Satz von Beppo Levi über die monotone Konvergenz

Satz (7.1)

Sei $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von μ-fast überall monoton wachsenden, μ-integrierbaren Funktionen $f_m : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ mit der Eigenschaft, dass die Folge der Integral $\int f_m \, d\mu$ in $\mathbb{R}$ beschränkt ist. Dann existiert eine μ-integrierbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ punktweise μ-fast überall gegen f konvergiert, und es gilt $\lim_m \int f_m \, d\mu = \int f \, d\mu$.

Anmerkungen:

- Der Satz von Beppo Levi gilt auch für monoton fallende Folgen μ-integrierbarer Funktionen.
- Für Riemann-integrierbare Funktionen ist eine entsprechende Aussage falsch.

Anwendungsbeispiel:

Betrachte die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{x^2}$.

Die Stammfunktionen von f können nicht durch die üblichen „elementaren" Funktionen dargestellt werden (Exponentialfkt, Logarithmus, Sinus, Kosinus, ...)

Alternative: Stelle die Integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ als Reihen dar. Erinnerung: Reihenentwicklung der Exponentialfkt $\Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(x) = e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Definiere für jedes $n \in \mathbb{N}$ jeweils $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{k!}$

Dann ist f der punktweise Limes von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Wegen $x^{2n} \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ ist die Folge monoton wachsend.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1)_{[a,b]} = \{B \in \mathcal{A}_1 \mid B \subseteq [a,b]\}$ und $\mu = \mu_1|_{\mathcal{A}}$.

[Lebesgue-messb. Teilmengen von $\mathbb{R}$

Übereinstimmung von Riemann- und Lebesgue-Integral

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int f\,d\mu, \quad \int_a^b f_n(x)\,dx = \int f_n\,d\mu \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Alle Bedingungen des Satzes von Beppo Levi werden durch $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt. Insbesondere ist die Folge $\left(\int f_n \, d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, denn

$$\int f_n \, d\mu = \int_a^b f_n(x)\, dx \overset{f_n \le f_{n+1} \le f}{\le} \int_a^b f(x)\, dx$$

$$= \int_a^b e^{x^2} dx \le (b-a)\cdot e^{c^2} \text{ mit}$$

$c = \max\{|a|, |b|\}$. Damit erhalten wir

$$\int_a^b e^{x^2} dx = \int f \, d\mu \overset{\text{Satz von Beppo Levi}}{=} \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

nach oben beschränkt, denn

$$= \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{k!}\right) dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_a^b \frac{x^{2k}}{k!}\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!}\right]_a^b$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{b^{2k+1}}{(2k+1)k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{a^{2k+1}}{(2k+1)k!} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)k!} \left(b^{2k+1} - a^{2k+1}\right) \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!} \left(b^{2n+1} - a^{2n+1}\right)$$

Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz

Satz (7.2)

Sei $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge μ-integierbarer Funktionen $f_m : \Omega \to \mathbb{R}$, die fast überall gegen eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ konvergiert. Sei ferner $g : \Omega \to \mathbb{R}_+$ eine μ-integrierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass μ-fast überall jeweils $|f_m| \le g$ erfüllt ist, für jedes $m \in \mathbb{N}$. Dann ist auch f μ-integrierbar, und es gilt

$$\int f \, d\mu \quad = \quad \lim_{m\to\infty} \int f_m \, d\mu.$$

$n \in \mathbb{N}$

$) \, dx$

en wir
po Levi

$d\mu$

Beweis von Satz 7.2:

geg.: Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μ-integrierbarer Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, konvergiert μ-fast überall gegen eine Fkt. $f : \Omega \to \mathbb{R}$

$g : \Omega \to \mathbb{R}_+$ μ-integrierbar mit

$|f_n| \leq g$ μ-fast überall, $\forall n \in \mathbb{N}$

z.zg.: f ist μ-integrierbar, und es gilt $\int f \, d\mu = \lim\limits_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu$

$)_{n \in \mathbb{N}}$

on

f

$d\mu$

lt

$\forall n \in \mathbb{N}$

$d\nu =$

$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$ □

Ändere f, g und die f_n auf Nullmengen so ab, dass alle Bed überall (und nicht nur μ-fast überall) gelten

Für $m, \nu \in \mathbb{N}$ definiere

$$g_{m,\nu} = \max\{f_m, f_{m+1}, \dots, f_{m+\nu}\}$$

Bem: Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist $(g_{m,\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend, jedes $g_{m,\nu}$ ist μ-integrierbar, $|g_{m,\nu}| \le g \ \forall m, \nu$ $\to$ Die Folge $\left(\int g_{m,\nu} \, d\mu\right)_{\nu \in \mathbb{N}}$ ist nach oben beschränkt, durch $\int g \, d\mu < +\infty$

Definiere $g_m(x) = \lim_{\nu\to\infty} g_{m,\nu}(x) \quad \forall x \in \Omega, \forall \nu$.

Satz von B. Levi $\Rightarrow$ Jedes g_m ist μ-integrierbar.

$\int g_m \, d\mu = \lim_{\nu\to\infty} \int g_{m,\nu} \, d\mu$.

beachte: $g_m = \sup \{ f_k \mid k \geq m \} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Die Folge ist offenbar monoton fallend, die Folge der Integrale $\int g_m \, d\mu$ ist nach unten beschränkt durch $\int (-g) \, d\mu$, denn: $|f_{m,\nu}| \leq g \quad \forall m, \nu \Rightarrow$

$|g_m| \leq g \quad \forall m \quad \Rightarrow \quad g_m \geq -g \quad \forall m$.

Für alle $x \in \Omega$ gilt $g_m(x) \geq f_n(x) \ \forall n \geq m$

$\xrightarrow{n \to \infty} g_m(x) \geq f(x) \ \forall m \in \mathbb{N}$

Auf Grund der punktweisen Konvergenz gibt es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall n \geq m$

$\Rightarrow f_n(x) < f(x) + \varepsilon \ \forall n \geq m \underset{\text{zum Supremum}}{\xrightarrow{\text{Übergang}}} g_m(x) \leq f(x) + \varepsilon$

Also: Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f(x) \leq g_n(x) \leq f(x) + \varepsilon \ \forall n \geq m$. $\Rightarrow (g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise monoton fallend gegen f. Satz von B. Levi $\Rightarrow$ f ist μ-integrierbar, $\int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int g_m \, d\mu$

Zeige genauso: Es gibt eine Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-integrierbarer Funktionen, die monoton wachsend von unten punktweise gegen f konvergiert, mit $\lim_{n\to\infty}\int h_n\,d\mu = \int f\,d\mu$ mit $h_n \leq f_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Dann gilt

$\forall n\in\mathbb{N}$: $h_n \leq f_n$, $f \leq g_n$

$\Rightarrow \int h_n\,d\mu \leq \int f_n\,d\mu \leq \int g_n\,d\mu$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$n\to\infty \Rightarrow$ Aus $\lim_{n\to\infty} h_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} g_n\,d\mu = \int f\,d\mu$ folgt mit dem Sandwich-Lemma $\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu$ $\square$

Stetigkeit parameterabhängiger Integrale

Sei (T, d) ein metrischer Raum.

Satz (7.3)

Sei $f : \Omega \times T \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften.

(i) Für jedes $t \in T$ ist $\Omega \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, t)$ eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion.

(ii) Es gibt ein $t_0 \in T$, so dass $T \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ für μ-fast alle $x \in \Omega$ in t_0 stetig ist.

(iii) Es gibt eine Umgebung $U \subseteq T$ von t_0 und eine μ-integrierbare Funktion $g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$, so dass für alle $t \in U$ jeweils $|f(x, t)| \leq g(x)$ für μ-fast alle $x \in \Omega$ erfüllt ist.

Dann ist $F : U \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \int f(x, t)\, d\mu(x)$ eine auf ganz U definierte, reellwertige, in t_0 stetige Funktion.

Differenzierbarkeit parameterabhängiger Integrale

Satz (7.4)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : \Omega \times I \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Für jedes $t \in I$ ist $\Omega \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,t)$ eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion.

(ii) Es gibt ein $t_0 \in I$, so dass $\Omega \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, t_0)$ μ-integrierbar ist.

(iii) Auf dem gesamten Definitionsbereich $\Omega \times I$ existiert die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial t}$.

(iv) Es gibt eine μ-integrierbare Funktion $g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$, so dass für alle $t \in I$ jeweils $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \le g(x)$ für μ-fast alle $x \in \Omega$ erfüllt ist.

Dann ist $F : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \int f(x,t)\,d\mu(x)$ eine reellwertige, auf ganz I definierte und differenzierbare Funktion, und es gilt $F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,d\mu(x)$ für alle $t \in I$.

Partielle Ableitung unter dem Integralzeichen

Folgerung (7.5)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Lebesgue-messbare und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, und sei $f : A \times U \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften.

(i) Für jedes $y \in U$ ist die Funktion $A \to \mathbb{R}$, $a \mapsto f(a, y)$ Lebesgue-integrierbar.

(ii) Für jeden Punkt $a \in A$ existieren die partiellen Ableitungen $\partial_j f_a$ mit $1 \leq j \leq n$ auf ganz U, wobei $f_a : U \to \mathbb{R}$ durch $f_a(x) = f(a, x)$ definiert ist.

(iii) Es gibt eine μ-integrierbare Funktion $g : A \to \bar{\mathbb{R}}_+$, so dass $|\partial_j f_a| \leq g(a)$ für $1 \leq j \leq n$ gilt.

Dann ist die Funktion $F : U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_A f(a, x)\, d\mu(a)$ partiell differenzierbar, und es gilt

$$\partial_j F(x) = \int_A \partial_j f_a(x)\, d\mu(a) \quad \text{für alle } x \in U.$$

Beispiel (zu Satz 7.3 und Satz 7.5)

Betrachte $f: [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$(x, y, z) \mapsto x^2 y + 3z$

Überprüfe die Bed von Satz 7.3:

Wir arbeiten mit dem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ geg durch $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{A}_1 \mid B \subseteq [0,1]\}$ und $\mu = \mu_1|\mathcal{A}$. Der metrische Raum ist hier $(\mathbb{R}^2, d)$ mit $d(v,w) = \|v-w\|_2$

zu (i) Für alle $(y,z) \in \mathbb{R}^2$ ist $[0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 y + 3z$

$\mathcal{A}$-messbar (erfüllt, da die Fkt. stetig in x)

zu (ii) $(y_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$, so dass $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(y, z) \mapsto x^2 y + 3z$

für alle $x \in [0,1]$ stetig in (y_0, z_0) ist (erfüllt, da Polynomfkt. überall stetig)

zu (iii) geg. $(y_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$ $\exists$ Umg. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von (y_0, z_0) und $g: [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}_+$, so dass $|f(x,y,z)| \leq g(x)$ $\forall x \in [0,1]$

Wähle ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$; betrachte $\overline{B} = \overline{B}_\varepsilon(y_0, z_0)$, $B = B_\varepsilon(y_0, z_0)$

$\Rightarrow [0,1] \times \overline{B}$ ist kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^3$

$\overset{\text{Maximumsprinzip}}{\Longrightarrow}$ $\exists \gamma \in \overline{\mathbb{R}}^+$ mit $|f(x,y,z)| \leq \gamma$ $\forall (x,y,z) \in \overline{B}$

f stetig "

Def.: wir $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$g(x) = \gamma \quad \forall x \in [0,1]$, dann ist g

μ-integrierbar $\left(\int g \, d\mu = \int_0^1 \gamma \, dx = \gamma \right)$

und $|f(x,y,z)| \leq g(x) \quad \forall x \in [0,1]$

ist für alle $(y,z) \in B$ erfüllt.

Die Integralfkt. $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist

geg. durch $F(y,z) = \int f(x,y,z) \, d\mu(x)$

$= \int_0^1 f(x,y,z) \, dx = \int_0^1 (x^2 y + 3z) \, dx$

und $|f(x,y,z)| \le g(x) \quad \forall x \in [0,1]$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 y + 3xz\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3}y + 3z\right) - 0$

$= \frac{1}{3}y + 3z$ (Diese ist als Polynomfkt. auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig.)

Anwendung von Satz 7.5:

$\partial_2 f(x,y,z) = x^2, \quad \partial_3 f(x,y,z) = 3$

$\int \partial_2 f(x,y,z)\, d\mu(x) = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3} = \partial_y F(y,z)$

$\int \partial_3 f(x,y,z)\, d\mu(x) = \int_0^1 3\, dx = 3 = \partial_z F(y,z)$