Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Variationsrechnung (SS 2015)
Blatt 1

Bitte beachten Sie, dass die durch (*) gekennzeichneten Aufgaben nicht bewertet und korrigiert werden. Sie werden im Tutorium gemeinsam bearbeitet.

Aufgabe 1 (3+1+1 Punkte)

Sei $X := C^0([0,1])$ der Vektorraum der auf dem abgeschlossenen Intervall $[0,1]$ stetigen, reellwertigen Funktionen und $U := \{f \in X \mid f(0) = 0\}$. Ferner seien wie in der Vorlesung durch $\| f \|_\infty := \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ und $\| f \|_1 := \int_0^1 |f(x)| dx$ zwei Normen auf X definiert.

(a) Zeigen Sie, dass U ein abgeschlossener Unterraum von $(X, \| \,.\, \|_\infty)$ ist, aber als Unterraum von $(X, \| \,.\, \|_1)$ nicht abgeschlossen ist.

(b) Es sei $(X, \| \,.\, \|)$ ein Banachraum und $Y \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Beweisen Sie, dass $(Y, \| \,.\, \|)$ ebenfalls vollständig ist.

(c) Zeigen Sie die Umkehrung der Aussage in (b), d.h. jeder vollständige Unterraum $(Y, \| \,.\, \|)$ eines Normierten Raumes $(X, \| \,.\, \|)$ ist abgeschlossen.

Aufgabe 2 (*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Beweisen Sie:

(a) Auf dem Raum $C^k(\overline{\Omega})$ wird eine Norm erklärt durch die Vorschrift:

$$\| u \| := \begin{cases} \sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}_0^n,\, |\nu|\le k} \| \partial^\nu u \|_\infty & \text{wenn } k \in \mathbb{N}_0, \\ \max\limits_{\nu\in\mathbb{N}_0^n} \| \partial^\nu u \|_\infty & \text{wenn } k = \infty. \end{cases}$$

Dabei bezeichnet $\| \,.\, \|_\infty$ wie üblich die Supremumnorm.

(b) Der Raum $C^k(\overline{\Omega})$ ist vollständig bezüglich dieser Norm.

Aufgabe 3 (3+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\eta(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{wenn } |x| < 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beliebig oft differenzierbar ist und Träger in $\overline{B}_1(0)$ hat. Folgern Sie: $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)dx < \infty$.

(b) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Konstruieren Sie eine Funktion $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ deren Träger $\operatorname{spt} \eta$ kompakt in I enthalten ist.

Hinweis zu Teil (a): Betrachten Sie die Funktion $\exp(\frac{1}{x})$.

Aufgabe 4 (*)

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{L}^n(X) < \infty$, wobei $\mathcal{L}^n$ das n-dimensionale Lebesgue-Maß ist. Für $p \geq 1$ bezeichne $L^p(X)$ den Raum der Äquivalenzklassen von p-integrierbaren reellwertigen Funktionen auf X.

(a) Zeigen Sie, dass für alle Exponenten $1 \leq p \leq q \leq \infty$ gilt: $L^p(X) \subset L^q(X)$.

(b) Finden Sie im Fall $\mathcal{L}^n(X) = \infty$ zwei Exponenten $1 \leq p \leq q \leq \infty$ für die die Aussage in (a) falsch ist.

Abgabe: Montag, den 4. Mai vor der Vorlesung.