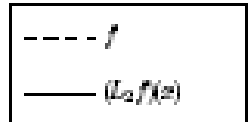
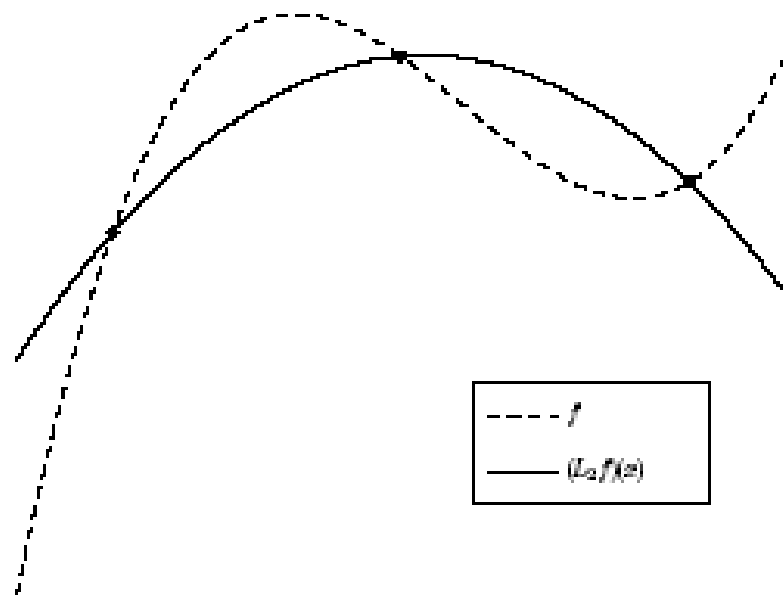
adică dreapta care trece prin punctele $(x_0, f(x_0))$ și $(x_1, f(x_1))$. Analog, polinomul de interpolare Lagrange corespunzător unei funcții f și nodurilor x_0, x_1 și x_2 este

$$(L_2 f)(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2),$$

adică parabola care trece prin punctele $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ și $(x_2, f(x_2))$. Interpretarea lor geometrică apare în figura ◇



(a) $(L_1 f)$



(b) $(L_2 f)$

Interpretarea geometrică a lui $L_1 f$ (stânga) și $L_2 f$

3. Interpolare Hermite

(R. Trîmbițaș, 2005, Analiza numerică. O introducere bazată pe MATLAB, Presa Universitară Clujeană)

În loc să facem să coincidă f și polinomul de interpolare în punctele x_i din $[a, b]$, am putea face ca f și polinomul de interpolare să coincidă împreună cu derivatele lor până la ordinul r_i în punctele x_i . Se obține:

Teorema *Fiind date $(m + 1)$ puncte distincte x_0, x_1, \dots, x_m din $[a, b]$ și $(m + 1)$ numere naturale r_0, r_1, \dots, r_m , punem $n = m + r_0 + r_1 + \dots + r_m$. Atunci, fiind dată o funcție f , definită pe $[a, b]$ și admitând derivate de ordin r_i în punctele x_i , există un singur polinom și numai unul $H_n f$ de grad $\leq n$ astfel încât*

$$\forall (i, \ell), 0 \leq i \leq m, 0 \leq \ell \leq r_i \quad (H_n f)^{(\ell)}(x_i) = f^{(\ell)}(x_i),$$

unde $f^{(\ell)}(x_i)$ este derivata de ordinul ℓ a lui f în x_i .

Definiția *Polinomul definit în acest mod se numește polinom de interpolare al lui Hermite al funcției f relativ la punctele x_0, x_1, \dots, x_m și la întregii r_0, r_1, \dots, r_m .*

1) Dându-se numerele reale $b_{i\ell}$ pentru orice pereche (i, ℓ) astfel încât $0 \leq i \leq k$ și $0 \leq \ell \leq r_i$, am arătat că problema generală de interpolare Hermite

să se determine $p_n \in \mathbb{P}_n$ a.î. $\forall (i, \ell)$ cu $0 \leq i \leq m$ și $0 \leq \ell \leq r_i$, $p_n^{(\ell)}(x_i) = b_{i\ell}$

admite o soluție și numai una. În particular, dacă alegem pentru o pereche (i, ℓ) dată $b_{i\ell} = 1$ și $b_{jn} = 0$, $\forall (j, m) \neq (i, \ell)$, se obține un polinom de bază (fundamental) de interpolare Hermite relativ la punctele x_0, x_1, \dots, x_m și la întregii r_0, r_1, \dots, r_m .

$$(H_n f)(x) = \sum_{i=0}^m \sum_{\ell=0}^{r_i} f^{(\ell)}(x) h_{i\ell}(x).$$

Punând

$$q_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)^{r_j+1},$$

se verifică că polinoamele de bază $h_{i\ell}$ sunt definite prin relațiile de recurență

$$h_{ir_i}(x) = \frac{(x - x_i)^{r_i}}{r_i!} q_i(x)$$

și pentru $\ell = r_i - 1, r_i - 2, \dots, 1, 0$

$$h_{i\ell}(x) = \frac{(x - x_i)^\ell}{\ell!} q_i(x) - \sum_{j=\ell+1}^{r_i} \binom{j}{\ell} q_i^{(j-\ell)}(x_i) h_{ij}(x).$$

Vom prezenta o expresie mai convenabilă a polinoamelor fundamentale Hermite, obținută de Dimitrie D. Stancu în 1957[60]. Ele verifică relațiile

$$\begin{aligned} h_{kj}^{(p)}(x_\nu) &= 0, & \nu \neq k, p = \overline{0, r_\nu} \\ h_{kj}^{(p)}(x_k) &= \delta_{jp}, & p = \overline{0, r_k}, \end{aligned}$$

pentru $j = \overline{0, r_k}$ și $\nu, k = \overline{0, m}$. Introducând notațiile

$$u(x) = \prod_{k=0}^m (x - x_k)^{r_k+1}$$

și

$$u_k(x) = \frac{u(x)}{(x - x_k)^{r_k+1}},$$

rezultă că h_{kj} are forma

$$h_{kj}(x) = u_k(x)(x - x_k)^j g_{kj}(x), \quad g_{kj} \in \mathbb{P}_{r_k-j}.$$

Dezvoltând g_{kj} cu formula lui Taylor, avem

$$g_{kj}(x) = \sum_{\nu=0}^{r_k-j} \frac{(x-x_k)^\nu}{\nu!} g_{kj}^{(\nu)}(x_k);$$

Derivând și aplicând formula lui Leibniz se obține:

$$g_{kj}^{(\nu)}(x_k) = \frac{1}{j!} \left[\frac{1}{u_k(x)} \right]_{x=x_k}^{(\nu)}$$

iar în final avem:

$$h_{kj}(x) = \frac{(x-x_k)^j}{j!} u_k(x) \sum_{\nu=0}^{r_k-j} \frac{(x-x_k)^\nu}{\nu!} \left[\frac{1}{u_k(x)} \right]_{x=x_k}^{(\nu)}.$$

(Burden, Richard L.; Faires, J. Douglas: Numerical Analysis, 8th ed., pages 104–105, ISBN 0534392008.)

If $f \in C^1[a, b]$ and $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ are distinct, the unique polynomial of least degree agreeing with f and f' at x_0, \dots, x_n is the Hermite polynomial of degree at most $2n + 1$ given by

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j)H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^n f'(x_j)\hat{H}_{n,j}(x),$$

where

$$H_{n,j}(x) = [1 - 2(x - x_j)L'_{n,j}(x_j)]L_{n,j}^2(x)$$

and

$$\hat{H}_{n,j}(x) = (x - x_j)L_{n,j}^2(x).$$

In this context, $L_{n,j}(x)$ denotes the j th Lagrange coefficient polynomial of degree n defined in Eq. (3.2).

Moreover, if $f \in C^{2n+2}[a, b]$, then

$$f(x) = H_{2n+1}(x) + \frac{(x - x_0)^2 \dots (x - x_n)^2}{(2n + 2)!} f^{(2n+2)}(\xi),$$

for some ξ with $a < \xi < b$. ■

Exemplu: Aflați $f(1.5)$ folosind interpolarea Hermite:

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	1.3	0.6200860	-0.5220232
1	1.6	0.4554022	-0.5698959
2	1.9	0.2818186	-0.5811571

We first compute the Lagrange polynomials and their derivatives. This gives

$$L_{2,0}(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9}, \quad L'_{2,0}(x) = \frac{100}{9}x - \frac{175}{9};$$
$$L_{2,1}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{-100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9}, \quad L'_{2,1}(x) = \frac{-200}{9}x + \frac{320}{9};$$

and

$$L_{2,2} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9}, \quad L'_{2,2}(x) = \frac{100}{9}x - \frac{145}{9}.$$

$$\begin{aligned}
H_{2,0}(x) &= [1 - 2(x - 1.3)(-5)] \left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9} \right)^2 & H_{2,2}(x) &= 10(2 - x) \left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9} \right)^2, \\
&= (10x - 12) \left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9} \right)^2, & \hat{H}_{2,0}(x) &= (x - 1.3) \left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9} \right)^2, \\
H_{2,1}(x) &= 1 \cdot \left(\frac{-100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9} \right)^2, & \hat{H}_{2,1}(x) &= (x - 1.6) \left(\frac{-100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9} \right)^2, \\
& & \hat{H}_{2,2}(x) &= (x - 1.9) \left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9} \right)^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_5(x) &= 0.6200860H_{2,0}(x) + 0.4554022H_{2,1}(x) + 0.2818186H_{2,2}(x) \\
&\quad - 0.5220232\hat{H}_{2,0}(x) - 0.5698959\hat{H}_{2,1}(x) - 0.5811571\hat{H}_{2,2}(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_5(1.5) &= 0.6200860 \left(\frac{4}{27} \right) + 0.4554022 \left(\frac{64}{81} \right) + 0.2818186 \left(\frac{5}{81} \right) \\
&\quad - 0.5220232 \left(\frac{4}{405} \right) - 0.5698959 \left(\frac{-32}{405} \right) - 0.5811571 \left(\frac{-2}{405} \right) \\
&= 0.5118277,
\end{aligned}$$

3. Erorile polinoamelor de interpolare

Dacă dorim să utilizăm polinomul de interpolare Lagrange sau Hermite pentru a aproxima funcția f într-un punct $x \in [a, b]$, distinct de nodurile de interpolare (x_0, \dots, x_m) , trebuie să estimăm eroarea comisă $(R_n f)(x) = f(x) - (H_n f)(x)$. Dacă nu posedăm nici o informație referitoare la f în afara punctelor x_i , este clar că nu putem spune nimic despre $(R_n f)(x)$; într-adevăr este posibil să schimbăm f în afara punctelor x_i fără a modifica $(H_n f)(x)$. Trebuie deci să facem ipoteze suplimentare, care vor fi ipoteze de regularitate asupra lui f . Să notăm cu $C^m[a, b]$ spațiul funcțiilor reale de m ori continuu diferentiabile pe $[a, b]$. Avem următoarea teoremă referitoare la estimarea erorii în interpolarea Hermite.

Teorema Presupunem că $f \in C^n[\alpha, \beta]$ și există $f^{(n+1)}$ pe (α, β) , unde $\alpha = \min\{x, x_0, \dots, x_m\}$ și $\beta = \max\{x, x_0, \dots, x_m\}$; atunci, pentru orice $x \in [\alpha, \beta]$, există un $\xi_x \in (\alpha, \beta)$ astfel încât

$$(R_n f)(x) = \frac{1}{(n+1)!} u_n(x) f^{(n+1)}(\xi_x),$$

unde

$$u_n(x) = \prod_{i=0}^m (x - x_i)^{r_i+1}.$$

Corolarul Presupunem că $f \in C^m[\alpha, \beta]$ și există $f^{(m+1)}$ pe (α, β) , unde $\alpha = \min\{x, x_0, \dots, x_m\}$ și $\beta = \max\{x, x_0, \dots, x_m\}$; atunci, pentru orice $x \in [\alpha, \beta]$, există un $\xi_x \in (\alpha, \beta)$ astfel încât

$$(R_m f)(x) = \frac{1}{(n+1)!} u_m(x) f^{(m+1)}(\xi_x),$$

unde

$$u_m(x) = \prod_{i=0}^m (x - x_i).$$