

Kapitel 6

Kapitel 6 Begriffserwerb

6.1. Das Lehren und Lernen geometrischer Begriffe

6.1.1 Überblick

6.1.2. Theorie

6.1.3. Beispiele

6.1.3.1. Aufbau angemessener Vorstellung

6.1.3.2. Erwerb von Kenntnissen

6.1.3.3. Aneignung von Fähigkeiten

6.2. Geometrische Begriffe

6.2.1 Überblick

6.2.2. Theorie

6.2.3. Einteilung

6.2.3.1. Typen

6.2.3.2. Rollen

6.2.4. Beispiele

6.2. Kurzfristiges Lernen geometrischer Begriffe

6.3. Mittelfristiges Lernen geometrischer Begriffe

6.4. Langfristiges Lernen geometrischer Begriffe

Kapitel 6

6. Begriffslehre

6.1. Das Lehren und Lernen geometrischer Begriffe:

6.1.1. Überblick:

Geometrie handelt von Begriffen, ihren Eigenschaften und Beziehungen. Im Geometrieunterricht geht es um:

- den Aufbau angemessener Vorstellungen über die Begriffe,
- den Erwerb von Kenntnissen über die Begriffe,
- die Aneignung von Fähigkeiten im Umgang mit den Begriffen

6.1.2. Theorie:

Das Lernen geometrischer Begriffe stellt einen Vorgang im Denken dar, der zum Verstehen des Begriffs führt. Das Lehren von Begriffen besteht aus Maßnahmen, die Lernen in Gang setzen und steuern.

Beim Lernen geometrischer Begriffe geht es um folgende Vorgänge:

- **Aufbau angemessener Vorstellungen**
Bei geometrischen Vorstellungen handelt es sich um gedankliche Bilder von Objekten, ihren Eigenschaften und Beziehungen. Geometrische Vorstellungen entwickeln sich aus Handlungen an konkreten Objekten, aus Wahrnehmungen an Gegenständen und Bildern und aus Beschreibungen von geometrischen Objekten.
- **Erwerb von Kenntnissen**
Geometrische Begriffe haben bestimmte Eigenschaften, die sie charakterisieren. Zum Verstehen eines Begriffs gehört die Kenntnis dieser Eigenschaften.
- **Aneignung von Fähigkeiten**
Bei den geometrischen Fähigkeiten wird man in erster Linie sicherlich an das Konstruieren von Figuren denken. Aber zu ihnen gehören auch Fähigkeiten zum Berechnen von Längen, Flächeninhalten und Rauminhalten. Schließlich ist damit auch die Fähigkeit zum Problemlösen in der Geometrie angesprochen.

Kapitel 6



Blaise Pascal

1623 – 1662

Pascal soll im Alter von 12 Jahren die Geometrie nach- erfunden haben.

6.1.3. Beispiele

Für das Parallelogramm soll an einigen Beispielen gezeigt werden, wie den Lernenden in der Sekundarstufe I Vorstellungen, Kenntnisse und Fähigkeiten vermittelt werden können.

- **Aufbau angemessener Vorstellung**
- **Erwerb von Kenntnissen**
- **Aneignung von Fähigkeiten**

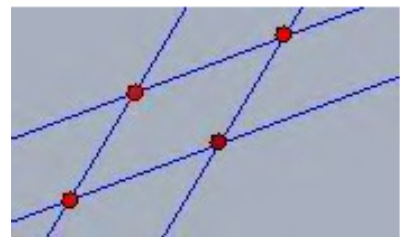
1. Vorstellungen

Für das Parallelogramm bauen die Schülerinnen und Schüler in der Sekundarstufe I auf unterschiedliche Weise Vorstellungen auf.

Handlungen:

Mit Hilfe eines Dynamischen Geometrieprogramms können die Schülerinnen und Schüler ein Parallelogramm zeichnen und durch Ziehen an Geraden und Punkten Lage und Form der Parallelogramme ändern. Sie bauen dabei Vorstellungen durch Handeln auf.

(Auch das Falten trägt dazu bei, eine neue Vorstellung durch Handeln aufzubauen)



Kapitel 6

Wahrnehmungen:

Von Parallelogrammen treten in der Umwelt hauptsächlich die Sonderformen der Raute, des Rechtecks und des Quadrats auf. Sie werden in der Regel nicht spontan als Parallelogramme wahrgenommen. Doch lassen sich auch allgemeine Parallelogramme beobachten. Es sollte darauf geachtet werden, dass Parallelogramme an ihrer Form unabhängig von der Lage erkannt werden. (Parallelogramm in der Umwelt: Welche der Vierecke an diesem Garagentor sind Parallelogramme?)

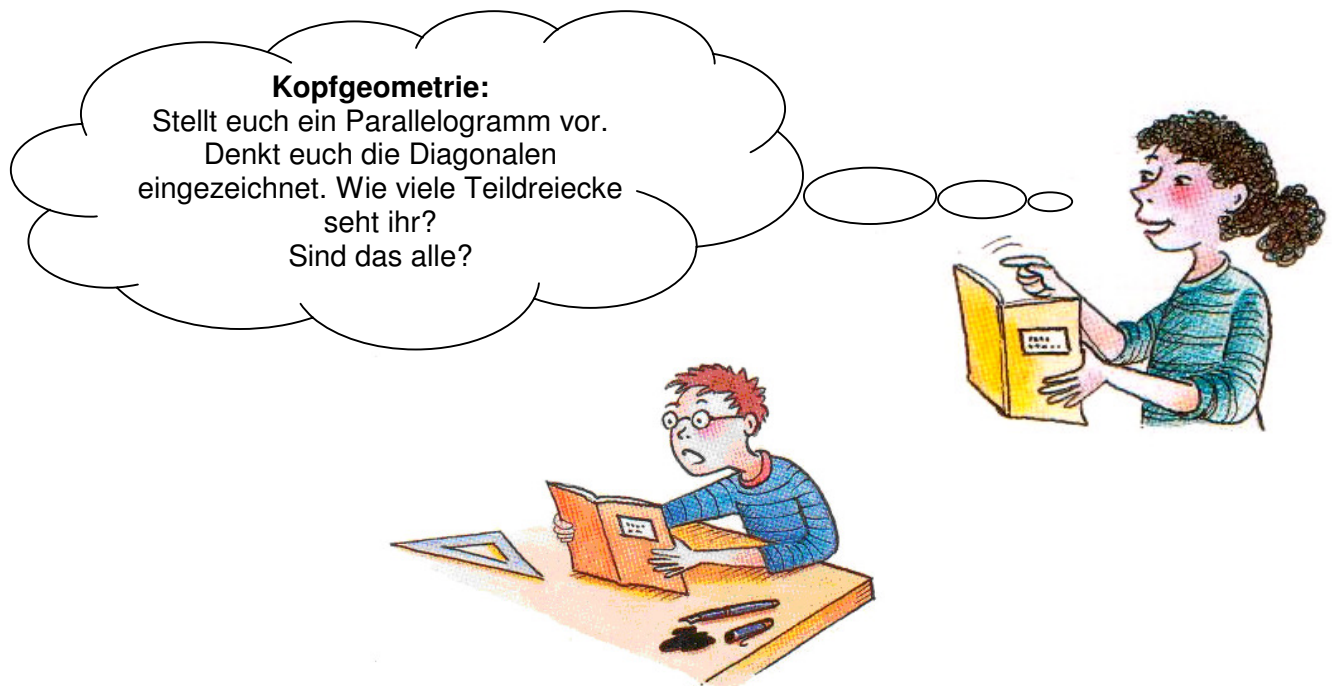


Beschreibungen:

Durch Erklärungen und Erläuterungen werden Vorstellungen über das Parallelogramm aufgebaut. Sie sind häufig mit optischen Darstellungen (Zeichnungen, Computerbilder) verbunden.

Werden rein verbale Erläuterungen gegeben, so werden die Schülerinnen und Schüler angehalten, sich den Sachverhalt durch eine Skizze zu veranschaulichen.

Die Schülerinnen und Schüler sollen lernen, Vorstellungen über Parallelogramme auch rein sprachlich aufzubauen. Mit Übungen der Kopfgeometrie kann das systematisch geübt werden.



Kapitel 6

2. Erwerb von Kenntnissen

Zum Verstehen eines geometrischen Begriffs gehören Kenntnisse über den Begriff selbst und über dessen Beziehungen zu anderen Begriffen.

- **Eigenschaften des Begriffs**

Beispiel: Ein Parallelogramm hat die Eigenschaften:

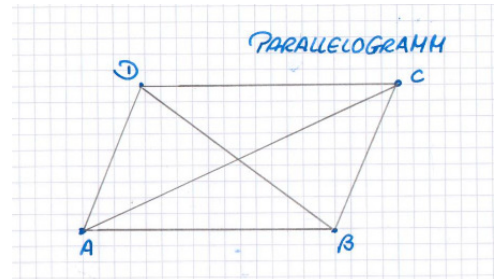
Gegenüberliegende Seiten sind parallel.

Gegenüberliegende Seiten sind gleich lang.

Gegenüberliegende Winkel sind gleich groß.

Benachbarte Winkel ergänzen sich zu 180° .

Die Diagonalen halbieren sich.



- **Beziehungen zu anderen Begriffen**

Beispiel: Sind in einem Parallelogramm benachbarte Winkel sogar gleich groß, so müssen alle Winkel 90° sein. Das Parallelogramm ist dann ein Rechteck.

3. Aneignung von Fähigkeiten

Zum Verstehen eines geometrischen Begriffs gehören auch **Fähigkeiten** im Umgang mit ihm.

Konstruieren können

Beispiel: Konstruiere ein Parallelogramm aus zwei benachbarten Seiten und dem eingeschlossenen Winkel. Gegeben: $|AB| = 6 \text{ cm}$; $|BC| = 4 \text{ cm}$; $\beta = 60^\circ$

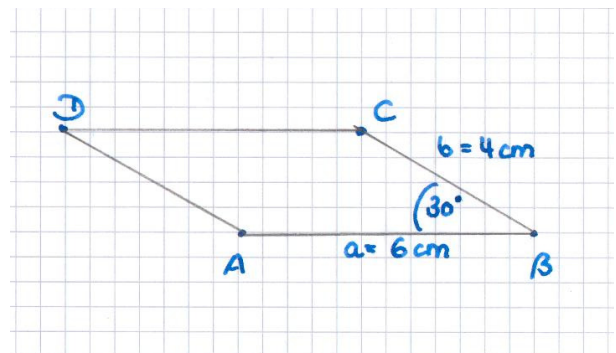
Berechnen können

Beispiel: Berechne den Flächeninhalt eines Parallelogramms, von dem die eine Seite und die zugehörige Höhe bekannt sind.

Beispiel: $a = 6 \text{ cm}$; $h_a = 4 \text{ cm}$; $A = a \cdot h_a$;
 $A = 6 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm}$

Problemlösen

Beispiel: Berechne den Flächeninhalt eines Parallelogramms mit $a = 6 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, und $\beta = 30^\circ$.



Da die Höhe fehlt, lässt sich die Formel nicht unmittelbar anwenden. Es handelt sich bei der Aufgabe also um ein Problem. Man kann versuchen für diesen Fall die Höhe zu bestimmen.

Kapitel 6

6.2. Geometrische Begriffe

6.2.1. Überblick:

Beim Lehren mathematischer Begriffe hat man unterschiedliche Typen und unterschiedliche Rollen der Begriffe im Unterricht zu unterscheiden. Nach ihnen richten sich Art und Dauer der einzelnen Unterrichtsmaßnahmen.

6.2.2. Theorie:

Die Vielfalt geometrischer Begriffe, die in unterschiedlichen Unterrichtssituationen zu lehren ist, erfordert es, Typen von Begriffen und Rollen der Begriffe im Unterricht zu unterscheiden.

6.2.3. Einteilung:

- **Typen**
- **Rollen**

Kapitel 6

Typen geometrischer Begriffe:

In der Geometrie werden unterschiedliche Typen von Begriffen verwendet: Objekte, Relationen, Abbildungen und Maße. In geometrischen Theorien sind Begriffe entweder undefinierte Grundbegriffe oder es handelt sich um abgeleitete Begriffe, die definiert werden. In HILBERTs Grundlagen der Geometrie (1899) sind z.B. die Begriffe "Gerade" und "liegt auf" undefinierte Grundbegriffe. Die Begriffe "Strecke" und "parallel" werden dagegen definiert.

In Definitionen werden neue Begriffe eingeführt, indem sie auf Grundbegriffe oder bereits definierte Begriffe zurückgeführt werden.

Beispiel: Ein Rechteck ist ein Parallelogramm mit gleich langen Diagonalen. Der neue Begriff "Rechteck" wird auf die bekannten Begriffe "Parallelogramm", "gleich lang" und "Diagonale" zurückgeführt.

Berühmt sind die Definitionen aus den Elementen des EUKLID (um 300 v. Chr.). Über das Wesen geometrischer Definitionen äußert sich BLAISE PASCAL in seiner Abhandlung: Vom geometrischen Geist.

Objekte:

Gerade, Strecke, Winkel, Vieleck, Kreis, Würfel, ...

Relationen:

liegt auf, parallel, senkrecht, kongruent, ähnlich, ...

Abbildungen:

Achsenspiegelung, Drehungen, Scherungen, ...

Maße:

Länge, Winkelgröße, Flächeninhalt, Rauminhalt



Kapitel 6

Rollen von geometrischen Begriffen im Unterricht:

Geometrische Begriffe spielen unterschiedliche Rollen im Geometrieunterricht. Ein Begriff kann sich als Leitbegriff über den gesamten Geometrieunterricht hinziehen und wird dann langfristig gelernt. Als Schlüsselbegriff kann er eine Unterrichtssequenz strukturieren und wird dann mittelfristig gelernt. Standardbegriffe werden in Unterrichtseinheiten kurzfristig gelernt.

- **Leitbegriffe:**
Figur, Abbildung → **langfristiges Lernen**
- **Schlüsselbegriffe:**
kongruent, ähnlich,... → hier benötigt der Schüler Wochen bzw. Monate um diese Begriffe zu lernen → **mittelfristiges Lernen**
- **Standardbegriffe:**
Kreis, Tangente, gleichschenklige Dreiecke
→ schnell erreichbar; → **kurzfristiges Lernen**



Kapitel 6

6.2.4. Beispiele:

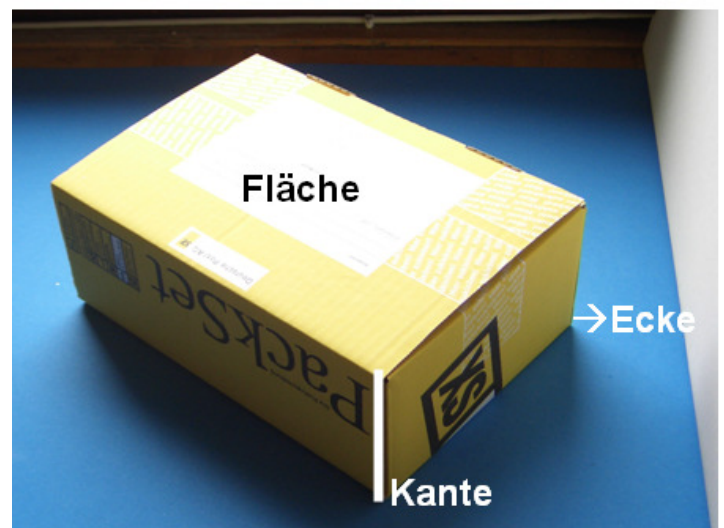
Bei vielen Begriffen ist nur aus dem Kontext zu erkennen, ob es sich um einen Begriff der Raumgeometrie oder der ebenen Geometrie handelt. So hilfreich die Betonung von Analogien ist, ist es doch notwendig, auf Unterschiede hinzuweisen.

Flächen und Körper Quadrat, Rechteck und Kreis sind Flächen. Würfel, Quader und Kugel sind Körper. Flächen können Strecken als Seiten haben. Bei Körpern unterscheidet man dagegen Kanten und Seitenflächen. Bei Kreis und Kugel spricht man dagegen einheitlich vom Radius.

Flächen und Körper

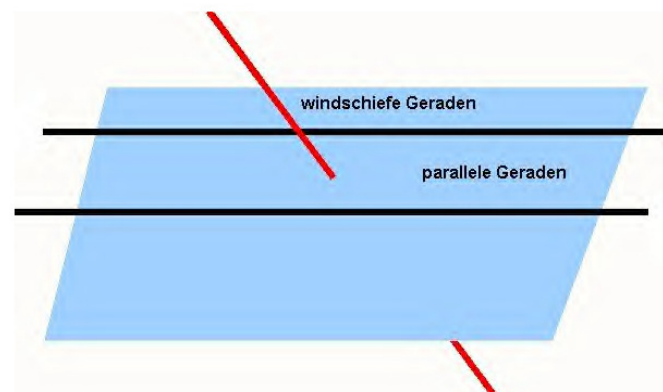


Körper



Relationen

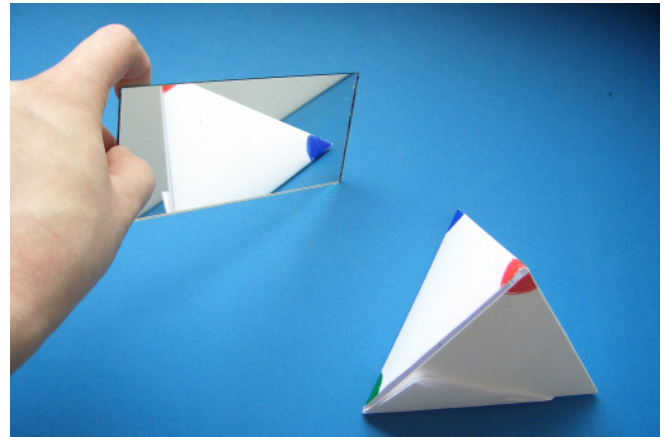
Sowohl in der Ebene als auch im Raum spricht man von parallelen Geraden. Doch sie sind unterschiedlich definiert: Während man in der Ebene nur zu fordern braucht, dass sie keinen Punkt gemeinsam haben, muss man im Raum noch zusätzlich fordern, dass sie in einer Ebene liegen.



Kapitel 6

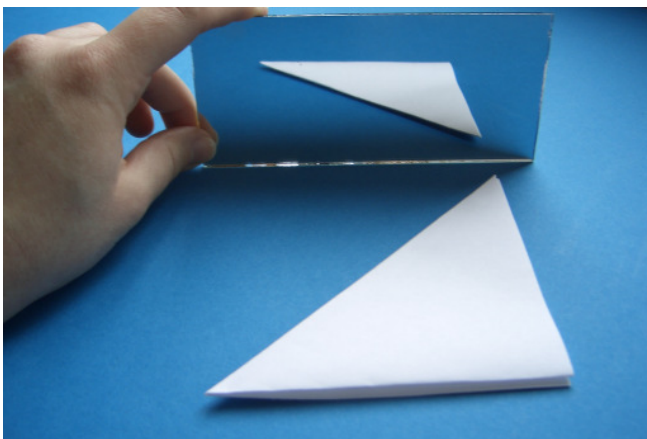
Abbildungen

Den Achsenspiegelungen in der Ebene entsprechen die Ebenenspiegelungen im Raum. Den Drehungen um einen Punkt in der Ebene entsprechen die Drehungen um eine Achse im Raum. Sowohl in der Ebene als auch im Raum gibt es Punktspiegelungen.

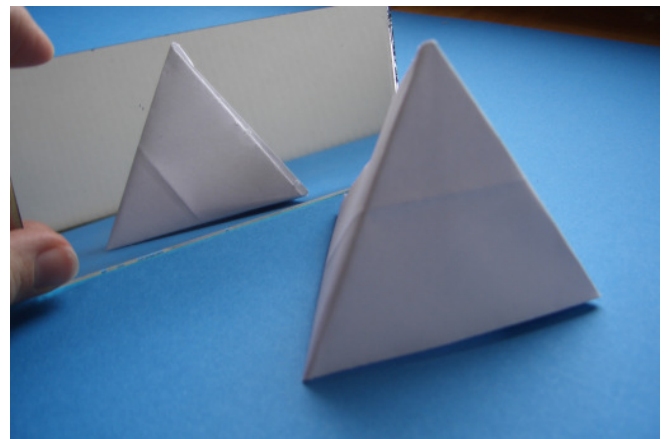


Spiegelungen in der Ebene und im Raum

Achsen Spiegelung



Ebenenspiegelung



Kapitel 6

6.3. Kurzfristiges Lernen geometrischer Begriffe

6.3.1. Überblick:

Zentrale Begriffe einzelner Unterrichtseinheiten werden als Standardbegriffe kurzfristig gelernt. Die Erarbeitung dieser Begriffe folgt bewährten Mustern.

Bei der Erarbeitung zentraler Begriffe von Unterrichtseinheiten sollen Begriffe kurzfristig gelernt werden. Ein bewährtes Muster für derartige Unterrichtseinheiten besteht aus folgenden Phasen:

Darbietung eines Problemkontextes für den Begriff : Mathematische Begriffe sind in Problemkontexten entstanden. Auch im Unterricht wird man deshalb mit einer Problemstellung beginnen, aus der das Bedürfnis zur Bildung des Begriffs erwächst. In dieser Phase wird die Aufmerksamkeit der Lernenden auf typische Objekte und relevante Merkmale gelenkt. Die Lernenden gewinnen intuitive Vorstellungen vom Begriff.

Erarbeitung des Begriffs: Die Begriffsbildung erfordert eine Präzisierung. Es ist zu klären, welche Eigenschaft charakteristisch für den Begriff sein soll (Begriffsinhalt) und welche Objekte unter den Begriff fallen sollen (Begriffsumfang). Diese Betrachtungen münden in der Regel in eine Definition.

Reflexion des Begriffs: Es schließt sich eine Phase der kritischen Reflexion des Begriffs an. Mit Bezug auf die Erklärung werden Beispiele und Gegenbeispiele betrachtet, um den Begriff gegen andere Begriffe abzugrenzen. Indem Querverbindungen zu anderen Begriffen hergestellt werden, wird der Begriff in das Begriffsnetz des Lernenden eingebunden.

Kapitel 6



Begriff:
Raute → Objekt Raute:
eine konkrete Figur
Merkmale der Raute:
gleich lange Seiten;
parallele Gegenseiten.

Definition:
Ein Viereck mit lauter
gleich langen Seiten
heißt Raute.

Begriffsnetz:

Parallelogramm ist Oberbegriff zum Begriff Raute.
Quadrat ist Unterbegriff zum Begriff Raute.
Rechteck ist Nachbarbegriff zum Begriff Raute.

6.3.2. Beispiel:

Es wird gezeigt, wie der Begriff **regelmäßiges Sechseck** im 6. Schuljahr erarbeitet werden kann.

Darbietung eines Problemkontextes

Es wird eine Bienenwabe gezeigt.

Problem: Worin besteht das Bauprinzip der Wabe?
Als Bauprinzip wird erkannt: Lauter Zellen mit einem "regelmäßig" geformten Sechseck als Querschnitt.



Erarbeitung des Begriffs

Problem: Worin besteht die Regelmäßigkeit der Sechsecke? Definition: Sechsecke mit gleich langen Seiten und gleich großen Winkeln heißen regelmäßige Sechsecke.

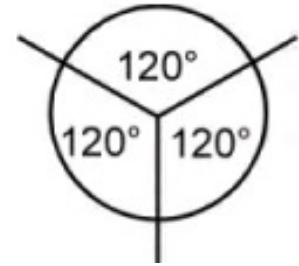
Winkelgröße:

Immer 3 Sechsecke stoßen an einer Ecke zusammen.

Kapitel 6

Problem: Wie groß sind die Winkel im regelmäßigen Sechseck? Einsicht: Die Winkel im regelmäßigen Sechseck betragen 120° .

Problem: Zeichne ein regelmäßiges Sechseck mit 5 cm langen Seiten.



Reflexion des Begriffs: Problem: Ist ein Sechseck mit lauter gleich langen Seiten regelmäßig? (Abgrenzung) nein!

Problem: Gibt es regelmäßige Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, Siebenecke? (Einordnung) ja!

Genetische Definition: Definition durch Angabe des Entstehens.

Beispiel: Ein Parallelogramm ist ein Viereck, das entsteht, wenn sich zwei Parallelstreifen schneiden.

Charakterisierende Definition: Definition durch Angabe einer charakteristischen Eigenschaft.

Beispiel: Ein Parallelogramm ist ein Viereck, bei dem gegenüberliegende Seiten parallel sind.

6.4 Mittelfristiges Lernen geometrischer Begriffe

Werden bestimmte Begriffe als Schlüsselbegriffe von Unterrichtssequenzen gewählt, so erschließt sich den Lernenden die Bedeutung derartiger Begriffe erst in einem längeren Zeitraum: Sie werden mittelfristig gelernt.

- **Mittelfristiges Lernen geometrischer Begriffe**

Schlüsselbegriffe beziehen sich auf grundlegende Phänomene, die geeignet sind, den Lernenden bestimmte Themen zu erschließen. Sie geben Unterrichtssequenzen ihr Gepräge und werden **mittelfristig** gelernt. Ein derartiger Begriff ist z. B. der Begriff der Kongruenz für die Figurenlehre der 8. Jahrgangsstufe oder der Begriff der Ähnlichkeit in der 9. Jahrgangsstufe.

- **Klärung eines neuen Phänomens**

Kapitel 6

Schlüsselbegriffe erwachsen aus Problemstellungen, die der Klärung grundlegender Phänomene dienen. So erwächst etwa der Begriff der Kongruenz aus dem Problem, wie man feststellen kann, dass zwei Figuren die gleiche Form und die gleiche Größe haben.

- **Erzeugung neuartiger Problemstellungen**

Schlüsselbegriffe erzeugen typische Problemstellungen. Für die Kongruenz ergeben sich z.B. die folgenden Fragen: Woran erkennt man, dass zwei Figuren kongruent sind? Wie kann man zu einer Figur eine kongruente Figur erzeugen? Bei einem Dreieck kann man das z.B. mit Hilfe eines dreibeinigen Zirkels bewerkstelligen.

- **Erzeugung neuer Methoden**

Schlüsselbegriffe liefern häufig neue Methoden zum Lösen von Problemen. Mit Hilfe der Kongruenz eröffnet sich z. B. eine sehr wirkungsvolle Methode zum Beweis geometrischer Sätze. Das gilt sowohl für einen "euklidischen" als auch für einen "abbildungsgeometrischen" Aufbau der Elementargeometrie.

- **Erzeugung neuer Einsichten**

Schlüsselbegriffe sind geeignet, neue Einsichten in Eigenschaften von Objekten zu gewinnen und Beziehungen zwischen Objekten zu entdecken. So kann man entdecken, dass eine Schnittlinie eine Figur in zwei zueinander kongruente Teile zerlegt, oder man bemerkt, dass zwei Figuren zueinander kongruente Teilfiguren besitzen.

- **Erzeugung neuer Begriffsbildungen**

Häufig führt ein Schlüsselbegriff zur Bildung neuer Begriffe. Durch Spezialisierung kommt man z.B. bei der Kongruenz zu den Begriffen der gleichsinnigen Kongruenz bzw. der gegensinnigen Kongruenz. Durch Generalisierung kann man z.B. zum Begriff der Ähnlichkeit gelangen.

Dreibeiniger Zirkel zum Kopieren eines Dreiecks



6.5. Langfristiges Lernen geometrischer Begriffe

6.4.4.1. Einteilung:

Grundlegende geometrische Begriffe, die den Geometrieunterricht als Leitbegriffe durchziehen, werden **langfristig** gelernt. Dabei werden zwei grundlegende Typen des Lernens angestrebt:

- **Lernen in Stufen und**
- **Lernen durch Erweiterung**

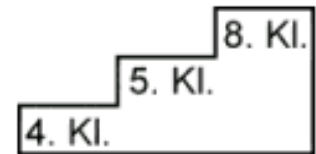
Kapitel 6

6.4.4.2. Theorie:

Bei Leitbegriffen des Geometrieunterrichts wie "Figur", "Abbildung" und "Maß" entwickelt sich das Verständnis im Laufe der Schulzeit, sie werden **langfristig** gelernt. Dieses Lernen kann in unterschiedlicher Weise verlaufen. Angestrebt werden zwei Grundtypen:

- **Lernen in Stufen**

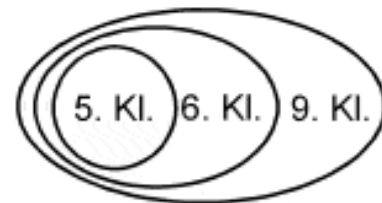
Bereits in der Grundschule lernen die Schülerinnen und Schüler Quadrat, Rechteck, Dreieck, Viereck und Kreis als einprägsame Figuren kennen. Zu Beginn der Sekundarstufe werden diese Figuren analysiert und als Träger von Eigenschaften erkannt. In der 8. Jahrgangsstufe wird das Quadrat als besonderes Rechteck und werden beide als besondere Vierecke erkannt. Die Figur ist damit Teil eines Beziehungsgefüges. Diese unterschiedlichen Sichtweisen kann man als Stufen des Verstehens (siehe 1.) sehen.



Lernen in Stufen

- **Lernen durch Erweiterung**

In der 5. Jahrgangsstufe lernen die Schülerinnen und Schüler, wie man den Flächeninhalt eines Rechtecks mit natürlichen Maßzahlen bestimmen kann. In der 6. Jahrgangsstufe wird diese Begrenzung überwunden, indem nun auch gebrochene Maßzahlen zugelassen sind. In der 9. Jahrgangsstufe wird dann nochmals eine Begrenzung überwunden, indem nun auch irrationale Maßzahlen zugelassen werden. Man kann diesen Vorgang als Lernen durch Erweiterung (siehe 2.) bezeichnen.



Lernen durch Erweiterung

- **Langfristiges Lernen in der Realität**

In der Praxis wird langfristiges Lernen häufig als Kombination von Lernen in Stufen und Lernen durch Erweiterung angestrebt. Die traurige Realität ist jedoch, dass häufig nur Lernen durch Anhäufen von beziehungslosen Fakten erreicht wird. Damit sollte man sich nicht abfinden.

6.2.4.3. Beispiele:

1. Lernen in Stufen

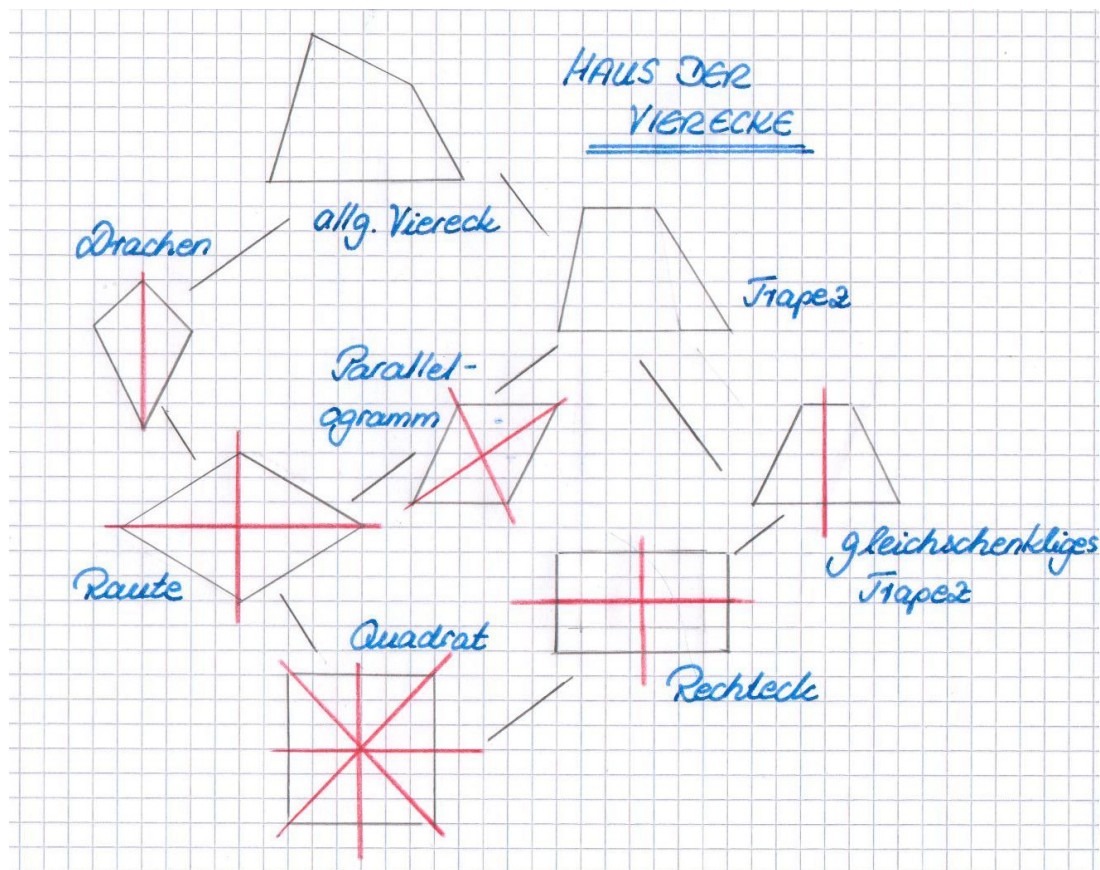
Es wird gezeigt, wie der Begriff der Figur langfristig in Stufen gelernt werden kann.

Kapitel 6

Jahrgangsstufe 8.:

Figur als Teil eines Beziehungsgefüges

In der 8. Jahrgangsstufe werden Beziehungen zwischen Figuren erkannt: Das Rechteck wird im Haus der Vierecke gesehen.



Damit wird es z. B. auch möglich, ein Rechteck als Parallelogramm mit gleich langen Diagonalen zu sehen.

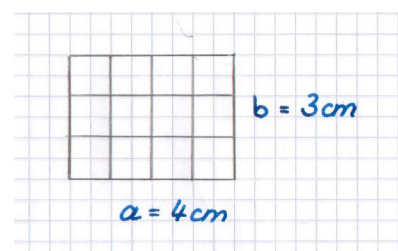
2. Lernen durch Erweiterung

Am Beispiel des Flächeninhalts wird ein langfristiges Lernen durch Erweiterung beschrieben.

5. Jahrgangsstufe:

Rechtecke mit natürlichen Maßzahlen

Ein Rechteck mit natürlichen Maßzahlen wird mit Einheitsquadraten ausgelegt. Die Zahl der Einheitsquadrate gibt den Flächeninhalt an. Man erkennt: Man erhält die Maßzahl des Flächeninhalts, indem man die Maßzahlen der Seiten multipliziert.

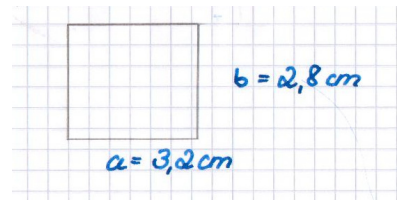


Kapitel 6

6. Jahrgangsstufe:

Rechtecke mit gebrochenen Maßzahlen

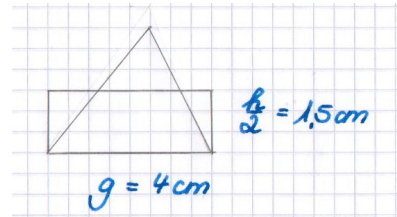
Die Begrenzung auf natürliche Maßzahlen wird überwunden, indem man auch für gebrochene Maßzahlen nach der Regel vorgeht: Man erhält die Maßzahl des Flächeninhalts, indem man die Maßzahlen der Seiten multipliziert.



8. Jahrgangsstufe:

Flächeninhalt von Vielecken

Die Begrenzung auf Rechtecke wird überwunden, indem man Vielecke in Rechtecke verwandelt.



9. Jahrgangsstufe:

Flächeninhalt von Kreisen

Die Begrenzung auf Vielecke wird durchbrochen, indem man den Kreis durch Vielecke approximiert. Mit der Entdeckung irrationaler Zahlen können die bisherigen Formeln auch auf irrationale Zahlen erweitert werden.

