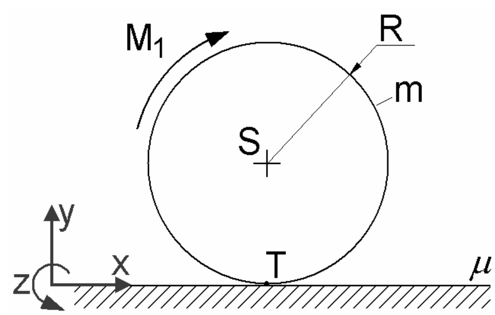
Gördülő korong vizsgálata



Adatok:

$M_1 = 25\text{Nm}$,

$m = 20\text{kg}$,

$R = 0{,}3\text{m}$,

$g = 9{,}81\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$,

$\mu = 0{,}2$.

A korong M_1 nyomaték hatására indul el. Adott idő múlva elvesszük a nyomatékot és ezután is megvizsgáljuk a korong mozgását.

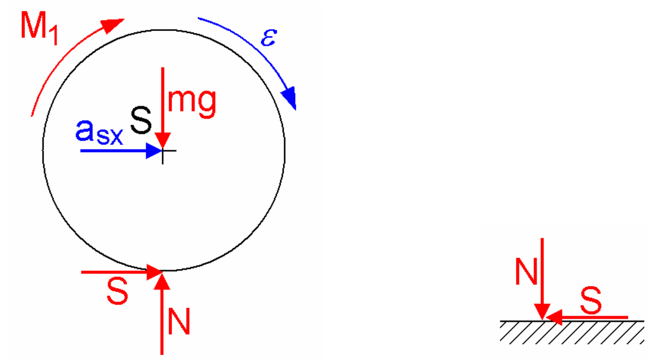
1 A korong indulása

A korong vízszintes talajon nyugalmi helyzetből indul M_1 nyomaték hatására. A talajtól nem válik el.

? Megcsúszik-e indulásnál?

? Mekkora súlypont gyorsulása és a korong szöggyorsulása?

1.1 Szabadtest-ábra, dinamikai egyenletek:



A korong és a talaj szabadtest-ábrája

A korong szabadtest-ábrája alapján a dinamikai egyenletek:

$x:\qquad S = ma_{sx}$,

$y:\qquad N - mg = 0$, mert a függőleges gyorsulás zérus, ha nem válik el a talajtól,

$z:\qquad M_1 - SR = \Theta_S \varepsilon$, a súlypontra felírva.

A dinamikai egyenletek mellett más-más egyenletek érvényesülnek ha a korong gördül vagy csúszik.

1.2 Gördülésnél:

Az érintkezési pont áll, ebből felírható a gördülés kinematikai feltétele:

$$a_{sx} = R\varepsilon .$$

Illetve ellenőrizni kell, hogy a dinamikai feltétel is teljesül-e:

$$S \le \mu N .$$

1.3 Csúszásnál:

A súrlódási erőt ismerjük, amely a nyomóerőből határozható meg:

$$S = \mu N .$$

És ekkor a gyorsulás nincs kinematikai kapcsolatban a szöggyorsulással:

$$a_{sx} \ne R\varepsilon .$$

1.4 Feltételezve, hogy gördül

Feltételezzük, hogy a korong gördül és így számítjuk ki a gyorsulás állapotát, illetve a nyomó és a súrlódási erőt. Felhasználjuk a dinamikai egyenleteket és alkalmazzuk a gördülés kinematikai feltételét:

$$x: \quad S = m a_{sx},$$

$$y: \quad N - mg = 0,$$

$$z: \quad M_1 - SR = \Theta_S \varepsilon,$$

$$\text{kin}: \quad a_{sx} = R\varepsilon .$$

A nyomóerő meghatározható a függőleges (y) irányú egyenletből:

$$N = mg,$$

$$N = 20\text{kg} \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \mathbf{196{,}2N} .$$

Felhasználva a kinematikai egyenletet, a következő egyenletek adódnak:

$$x: \quad S = mR\varepsilon,$$

$$z: \quad M_1 - SR = \Theta_S \varepsilon .$$

A vízszintes irányú egyenletetből a súrlódási erő kifejezhető és behelyettesíthető a forgásra vonatkozó egyenletbe. Ezzel a szöggyorsulás kiszámítható:

$$z: \quad M_1 - mR^2\varepsilon = \Theta_S \varepsilon,$$

$$\varepsilon_{1,g} = \frac{M_1}{\left(\Theta_S + mR^2\right)} = \frac{M_1}{\left(\frac{1}{2}mR^2 + mR^2\right)} = \frac{M_1}{\frac{3}{2}mR^2},$$

$$\varepsilon_{1,g} = \frac{25\text{Nm}}{\frac{3}{2}20\text{kg} \cdot (0{,}3\text{m})^2} = \mathbf{9{,}259 \frac{rad}{s^2}} .$$

A súlypont gyorsulása, feltételezve, hogy a korong gördül:

$$a_{sx\,1,g} = R\varepsilon_1 = 0{,}3\text{m} \cdot 9{,}259 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} = \mathbf{2{,}778 \frac{m}{s^2}} .$$

A szöggyorsulás ismeretében a súrlódási erő nagysága az x irányú egyenletből:

$$S_{1,g} = mR\varepsilon_1 = 20\text{kg} \cdot 0{,}3\text{m} \cdot 9{,}259 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} = \mathbf{55{,}55N} .$$

Ellenőrizzük, hogy a gördülés dinamikai feltétele ($S \le \mu N$) teljesül-e:

$$\mu N = \mu mg = 0{,}2 \cdot 20\text{kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \mathbf{39{,}24N} .$$

A dinamikai feltétel nem teljesül, tehát a korong megcsúszik.

1.5 A csúszó korong gyorsulás-állapota

Az előzőek alapján tehát úgy kell számolnunk, hogy a korong megcsúszik a rá ható M_1 nyomaték hatására. Felhasználjuk a dinamikai egyenleteket és alkalmazzuk a csúszás esetén érvényes dinamikai egyenletet:

$$x: \qquad S = m a_{sx},$$

$$y: \qquad N - mg = 0,$$

$$z: \qquad M_1 - SR = \Theta_S \varepsilon,$$

$$cs: \qquad S = \mu N.$$

Felhasználva a függőleges irányú egyenletet és a csúszás esetén érvényes dinamikai egyenletet, a súrlódási erő:

$$S = \mu m g.$$

Ezzel a következő egyenletek adódnak:

$$x: \qquad \mu m g = m a_{sx},$$

$$z: \qquad M_1 - \mu m g R = \Theta_S \varepsilon.$$

Az x irányú egyenletből a gyorsulás kiszámítható, és kisebb lesz mint a gördülésnél számított érték:

$$a_{sx\,1,cs} = \mu g,$$

$$a_{sx\,1,cs} = 0{,}2 \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \mathbf{1{,}962} \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}^2}.$$

Az x irányú egyenletből a szöggyorsulás számítható ki, ami pedig nagyobb mint a gördülést feltételező számításban kapott érték:

$$\varepsilon_{1,cs} = \frac{M_1 - \mu m g R}{\Theta_S} = \frac{M_1 - \mu m g R}{\frac{1}{2} m R^2},$$

$$\varepsilon_{1,cs} = \frac{25\mathrm{Nm} - 0{,}2 \cdot 20\mathrm{kg} \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}3\mathrm{m}}{\frac{1}{2} \cdot 20\mathrm{kg} \cdot (0{,}3\mathrm{m})^2} = \mathbf{14{,}70} \frac{\mathbf{rad}}{\mathbf{s}^2}.$$

Tehát a korong megcsúszik az M_1 nyomaték hatására. Ez azt jelenti, hogy a vízszintes irányú gyorsulása kisebb, a szöggyorsulása pedig nagyobb lesz ahhoz képest, mintha nem csúszna meg. Ahhoz, hogy ne csússzon meg nagyobb súrlódási tényező kellene.

1.6 Sebesség állapot, sebességpólus

Az M_1 nyomaték hatására a korong állandó $a_{sx\,1,cs}$ gyorsulással és $\varepsilon_{1,cs}$ szöggyorsulással fog mozogni.

? Határozzuk meg a $t_1 = 3\text{s}$ időpillanatban a sebességállapotot.

? Határozzuk meg a sebességpólus helyét.

A gyorsulásállapot ismeretében a súlypont sebessége és a szögsebesség (jelen esetben a sebességállapot) kiszámítható bármely időpillanatban:

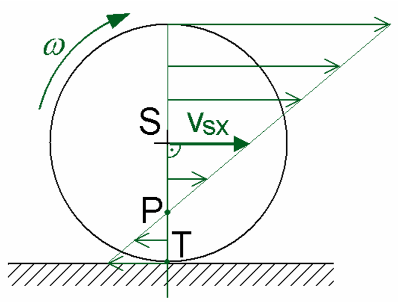
$$v_{sx\,1} = v_{sx\,0} + a_{sx\,1,cs} t_1 = 0\frac{\text{m}}{\text{s}} + 1{,}962\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 3\text{s} = \mathbf{5{,}886}\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}},$$

$$\omega_1 = \omega_0 + \varepsilon_{1,cs} t_1 = 0\frac{\text{rad}}{\text{s}} + 14{,}70\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\cdot 3\text{s} = \mathbf{44{,}1}\frac{\mathbf{rad}}{\mathbf{s}}.$$

Síkmozgás esetén a sebességpólus helyének meghatározásához a következő körmozgásra érvényes összefüggésből indulhatunk ki:

$$v_{\text{ker}} = r\omega.$$

Az elemi forgómozgás a P póluspont körül történik, amelyről biztosan tudjuk, hogy az S súlypont és a T érintkezési pont által meghatározott egyenesen van, amely a súlypont sebességére merőleges.



Sebesség pólus és a ebesség eloszlása

A súlypont és a póluspont távolsága tehát a $v_{\text{ker}} = r\omega$ alapján:

$$\left|\underline{r}_{SP1}\right| = \frac{v_{sx1}}{\omega_1} = \frac{5{,}886\frac{\text{m}}{\text{s}}}{44{,}1\frac{\text{rad}}{\text{s}}} = \mathbf{0{,}1335m}.$$

Illetve a póluspont helye kiszámítható a következőképpen is:

$$\underline{r}_{SP1} = \frac{\underline{\omega}_1 \times \underline{v}_{sx1}}{\omega_1^2} = \frac{1}{44{,}1^2}\begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & -44{,}1 \\ 5{,}886 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{-0{,}1335} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{m}.$$

Eszerint a korong valóban csúszik, vagyis miközben a súlypont előre felé halad, a talajjal érintkező anyagi pontok hátrafelé mozognak.

A sebességpólus helye a mozgás során nem változik, tehát ebben a feladatban a gyorsulásállapot ismeretében is kiszámítható:

$$\left|\underline{r}_{SP1}\right| = \frac{v_{sx1}}{\omega_1} = \frac{a_{sx1,cs}t}{\varepsilon_{1,cs}t} = \frac{a_{sx1,cs}}{\varepsilon_{1,cs}} = \frac{1{,}962\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{14{,}70\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}} = \mathbf{0{,}1335m}\,.$$

2 A nyomaték elvétele utáni mozgás – a csúszás megszűnése

Ha az M_1 nyomatékot megszüntetjük, a korong egy bizonyos ideig még csúszni fog, majd amikor a csúszás megszűnik, gördülésbe megy át.

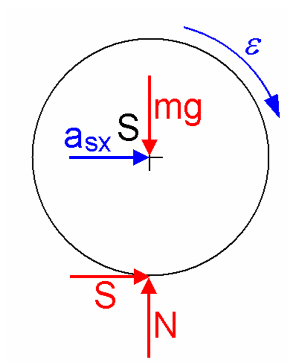
Mikor kezd gördülni?

A gördülő korong gyorsulás-állapota.

A gördülő korong sebesség-állapota.

2.1 Gyorsulás-állapot

A csúszás megszűnésének időpontját akkor tudjuk kiszámítani, ha ismerjük a csúszó korong gyorsulásállapotát az M_1 nyomaték elvétele után. Ehhez a szabadtest ábra:



A korong szabadtest-ábrája a nyomaték elvétele után

$x:\quad S = ma_{sx}\,,$

$y:\quad N - mg = 0\,,$

$z:\quad -SR = \Theta_S\varepsilon\,,$

$cs:\quad S = \mu N\,.$

Felhasználva a függőleges irányú egyenletet és a csúszás esetén érvényes dinamikai egyenletet, a súrlódási erő:

$$S = \mu mg\,.$$

Ezzel a következő egyenletek adódnak:

$$x: \qquad \mu mg = ma_{sx},$$

$$z: \qquad -\mu mgR = \Theta_S \varepsilon \,.$$

Az x irányú egyenletből a gyorsulás ismét:

$$a_{sx2} = \mu g = 0{,}2 \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \mathbf{1{,}962 \frac{m}{s^2}}\,.$$

Az x irányú egyenletből a szöggyorsulás:

$$\varepsilon_2 = \frac{-\mu mgR}{\Theta_S} = \frac{-\mu mgR}{\frac{1}{2} mR^2} = \frac{-2\mu g}{R},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{-2 \cdot 0{,}2 \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0{,}3\mathrm{m}} = \mathbf{-13{,}08 \frac{rad}{s^2}}\,.$$

2.2 A csúszás megszűnésének időpontja

Tehát amíg a korong csúszik, a súlypont tovább gyorsul és a szögsebesség csökken.

Akkor szűnik meg a csúszás, amikor a P póluspont eléri a T érintkezési pontot. A póluspont súlyponttól mért távolsága folyamatosan változik:

$$\left|\underline{r}_{SP2}\right| = \frac{v_{sx2}}{\omega_2} = \frac{v_{sx1} + a_{sx2} t_2}{\omega_1 + \varepsilon_2 t_2} = \frac{5{,}886 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1{,}962 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t}{44{,}1 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} - 13{,}08 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2} \cdot t}\,.$$

És tudjuk, hogy t_2 időpillanatban, amikor megszűnik a csúszás, ez éppen a sugárral egyezik meg. Ebből t_2 - re egy egyenlet adódik:

$$0{,}3\mathrm{m} = \frac{5{,}886 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1{,}962 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t_2}{44{,}1 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} - 13{,}08 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2} \cdot t_2},$$

$$13{,}23 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 3{,}924 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t_2 = 5{,}886 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1{,}962 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t_2,$$

$$5{,}886 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t_2 = 7{,}344 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

$$t_2 = \mathbf{1{,}25s}\,.$$

2.3 Sebességállapot

A $t_1 + t_2$ időpillanat végére kiszámítható a sebességállapot. A súlypont sebességének kiszámításához szükségünk van a súlypot gyorsulására és a súlypont sebességére a t_1 időpillanatban. Ezeket felhasználva:

$$v_{sx\,2} = v_{sx\,1} + a_{sx\,2} t_2 = 5{,}886\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1{,}962\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1{,}25\mathrm{s} = \mathbf{8{,}34}\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}.$$

A szögsebesség hasonló számítás alapján:

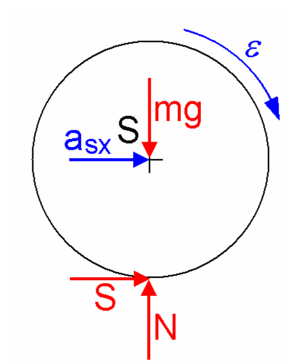
$$\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon_2 t_2 = 44{,}1\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} - 13{,}08\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1{,}25\mathrm{s} = \mathbf{27{,}75}\frac{\mathbf{rad}}{\mathbf{s}}.$$

A póluspont távolsága a súlyponttól ellenőrzésképpen kiszámítható:

$$\left|\underline{r}_{SP2}\right| = \frac{v_{sx2}}{\omega_2} = \frac{8{,}34\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{27{,}75\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}} = 0{,}3\mathrm{m}.$$

3 Mozgás a csúszás megszűnése után

A dinamikai egyenleteket az M_1 nyomaték elhagyásával írjuk fel.



Szabadtest-ábra

A dinamikai egyenleteket a gördülés kinematikai feltételével egészítjük ki:

$$x: \quad S = m a_{sx},$$

$$y: \quad N - mg = 0,$$

$$z: \quad -SR = \Theta_S \varepsilon,$$

$$\mathrm{kin}: \quad a_{sx} = R\varepsilon.$$

A nyomóerő ismét meghatározható a függőleges irányú egyenletből:

$$N = mg = 20\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \mathbf{196{,}2N}.$$

Felhasználva a kinematikai egyenletet, a következő egyenletek adódnak x és z irányban:

$$x: \qquad S = mR\varepsilon\,,$$

$$z: \qquad -SR = \Theta_S \varepsilon\,.$$

A vízszintes irányú egyenletetből a súrlódási erő kifejezhető és behelyettesíthető a forgásra vonatkozó egyenletbe. Ezzel megmutattuk, hogy szöggyorsulás zérus:

$$z: \qquad -mR^2\varepsilon = \Theta_S \varepsilon\,,$$

$$z: \qquad -\left(mR^2 + \Theta_S\right)\varepsilon = 0\,,$$

$$\varepsilon_3 = \mathbf{0}\,\frac{\mathbf{rad}}{\mathbf{s^2}}\,.$$

A kinematikai egyenletből kiszámítható, hogy a súlypont gyorsulása is zérus, tehát a korong állandó súlyponti sebességgel és állandó szögsebességgel gurul:

$$a_{sx3} = \mathbf{0}\,\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s^2}}\,.$$

A szöggyorsulás ismeretében a súrlódási erő nagysága az x irányú egyenletből:

$$S_3 = mR\varepsilon_2 = \mathbf{0N}\,.$$

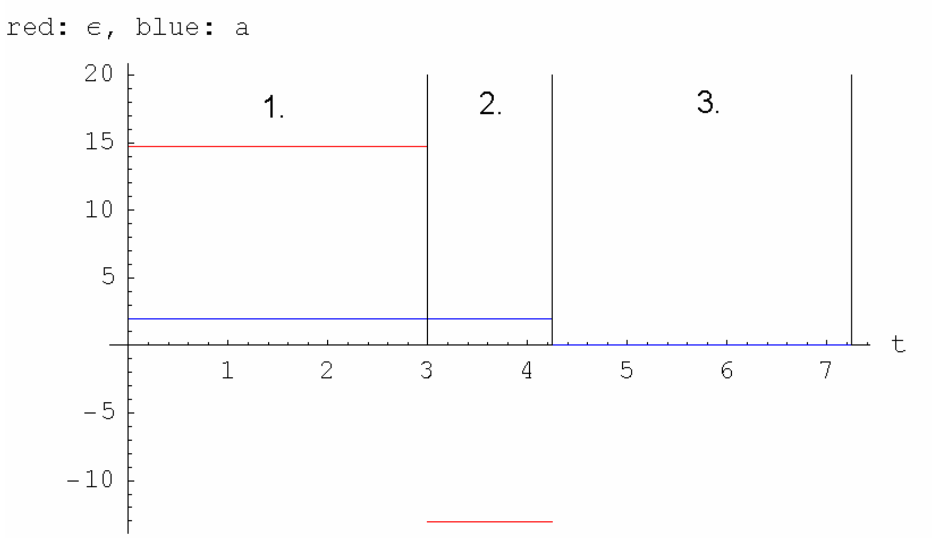
Ekkor a gördülés dinamikai feltétele ($S \le \mu N$) teljesül.

4 Időfüggvények

A mozgás tehát három részre bontható:

- nyomatékkal történő gyorsítás,
- csúszás,
- gördülés szabadon.

A három szakaszhoz tartozó időfüggvények egy diagramban feltüntethetők. A gyorsulás és a szöggyorsulás:



A sebesség és a szögsebesség ábrázolásánál látható, hogy a gördülés kinematikai feltétele cask a harmadik szakaszon érvényesül.