Un tema de Teoría de Números

El Equipo

Resumen

Este artículo comienza con una revisión breve de dos álgebras: el Algebra de los números reales y el Álgebra de los números complejos. Ello es necesario para abordar, de manera sintética, los números cuaterniones. Se trata de una extensión de los números complejos. Puesto que, según el Teorema Fundamental del Álgebra, el cuerpo de los números complejos es algebraicamente cerrado estos En fin, son nuevos números que no dejan de asombrarnos. Así como los números reales llenan completamente la recta numérica y los números reales lo hacen con el plano, éstos requieren de espacios con dimensión n > 3. Admiten distintas representaciones. Se presentan algunas operaciones. También se señalan diversas aplicaciones.

Palabras clave: cuaterniones, números hipercomplejos, extensión de los números complejos.

INTRODUCCIÓN

PARTE I

Revisión de algunos sistemas numéricos.

1.1 El cuerpo de los números reales

1.2 El cuerpo de los números complejos

PARTE II

Los cuaterniones.

2.1 Introducción

2.2 ¿Qué son los cuaterniones?

2.3 Operaciones básicas con estos números.

2.4 Los cuaterniones y su estructura algebraica.

PARTE III

Un poco de su historia. Hamilton.

PARTE IV

Algunas aplicaciones.

PARTE V

Algo de humor.

PARA FINALIZAR

INTRODUCCIÓN

La teoría de los cuaterniones, nombre dado por Hamilton a sus números cuatro-dimensionales, se publica en 1844. Con este sistema, se crea un cálculo que respeta el conjunto de reglas prescritas por el principio de permanencia con la sola excepción de la conmutatividad de la multiplicación.

Estos números son una extensión de los números complejos construidos mediante herramientas del álgebra abstracta. Por esa razón se los conoce como números hipercomplejos, lo mismo que los cocuartreniones, bicuaterniones, tesarines, octoniones y sedeniones.

Todos tienen estructuras n-dimensionales sobre los números reales. Pero ninguna de las extensiones mencionadas alcanza la estructura algebraica de cuerpo, porque según el Teorema Fundamental del Álgebra, el cuerpo de los números complejos es algebraicamente cerrado. La construcción de los cuaterniones por Hamilton fue el primer ejemplo de este tipo de estructura.

Así como los números complejos pueden ser vistos como puntos en un plano, los números hipercomplejos lo son como puntos en algún espacio euclídeo de más dimensiones (4 dimensiones para los cuaterniones, tesarines y cocuaterniones, 8 para los octoniones y bicuaterniones, 16 para los sedeniones).

Sin ninguna duda estos nuevos números no dejan de asombrar, aunque nuestro mayor conocimiento esté puesto en los números reales y en los números complejos, como una extensión de aquellos.

PARTE I

Lo primero es revisar brevemente:

1.1 El álgebra de los números reales.

1.2 El álgebra de los números complejos.

En Matemática, hay números de muchas clases: naturales, enteros, decimales, racionales, irracionales, reales, complejos, etc.

En el número 20 de la revista mendom@tic@ se consideró la siguiente cadena de inclusiones de conjuntos numéricos

$$\mathbf{IN} \subset \mathbf{Z} \subset \mathrm{ID} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{IR} \subset \mathbf{C}, \qquad (1)$$

donde IN es el conjunto de los naturales, Z de los enteros, ID de los decimales, Q de los irracionales, IR, de los reales y C de los complejos.

El conjunto I de los números irracionales, no figura en la cadena dada en (1) por los motivos que se explicaron oportunamente. Si tales razones no se recuerdan es posible encontrarlas en el número 19 de la revista. Cabe agregar que la razón de la "ampliación" de los conjuntos numéricos señalados en (1), es bien conocida.

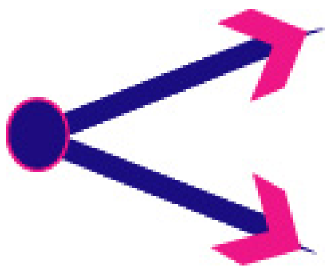
Los números complejos pueden ser vistos como puntos en un plano. Incluyen a los números reales y los imaginarios puros y constituyen una de las construcciones teóricas más importantes de la inteligencia humana.

Estos números son la herramienta de trabajo del álgebra ordinaria, llamada álgebra de los números complejos, así como de ramas de la matemática pura y aplicada como variable compleja, aerodinámica y electromagnetismo entre otras de gran importancia.

¡Pero la sorpresa es que hay números hipercomplejos!!!

1.1 El álgebra de los números reales.

Hemos considerado, en un número anterior de esta producción digital, que el conjunto IR de los números reales posee doble estructura algebraica:



1.- La estructura de cuerpo (un cuerpo es un anillo especial) con respecto a dos operaciones internas: la adición y la multiplicación usuales en IR.

2.- La de estructura de espacio vectorial con respecto a una operación interna: la adición y otra externa: la multiplicación en IR. En este caso la multiplicación interna funciona como operación externa. Los mismos números reales actúan como escalares y como vectores.

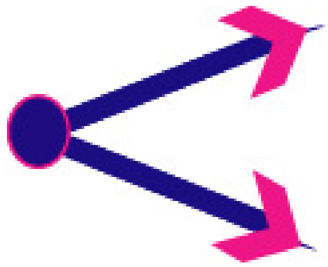
Por 1 y 2 estamos ante la estructura algebraica de álgebra:

El ÁLGEBRA DE LOS NÚMEROS REALES.

1.2 El álgebra de los números complejos.

Los números complejos se consideran como puntos del plano: el plano complejo. La propiedad más importante que caracteriza a los números complejos es el Teorema fundamental del álgebra, que afirma que cualquier ecuación algebraica de grado *n* tiene exactamente n soluciones complejas.

El conjunto C de los números complejos posee doble estructura algebraica.



1.- La estructura de cuerpo (un cuerpo es un anillo especial) con respecto a dos operaciones internas: la adición y la multiplicación usuales en C.

2.- La de estructura de espacio vectorial con respecto a una operación interna: la adición y otra externa: la multiplicación en C con operadores en IR.

Por 1 y 2 estamos ante la estructura algebraica de álgebra:

El ÁLGEBRA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

PARTE II

Los cuaterniones.

2.1 Introducción

2.2 ¿Qué son los cuaterniones?

2.3 Operaciones básicas con estos números.

2.4 Los cuaterniones y su estructura algebraica.

2.1 Introducción.

En lo que sigue vamos a referirnos a otras álgebras que nacen a partir de los números hipercomplejos. Se trata de una extensión de los números complejos construidos mediante herramientas del álgebra abstracta, tales como cuaterniones, tessarine, cocuaterniones, octoniones, bicuaterniones y sedeniones

El álgebra abstracta es el campo de la Matemática que estudia las estructuras algebraicas como las de grupo, anillo, cuerpo o espacio vectorial. Muchas de estas estructuras fueron definidas formalmente en el siglo XIX, y, de hecho, el estudio del álgebra abstracta fue motivado por la necesidad de más exactitud en las definiciones matemáticas.

El estudio del álgebra abstracta ha permitido observar con claridad lo intrínseco de las afirmaciones lógicas en las que se basa toda la Matemática y las ciencias naturales, y se usa hoy en día prácticamente en todas las ramas de aquella. Además, a lo largo de la historia, los algebristas descubrieron que estructuras lógicas aparentemente diferentes muy a menudo pueden caracterizarse de la misma forma con un pequeño conjunto de axiomas.

El término *álgebra abstracta* se usa para distinguir este campo del *álgebra elemental* o del álgebra de la *escuela secundaria* que muestra las reglas correctas para manipular fórmulas y expresiones algebraicas que conciernen a los números reales y números complejos. El álgebra abstracta fue conocida durante la primera mitad del siglo XX como *álgebra moderna*.

En esta ocasión nuestra atención está puesta en los cuaterniones.

2.2 ¿Qué son los cuaterniones?

Los cuaterniones son números hipercomplejos. Son una extensión de los números reales, similar a la de los números complejos.

Mientras que los números complejos son una extensión de los reales por la adición de la unidad imaginaria *i*, tal que $i^2 = -1$, los cuaterniones son una extensión generada de manera análoga, añadiendo las unidades imaginarias: *i*, *j* y *k* a los números reales y tal que $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Esto se puede resumir en esta tabla de multiplicación: la Tabla de Cayley

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

1, *i*, *j*, *k*, son entonces las "bases" de las componentes de un cuaternión.

Un cuaternión es de la forma

x = (a, b, c, d) lo cual puede escribirse como x = a + bi + cj + dk.

donde a, b, c, d son números reales unívocamente determinados por cada cuaternión. Los números 1, i, j, k se consideran básicos.

En cuanto al conjugado de x se escribe: $\overline{x}$ = a – bi –cj + dk.

Pongamos IR^4 para simbolizar el conjunto de los cuaterniones. Se trata del conjunto:

$IR^4 = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in IR\}$

Este conjunto coincide con el espacio real de 4 dimensiones, de manera similar que el conjunto de los números reales coincide con el espacio real de una dimensión y el conjunto de los complejos lo hace con el espacio de dos dimensiones.

Todo cuaternión también se puede representar por medio de matrices (matemáticas).

- El cuaternión q = a + bi + cj + dk se puede representar usando matrices complejas de 2 x 2:

$$\begin{pmatrix} a-di & -b+ci \\ b+ci & a+di \end{pmatrix}$$

- Otra manera es la representación por medio de matrices reales de 4 x 4

$$\begin{pmatrix} a & -b & d & -c \\ b & a & -c & -d \\ -d & c & a & -b \\ c & d & b & a \end{pmatrix}$$

En este caso el determinante de la matriz resulta igual a
$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 =$ **IIqII**

Además de las representaciones matriciales un cuaternión puede expresarse como el producto interno (*componente a componente*) de dos vectores, de los cuales uno es el de las componentes

$\vec{x} = (a_1 , a_2 , a_3 , a_4)$,

y el otro el de las "bases": $\{1, i, j, k\}$

En este caso, el elemento a_1 que forma la componente real se anota aparte, y para el producto interno se consideran solamente las tres bases *i*, *j*, *k*:

$x = (a_1, \vec{a}) = (a_1 , a_2 , a_3 , a_4)$,

Esta representación tiene algunas ventajas que pueden ser vistas en algunas operaciones como el producto de cuaterniones. No es objeto de tratamiento en este artículo.

2.3 Operaciones básicas con estos números

Definimos la suma y producto entre cuaterniones mediante la aritmética usual de los números complejos. Puede comprobarse que el conjunto IR^4 junto con estas operaciones, satisface todas las propiedades de un cuerpo, con excepción de que -el producto- no es conmutativo.

La adición se realiza término a término, de manera similar a lo que se hace con los complejos.

$(a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) =$

$(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k.$

Producto

El producto se realiza componente a componente, y está dado en su forma completa por:

$ab = (a_1b_1 – a_2b_2 – a_3b_3 - a_4b_4) + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)i$

$+ (a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 - a_4b_2)j + (a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_3)k$

El producto entre cuaterniones es asociativo y no es conmutativo. Las operaciones señaladas se pueden realizar usando las otras representaciones.

Cociente

Usando la forma del inverso, es posible escribir el cociente de dos cuaterniones como:

$$\frac{a}{b} = \frac{a\overrightarrow{b}}{\|b\|^2}$$

El **inverso multiplicativo** de un cuaternión *x*, distinto de cero, está dado por:

$$x^{-1} = \frac{\overline{x}}{x\overline{x}} = \frac{\overline{x}}{\|x\|^2}$$

Es el mismo patrón que cumplen los números complejos.

Exponenciación

La exponenciación de números cuaterniónicos, al igual que sucede con los números complejos, está relacionada con funciones trigonométricas.

2.4 Los cuaterniones y su estructura algebraica

Los cuaterniones son un ejemplo de cuerpo asimétrico (a veces llamado anillo con división), una estructura algebraica parecida a un cuerpo pero no conmutativo en la multiplicación, es decir: satisfacen todas las propiedades de un cuerpo con excepción de que el producto no es conmutativo. La multiplicación es asociativa y todo cuaternión no nulo posee un único inverso.

Forman una IR-álgebra asociativa 4-dimensional sobre los reales y los complejos forman un subconjunto de ella.

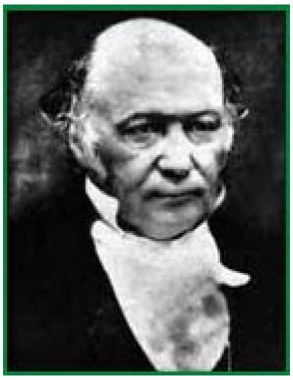
Los cuaterniones no forman un álgebra asociativa sobre los complejos.

Por último, del mismo modo que los números reales y los complejos constituyen espacios vectoriales euclídeos de dimensiones uno y dos, respectivamente, los cuaterniones forman un espacio vectorial euclídeo de dimensión cuatro.

PARTE III

Algo de su historia.

Hamilton y los cuaterniones



Los cuaterniones fueron creados por William Rowan Hamilton en 1843. A partir del éxito de la representación geométrica de los números complejos, que posibilitan en cierta medida un Cálculo geométrico en el plano, lo que busca Hamilton es extender esta idea, eso es, busca una manera de modelar matemáticamente los fenómenos observados en el mundo tridimensional que sea más intuitiva que el análisis cartesiano. En este sentido, su motivación inicial no está muy alejada de aquellos que utilizaron la ley del paralelogramo para sumar cantidades vectoriales.

Dicho de otra manera, Hamilton buscaba formas de extender los números complejos (que pueden interpretarse como puntos en un plano) a un número mayor de dimensiones. No pudo hacerlo para 3 dimensiones, pero para 4 dimensiones obtuvo los cuaterniones.

Según una historia relatada por el propio Hamilton, la solución al problema que le ocupaba le sobrevino un día que estaba paseando con su esposa, bajo la forma de la ecuación: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Inmediatamente, grabó esta expresión en el lateral del puente de Brougham, que estaba muy cerca del lugar.

Brougham Bridge en medio de Broombridge Road, Dublín.

Aunque después Hamilton se encierre en la construcción de un sistema puramente matemático, podemos decir que el cuaternión nace indirectamente de la voluntad de una interpretación matemática del mundo real.

Dos obstáculos se pusieron en su camino: el primero, y claro está que Hamilton no podía saberlo, es que no existe álgebra de números tridimensional, sino de hipercomplejos cuadridimensional. El segundo es el principio de permanencia que tuvo que rebasar para admitir una multiplicación no conmutativa. El resultado de su investigación es el cuaternión, objeto híbrido con una parte escalar y una parte vectorial geométrica. La presencia junta de estas dos partes dificulta considerablemente la interpretación de este número.

La expresión matemática que corresponde a lo que actualmente conocemos como producto vectorial y que encontramos en la parte vectorial del cuaternión resultante de la multiplicación de dos vectores no surge por azar, sino que aparece como consecuencia lógica de una operación algebraica definida entre números cuadridimensionales. Lo que norma el modo operativo son las "fórmulas fundamentales", son ellas que al ser activadas producen el resultado mencionado.

En otros términos, la parte imaginaria, o vectorial, del cuaternión producto se desprende de leyes que el mismo Hamilton definió para que pueda funcionar su sistema. La problemática es múltiple: a veces lo estudia bajo el ángulo algebraico, a veces desde un punto de vista geométrico. Es esta última aproximación, al examinar las propiedades geométricas de la multiplicación de los números complejos, que le va a proporcionar la clave para su descubrimiento de los cuaterniones.

La multiplicación entre dos números complejos se basa sobre el producto de las longitudes de cada vector y el ángulo que forman entre ellos. Hamilton, al querer extender esas ideas al espacio tridimensional, se da cuenta que la consideración del ángulo entre los vectores no es suficiente, sino que hay que tomar en cuenta también el plano en el cual se inscribe el ángulo, es decir la rotación que permite obtener una dirección a partir de la otra.

Ahora bien, una rotación en el espacio esta determinada por un ángulo de naturaleza unidimensional y una dirección de naturaleza bidimensional. Dicho de otro modo, mientras que en el plano complejo, la multiplicación requiere de la longitud (objeto unidimensional) y de un ángulo, o sea un total de dos dimensiones, la multiplicación en el espacio necesita de cuatro dimensiones, tres procedentes de la rotación y una debida a la longitud. Ese análisis va llevar a Hamilton a abandonar progresivamente la idea de construir un “cálculo geométrico” basándose en la noción de terna, pues se convence poco a poco que el elemento que permitirá dicha construcción es el cuádruplo.

Además, la composición de dos rotaciones en el espacio no es conmutativa, al contrario de lo que ocurre en la geometría plana. De hecho, se sabía desde hace mucho tiempo que la función resultante de la composición de dos funciones no es la misma según el orden de composición. No constituye por lo tanto un ejemplo de no conmutatividad, no se viola el principio de permanencia. Sin embargo, la consideración de la rotación en una operación algebraica conduce finalmente a la renuncia a la conmutatividad en el producto de los cuádruplos.

PARTE IV

Algunas aplicaciones.

Los cuaterniones no son únicamente una curiosidad algebraica. Tienen diversas aplicaciones que van desde la teoría de números, en donde pueden utilizarse para probar resultados, como el teorema dado por Lagrange que dice que todo número natural n puede expresarse como la suma de cuatro cuadrados perfectos, hasta aplicaciones físicas dentro del electromagnetismo, teoría de la relatividad y mecánica cuántica, entre otras.

Los cuaterniones en física representan rotaciones en el espacio. Además tienen aplicaciones en el electromagnetismo y la mecánica cuántica.

Los cuaterniones se utilizan a menudo en gráficos por computadora (y en el análisis geométrico asociado) para representar la orientación de un objeto en un espacio tridimensional.

Las ventajas son: conforman una representación no singular (comparada con, por ejemplo, los ángulos de Euler), más compacta y más rápida que las matrices.

PARTE V

ALGO DE HUMOR

ME PREGUNTO POR QUÉ NO ME CUENTAN EN EL AULA ALGO ACERCA DE ESTOS NÚMEROS.

ES DIFÍCIL PORQUE TAMPOCO LOGRAMOS CONOCER LOS COMPLEJOS.

PARA FINALIZAR

El descubrimiento de los cuaterniones por Hamilton marcó un hito en la historia, ya que liberaba al álgebra del postulado de conmutabilidad de la multiplicación (el orden de los factores no altera el resultado).

Sus investigaciones en este campo habían comenzado 10 años antes con un innovador documento sobre parejas algebraicas de números, en el cual la entidad básica ya no era números simples, sino parejas ordenadas de números.

Hamilton empleó esta idea para desarrollar una rigurosa teoría sobre los números complejos.

En *Generalizaciones de los números (2005) de* Liev Semiónovich Pontriaguin Moscú: Editorial URSS se lee:

> Dado que los números reales y complejos aparecieron en la matemática como resultado de una determinada vía de desarrollo, que pudo haber sido otra, surge una pregunta lógica: ¿no conduciría esta otra vía de desarrollo al surgimiento de otros números, análogos a los reales y los complejos, pero aun así, otros números?
>
> Para responder a esta pregunta es necesario formular de manera precisa las condiciones que se deben imponer a los entes que pudieran desempeñar el papel de números, y establecer si existen otros sistemas de entes que satisfagan estas mismas condiciones.
>
> No es difícil llegar a la conclusión de que todo sistema de entes que satisfaga las condiciones impuestas a los números debe ser un cuerpo topológico. Si al cuerpo se [le] imponen exigencias adicionales de

compacidad local y conexidad, lo cual es natural, entonces tiene lugar el siguiente teorema demostrado por mí en el año 1931:

Teorema (Pontriaguin)

Todo cuerpo topológico conexo localmente compacto es o bien el campo de los números reales, o bien el campo de los números complejos, o bien el cuerpo de los cuaterniones.

Este teorema afirma, en particular, que los números reales y complejos no son un producto casual del desarrollo histórico, sino que surgieron en la Matemática por necesidad, como los únicos entes que pueden desempeñar el papel de números.

Fuentes bibliográficas

- Alderete M. J. y otros (1994), *El cuerpo de los números complejos*. Mendoza: Universidad Juan Maza. Facultad de Ciencias Físicomatemáticas

- Alderete M. J. y otros (1996), *El mundo de los números y la Aritmética*. Mendoza: Secretaría de Educación. DGE. Gobierno de Mendoza.

- Alderete M. J. y cols. (2008), *El Álgebra de las funciones reales.* Mendoza: EFE. Universidad Nacional de Cuyo.

- Dorronsoro, G.; Hernández, E. (1996). *Números, grupos y anillos.* Madrid: Universidad Autónoma de Madrid.

- Gentile, E. (1985). *Aritmética Elemental*. Monografía Científica. Serie de Matemática. Buenos Aires: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad nacional de Buenos Aires.

- Trejo, C. A. (1978). *Concepto de número*. Buenos Aires: Editorial OEA.

- Trejo, C. A. (1978). *Matemática Elemental Moderna: Estructura y Método*. Buenos Aires: EUDEBA

Enlaces externos

- John A. Beachy and William D. Blair, (1996) **Abstract Algebra** *Second Edition*. Illinois: **Waveland Press** , Prospect Heights.

- Cuaterniones de Hamilton
Enviado por Mijail Andrés Saralain Figueredo
http://www.revistaciencias.com/publicaciones/EpyuVkllAEIDZSFYiO.php
Recuperado 7/10/2010.

- Cuaterniones.
Enciclopedia Libre Universal en Español.
http://enciclopedia.us.es/index.php/Cuaterniones
Recuperado 10/10/2010.

- Números imaginarios.
Sangakoo. Mc Graw Hill.
http://www.sangakoo.com/es/Divulgacion/divulgacion/163/numeros-imaginarios.aspx
Recuperado 10/10/2010.