Funktionentheorie/Komplexe Funktionen
TUHH
VL 11, 29. Juni 2017

Komplexe Strömungspotentiale mit Anwendung

Michael Hinze

Sei $f(z) = \phi + i\chi$ komplexes Strömungspotential zur Strömung v.

Drücke Zirkulation und Wirbelstärke von v in Termen von f aus.

Dazu sei γ geschlossene doppelpunktfreie Kurve in der Ebene. Dann war

Zirkulation des Vektorfeldes v

$$Z = \int_\gamma v \cdot dx = \int_a^b v(\gamma(t)) \overset{\text{Eukl. SKP}}{\cdot} \dot{\gamma}(t)\, dt$$

Fluß von v durch γ

$$W = \int_\gamma v \cdot d\sigma = \int_\gamma v \cdot \nu \, d\sigma = \int_\gamma (v \cdot \nu)(\gamma(t))\, |\dot{\gamma}(t)|\, dt$$

<u>Damit gilt</u>

Sei $f(z) = \phi + i\chi$ komplexes Strömungspotential zu v. Dann gilt mit jeder geschlossenen, doppelpunktfreien Kurve γ:

$$v(z) = v_1(z) + i v_2(z) = \overline{f'(z)} \qquad v = v_1 + i v_2$$

$$Z = \mathrm{Re} \int_\gamma f'(z)\,dz$$

$$W = \mathrm{Im} \int_\gamma f'(z)\,dz$$

Beachte dabei: $f'(z) = (\phi(z) + i\chi(z))' = \phi_x + i\chi_x$

$$= v_1 - i v_2$$

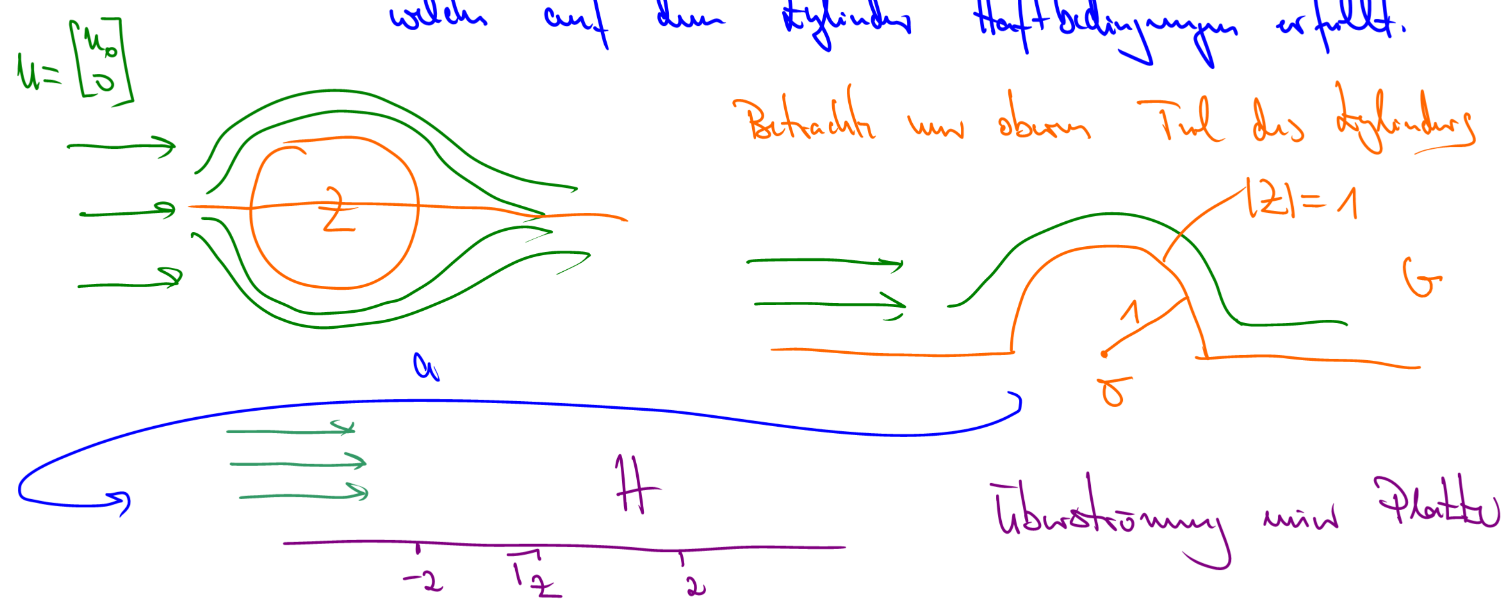
$$\longrightarrow \quad v = v_1 + i v_2 = \overline{f'(z)}$$

Zur Darstellung von Z und W betrachte

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = \int_\gamma v_1 - i v_2 \, dz = \int_a^b \big(v_1(\gamma(t)) - i v_2(\gamma(t))\big)\big(\dot\gamma_1(t) + i\dot\gamma_2(t)\big)\,dt$$

$$= \dots = Z + iW$$

Anwendungen: Finde symmetrische Strömung um den Kreiszylinder, welche auf dem Zylinder Haftbedingungen erfüllt.



<u>Ziel</u>: Löse Aufgabe für überströmte Platte und transformiere dann mit Hilfe von a zurück. $\{ z = re^{i\varphi};\ r \geq 1,\ \varphi \in [0,\pi] \}$

<u>Finde a</u>: Dazu sei $G = \{ z = x+iy;\ y \geq 0 \text{ und } |z| \geq 1 \}$.

In G sind wir an der Strömung interessiert.

Setze $a(z) := z + \frac{1}{z}$. Dann gilt $H = a(G) = \{ z;\ y \geq 0 \}$

Auf $Z = \{ |z| = 1;\ y \geq 0 \}$ gilt

$$a(Z) = \{ z = x+iy;\ y = 0 \text{ und } -2 \leq x \leq 2 \} =: \Gamma_Z$$

denn mit $z = re^{i\varphi}$ ist für $|z| = 1$:

$$a(z) = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi \in [-2,2]$$

Sei $U(x,y) := y$. Dann gilt $U_{|\Gamma_Z} = 0$ und $\Delta U = 0$

Setze $\chi(x,y) := U(a(x+iy))$. Dann gilt $\Delta\chi = 0$,

weil a konforme Abb. und $\chi_{|Z} = U_{|\Gamma_Z} = 0$

χ wird die Stromfunktion unserer gesuchten Strömung $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

sein, d.h. $v = \begin{bmatrix} \chi_y \\ -\chi_x \end{bmatrix}$

$$a(x+iy) = z + \frac{1}{z} = re^{i\varphi} + \frac{1}{r}e^{-i\varphi}$$

$$= \underbrace{\left(r+\tfrac{1}{r}\right)\cos\varphi}_{x} + i\underbrace{\left(r-\tfrac{1}{r}\right)\sin\varphi}_{y}$$

Bestimme χ: $U(a(x+iy)) = (r - \frac{1}{r})\underbrace{\sin\varphi}_{\frac{y}{r}}$

Also $\chi = U(a(x+iy)) = \left(r - \frac{1}{r}\right)\frac{y}{r} \overset{r=\sqrt{x^2+y^2}}{=} y - \frac{y}{x^2+y^2}$

<u>Setze</u>: $v(x,y) := \begin{bmatrix} \chi_y \\ -\chi_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{bmatrix}$

Dann gilt $\operatorname{div} v = 0$ und es gibt ϕ mit $\nabla\phi = v$, weil $\operatorname{rot} v = 0$

Komplexes Strömungspotential: $f(z) = \phi + i\chi$.

Damit wie oben $v = \overline{f'(z)} = \phi_x - i\chi_x$.

Weitere Beispiele $\rightarrow$ Folien Ende zu konformen Transformation