



**Sapiientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem
Tanárképző Intézet
Marosvásárhelyi Kar**

Gyakorlati útmutató mérnök alapszakos pedagógusjelöltek számára

Dr. Harangus Katalin

2021

Tartalomjegyzék

Előszó	4
A GALTON-DESZKA	5
A binomiális eloszlás	6
A normáleloszlás.....	11
A virtuális Galton-deszka felépítése és működése.....	13
A WHEATSTONE-HÍD	17
A kiegyensúlyozatlan híd	20
A nyúlásmérő-bélyeg	22
A hajlított lemezzel megépített stand.....	26
Mérőbélyeg Wheatstone-hídban	29
Negyedhíd.....	30
Két egyformán terhelt bélyeggel megépített híd.....	31
Félhíd.....	32
A teljes híd.....	33
Mérőbélyeg-rozetták	34
A mérőhíd gyakorlati megvalósítása.....	36
A stand tartozékai és kezelőelemei	41
A mintavételezés.....	42
A kiegyensúlyozatlan hosszirányú negyedhíd.....	45
A kiegyensúlyozatlan keresztirányú negyedhíd.....	46
A kiegyensúlyozatlan Poisson-híd	47
A kiegyensúlyozatlan félhíd	47
A kiegyensúlyozatlan teljes Poisson-híd	48
A bélyegtényező meghatározása	49
A próbatest anyagának Young-modulusza	51
A kiegyenlített híd, mint mérleg és mint elmozdulás-mérő.....	52
Szabadlengés mérése kiegyenlített hiddal.....	52
Mérés kiegyensúlyozott hiddal	57
A kiegyensúlyozott hosszirányú negyedhíd	57
A kiegyensúlyozott keresztirányú negyedhíd	58
A kiegyensúlyozott Poisson-híd.....	58
A kiegyensúlyozott teljes Poisson-híd.....	58
Kísérleti eredmények kiegyensúlyozott hidakkal	59

AZ ANALÓG SZÁMÍTÓGÉP.....	60
A műveleti erősítő.....	62
A nyílt hurkú erősítő	64
A nem-invertáló erősítő.....	66
Az invertáló erősítő.....	67
A feszültségkövető áramkör és az inverter.....	68
Az összeadó áramkör	68
A kivonó áramkör	69
Az exponenciáló áramkör.....	71
A logaritáló áramkör	72
A szorzó áramkör.....	73
A differenciáló (deriváló) áramkör	74
A nem-invertáló hiszterézises komparátor (Schmitt-trigger)	76
Műveleti erősítővel megépített S-R bistabil multivibrátor (S-R flip-flop).....	78
Egy megoldandó példa	80
A feladatot megoldó analóg számítógép	82
Az analóg számítógép felépítése.....	84
A gerjesztést és a mintavételezést megvalósító digitális áramkör	92
A függvénygenerátor és az adatgyűjtő	96
Az analóg számítógép kezelése.....	103

Előszó

A gyakorlati útmutató segédanyag a műszaki oktatásban részt vevő tanárképzős hallgatók számára. Három didaktikai szemléltető eszközt mutat be:

(1) Galton deszka: véletlen folyamatok intuitív szemléltetésére. Azt a binomiális eloszlást szemlélteti, ahol a „golyó” egyenlő $p = 0.5$ valószínűséggel kerül a „szeg” bal, illetve jobb oldalára. A felhasználó három változatban használhatja: a) hardveresen előállított véletlenszámokra (true random number) alapozva; b) szoftveresen előállított véletlenszámokra (pseudo-random number) alapozva; c) szintén szoftveresen előállított véletlenszámokra (pseudo-random number) alapozva, azonban a golyók balra-jobbra kitérésének a valószínűségét a stand dőléséhez igazítjuk

(2) Wheatstone-híd: különböző konfiguráció a mérőhidak működési elvének szemléltetésére: negyedhíd, félhíd, teljes híd, Poisson híd kiegyensúlyozott és kiegyensúlyozatlan változatban. A mérőbéllyegek a standon lévő hajlított egyik végén mereven befogott alumínium lemezen vannak elhelyezve. A próbatest szabad végét egy szerkezet segítségével terhelhetjük, ismert intenzitású terheléssel a próbatest szilárdsági tulajdonságai is meghatározhatók. Ha a szabad végén egy tömeget rögzítünk, akkor a próbatest és a tömeg egy dinamikai szabadságfokkal rendelkező rendszerként viselkedik, aminek szabad lengését a kiegyensúlyozatlan mérőhíddal rögzíthetjük.

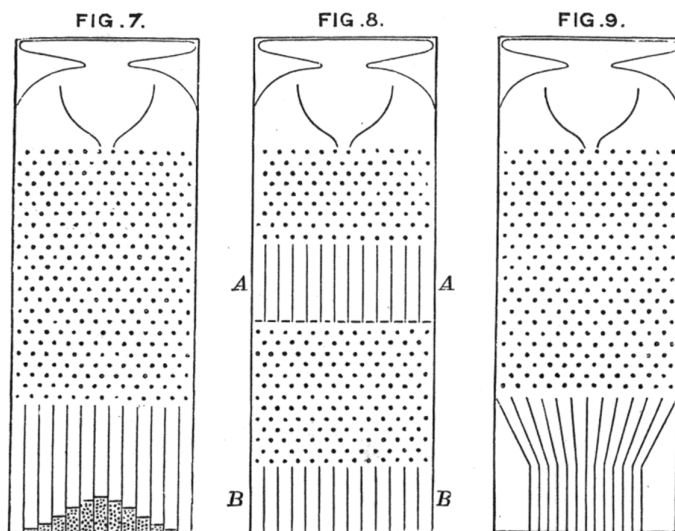
(3) Analóg számítógép: műveleti erősítővel megépített, összeadó és integráló egységekből áll, amelyeket két bemeneti illesztő egységek egészítenek ki. Az áramkör az egy szabadságfokú csillapított dinamikai rendszer mozgásegyenletét (amely egy lineáris másodrendű differenciálegyenlet) megoldására szolgál. A gerjesztést egy mikrokontroller (ISP32) DAC átalakítójával oldjuk meg az analóg számítógép kimeneti jeleit pedig ugyanennek a mikrokontrollernek az ADC áramkörével mintavételezzük. Ilyenképpen az elkészített eszköz egy analóg-digitál hibrid számítógép lenne. A lengőrendszer merevségét és csillapítását kapcsolókkal állíthatjuk be. A gerjesztéshez szükséges függvénygenerátort a mikrokontroller programozásával valósítjuk meg.

Marosvásárhely,

2021. december 20.

A GALTON-DESZKA

A véletlen folyamatok intuitív szemléltetésére Francis Galton, angol polihisztor, 1889-ben egy szerkezetet épített, amit Galton-deszkaként ismerünk. Ez tulajdonképpen egy ferdén elhelyezett sík lap, amibe sakkmintaszerűen szegeket vert be, egymástól pontos távolságra. A lap alján tartórekeszeket alakított ki, amelyekben a felülről, ugyanabból a pontból elindított korongok vagy golyók gyűlnek össze.



1. ábra. A szemléltető eszköz, Francis Galton 1889-ben készült rajzán

A korong lefele csúszása közben beleütközik az első szegbe, ami megakadályozza a további szabad lecsúszását. Itt tehát az pattan egyet és véletlenszerűen, egyenlő valószínűséggel a szeg jobb vagy bal oldalán fog tovább csúszni lefele, a következő szegig. Itt a jobbra vagy balra történő kitérés megismétlődik, és egészen addig folytatódik, míg a korong le nem ér a lap alján levő tartóba. A tartóban levő korongok körvonala egy harangszerű görbét ad, ez pedig nem más, mint *a normáeloszlás sűrűségfüggvényének valamilyen megközelítése*. Minél több sor szegünk van és minél több korongot használunk, annál jobb lesz ez a megközelítés.

Ezen intuitív demonstráció célja a természetben előforduló véletlen események magyarázata volt: minden egyes véletlen esemény (az, hogy melyik tartóba esik a korong) tulajdonképpen sok-sok véletlen kimenetű, legtöbbször megfigyelhetetlen elemi eseményből áll össze, amelyek egy bizonyos valószínűséggel bekövetkeznek vagy sem (tehát hogy a szegre eső korong annak jobb oldalán esik-e tovább vagy sem). Ahogyan a szegeken pattogó korongoknak az ugyanabba a tartóba vezető lehetséges útjainak a száma a szélektől a deszka közepe fele növekedik, úgy a természetben előforduló véletlen események kimenete sem lesz azonos valószínűségű, még akkor sem, ha az elemi „igen-nem” kimenetű események egyenlő valószínűséggel következnek is be.

A Galton-deszka természetesen *egy diszkrét valószínűségi eloszlást illusztrál*, az összehasonlításban szereplő normáeloszlás pedig folytonos: ilyenkor egy olyan deszkára kell gondolnunk, amely nagyon magas és megszámlálhatatlanul sok szeg van benne.

A Galton-deszka valójában azt a *binomiális eloszlást* szemlélteti, ahol a korong egyenlő $p = 0.5$ valószínűséggel kerül a szeg bal, illetve jobb oldalára.

A binomiális eloszlás

Tegyük fel, hogy összesen n független kísérletet végzünk, egy bizonyos A esemény bekövetkezését figyelve. Nevezhetjük ezt pl. „siker”-nek is. Tapasztalatunk szerint ez az esemény egy bizonyos p valószínűséggel következik be. Tételezzük fel, hogy ez a valószínűség az idő folyamán nem változik meg.

Mivel kísérletsorozatunkban azt figyeljük, hogy az A esemény bekövetkezik-e, vagy sem, eseményterünk A -ra és az azzal ellentétes eseményre, \bar{A} -ra szűkül be. Ha az A esemény bekövetkezésének a valószínűsége p , akkor az ellentétes \bar{A} esemény bekövetkezésének valószínűsége, vagyis a „sikertelenségé”, $q = 1 - p$ kell legyen.

Az első kísérletben tehát az esemény bekövetkezését p , a be nem következését pedig q valószínűséggel tapasztalhatjuk, a két eset valószínűségének összege pedig

$$(p + q) = 1.$$

A kísérlet megismétlésekor az esemény bekövetkezésének a valószínűsége szintén p , a be nem következése pedig megint csak q marad.

Annak a valószínűsége, hogy az A esemény mindkét kísérletben bekövetkezzon (vagyis mindkét kísérlet sikeres legyen), az események függetlenségének a következtében $p \cdot p = p^2$ lesz.

Annak a valószínűsége, hogy az első sikeres kísérletet egy sikertelen kövesse, $p \cdot q = p \cdot (1 - p)$.

Az első sikertelenséget követő sikeres kísérlet valószínűsége $q \cdot p = (1 - p) \cdot p$, ami számszerűen az előbbi valószínűséggel azonos.

Végül, annak a valószínűsége, hogy az A esemény egyik kísérletben sem következzen be (mindkettő sikertelen legyen), ezek szerint $q \cdot q = q^2 = (1 - p)^2$ lesz.

Természetesen a fenti négy valószínűség összege a biztos esemény egységnyi valószínűsége kell legyen:

$$p^2 + 2 \cdot p \cdot q + q^2 = p^2 + 2 \cdot p \cdot (1 - p) + (1 - p)^2 = 1$$

(ha a műveleteket elvégezzük, akkor meg is győződhetünk erről).

Észrevehetjük, hogy a fenti összeg a $(p + q)$ binom $(p + q)^2$ négyzetével azonos:

$$(p + q)^2 = p^2 + 2 \cdot p \cdot q + q^2 = 1,$$

a polinom együtthatóinak összege pedig a lehetséges kimenetek számával egyenlő.

A harmadik kísérlet sikerének a valószínűsége változatlanul p , a sikertelenségé pedig q marad. A harmadik kísérlet után a sikerek és sikertelenségek lehetséges *ismétléses variációinak* a száma

$$V_n^{k,i} = n^k,$$

ahol az elemek száma $n = 2$ (a siker, illetve a sikertelenség), amelyekből $k = 3$ elemű, ismétlődéseket tartalmazó elrendezéseket kell kialakítanunk, ahol a sorrend is számít. A lehetőségek:

$$(A, A, A), \\ (A, A, \bar{A}), (A, \bar{A}, A), (\bar{A}, A, A),$$

$$(A, \bar{A}, \bar{A}), (\bar{A}, A, \bar{A}), (\bar{A}, \bar{A}, A),$$

$$(\bar{A}, \bar{A}, \bar{A}):$$

$$V_2^{3,i} = 2^3 = 8.$$

A lehetséges elrendezések előfordulásának a valószínűségét is könnyen előállíthatjuk: három valószínűséget kell összeszoroznunk, ahol A -t látunk ott p -t, ahol pedig \bar{A} -t, ott pedig q -t. Ha felírjuk ezek összegét, akkor a $(p+q)$ binom $(p+q)^3$ köbéhez jutunk:

$$(p+q)^3 = p^3 + 3 \cdot p^2 \cdot q + 3 \cdot p \cdot q^2 + q^3 = 1,$$

ahol az együtthatók összege most is a lehetséges elrendezések, az ismétléses variációknak a száma

A gondolatmenetet folytatván, az n -edik kísérlet után a lehetséges elrendezések valószínűségének megállapítását, azok számát a binom n -edik hatványának felírásával oldhatjuk meg:

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot p^{n-k} \cdot q^k = \sum_{k=0}^n (C_n^k \cdot p^{n-k} \cdot q^k) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^{n-k} \cdot q^k \right),$$

ahol a $p^{n-k} \cdot q^k$ szorzat előtt álló *binomiális együttható* három felírási módozatát láthatjuk.

Ha az n kísérlet alatt az A esemény, vagyis a siker bekövetkezéseinek a számát figyeljük, akkor először is megállapíthatjuk azt, hogy az egy 0 és n közötti egész szám lehet. Megállapítottuk azt is, hogy binom hatványaként kapott polinom tagjai (a monomok) egy egész együttható és egy valószínűség $c \cdot p^a \cdot q^b$ szorzatából állnak, ahol $a+b=n$. Az a hatványkitevőt a sikeres kimenetelű kísérletek számaként, a b -t pedig a sikertelenek számaként tudjuk azonosítani. A c együttható a kísérlet-sorozat olyan lehetséges kimeneteinek a számát adja, amelyek során a siker a -szor, a sikertelenség pedig b -szer következett be. Egy ilyen lehetséges kimenet valószínűsége tehát $p^a \cdot q^b$, a $c \cdot p^a \cdot q^b$ monom pedig az összes ilyen lehetséges kimenet együttes valószínűségével azonos. Következésképpen: az előbbi összeg egy tagja, a binom hatványozásával nyert polinom egy monomja, annak a valószínűségét jelenti, hogy az n kísérlet közül k járjon sikerrel, ahol $k \in \overline{0, n}$.

Ha a bekövetkezések számát az X diszkrét valószínűségi változóként azonosítjuk, akkor annak a valószínűsége, hogy X értéke k legyen, tehát az A esemény k -szor következzen be, a fentiek szerint

$$f_X(k, n, p) = P(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k},$$

ami nem más, mint a diszkrét X valószínűségi változó három paraméterű valószínűségi függvénye. A három paraméter tehát:

- k : a sikeres kimenetelű kísérletek, a megfigyelt A esemény bekövetkezéseinek a száma;
- n : a próbálkozások, az elvégzett kísérleteknek a száma;
- p : a siker, a megfigyelt esemény bekövetkezésének valószínűsége.

Az eloszlásfüggvény az A esemény legtöbb k alkalommal való bekövetkezésének valószínűségét adja:

$$F_X(k, n, p) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \left(\frac{n!}{i! \cdot (n-i)!} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} \right).$$

Ezt az eloszlást tehát binomiálisnak nevezik és a visszatevéses mintavételezést írja le.

Megállapítható, hogy a binomiális eloszlást követő valószínűségi változó várható értéke (átlaga)

$$m_x = n \cdot p,$$

amit, ha figyelembe vesszük, hogy a diszkrét valószínűségi változó csak egész értékeket vehet fel, kerekítenünk kell. A változó szórása:

$$\sigma_x = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}.$$

Az eloszlás ferdesége

$$\beta_{1,x} = (1-2 \cdot p) \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}.$$

Ekképpen, ha $p \neq 0.5$, akkor a valószínűségi függvény ferde és a legvalószínűbb érték (a módusz) nem esik egybe a várható értékkel. A móduszt az

$$\tilde{m}_x = p \cdot (n+1)$$

mennyiség lefele kerekített értéke adja. Ha ez a mennyiség eleve egy egész szám, akkor két legvalószínűbb érték van, a második 1-gyel kisebb, mint a kiszámolt.

Ha az eloszlás ferde, akkor a medián sem esik egybe az átlaggal (a medián az az érték, amely az eloszlásfüggvény 0.5-ös értékének felel meg: a valószínűségi változó annál kisebb és annál nagyobb értékei egyaránt azonos kumulált gyakorisággal jelennek meg). A medián az $n \cdot p$ szorzat lefele és felfele kerekített értéke között van:

$$\lfloor n \cdot p \rfloor \leq \tilde{m}_x \leq \lceil n \cdot p \rceil.$$

Kiszámolhatjuk az eloszlás lapultságát is:

$$\beta_{2,x} = \frac{1-6 \cdot p \cdot (1-p)}{n \cdot p \cdot (1-p)}.$$

Emlékeztetőül: a normáloszlás lapultsága 3, a fenti érték pedig n -től és p -től függően lehet ennél nagyobb és kisebb is.

A binomiális eloszlást Excelben is tanulmányozhatjuk. A statisztikai függvények között szereplő BINOM.DIST() segítségével lehet meghatározni az eloszlás valószínűségi függvényének és eloszlásfüggvényének értékét. A függvénynek négy paramétere van:

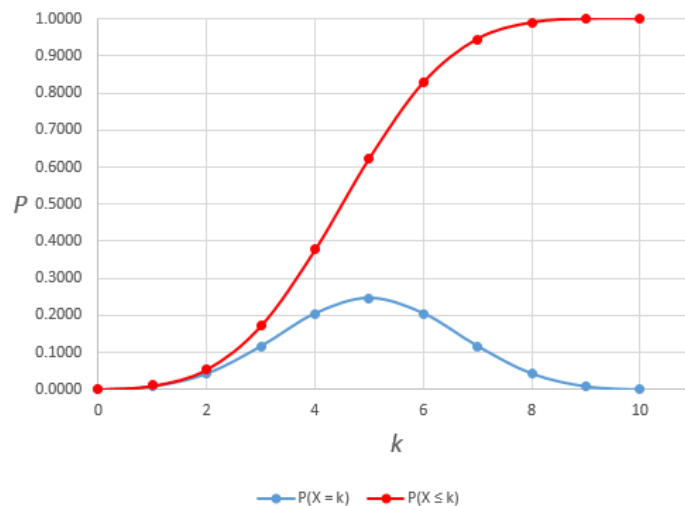
- *Number_s*: ez a k paraméter, ami a bekövetkező események számát rögzíti;
- *Trials*: ez az n paraméter, ami a kísérletek számát jelenti;
- *Probability_s*: ez a p paraméter, ami a megfigyelt esemény bekövetkezésének a valószínűsége;
- *Cumulative*: ennek *TRUE* (vagy 1-es) értéke az eloszlásfüggvény, *FALSE* (vagy 0) a valószínűségi függvény értékeinek kiszámítását állítja be.

A 2. ábrán egy adatokkal kitöltött táblázat látható, az esetünkben fontos $p = 0.5$ valószínűsége, amikor összesen $n = 10$ kísérletet végzünk és az esemény $k \in \overline{0,10}$ számú bekövetkezésének valószínűségét vizsgáljuk.

	A	B	C	D	E
1	Probability_s (p)		Number_s (k)	$P(X = k)$	$P(X \leq k)$
2	0.5		0	0.0010	0.0010
3			1	0.0098	0.0107
4	Trial_s (n)		2	0.0439	0.0547
5	10		3	0.1172	0.1719
6			4	0.2051	0.3770
7			5	0.2461	0.6230
8			6	0.2051	0.8281
9			7	0.1172	0.9453
10			8	0.0439	0.9893
11			9	0.0098	0.9990
12			10	0.0010	1.0000

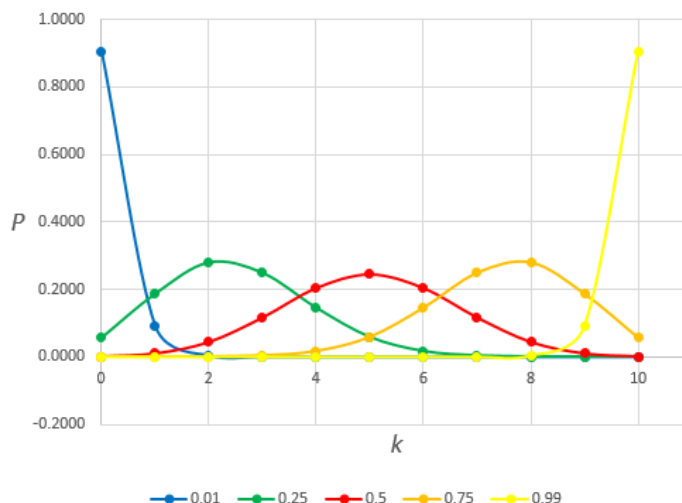
2. ábra. A binomiális eloszlás Excel-táblázata

A valószínűségi függvénynek és az eloszlásfüggvénynek a kapott értékekkel megrajzolt grafikonjait a 3. ábrán láthatjuk. Az eloszlás diszkrét, így a grafikonok tulajdonképpen pontokból kellene álljanak: a görbéket csak a normálegyelés megfelelő függvényeivel való összehasonlítás kedvéért ábrázoltuk, a valószínűségek trendjének hatásosabb szemléltetése végett.



3. ábra. A valószínűségi függvény és az eloszlásfüggvény ábrázolása a 2. ábrán látható adatok esetében

Észrevehetjük, hogy a valószínűségi függvény grafikonja ez esetben szimmetrikus. Azonban, ha a p valószínűség értékét megváltoztatjuk, akkor a valószínűségi függvény ferde lesz. A valószínűség 0 és 1 értékére a valószínűségi függvény értéke az értelmezési tartomány megfelelő határán egységnyi lesz, k minden más értékére a visszatérített érték nulla. A $p = 0$ valószínűség ugyanis azt jelenti, hogy a megfigyelni kívánt esemény sohasem következhet be, a $p = 1$ érték viszont azt jelenti, hogy minden kísérlet csak sikerrel zárulhat.



4. ábra. A valószínűségi függvény a p valószínűség különböző eseteiben

$P(X = k)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Trial_s (n)
0	0.5000	0.2500	0.1250	0.0625	0.0313	0.0156	0.0078	0.0039	0.0020	0.0010	
1	0.5000	0.5000	0.3750	0.2500	0.1563	0.0938	0.0547	0.0313	0.0176	0.0098	
2		0.2500	0.3750	0.3750	0.3125	0.2344	0.1641	0.1094	0.0703	0.0439	
3			0.1250	0.2500	0.3125	0.3125	0.2734	0.2188	0.1641	0.1172	
4				0.0625	0.1563	0.2344	0.2734	0.2734	0.2461	0.2051	
5					0.0313	0.0938	0.1641	0.2188	0.2461	0.2461	
6						0.0156	0.0547	0.1094	0.1641	0.2051	
7							0.0078	0.0313	0.0703	0.1172	
8								0.0039	0.0176	0.0439	
9									0.0020	0.0098	
10										0.0010	
Number_s (k)											

5. ábra. A valószínűségi függvény értékei $p = 0.5$ -re, a kísérletek növekvő n számának függvényében

A virtuális Galton-deszkánk 10 sor szegből áll, a leguruló golyók pedig 11 tartóban gyűlnek össze. Egy golyó bármely szegen egyforma $p = 0.5$ valószínűséggel pattanhat jobbra (jelentse ez a kimenet a sikert), illetve $q = 0.5$ valószínűséggel balra (ez pedig a sikertelenséget). A tíz egymás utáni pattanás $n = 10$ elvégzett kísérletet jelent. 10 egymást követő sikertelen (balra kitérő) pattanás után a golyó a bal szélső tartóba kerül (a sikerrel záruló kísérletek száma $k = 0$), 10 egymást követő sikeres (jobbra kitérő) pattanást követően az pedig a jobb szélső tartóba jut (ekkor $k = 10$). Ez a két eset természetesen elég ritkán fordul elő, a golyók az esetek többségében inkább a középső tartók valamelyikébe jutnak.

Az 5. ábrán a 2. ábra táblázatában szereplő számítások egy részét ismételtük meg, az elvégzett kísérletek $n \in 1, 10$ számának függvényében. Ebből a táblázatból oszloponként annak a valószínűségét olvashatjuk ki, hogy milyen valószínűséggel halad tovább egy golyó a szegek között: az első oszlopban megjelenő $1/2, 1/2$ értékek azt jelentik, hogy a felső sorban levő szeg a golyókat kb. fele-fele arányban téríti el balra, illetve jobbra. Innen a korongok a második sorban levő szegekre esnek, amelyek szintén fele-fele arányban térítik el azokat balra és jobbra. Ekkor a bal oldali szegre eső korongok fele, tehát az összes korong kb. $1/4$ -e térül balra, és ugyanannyi jobbra. A jobb oldali szegre eső korongok esetében ugyanez történik, így a két szeg

között a korongok kb. $1/4 + 1/4 = 1/2$ -e fog elhaladni. Ennek megfelelően a táblázat második oszlopában az $1/4$, $1/2$, $1/4$ valószínűségek jelennek meg. Ez sorról sorra lefele megismétlődik és így alakul ki a haranggörbéhez közelítő eloszlás.

A normáeloszlás

Egy folytonos, a valós számok \mathbb{R} intervallumán értelmezett valószínűségi változót normáeloszlásúnak mondanak, amennyiben a sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_X}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - m_X}{\sigma_X} \right)^2}$$

formában írható fel.

Mint tudjuk, a sűrűségfüggvény behelyettesítési értékével kapott $f_X(a) \cdot \Delta x$ szorzat annak a valószínűségét közelíti, amellyel az X változó az a körüli értékeivel fordul elő, egy Δx hosszúságú intervallumon. Minél rövidebb az intervallum, annál jobb a közelítés (és annál kisebb a valószínűség is). Annak a valószínűsége, hogy a változó éppen az a értékkel forduljon elő, vagyis $P(X = a)$, gyakorlatilag nullával egyenlő, mivel a valószínűségi változó lehetséges értékeinek a száma végtelenül nagy. Ez a függvény tehát értelmezését tekintve nem azonos a diszkrét valószínűségi változók esetében használt, ugyanígy jelölt valószínűségi függvénnyel.

Érdekességképpen említhető, hogy néha a normáeloszlást akképpen definiálják, miszerint a változása arányos a függvény értékével és az átlagtól való távolsággal:

$$\frac{df_X(x)}{dx} = k \cdot f_X(x) \cdot (m_X - x),$$

a differenciál-egyenlet megoldása az előbbi formához vezet, aminek a paraméterezése az m_X átlaggal és a σ_X szórással történik (egyébként, ez utóbbi egyenletben $k = 1/\sigma_X$).

A sűrűségfüggvény integrálásával kapjuk az eloszlásfüggvényt:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_X}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - m_X}{\sigma_X} \right)^2} dx.$$

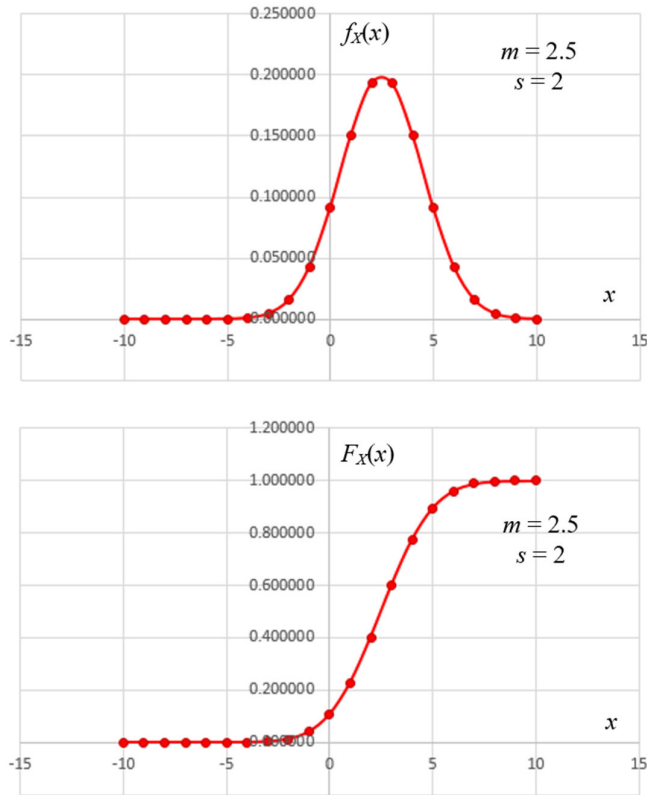
Ezt az integrált analitikus formában kiszámítani nem lehet.

A normáeloszlást teljesen leírja a középértéke és a szórása. A sűrűségfüggvény ábrázolása a szimmetrikus Gauss-haranggörbét eredményezi, amely mindkét végén aszimptotikusan tart a zéró fele. Az eloszlásfüggvény grafikonja egy növekvő, két vízszintes aszimptotával és egy inflexiós ponttal rendelkező görbe, amely az inflexiós pontra nézve szimmetrikus. A sűrűségfüggvény maximuma (a harang legmagasabb pontja) ugyanott van, ahol az eloszlásfüggvénynek az inflexiós pontja van. A szimmetria miatt az átlag, a módusz és a medián egybeesik és a ferdeségi tényező nulla. Az eloszlás lapultsága, mint már említettük, 3.

Excelben a statisztikai függvények között szereplő NORM.DIST() az eloszlás sűrűségfüggvényének és eloszlásfüggvényének értékét adja vissza. E függvénynek négy paramétere van, ezek:

- X : ez a valószínűségi változó azon x értéke, amire a sűrűségfüggvény vagy az eloszlásfüggvény értékét szeretnénk megkapni;
- *Mean*: ez az X valószínűségi változó m_X várható értéke (átlaga);
- *Standard_dev*: ez az X valószínűségi változó σ_X szórása;

– *Cumulative*: *TRUE* (vagy 1-es) értéke az eloszlásfüggvény, *FALSE* (vagy 0) a sűrűségfüggvény értékeinek kiszámítását állítja be.



6. ábra. A normáloszlás sűrűségfüggvénye és eloszlásfüggvénye Excelben

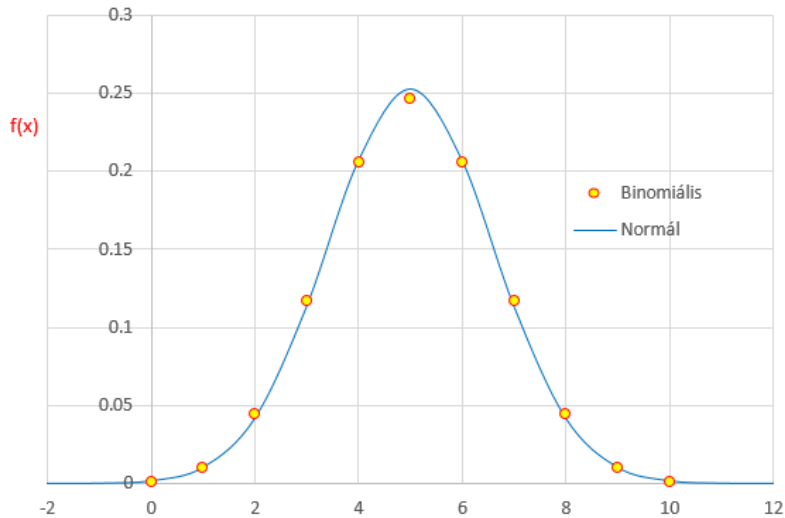
A 6. ábrán az $m_X = 2.5$ átlagú és $\sigma_X = 2$ szórású normáloszlás sűrűségfüggvénye és eloszlásfüggvénye látható, amit a `NORM.DIST()` beépített függvény segítségével ábrázoltunk.

Az elmélet részletesebb taglalása nélkül kijelenthetjük, hogy a Galton-deszka „igen-nem” elemi eseményeinek valószínűségéből ki lehet számítani a korongok beesésének helyét adó diszkrét valószínűségi változó eloszlását, és ha az egymást követő események száma $n \rightarrow \infty$, akkor ez az eloszlás a normáloszlás fele tart. Ez a kijelentés a központi határeloszlás tételének a következménye.

Amennyiben meg szeretnénk vizsgálni, hogy mennyire „passzol” a Galton-deszkánk esetében a leguruló golyóknak az elméletileg binomiális eloszlást mutató eloszlása a normáloszlás haranggörbéjéhez, szerkesszük meg ezt a binomiális eloszlás $m_X = p \cdot n = 0.5 \cdot 10 = 5$ átlagával és $\sigma_X = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{10 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.5)} = \sqrt{2.5}$ szórásával. Azt fogjuk tapasztalni, hogy az eltérés igen kicsi, pedig szó sincs arról, hogy n a végtelen fele tartana.

Amennyiben kísérletezni szeretnénk, akkor kipróbálhatjuk azt is, hogy mennyire jó a közelítés abban az esetben, amikor $p \neq 0.5$ – azt fogjuk tapasztalni, hogy az egyezés valóban csak nagyobb n számokra lesz elfogadható.

Megjegyzendő, hogy a legtöbb véletlen jelenség normáloszlású ugyan, de ez nem jelenti azt, hogy ez kizárólagosságot élvezne: számos véletlen jelenséget leíró valószínűségi változó másfajta eloszlást követ.



7. ábra. A binomiális eloszlás valószínűségfüggvényét közelítő normáloszlás sűrűségfüggvénye

A virtuális Galton-deszka felépítése és működése

A virtuális Galton-deszka „lelke” egy Arduino Mega 2560-as fejlesztőpanel, amihez egy 32x32-es RGB LED-mátrixot csatlakoztattunk. A „golyó” egy pixel, amit felülről lefele állandó (a felhasználó által módosítható) sebességgel „esik”. Ha az esés közben egy „szeghez” ér, akkor egy véletlenszám-generátor által előállított szám segítségével eldöntjük, hogy az merre térjen ki (0 – balra, vagy 1 – jobbra). A felhasználó három változatban használhatja ezt:

a). „igazi”, hardveresen előállított véletlenszámokra (*true random number*) alapozva. Az előállított szám csak egy bit, ami egy be nem kötött analóg bemenet mintavételezéséből származik. A mintavételezett jel tulajdonképpen véletlenszerűen alakuló zaj, amit néha „atmoszférikusnak” neveznek, mások pedig az elektronikus áramkörök felépítő félvezetők termikus zajának tartanak. Az Arduino Mega 10 bites felbontással mintavételezi az analóg bemenet feszültségét, amit egy egész szám formájában olvashatunk le az *analogRead()* függvény segítségével. Mi ebből csak a legalacsonyabb helyértéket használjuk, amit megállapíthatunk bitenként végzett műveletekkel (az „és” függvény segítségével és egy megfelelő maszkkal, vagy pedig balra, majd jobbra léptetéssel), vagy pedig a kettővel való osztás maradékeként.

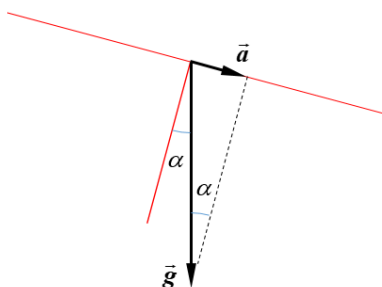
b). szoftveresen előállított véletlenszámokra (*pseudo-random number*) alapozva. Az Arduino *random(min, max)* függvényét használjuk, ami matematikai műveletek segítségével állít elő egy egész számot a megadott *min* és *max-1* között (esetünkben 0 és 2 kell legyen a két határérték). Az előállított számok csak véletlen-szerűek és egy egyenletes eloszlású számsort alkotnak, mindig ugyanabban a sorrendben. Ahhoz, hogy ne mindig ugyanott kezdődjön a sor (mert akkor két különböző programfutás a véletlenszerűség dacára mégis azonosképpen alakulhatna), egy másik függvény, a *randomSeed()* segítségével megválaszthatjuk a belépési pontot. Ezt úgy tehetjük ténylegesen véletlenszerűvé, hogy a *randomSeed()* paramétereként egy be nem kötött analóg beolvasásából származó egész számot adunk meg.

c). szintén szoftveresen előállított véletlenszámokra (*pseudo-random number*) alapozva, azonban a golyók balra-jobbra kitérésének a valószínűségét a stand dőléséhez igazítjuk. Például ha megemeljük a bal oldalát, akkor a golyók inkább jobb oldalra fognak esni. A

standnak a függőleges helyzetűtől való eltérésének α dőlésszögét egy analóg, MMA7261QT típusú gyorsulásmérő érzékelővel mérjük meg.

A szög meghatározása a gravitációs gyorsulásnak az érzékelő vízszintes tengelyére eső \vec{a} vetületével történik (8. ábra). Az ábrán levő derékszögű háromszögben α az érzékelő függőleges tengelyének a gravitáció irányával bezárt szöge (ennyivel billentettük el a Galton-deszkát). A gravitációs gyorsulás ismert g nagyságával és a vetület megmért a nagyságával

$$\sin \alpha = \frac{a}{g}.$$



8. ábra. A dőlésszög meghatározása

Az érzékelő adatlapjából kiderül, amit méréssel is le lehetett ellenőrizni, hogy ha a beállított méréshatára $2.5 g$, akkor az érzékenysége $k = 480 \text{ mV} / g$, a nulla gyorsulásnak megfelelő kimeneti U_0 jel pedig a nominálisan 3.3 V tápfeszültség fele. Az érzékelő jelét egy analóg bemenetre kötjük, a megmért U_α jellel pedig

$$\sin \alpha = \frac{U_\alpha - U_0}{k}$$

(jobbra pozitív, balra negatív a szög is és annak szinusza is). Ez esetben a *random()* függvényvel 0 és 100 közötti egész számokat állítunk elő, amihez hozzáadjuk a $100 \cdot \sin(\alpha)$ mennyiséget. Ha az eredmény 50 alatt van, akkor a véletlenszámunk értéke 0 (a golyó balra pattan), ellenben a visszatérített érték 1 (a golyó jobbra tér el). Észrevehetjük, hogy ha a szög valamelyik irányban eléri vagy meghaladja a 30° -ot, akkor a visszatérített szám a dőlés irányától függően mindig vagy 0, vagy 1.

Ha a Galton-deszka nincs elbillentve, akkor a golyók egyforma valószínűséggel pattannak jobbra vagy balra ($p = 0.5$). Ha a deszkát megbillentjük, akkor ez a valószínűség megváltozik:

$$p = 0.5 + \sin \alpha.$$

E képletnek nyilván csak akkor van értelme, ha $\alpha \in [-30^\circ, +30^\circ]$; ha $\alpha < -30^\circ$, akkor $p = 0$, ha pedig $\alpha > 30^\circ$, akkor $p = 1$.

A kezelőpanelen (9. ábra) az $a - c$ üzemmódok között a második gomb megnyomásával lehet váltani. A váltás csak akkor történik meg, amikor a lefele guruló korong a tartóba ér. Azt, hogy váltás következik, a panel bal felső sarkában világító piros ledék jelzik. A beállított üzemmódot a jobb alsó sarok ledjei mutatják. A c üzemmódban az inklinométer megvilágítása is működik.

Az animáció az első gomb megnyomásával megállítható (ez szintén a lefele guruló korong tartóba érésénél következik be), illetve ugyanazzal a gombbal tovább folytatható. A harmadik gomb az animációt gyorsítja, a negyedik pedig lassítja.

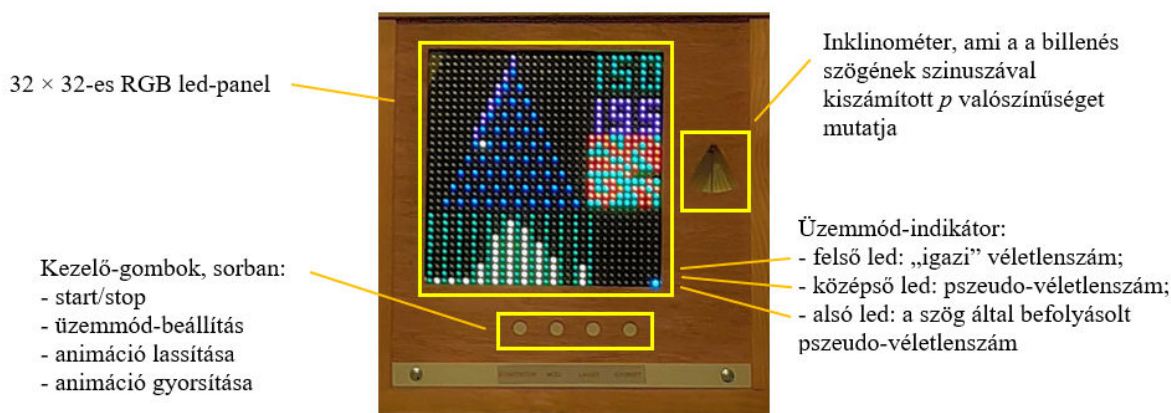
A mátrixon két szám mutatja a legurított golyók számát (az elemi balra-jobbra kitérések száma tízszer ekkora), valamint a balra és jobbra térések számának a különbségét. Ha a stand függőlegesen áll, ez a szám elméletileg egyre közelebb kellene álljon a nullához. Ha a jobbra térések száma a nagyobb, akkor a szám piros, ellenkező esetben zöld.

A mátrixon van egy 10x10 pixel méretű táblázat, ahol zöld és piros színű pixelek mutatják a jobbra-és balra térések egymásutániságát. Ha a stand függőlegesen áll, akkor ezek azonos valószínűséggel fordulnak elő és így a kirajzolódó mintázat egy szabályosságot nem mutató, többé-kevésbé egyenletesen eloszló zöld és piros pontokból álló rajzolat kellene legyen.

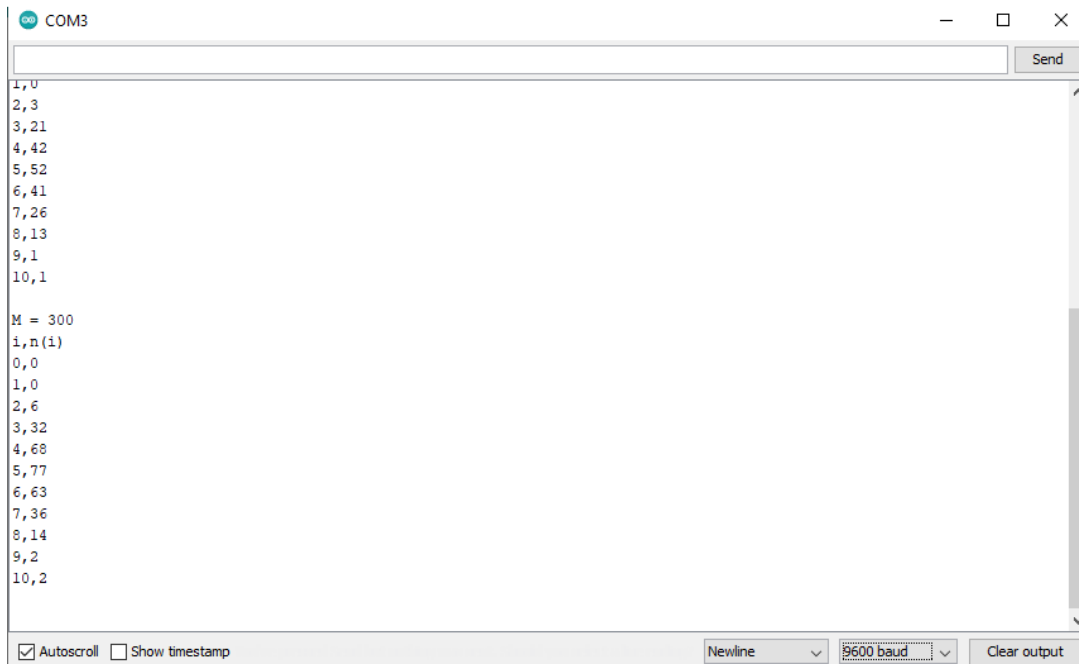
A tartóban csak korlátozott számú golyó férne el, így ha az feltelik, akkor az oszlopok magasságát skálázással csökkentenünk kell. A golyók számát tehát egy idő után nem a világító pixelek száma jelenti. Megfigyelhetjük az idő folyamán kialakuló alakzatot, hogy az mennyire talál az ideális haranggörbe-formával.

Minden századik leguruló golyó után az Arduino a soros porton keresztül kiküldi a tartóban összegyűjtött golyók számát, amit például az *Arduino IDE* program „*Serial monitor*” ablakából (10. ábra) kimásolhatunk további elemzések elvégzése céljából: megrajzolhatjuk a gyakoriságok hisztogramjait, kiszámíthatjuk az eloszlás empirikus átlagát és szórását, statisztikai próbákat végezhetünk el. A „*Serial monitor*” használata esetében az adatátviteli sebesség 9600 baud kell legyen. Ehhez a készülék USB kábelét a számítógéphez kell csatlakoztatni.

A készülék betáplálásához **először a fehér színű tápot dugjuk be a konnektorba** (ez a LED-mátrix tápja), majd ezután a fekete színűt (ez az Arduino tápja). Ha a készüléket számítógéphez szeretnénk csatlakoztatni, akkor a fekete színű tápot nem szükséges csatlakoztatni, viszont **ez esetben is először a fehér színű táp konnektorba dugásával kezdjük el a munkát**. A mátrix elektromos áramköre az Arduino digitális kimeneteire csatlakozik, azok pedig csak néhány mA áramerősséggel terhelhetők. Valamilyen ok miatt a táppal történő ellátás hiányában a vezérlőjelek is világításra készítenek a mátrixot, azonban ez több watt teljesítményt is igényel, amit a digitális kimenetek nem tudnak biztosítani.



9. ábra. Kezelőfelület

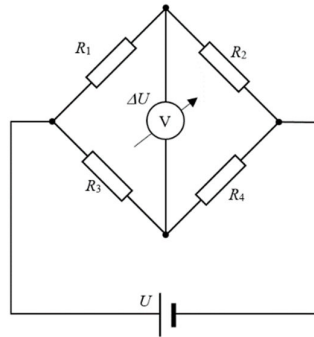


10. ábra. Kimeneti adatok

A WHEATSTONE-HÍD

A Wheatstone-híd az elektromos ellenállás megméréseire szolgáló kapcsolás, aminek az elvét Samuel Hunter Christie brit tudós találta fel. Ezt 1833-ban publikálta „diamond method” néven. Ezt az értelmének, a híd szokásos ábrázolási módjának megfelelően, „rombuszmódszer”-nek kell lefordítanunk. Ezt tíz évvel később egy másik brit tudós, Charles Wheatstone tökéletesítette és tette népszerűvé, így a mérőhíd elnevezése az ő nevét viseli.

A híd a „klasszikus” elrendezésében (1. ábra) négy ohmikus ellenállásból áll és egyenfeszültséggel tápláljuk. Azonban különféle, váltakozó feszültséggel betáplált, kapacitás, induktivitás és frekvencia megméréseire alkalmas kapcsolások is léteznek, de létezik például tranzisztorokkal megépített, hídkapcsolású elektronikus feszültségmérő is.



1. ábra. A Wheatstone-híd

Észrevehetjük, hogy ha a kapcsolási rajzon levő feszültségmérő ellenállása kellőképpen nagy, akkor a híd két párhuzamosan kapcsolt feszültségosztónak tekinthető. Ekkor az R_1 és az R_2 ellenállásokon keresztül ugyanaz az áram folyik keresztül, így ezen a két ellenálláson fellépő feszültségesés

$$U = U_1 + U_2, \quad U_1 = U \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad U_2 = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}. \quad (1)$$

Ugyanezt állapíthatjuk meg az R_3 és az R_4 ellenállásokról is:

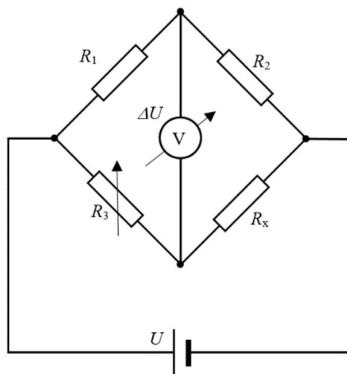
$$U = U_3 + U_4, \quad U_3 = U \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4}, \quad U_4 = U \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4}, \quad \frac{U_3}{U_4} = \frac{R_3}{R_4}. \quad (2)$$

Amikor $U_1 = U_3$ (és ebből kifolyólag $U_2 = U_4$), akkor az 1. és a 2. ellenállások közös csatlakozási pontja ugyanazon a potenciálon van, mint a 3. és a 4. csatlakozási pontja, s emiatt a két pont közé bekötött mérőeszköz nem mutat feszültséget ($\Delta U = 0$). Ebben az esetben

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{U_3}{U_4} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}. \quad (3)$$

Amikor ez a helyzet áll fenn, azt mondjuk, hogy a híd *egyensúlyban van*. Ilyenkor, mivel a feszültségmérőn keresztül nem folyik át áram, annak a belső ellenállása nem befolyásolja az egyensúlyi egyenleteket.

A híd kiegyensúlyozásához tehát az ellenállások között felírt arányosságnak teljesülnie kell. Ezt az arányosságot egy ismeretlen ellenállás megméréseire használhatjuk. A 2. ábrán a 4. ellenállást egy ismeretlen R_x ellenállással helyettesítjük, a kiegyensúlyozáshoz pedig a 3. ellenállásnak változtathatónak kell lennie (pl. potenciométer, reosztát, dekadellenállás).



2. ábra. Ellenállás-mérés

A mérés során a változtatható ellenállást addig szabályozzuk, míg a híd átlóján levő feszültségmérő $\Delta U = 0$ feszültséget mutat. Az egyensúlyi feltételből

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_x} \Rightarrow R_x = R_3 \cdot \frac{R_2}{R_1}. \quad (4)$$

Ahhoz, hogy megbízható eszközt kapjunk, egy a híd egy pár feltételnek meg kell feleljen:

- a hidat alkotó ellenállásoknak kellőképpen pontosaknak kell lenniük, a beleértve a változtatható ellenállást is;

- ha a hőmérséklet hatását csökkenteni szeretnénk, olyan ellenállásokat kell beépíteni, amik az értéküket csak kevéssel változtatják meg a hőmérséklet megváltozásakor;

- a ΔU feszültség megmérése a kiegyensúlyozott híd esetében ugyan nem fontos (mert csak a $\Delta U = 0$ feltételt kell biztosítanunk), viszont minél érzékenyebb készüléket (galvanométert) használunk, annál pontosabban tudjuk elvégezni az ismeretlen ellenállás meghatározását. Ha nem áll a rendelkezésünkre egy kellőképpen érzékeny eszköz, akkor az átlófeszültséget egy erősítővel fel kell erősítenünk;

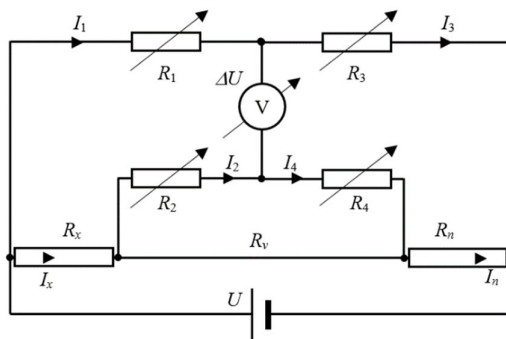
- a kiegyensúlyozatlan híd átlófeszültsége az U betáplálási feszültséggel együtt nő. Ha azt gondolnánk, hogy emiatt célszerű lenne a betáplálási feszültséget megnövelni, akkor jusson eszünkbe az is, hogy a hőmérséklet megváltozása nem csak környezeti hatás lehet: az átfolyó áram keltette Joule-hő is felmelegítheti az alkatrészeinket. Éppen ezért az U feszültség értékét korlátoznunk kell;

- ha R_1 és R_2 rögzített és a megméréendő ellenállásértékek egy tágasabb $[R_{min}, R_{max}]$ intervallumba esnének, úgy a változtatható ellenállást is egy tágasabb, $\left[\frac{R_1}{R_2} \cdot R_{min}, \frac{R_1}{R_2} \cdot R_{max} \right]$

intervallumon kell tudjuk változtatni. Az állítható ellenálláson a leolvasási pontosság korlátozott. Minél kisebb az R_x ellenállás, annál nagyobb lesz a leolvasási pontatlanság által előidézett relatív hiba. Emiatt a tágasabb intervallumon használt mérőhidak esetében ésszerűbb pl. az R_2 ellenállást R_x nagyságrendjével arányosan lépésekben változtatni;

– a nagyobb ellenállások megmérése a rajtuk átfolyó áram csekély volta miatt nehezebb feladat. A Wheatstone-híd esetében a galvanométer érzékenysége határozza meg a felső méréshatárt;

– minél kisebb ellenállást szeretnénk megmérni, annál inkább zavaróbb lesz a vezetékvezetés ellenállásának a hatása (az alsó, az ismeretlen R_x ellenállást és a változtatható R_3 ellenállást tartalmazó feszültségosztó vezetékvezetéséről van szó). Emiatt a kis ellenállások megmérésehez a vezetékvezetést nagy keresztmetszetű vezetékekkel, sínekkel kell megoldanunk, illetve, ha már ez sem segít, akkor a Wheatstone-híd továbbfejlesztett változatát, a Thomson-hídat (más néven Kelvin-hídat) kell alkalmaznunk (3. ábra). Ennek a megalkotója William Thomson, akit inkább lord Kelvin néven ismerünk.



3. ábra. A Thomson-híd

A Thomson-híd ábráján R_x a megméréendő ellenállás, R_n egy ismert ellenállású etalon, R_v pedig a kettőt összekötő vezeték ellenállása. Az áramkör alsó hurkán egy aránylag nagy áram folyik keresztül, amit egy, az ábrán fel nem tüntetett, a tápforrás ágába beiktatott ellenállással lehet korlátozni.

Az R_x előtti és az R_n utáni vezetékek nem tartoznak a híd érzékeny részéhez, így az ellenállásuk nincs befolyással a mérés pontosságára. R_x és R_n , valamint a galvanométer közötti vezetékek ellenállása viszont nem hanyagolható el. Az R_v kis, de nem nulla ellenállású összekötő vezetékkel párhuzamosan két újabb ellenállással, R_2 -vel és R_4 -gyel egy második feszültségosztót iktatunk be, így egy hat ellenállásból álló „kettős Wheatstone-hídat” hozunk létre. R_n és R_x kivételével a hídban szereplő ellenállások nagyok.

Ha a híd kiegyensúlyozzuk, akkor a galvanométeren nem halad át elektromos áram és ekkor $I_1 = I_3$ és $I_2 = I_4$, $U_1 = U_x + U_2$, $U_3 = U_n + U_4$.

Ha az R_v ellenállású vezeték két végpontjára felírjuk a csomóponti Kirchoff törvényt, akkor I_2 és I_4 azonosságából következik, hogy $I_x = I_n$.

A feszültségek arányával

$$\frac{U_1}{U_3} = \frac{U_x + U_2}{U_n + U_4} \Rightarrow \frac{R_1 \cdot I_1}{R_3 \cdot I_3} = \frac{R_x \cdot I_x + R_2 \cdot I_2}{R_n \cdot I_n + R_4 \cdot I_4}. \quad (5)$$

A jobb oldalt átalakítjuk, majd az áramerősségekkel egyszerűsítünk:

$$\frac{R_1 \cdot I_1}{R_3 \cdot I_3} = \frac{(R_x + R_2 \cdot I_2 / I_x) \cdot I_x}{(R_n + R_4 \cdot I_4 / I_n) \cdot I_n} \Rightarrow \frac{R_1}{R_3} = \frac{(R_x + R_2 \cdot I_2 / I_x)}{(R_n + R_4 \cdot I_4 / I_n)}. \quad (6)$$

Innen az ismeretlen ellenállás:

$$R_x = \frac{R_1}{R_3} \cdot (R_n + R_4 \cdot I_4 / I_n) - R_2 \cdot I_2 / I_x = \frac{R_1}{R_3} \cdot R_n + \frac{R_1}{R_3} \cdot R_4 \cdot I_4 / I_n - R_2 \cdot I_2 / I_x. \quad (7)$$

A Thomson-hidat úgy szokták megépíteni, hogy az R_1 és R_2 , valamint az R_3 és R_4 ellenállások együtt változzanak (rendszerint $R_1 = R_2$ és $R_3 = R_4$). Ekkor, a kiegyensúlyozott hídra, amikor $\Delta U = 0$:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \Rightarrow \frac{R_1}{R_3} \cdot R_4 = R_2, \quad (8)$$

és mivel $I_2 = I_4$ és $I_x = I_n$, az ismeretlen ellenállásra végül az

$$R_x = \frac{R_1}{R_3} \cdot R_n \quad (9)$$

képletet kapjuk. E képletben az ismert etalon és két nagyobb értékű, pontosabban beállítható és leolvasható ellenállás értéke szerepel.

A kiegyensúlyozatlan híd

A kiegyensúlyozatlan híd esetében az átlón levő galvanométer egy bizonyos U_G feszültséget mutat. Tételezzük fel, hogy ez a feszültség egy kellő pontossággal megmérhető mennyiség, és határozzuk meg az átlófeszültség és az ellenállások viszonyát.

A kiegyensúlyozatlan hídban a galvanométer R_G ellenállásán keresztül egy I_G áram folyik át (4. ábra). Tételezzük fel, hogy ez az ábrán feltüntetett irányban folyik. Ha pontosan akarunk számolni, akkor ezt nem hanyagolhatjuk el. Emígy a felső feszültségosztó R_1 ellenállásán I_G -vel nagyobb az áramerősség, mint ami az R_2 -n folyik át. Az alsó feszültségosztón viszont az R_4 -en keresztül folyó áram erőssége nagyobb egy ennyivel az R_3 áramához viszonyítva.

A felső feszültségosztóra tehát a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$R_1 \cdot I_1 + R_1 \cdot I_G + R_2 \cdot I_1 = U \quad (10)$$

az alsóra pedig

$$R_3 \cdot I_3 + R_4 \cdot I_G + R_4 \cdot I_3 = U. \quad (11)$$

A galvanométer ellenállásával és az általa megmért feszültséggel $I_G = U_G / R_G$, tehát

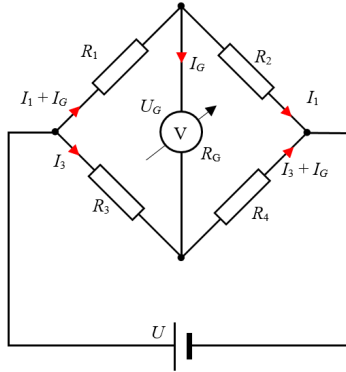
$$(R_1 + R_2) \cdot I_1 + U_G \cdot R_1 / R_G = U \Rightarrow I_1 = \frac{U - U_G \cdot R_1 / R_G}{R_1 + R_2} \quad (12)$$

és

$$(R_3 + R_4) \cdot I_3 + U_G \cdot R_4 / R_G = U \Rightarrow I_3 = \frac{U - U_G \cdot R_4 / R_G}{R_3 + R_4}. \quad (13)$$

A sorba kötött R_1 ellenálláson és a galvanométeren fellépő feszültségesés azonos kell legyen az ezekkel párhuzamos ág R_3 ellenállásán fellépővel:

$$R_1 \cdot (I_1 + I_G) + U_G = R_3 \cdot I_3. \quad (14)$$



4. ábra. A kiegyensúlyozatlan híd

A kiszámított áramerősségekkel ez az egyenlet a következőképpen alakul tovább:

$$R_1 \cdot I_1 + U_G \cdot R_1 / R_G + U_G = R_3 \cdot I_3, \quad (15)$$

$$R_1 \cdot \frac{U - U_G \cdot R_1 / R_G}{R_1 + R_2} + U_G \cdot R_1 / R_G + U_G = R_3 \cdot \frac{U - U_G \cdot R_4 / R_G}{R_3 + R_4}, \quad (16)$$

$$U_G \cdot \left[\left(\frac{R_1 \cdot R_1}{R_1 + R_2} - R_1 - \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} \right) \cdot \frac{1}{R_G} - 1 \right] = U \cdot \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right). \quad (17)$$

Ha a bal oldalon a szögletes zárójelben levő első két tagot közös nevezőre hozzuk, akkor a reláció szimmetrikussá válik:

$$U_G \cdot \left[\left(-\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} \right) \cdot \frac{1}{R_G} - 1 \right] = U \cdot \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right). \quad (18)$$

Innen már csak egy lépésre állunk a keresett megoldástól:

$$U_G = U \cdot \left(\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} \right) \cdot \frac{1}{R_G}}. \quad (19)$$

Mivel általában R_G sokkal nagyobb a híd alkotó ellenállásoknál, a második tört értéke jó közelítéssel egységnyinek vehető, így a szakirodalomban fellelhető képletekben az meg sem jelenik:

$$U_G \approx U \cdot \left(\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right). \quad (20)$$

Leellenőrizhetjük: ha a galvanométer ellenállása egy nagyságrenddel nagyobb a híd ellenállásainál, akkor a tört értéke kb. 0.9 körül van. Ha a kettő aránya két nagyságrendnyi, akkor a tört értéke kb. 0.99. Ha a galvanométer ellenállása ezerszer nagyobb, akkor a hiba már elhanyagolható (a tört értéke 0.999 körül van).

Ha a másik két ággal dolgozunk, akkor az

$$U_G = U \cdot \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} \right) \cdot \frac{1}{R_G}} \quad (21)$$

relációhoz jutunk, amely ugyanazt az átlófeszültséget adja:

$$\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4}. \quad (22)$$

A nyúlásmérő-bélyeg

A nyúlásmérő-bélyeg, amit általában csak „mérőbélyeg”-nek nevezünk, egy test felszínének az alakváltozását alakítja át elektromos jellé. A megnevezésében szereplő „nyúlás” pontosabban hosszúság-változást jelent, ami a tényleges megnyúlás mellett rövidülés is lehet. A rugalmasságtan képleteire támaszkodva, nemcsak a hosszméretek megváltozásához közvetlenül kapcsolható fajlagos ε fajlagos alakváltozás kísérleti megállapítására használható, hanem a nyíróerők okozta torzulásból származó γ fajlagos alakváltozás (a derékszög megváltozása) közvetett megmérésére is alkalmas.

Ha ismerjük a tanulmányozott test anyagának Young-modulusát, akkor Hooke törvénye alapján a megmért nyúlásból feszültséget számíthatunk, így néha „feszültségmérő-bélyeg”-nek is nevezik.

A mérőbélyeg működési elvét William Thomson is leírta, de a gyakorlatban használható mérőbélyeget Edward Simmons és Arthur Ruge találták fel 1938-ban, egymástól függetlenül (az előbbi tulajdonképpen egy erő-érzékelőt épített, az utóbbi használta a feszültségállapot kísérleti meghatározására).

Az elve egy elektromos vezeték ellenállásának képletével magyarázható: ennek az ellenállása a vezeték l hosszától, A keresztmetszetétől és az anyagától, a ρ fajlagos ellenállásától függ:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}. \quad (23)$$

Ha a vezetéket megnyújtjuk, akkor a hosszúsága megnő. A rugalmasságtanból tudjuk, hogy az ε hossz-irányú alakváltozást egy megfelelő, rendszerint ellentétes előjelű ε_t haránt-irányú alakváltozás követi:

$$\varepsilon_t = -\nu \cdot \varepsilon, \quad (24)$$

ahol ν a kettő arányosságát leíró Poisson-együttható (ez fémek esetében általában 0.3 és 0.35 közötti érték). Ha a vezeték hossza a megnyúlás következtében Δl -llett nagyobb, akkor az anyagának a hossz-irányú fajlagos alakváltozása:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (25)$$

(a nevezőben az eredeti hossz), az átmérője pedig a

$$\Delta d = d \cdot \varepsilon_t = -d \cdot \nu \cdot \varepsilon = -\nu \cdot \frac{d}{l} \cdot \Delta l \quad (26)$$

mennyiséggel lett kisebb. Az átmérő csökkenése természetesen a keresztmetszet csökkenését jelenti:

$$\Delta A = \frac{\pi}{4} \cdot \left[(d + \Delta d)^2 - d^2 \right] = \frac{\pi}{4} \cdot (\Delta d^2 + 2 \cdot d \cdot \Delta d) \approx \frac{\pi}{4} \cdot 2 \cdot d \cdot \Delta d = -\frac{2 \cdot \pi \cdot d^2 \cdot \nu \cdot \varepsilon}{4}. \quad (27)$$

Így a vezeték megnyúlása két azonos irányban ható, az elektromos növekedéséhez vezető méretváltozást idéz elő. Ehhez még az is hozzáadódik, hogy a ρ fajlagos ellenállás az anyag belsejében fellépő mechanikai feszültség hatására megváltozik.

Ha az ellenállás megváltozását a kiváltó okokhoz szeretnénk kapcsolni, akkor differenciáljuk a képletét:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta A}{A}. \quad (28)$$

Itt $\Delta l / l = \varepsilon$ és az utolsó hányados

$$\frac{\Delta A}{A} = -\frac{2 \cdot \pi \cdot d^2 \cdot \nu \cdot \varepsilon}{4} \cdot \frac{4}{\pi \cdot d^2} = -2 \cdot \nu \cdot \varepsilon, \quad (29)$$

így

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \varepsilon + 2 \cdot \nu \cdot \varepsilon = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \varepsilon \cdot (1 + 2 \cdot \nu). \quad (30)$$

A huzal ellenállásának a megváltozása tehát a fajlagos alakváltozás függvénye, amit a *bélyegállandó*val tudunk egyszerű egyenes arányosság formájában felírni. A bélyegállandó:

$$G = \frac{\Delta R / R}{\varepsilon} = 1 + 2 \cdot \nu + \frac{\Delta \rho / \rho}{\varepsilon}, \quad (31)$$

ahol fémekre $\frac{\Delta \rho / \rho}{\varepsilon}$ többnyire 0.4, ν pedig 0.3 körül van, így a „közönséges” fémvezetékkel elkészített mérőbélyegek esetében bélyegállandó egy 2 körüli, mértékegység nélküli szám. Platina esetében azonban $G = 6.0$. A félvezető-alapú mérőbélyegek állandója akár százszor is nagyobb lehet, így azok érzékenysége sokkal jobb. A félvezetőknek azonban van egy hátrányuk is: az ε és ΔR közötti kapcsolat nem lineáris, vagyis a g arányossági tényező nem állandó.

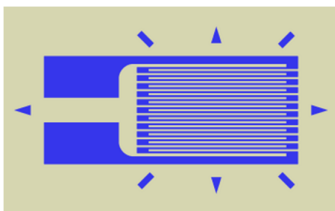
Ha g konstans, akkor a fajlagos alakváltozás meghatározása elvileg egyszerű, csak a bélyeg ellenállásának változását kell követnünk:

$$\varepsilon = \frac{\Delta R}{G \cdot R}. \quad (32)$$

A fajlagos alakváltozás kellőképpen pontos megméréséhez a ΔR mennyiség kellőképpen pontos megmérése szükséges. Minél nagyobb a mérőbélyeg R ellenállása, annál nagyobb lesz annak változása is.

Az alakváltozási állapot a tanulmányozott tárgy felületén gyorsan változhat: az ε fajlagos alakváltozást a geometriai koordináták függvényeként írhatjuk le. Ez a függvény egy adott pontban, nulla kiterjedésű helyen adja meg a fajlagos alakváltozást. Ezzel ellentétben, a megadott definíciójában, egy bizonyos l hosszúságú szakasz Δl megnyúlását vetettünk össze az eredeti hosszal: $\varepsilon = \Delta l / l$. A mérőbélyeg működési elvének magyarázatában is ez a képlet szerepelt. Ennek következtében a mérőbélyeg nem az egy adott pontban érvényes fajlagos alakváltozást méri meg, hanem annak a bélyeg érzékeny (aktív) hossza mentén mért átlagos értékét.

A két utóbbi bekezdésben foglaltak két, egymással ellentétes irányban ható észrevételt tartalmaznak a bélyeg aktív hosszát tekintve: az érzékenység emeléséhez szükséges nagyobb ellenállás eléréséhez azt meg kellene növelni, míg ahhoz, hogy a minél rövidebb szakaszon átlagolt fajlagos alakváltozáshoz juthassunk, a hosszúságot csökkenteni kellene.



5. ábra. Fémfóliás kialakítású nyúlásmérő bélyeg
*A nyilak a bélyeg könnyebb betájolására szolgálnak, a felragasztásánál.
 [Az ábra a Wikipédiáról származik]*

A mérőbélyeg aktív hosszát az ellenállás-huzal többszörös megtűréseivel lehet csökkenteni: a fajlagos alakváltozás átlagolása egy jóval rövidebb szakaszon történik, mint amekkora az ellenállás-huzal tényleges hossza (5. ábra). Ennek azonban van egy hátulütője is: megjelenik a mérés irányára merőleges méret hatása is:

- a mérőbélyegünk egy kisebb-nagyobb felületen átlagolt ε -ra enged következtetni (a megtűrt huzal által lefedett területről van szó);

- a megmért mennyiségre a merőleges irányban fellépő alakváltozás is hatással van. Ezt a hatást a bélyeg megfelelő kialakításával csökkenteni lehet: a huzalozás keresztirányú hossza jóval rövidebb a hosszirányúnál, ha pedig huzalok helyett fémfóliából készül a bélyeg, akkor a keresztirányú szakaszok keresztmetszete (szélessége) jóval nagyobb a hosszirányúknál. Ezt a hatást harántirányú G_t bélyegállandóval (aminek az értéke -0.1 körül szokott lenni) vagy pedig a mérőbélyeg keresztirányú és hosszirányú érzékenységének az összehasonlításával szokták leírni: ez a hányados nem nagyobb 1-2%-nál és emiatt a belőle származó hibát figyelmen kívül szokták hagyni. A negatív előjel a harántirányú alakváltozás ellenkező előjeléből fakad (ha a bélyeg hossza megnövekedik, akkor keresztirányban az zsugorodni fog).

A mérőbélyegeket jellemzői között szerepelnek tehát a geometriai méretek: az aktív (érzékeny) hossz, ami néhány tized mm-től több centiméterig terjedhet, valamint a bélyeg érzékeny részének a szélessége is, ami rendszerint a hosszúságánál kisebb. A nagyobb méretű bélyegeket olyan esetben szokás használni, amikor a fajlagos alakváltozás nem változik számottevően a mérés iránya szerint, illetve akkor, amikor a tárgy anyaga nem homogén (pl. fa, beton, porózus anyagok). A bélyeg tényleges méretei valamivel nagyobbak, mert egy bizonyos távolság van az érzékeny rész és a peremek között, valamint a bekötő vezetékek felforrasztásához szükséges csatlakozókat is ki kell alakítani rajtuk.

A bélyeg ellenállása a geometriai méretekkel van összefüggésben: kis méretek mellett nehezebb nagyobb ellenállású konstrukciót létrehozni. Ha az érzékelő vezetőt túlságosan elvékonyítjuk, akkor az átfolyó áram hőhatása nagyobb lesz. A hőhatás korlátozása miatt a bélyegen fellépő feszültségesés korlátozott. A standardizált ellenállás-értékek 120, 350, 700, illetve 1000 Ω , a megengedett feszültség pedig a méretekkel és az ellenállással növekszik. Egy kisméretű, 120 Ω -os bélyeg esetében az 1 V-nál kisebb érték lehet, míg az ugyanakkora ellenállással rendelkező nagyobb méretű bélyeg esetében az a 10 V-ot is meghaladhatja.

A bélyeg ellenállása nem csak a megnyúlásával, hanem a hőmérsékletének megváltozásával is változik. Ideálisan egy fémes vezető fajlagos ellenállása a hőmérséklet lineáris függvénye:

$$\rho = \rho_0 \cdot [1 + \alpha_r \cdot (t - t_0)] \Rightarrow \Delta\rho = \alpha_r \cdot \rho_0 \cdot \Delta t, \quad (33)$$

ahol α_r a hőmérsékleti tényező, avagy hőfoktényező. A mérőbélyegek esetében azonban összetettebb a jelenség, mivel a geometriai méretek is megváltoznak a hőmérséklet módosulásakor, ideálisan szintén lineárisan:

$$\varepsilon_T = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{l_0 \cdot [1 + \alpha_l \cdot (t - t_0)] - l_0}{l_0} = \alpha_l \cdot \Delta t, \quad (34)$$

ahol α_l a lineáris hőtágulási tényező. A hőmérséklet változásakor nem csak a bélyeg méretei változnak meg, hanem azé a tárgyé is, amire felragasztottuk. A tárgy méretváltozását elméletileg a bélyeg hűen követi. A mérőbélyegünk esetében ez a két hatás összeadódik, ugyanis az érzékelő vezetéknek nem csak a fajlagos ellenállása, hanem a méretei is megváltoznak, ráadásul a méretváltozás a tárgy anyagához is köthető. Ezek miatt inkább a bélyegállandóra szokták a fenti lineáris közelítést alkalmazni:

$$G = G_0 \cdot [1 + \alpha_G \cdot (t - t_0)] \Rightarrow \Delta G = \alpha_G \cdot G_0 \cdot \Delta t, \quad (35)$$

ahol az α_G hőmérsékleti tényező értéke konstantánból készített bélyegek esetében kb. $10^{-4}/^\circ\text{C}$, Megjegyzendő, hogy e képlettel csak a bélyegállandót lehet korigálni, a hőtágulásból származó hibát nem.

A hőmérsékleti határokat a mérőbélyeg anyagának a hőállósága szabja meg, az általánosan használt bélyegek a $-50 \dots +200^\circ\text{C}$ intervallumon alkalmazhatók.

A legkisebb megmérhető alakváltozás nem csak a mérőbélyegtől, hanem a használt felszereléstől is függ, így azt nem szokták a bélyeg adatlapján feltüntetni.

A mérőbélyeg anyagát csak akkora terhelésnek lehet kitenni, hogy az ne szenvedjen maradandó alakváltozást. Emiatt a megmérhető legnagyobb alakváltozás mindkét irányban korlátozott, az rendszerint nem haladhatja meg az $\varepsilon_{max} = 0.05 = 5\%$ -os határt. Ehhez kapcsolódik az is, hogy a nemlineáris jelleg és a húzás-nyomás ciklusok során fellépő hiszterézis is a megmért alakváltozással együtt egyre nagyobb lesz.

A bélyeg érzékeny része egy rugalmas anyagból (régebben papír, manapság műanyag) készült, vékony (századmilliméter-nagyságrendű), szigetelő hordozóra erősített huzal vagy fólia, amit a korrózió ellen egy nagyon vékony szigetelőréteg (régebben lakk, manapság szintén műanyag) borít. Ezt a tanulmányozott tárgy felületére kell felragasztani úgy, hogy a bélyeg hossziránya a megméréendő alakváltozás irányával azonos legyen. A ragasztó eléggé szilárd kell legyen ahhoz, hogy a bélyeg együtt nyúljon vagy rövidüljön azzal a tárggyal, amelyre felragasztották (ez rendszerint cianoakrilát pillanatragasztó). A felragasztáskor a tárgy felületét zsírtalanítani kell (a bélyeget is, ha a csomagolásból kivéve megmatattuk azt). A bélyeget egy átlátszó öntapadós ragasztószalaggal lehet betájolni, a bélyegen levő jelekkel, vagy azok hiányában a bélyeg széléhez igazodva (mivel a bélyeg kicsi, jobban járunk, ha egy vonalzóval illesztünk hozzá, így jobban fogjuk látni, hogy milyen irányban áll a bélyeg). Ha sikerült a bélyeget betájolni, akkor az öntapadós szalag egyik végét egy annyira megemeljük, hogy tudjuk a ragasztót a bélyeg és a tárgy felülete közé juttatni, majd a szalagot visszarakasztjuk és a fölösleges ragasztót és az esetleges légbuborékokat kipréseljük a bélyeg alól. Az öntapadós szalagot csak a ragasztó megkötése után lehet eltávolítani: mivel a cianoakrilát csak levegőn köt gyorsan, ez nem történik meg egy pillanat alatt. Ideálisan a felragasztott bélyeg alakváltozása azonos a tárgyéval, a bélyeg pedig nincs befolyással a tárgy alakváltozására.

A hajlított lemezzel megépített stand

A bemutatóeszközön egy $l_t = 0.2995$ m, (299.5 mm) teljes hosszúságú, konzolosan befogott alumínium-ötvözetből készült lemez van (6. ábra), aminek a szélessége $b = 0.0199$ m (ami 19.9 mm), és a vastagsága $h = 0.00193$ m (tehát 1.93 mm).

A lemez tömege 0.03077 kg (ami 30.77 g). Az egységnyi hosszú rúd fajlagos tömege tehát $\mu = 0.03077 / 0.2995 = 0.1027$ kg/m.

A lemezt az egyik végén két merevnek tekinthető pofa szorítja be, hosszúságának 27 mm-es szakaszán. Ezt a végét statikai szempontból mereven befogottnak tekintjük, a szabadon maradt, konzolos rész hossza pedig $l = 0.2725$ m marad. Ezt a szabad végén egy függőleges, koncentrálnak tekintett F erő terheli. Ez az erő lehet egy m tömegű nehezék súlya: $F = m \cdot g$, vagy pedig az származhat a szerkezeten, a lemez nyugalmi állapotában arra merőlegesen elhelyezett M6-os csavarral való hajlításból (a csavarorsó egy teljes fordulata a szabad vég lehajlásának 1 mm-es változását idézi elő). Ez az erő hajlítja és nyírja a lemezt.

A szilárdságtanban különféle hipotézisekre alapozva lehet kiszámítani a hajlító és a nyíró igénybevételek hatását:

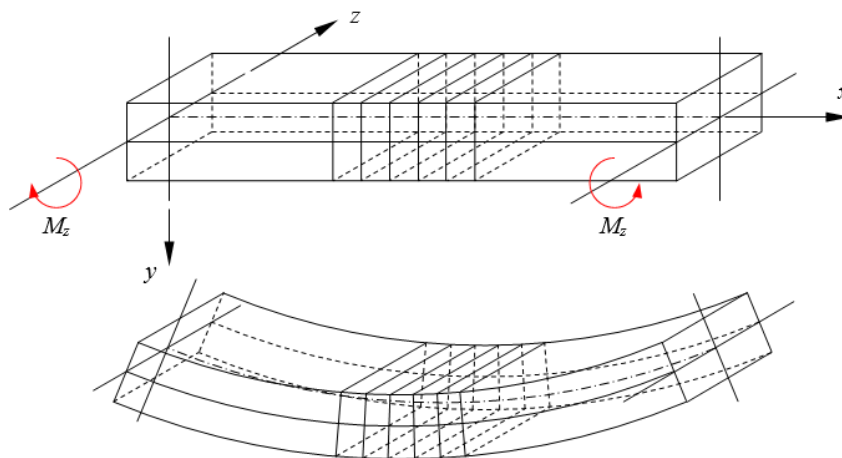
- feltételezzük, hogy a szerkezet anyaga folytonos, homogén és izotróp, minden pontban ugyanazokat a tulajdonságokkal rendelkezik és ezek nagysága nem függ az iránytól, amely mentén azt megmérjük;

- feltételezzük, hogy az anyag lineárisan rugalmas, azaz a terhelés és az általa létrehozott alakváltozás közötti kapcsolat lineáris és a terhelés megszűntekor az alakváltozások maradéktalanul eltűnnek (Robert Hooke);

- feltételezzük, hogy az elmozdulások, alakváltozások kicsik, emiatt az erők támadáspontjának az elmozdulása csak elhanyagolható mértékű hatással van a kiszámított mennyiségekre;

- feltételezzük, hogy terheletlen rúd tengelyére merőlegesen felvett bármely sík keresztmetszet a terhelés után is a rúd tengelyére merőleges és sík marad (6. ábra, Jacob Bernoulli), a kis elmozdulások hipotézisének elfogadása mellett annak formája és nagysága nem változik meg;

- a rúd rögzítése (az ideálisnak nem tekinthető kényszerek) csak a kényszerek közelében okoz számottevő eltérést az ideális feszültségi és alakváltozási állapottól (Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant).



6. ábra. Hajlított rúd

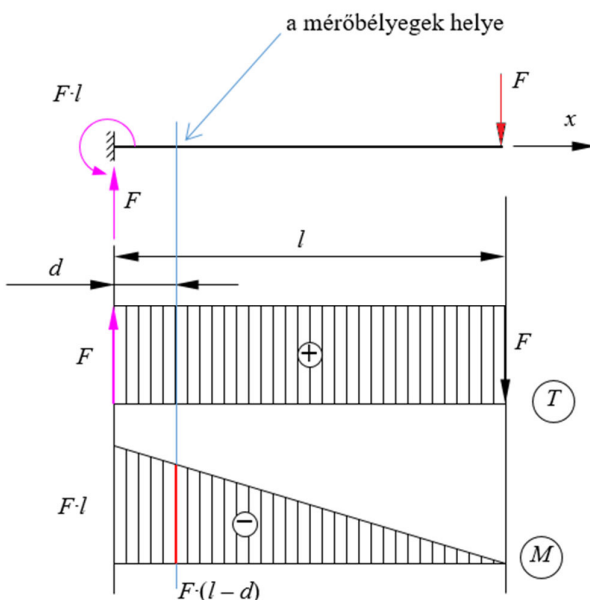
A hajlító igénybevétel nagyságát a kis alakváltozások hipotézise alapján a rúd hossza mentén az

$$M_z(x) = F \cdot (l - x) \quad (36)$$

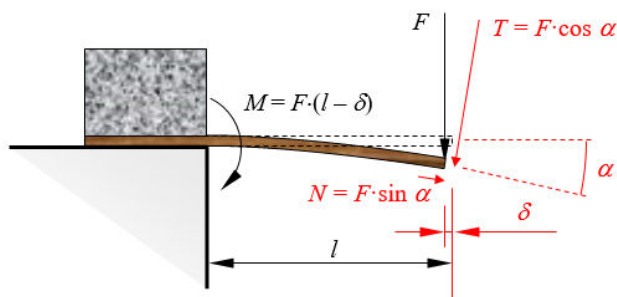
függvénnyel írhatjuk le, nyíró igénybevétel pedig állandónak tekinthető (7. ábra):

$$T_y(x) = F. \quad (37)$$

A valóságban a rúd szabad vége a terhelés következtében elmozdul, aminek következtében a nehezebbel való terheléskor az erő támadáspontja közelebb kerül a merev befogáshoz, így a hajlító igénybevétel valamivel kisebb lesz. Ugyanakkor, mivel a rúd meggörbül, a terhelő erőnek a rúd tengelyére merőleges vetülete, vagyis a nyíró igénybevétel is kisebb lesz a fent megállapítottnál, a rúd tengelyére eső vetület megjelenésének következtében pedig a húzó igénybevétel is megjelenik (8. ábra). Míg a szabad vég elmozdulása kicsi, addig ezek a hatások elhanyagolhatók: emiatt fontos az, hogy a kísérletezés közben a terhelő erőt kellőképpen korlátozzuk, a szabad vég függőleges elmozdulása ne legyen nagyobb néhány milliméternél.



7. ábra. Konzolosan befogott, koncentrált erővel terhelt hajlított rúd



8. ábra. A nagy elmozdulás által okozott nemlineáris hatás

Ha a rúd anyaga lineárisan rugalmas, akkor a Bernoulli-hipotézis alapján (mi szerint a tengelyre merőleges sík keresztmetszetek a meghajlítást követően is síkok és a tengelyre merőlegesek maradnak) levezethető, hogy az x tengellyel párhuzamos „szálak” fajlagos alakváltozása a keresztmetszet magasságában lineárisan változik: a domború oldal megnyúlik, a homorú pedig megrövidül.

Hooke törvénye alapján, a feszültséget és a fajlagos alakváltozást a

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (38)$$

egyenes arányosságot feltételező képlet köti össze, ahol E az anyag Young-modulusa. Tehát ha a rúd anyaga homogén, akkor a fajlagos alakváltozások lineáris változásából következik egy képlet, ami a hajlításból származó normálfeszültség szintén lineáris változását adja a rúd keresztmetszetén (Claude-Louis Navier):

$$\sigma(y) = \frac{M_z}{I_z} \cdot y, \quad (39)$$

ahol I_z a keresztmetszetnek a hajlítás tengelyére számított másodrendű nyomatéka (esetünkben $I_z = b \cdot h^3 / 12$), az y koordinátát pedig a keresztmetszet geometriai középpontjától számítjuk. Megjegyzendő, hogy ez a képlet csak akkor alkalmazható, ha a hajlítás tengelye a keresztmetszet valamelyik főirányára, pl. a szimmetria-tengelye.

A Navier-képlet szerint a feszültség értéke egy negatív és egy pozitív érték között lineárisan változik. Esetünkben, mivel a keresztmetszet téglalap alakú és a hajlítás tengelye a téglalap egyik szimmetria-tengelye, a feszültség pozitív és negatív szélsőértékei csak előjelben különböznek egymástól (9. ábra). Egyezményesen a megnyúlást okozó feszültség előjele pozitív – ez a domború oldalon lép fel –, a rövidülést okozó pedig negatív – ez pedig a homorú oldalon mérhető.



9. ábra. A hajlítás következtében megjelenő feszültség

A hajlított keresztmetszeten fellépő normálfeszültség maximuma Navier képlete szerint $y_{max} = h / 2$ -re számítható:

$$\sigma_{max}(x) = \frac{M(x)}{W_z} = \frac{F \cdot (l-x)}{W_z}, \quad (40)$$

ahol a mi esetünkben

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{b \cdot h^2}{6} \quad (41)$$

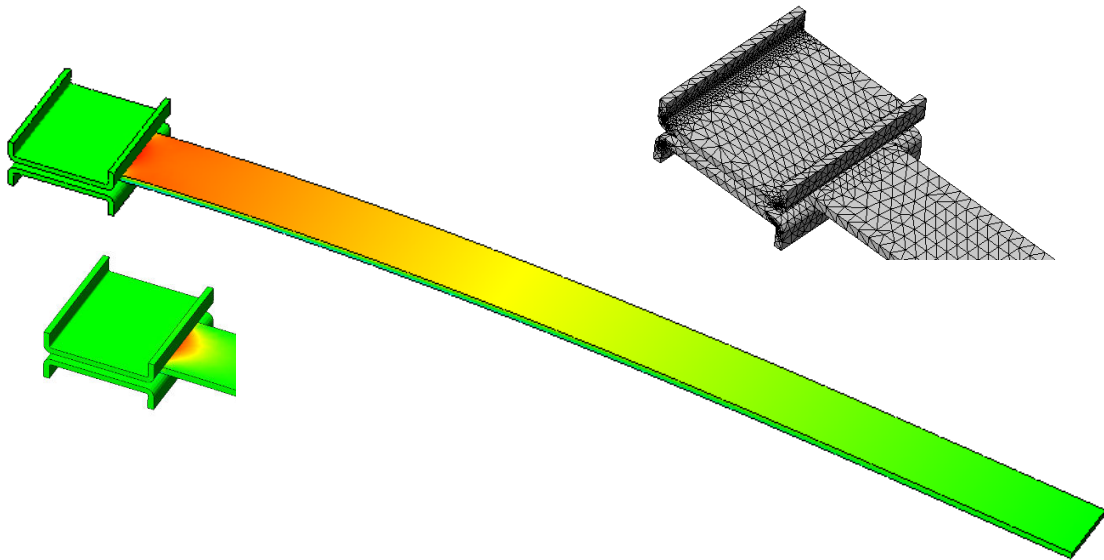
a téglalap alakú keresztmetszetnek a hajlítás tengelyére számolt szilárdsági modulusa.

A fajlagos alakváltozás maximumának abszolút értékét, amit tehát a lemez alsó és felső oldalán mérhetünk, az

$$\varepsilon_{max}(x) = \frac{\sigma_{max}(x)}{E} = \frac{M(x)}{E \cdot W_z} = \frac{6 \cdot F \cdot (l-x)}{E \cdot b \cdot h^2} \quad (42)$$

képlettel tudjuk kiszámítani.

A mérőbéllyegeket a szerkezet kivitelezése miatt nem lehet a merev befogásnál elhelyezni, a de Saint-Venant elv alapján is azokat a befogástól egy bizonyos távolságra kellene elhelyezni. Analitikus módszerekkel nem lehet kiszámítani azt, hogy a kényszer mekkora távolságon befolyásolja jelentősebb mértékben az ideális feszültségeloszlást, éppen ezért a végelem-módszert alkalmazzuk a helyzet felmérésére. A 10. ábra az így kapott hossz-irányú σ_x feszültséget mutatja, azt, amelyiket a szilárdságtanban a Navier-képlettel számolunk ki. A zöld szín felel meg a nulla feszültségnek, a piros a legnagyobb, a kék pedig a legkisebb kiszámított értéknek. A befogás környékén észlelhető, hogy a feszültség eloszlása nem olyan szabályos, mint amilyennek egy kissé távolabb mutatkozik. Még inkább feltűnő a befogás hatása, ha a tengelyre merőleges irányú σ_z feszültséget ábrázoljuk – ez látható a részleten. Amikor a hajlított lemez oldalirányú alakváltozását semmi sem gátolja meg és azt nem éri ilyen irányú terhelés sem, akkor a σ_z feszültség értéke elméletileg nulla kellene legyen. Az elméleti állapottól való eltérés annak köszönhető, hogy a merev befogás meggátolja a keresztirányú alakváltozás megjelenését, s ezáltal keresztirányú feszültséget hoz létre a lemez anyagában. A kiszámított eredmények alapján a lemez rögzítésének a hatása kb. egy 15 mm hosszúságú szakaszra korlátozódik, a befogástól számítva.



10. ábra. A feszültségi állapot a befogás környezetében, végelem-módszerrel modellezve

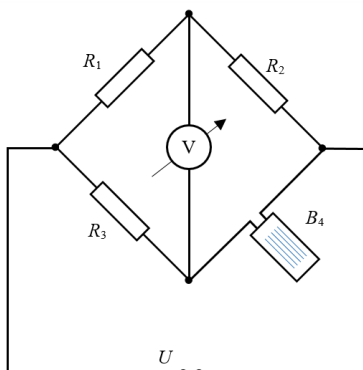
A fentiek miatt a mérőbéllyegeket $d = 0.024$ m-re helyeztük el a befogástól.

Mérőbéllyeg Wheatstone-hídban

Mivel a mérőbéllyeg ellenállása csak igen csekély mértékben változik meg a mérések során, azt „közönséges” ellenállás-mérővel („ohm-mérővel”) megmérni nem lehet. A mérés elvégzésének az egyik a béllyeg(-ek) Wheatstone-hídba kapcsolása.

Negyedhíd

A legegyszerűbb (és a legrosszabb) megoldás az ún. *negyedhíd*-kapcsolás, amikor csak egyetlen mérőbéllyeget alkalmazunk (11. ábra).



11. ábra. Negyedhíd

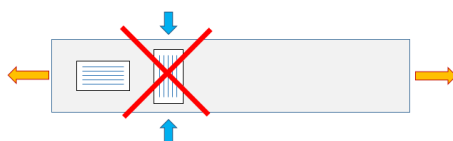
A (19) képlet alapján bebizonyítható, hogy a kiegyensúlyozatlan híd átlófeszültségének maximumát akkor kapjuk, amikor a híd felépítésében szereplő ellenállások, beleértve a terheletlen bélyegét, azonos értékűek. Az így megépített híd érzékenysége a lehető legjobb. Nem a legolcsóbb megoldás, de a rögzített értékű ellenállásokat a mérésre használt bélyeggel azonos, de terheletlen mérőbéllyeget helyettesíthetjük.

Ha a mérést a kiegyensúlyozott híd elvének alapján szeretnénk elvégezni, akkor az R_3 -as ellenállást a mérőbéllyeget ellenállásának várható változásával azonos, leolvasható mértékben kell tudjuk változtatni. Ez utóbbi nem lehet egy hétköznapi potenciométer, mert a mérőbéllyeget ellenállásának $m\Omega$ nagyságrendű változását kell követni.

A (19) képlettel kiszámított átlófeszültség, vagy pedig az egyszerűsített (20) képlettel kapott pontatlanabb érték, a szokásos mérőbéllyegek használatakor még nagyobb alakváltozások esetében is μV nagyságrendű, így a kiegyensúlyozatlan híddal történő mérésnél egy ekkora feszültséget kell a kellő pontossággal megmérni. Ezt rendszerint az átlófeszültség erősítésével, elektronikus áramkörök beépítésével lehet megtenni. A kiegyensúlyozott hídnál az átlófeszültség pontos ismeretére nincs szükség, csupán a nullától való kitérést kell kimutatni: ezt pl. egy galvanométer tűjének megfigyelésével tehetjük meg. A tú kitérése az egyensúlyi állapot közelében igen kicsi, amit a legegyszerűbben az áramkör megszakításával mutathatunk ki: ha a tű a megszakítást követően mozdulni nem látszik, akkor az egyensúlyi állapothoz nagyon közel állunk.

Az alumínium hőtágulási tényezője kb. $\alpha_l = 2.3 \cdot 10^{-5} 1/^\circ C$, mi szerint a megmért alakváltozást akár egy $\Delta t = \varepsilon / \alpha_l = \varepsilon / 2.3 \cdot 10^{-5} ^\circ C$ -os hőmérséklet-változás is előidézhetheti (másképpen: a $\Delta t = 5 ^\circ C$ hőmérséklet-különbség a fajlagos nyúlás értékében egy $\Delta \varepsilon = 1.15 \cdot 10^{-6}$ változást idéz elő). Ebből arra következtethetünk, hogy a környezeti hőmérséklet megváltozása alaposan meghamisíthatja a fajlagos alakváltozás vélt nagyságát, így ezt a hatást valamilyen módon kompenzálnunk kell. Ezt megoldhatjuk számítással is, bevállalván a hőtágulási tényező értékéhez és a hőmérsékletváltozás nagyságához kapcsolódó bizonytalanságokat, viszont biztonságosabb megoldást jelent az R_2 -es ellenállás helyett bekötött, a B_4 -essel azonos, terheletlen bélyeg felhasználása. Sokszor alkalmazzák azt a téves elképzelésen nyugvó „megoldást”, hogy ezt a második, hőmérséklet-kompenzálásra használt mérőbéllyeget a megnyúlás irányára merőlegesen helyezik el, mivel abban az irányban nincs

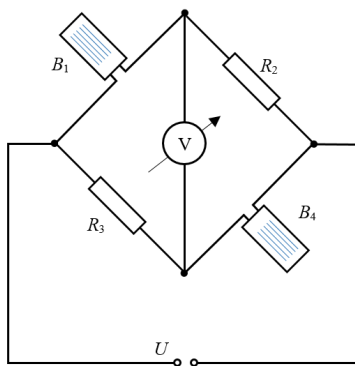
alakváltozás. Ez tévedés, a terhelésből származó hosszirányú ε nyúlást mindig is egy $\varepsilon_t = -\nu \cdot \varepsilon$ nagyságú, keresztirányú alakváltozás kíséri, ami fémek esetében mintegy 1/3-a a hosszirányúnak és ráadásul fordított előjelű. Ha a második mérőbélyeget hőmérséklet-kompenzálásra szeretnénk használni, akkor egy minden irányban terheletlen, a tanulmányozott tárggyal azonos anyagból készült és azonos hőmérsékleten tartott test (pl. egy lemez) sík felületére kell felragasztani. A kompenzálás azon az elven alapul, hogy mindkét bélyegben a hőmérséklet-változás azonos mértékű ellenállás-változást idéz elő (amelyhez a terhelt bélyeg esetében hozzáadódik a terhelés következtében létrejövő méretváltozás hatása), és ekképpen az R_2 és R_4 ellenállások változásában a hőmérsékleti összetevők éppen kiegyensúlyozzák egymást.



12. ábra. A hőmérséklet-kompenzálás téves megoldása

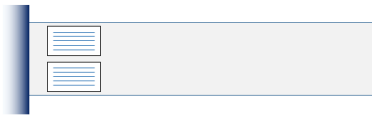
Két egyformán terhelt bélyeggel megépített híd

Megnövelhetjük a híd érzékenységét, amennyiben két, egymással szemben levő oldalon kötünk be egy-egy azonos mértékben terhelt, azonos típusú mérőbélyeget (13. ábra). A terhelés mindkét bélyegben azonos mértékű ellenállás-változást okoz, de azok a hidat alkotó két feszültségosztó ellentétes oldalán helyezkednek el. A (20) képlettel kiszámolt átlófeszültség ekkor kétszer akkora lesz, mint az előző esetben.



13. ábra. Két egyformán terhelt bélyeggel megépített híd

A bélyegek ilyen elhelyezését például húzott vagy nyomott rudak esetében alkalmazhatjuk, amikor azok keresztmetszetén, így a tárgy felületén is, az alakváltozás nagysága minden pontban azonos. Amennyiben ez nem teljesül, akkor két, egymás közvetlen közelében párhuzamosan elhelyezkedő bélyeget alkalmazhatunk, akár a hajlított lemezünk esetében is (14. ábra).



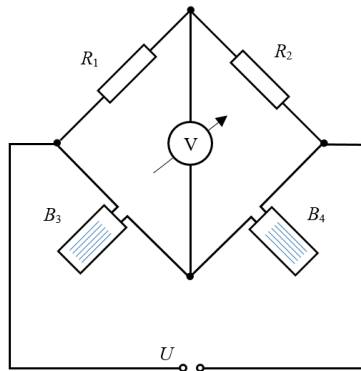
14. ábra. Hajlított lemez felülnézete, két egyformán terhelt mérőbéllyel

Ebben az elrendezésben tehát az érzékenység kétszeresére növekedik a negyedhídhoz viszonyítva. A hőmérséklet-kompenzáláshoz az R_2 és az R_3 ellenállásokat is terheletlen mérőbéllyekkel helyettesíthetjük.

Ha potenciométerrel kiegyenlíthető hőmérséklet-kompenzált hidat szeretnénk építeni, akkor az R_3 -as ellenállást a kiegyenlítéshez használt potenciométerrel kell helyettesítenünk.

Félhíd

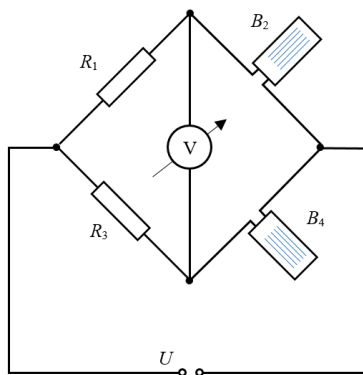
A félhíd szintén két aktív, azonos típusú mérőbéllyel készül, azonban azokat egy hajlított rúd nyújtott és nyomott oldalára kell felragasztani. Ezek a bélyegek a hídban egymás mellett vannak. A hajlítás tengelye a rúd keresztmetszetének szimmetria-tengelye kell legyen. Ekkor a nyújtott oldalon levő bélyeg ΔR ellenállás-növekedésével a nyomott oldalon azonos mértékű ellenállás-csökkenés társul. Rendszerint a két bélyeg alkot egy feszültségosztót (15. ábra), de megalkotható az a verzió, amikor mindkét bélyeg a két feszültségosztónak ugyanazon az oldalán van (16. ábra).



15. ábra. Félhíd

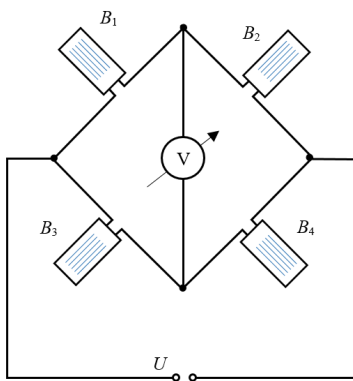
Az ellentétes irányú hatások ebben az esetben is az átlófeszültségnek a negyed hídhoz viszonyított megduplázásához vezetnek. E két bélyeggel egyszersmind a hőmérséklet-kompenzálást is megoldottuk (tehát nincs szükség a terheletlen bélyegekre). Ebben az esetben is az érzékenység a negyedhídhoz mérten kétszer nagyobb.

A félhíd kiegyensúlyozásához az ellenállások valamelyikét kell potenciométerrel helyettesítsük, vagy pedig a két ellenállást helyettesíthetjük egy potenciométerrel, aminek a csúszóérintkezőjét kötjük a galvanométerre (a 15. ábrán látható elrendezés esetében), illetve a tápforrásra (a 16. ábra módosított verziójában).



16. ábra. A félhíd másképpen

A szakirodalomban létezik egy *Poisson-híd*nak nevezett elrendezés, amit rendszerint a 15. ábrán bemutatott félhíd kapcsolást követi, egymásra merőleges irányban felragasztott mérőbéllyegekkel történő megvalósítással. A két bélyeg középpontja a hajlított rúdnak ugyanazon a keresztmetszetén kell legyen, tehát azokat nem lehet egymáshoz viszonyítva úgy eltolni, ahogyan az a 12. ábrán látható. Ehhez egy megfelelő, két egymásra épített mérőbéllyegből álló *rozettát* használhatunk biztonságosan. A fajlagos alakváltozás meghatározása bonyolultabb, mint az egyszerű félhíd esetében: ha a hosszirányú mérőbéllyeg ellenállásának a terhelés által okozott változása ΔR , akkor a merőleges irányú bélyeg ellenállásának a változása $-\nu \cdot \Delta R$ lesz. Ez utóbbi változást szintén a hosszirányú terhelés hozza létre. A ν Poisson-együttható ismeretében ki lehet számítani ΔR értékét, s abból a fajlagos nyúlást is, azonban e tényezőt illetően elég sok a bizonytalanság: kísérletileg kell megállapítani azt. A Poisson-híd hőmérséklet-kompenzált, ugyanis a két bélyegben a hőmérséklet megváltozása ugyanakkora ellenállás-változást idéz elő (tehát azok automatikusan kiegyensúlyozzák egymást).



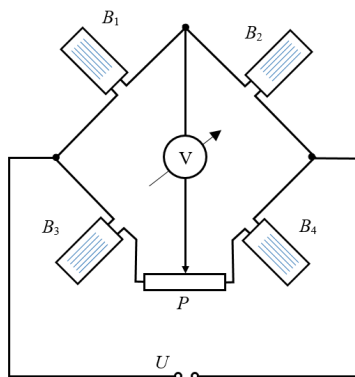
17. ábra. Teljes híd

A teljes híd

A teljes híd négy azonos típusú mérőbéllyegből áll (17. ábra). A szemben álló párok a hajlított rúd azonos oldalán, ugyanazon a keresztmetszeten helyezkednek el (pl. a B_1 -est és a B_4 -est nyújtjuk, a másik kettőt nyomjuk), így a két feszültségosztóban egymással ellentétes

irányú változást hoznak létre. E kapcsolás során az átlófeszültség a negyedhídhoz viszonyítva négyszer akkora lesz. Ez a híd is, a felépítésének következményeként, hőmérséklet-kompenzált.

A kiegyensúlyozását (bár nem szokás) egy beiktatott potenciométerrel oldhatjuk meg, a 18. ábrán látható kapcsolási rajz szerint. Ennek a kapcsolásnak az a hátránya, hogy a híd felől egy ötödik vezeték is be kell kötni, a potenciométer pedig megbontja a híd szimmetriáját.

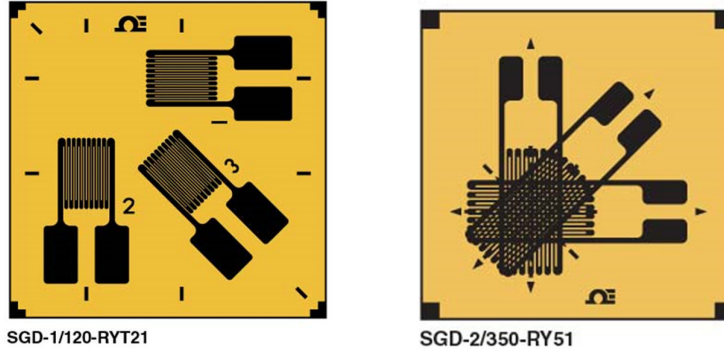


18. ábra. Egy lehetőség a teljes híd kiegyensúlyozására

Mérőbéllyeg-rozetták

Az eddigi levezetések alatt már többször is előfordult annak a ténynek az említése, hogy egy adott irányban fellépő fajlagos alakváltozást egy arra merőleges irányú alakváltozás követi. Ezek szerint az, hogy csak egy adott irányban jelenjen meg alakváltozás, legfennebb csak egy sajátosság, kivételes eset lehet. Ezek miatt, amennyiben a vizsgált tárgy felületén a teljes alakváltozási állapotot szeretnénk felmérni, nem szorítkozhatunk a csupán egyetlen irányban történő mérésekre. A tárgy felülete a vizsgálódás helyén egy két dimenzióval leírható síkkal közelíthető, a mérőbéllyegekkel pedig az ebben a síkban fellépő fajlagos alakváltozásokat lehet megmérni. A sík alakváltozási állapothoz három mennyiség tartozik. Ha a vizsgálódás irányait egy xy koordináta-rendszer tengelyeihez igazítjuk, akkor a sík alakváltozási állapothoz a tengelyek irányában megadott ε_x és ε_y fajlagos nyúlások és a derékszög γ_{xy} megváltozása tartozik: ezeket a mennyiségeket kell kísérletileg meghatároznunk. Az első kettőt nyilván nyúlásmérő-béllyegekkel tudjuk megmérni, azonban a nyírásból származó γ_{xy} fajlagos alakváltozás közvetlen megmérése a nyúlásmérő-béllyegek nem alkalmasak. A megoldást a fajlagos alakváltozások három irány szerinti meghatározása jelenti. Két megoldás terjedt el: az egyik az x , az y , és a kettő közti szögfelező mentén történő mérés (ekkor a béllyegek közötti szög 45°), a másik pedig a béllyegek egymáshoz viszonyított 120° -kal elforgatott irányok szerinti elhelyezése. Ezt megoldhatjuk kevésbé pontos és elegáns megoldással három külön álló, egyszerű mérőbéllyeggel, vagy pedig egy, erre a célra kifejlesztett rozettával.

Az 1.19. ábrán két rozettát láthatunk: a bal oldali esetében az érzékelők egy bizonyos távolságra vannak egymástól (és emiatt a síkban változó alakváltozási állapotot pontatlanabban mérnek fel), a jobb oldali esetében pedig azok átfedik egymást (ekkor a pontatlanság többnyire az egymásra helyezett béllyegek közötti kölcsönhatásból ered).



19. ábra. Mérőbéllyeg-rozetták [omega.com]

Az alakváltozási állapot rozettákkal való megállapításának alapján a rugalmasságtannak azok az összefüggései állnak, amelyek kapcsolatot teremtenek a vizsgáldás iránya (az xy koordináta-rendszer elforgatása) és az illető irány szerint meghatározott fajlagos alakváltozások között. Így megállapítást nyer az a tény, hogy sík alakváltozási állapotban létezik két egymásra merőleges irány, amelyek szerint csak fajlagos nyúlások lépnek fel, tehát a derékszög torzulása nulla. Ezeket az irányokat főirányoknak nevezik és az irányukban fellépő fajlagos alakváltozások a főnyúlások (ε_1 és ε_2 , $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$). Ha a koordináta-rendszert elforgatjuk ezektől az irányoktól, akkor az új irányok szerint megjelenő ε_x és ε_y fajlagos alakváltozások a két főérték között változnak, tehát valahol az $[\varepsilon_2, \varepsilon_1]$ intervallumon lesznek. Ha $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, akkor minden irány főirány, vagyis bármely irányban mérünk, ugyanazt a fajlagos alakváltozást tapasztaljuk, γ_{xy} pedig mindig nulla. Ellenben, az első főiránnyal θ szöget bezáró tengely mentén a fajlagos nyúlás nagyságára levezethető az

$$\varepsilon_\theta = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \theta) \quad (43)$$

összefüggés. A rozettával három irány szerint, három különböző szög alatt mérjük meg a fajlagos alakváltozásokat, ahol a szögek között a rozetta kialakításától függően 45° vagy 120° különbség van. Következésképpen felírható egy három egyenletből álló, három ismeretlenes egyenletrendszer, ahol a három ismeretlen ε_1 , ε_2 , illetve θ . Például, a 45° -onként elhelyezett bélyegek esetében:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \theta), \\ \varepsilon_\delta = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \theta + 90^\circ), \\ \varepsilon_y = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \theta + 180^\circ), \end{cases} \quad (44)$$

ahol ε_δ a szögfelező irányában mért fajlagos alakváltozás.

Az egyenletrendszer megoldása a két főnyúlás és az első főirány (a második az elsőre merőleges):

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_\delta)^2 + (\varepsilon_\delta - \varepsilon_y)^2},$$

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \arctg\left(\frac{\varepsilon_x - 2 \cdot \varepsilon_\delta + \varepsilon_y}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}\right),$$
(45)

ha pedig az xy koordináta-rendszer tengelyei szerint meghatározott γ_{xy} fajlagos alakváltozásra vagyunk kíváncsiak, azt a

$$\gamma_{xy} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cdot \sin(2 \cdot \theta)$$
(46)

képlettel tudjuk kiszámítani.

A mérőhíd gyakorlati megvalósítása

A standon levő hajlított alumíniumlemezen négy, ma már nem gyártott, Philips PR 9862 típusú mérőbélyegből álló dupla Poisson-híd van kialakítva. E bélyegek félvezető alapúak, a terheletlen ellenállásuk névlegesen 130Ω , a bélyegtényezőjük pedig a „hétköznapi” bélyegekhez viszonyítva nagy, nominálisan $G=108$. A nagy bélyegállandó miatt erősítő nélkül is egy aránylag pontos kiegyensúlyozott hidat lehet alkotni belőlük, azonban a bélyegállandó csak kis alakváltozások esetében fogadható el állandó értékűnek.

A négy mérőbélyeg középpontja ugyanazon, a befogástól számított 24 mm távolságra levő keresztmetszeten helyezkedik el, oldalanként egy-egy Poisson-hidat alkotván (a hajlított lemez mindkét oldalán van egy-egy híd, szimmetrikusan elhelyezve).

Kapcsolók segítségével a mérőbélyegek egy részét nominálisan 130Ω értékű ellenállásokkal helyettesíthetjük, így ugyanazt a berendezést a Poisson-híd, a félhíd és a negyedhíd tanulmányozására használhatjuk (ez utóbbit külön hossz- és külön haránt-irányú bélyeggel megoldott elrendezésben).

A lehetséges konfigurációk és a megfelelő kapcsolóállások az 1. táblázatban szerepelnek (20. ábra).

1. táblázat. A hatállású körkapcsoló

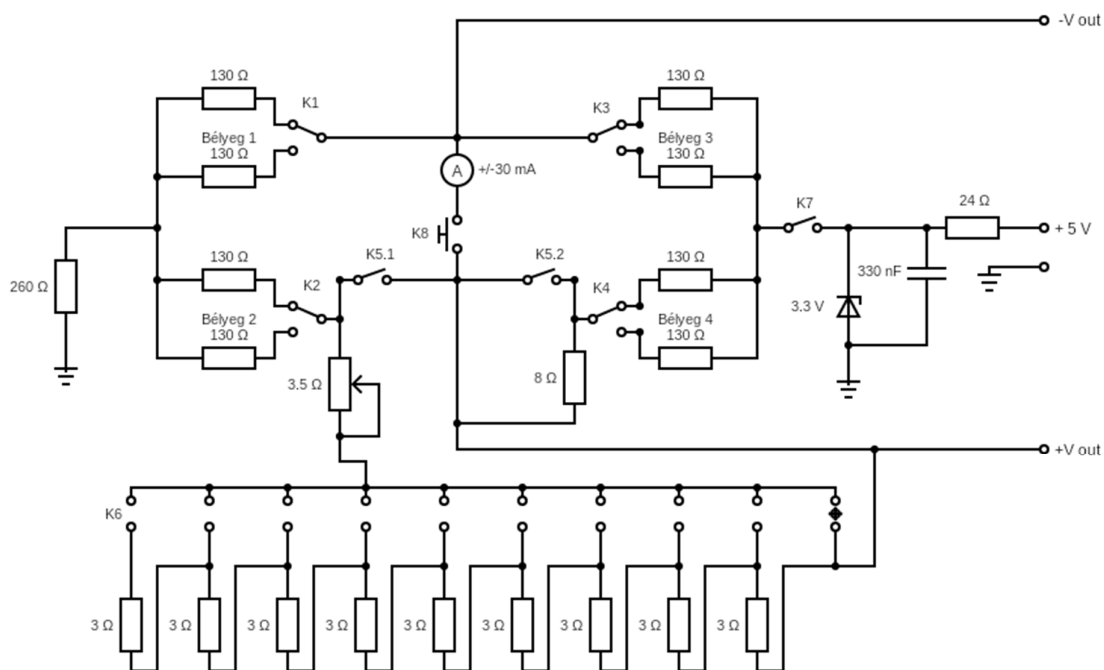
Szelektor állása	Híd	K1	K2	K3	K4	K7
1	Kikapcsolva	0	0	0	0	ki
2	Hosszirányú negyedhíd	B	R	R	R	be
3	Harántirányú negyedhíd	R	B	R	R	be
4	Poisson-híd	R	R	B	B	be
5	Hosszirányú félhíd	B	R	B	R	be
6	Teljes híd (dupla Poisson-híd)	B	B	B	B	be

A konfigurációkat egy hatállású körkapcsolóval lehet beállítani. Az „1” kikapcsolt állásban a mérőhíd feszültségmentes, amivel a bélyegek esetleges melegeződését lehet meggátolni a mérések között.

A K1...K4 kapcsolók „B” állása azt jelenti, hogy a bélyeg van az áramkörbe kapcsolva, az „R” pedig azt, hogy azt egy 130Ω -os ellenállás helyettesíti. A körkapcsoló kialakítása folytán az „1” kikapcsolt állásában a K1...K4 kapcsolók tulajdonképpen egy semleges középállásban vannak (megszakítják az áramkört, ilyenkor a bélyegek és az ellenállások nincsenek az áramkörre kapcsolva).

A kiegyensúlyozáshoz egy $0.03\ \Omega$ és $3.5\ \Omega$ értékek között, egy 200 beosztással ellátott skálán leolvasható potenciometert használunk. Mivel a használt mérőbéllyegek állandója magasabb értékű, a nagyobb alakváltozások esetében a potenciométer ellenállása túl kevés lenne a híd kiegyensúlyozásához. Emiatt a potenciométerrel sorosan egy tízállású körkapcsolóval, $3\ \Omega$ -os lépésekben változtatható ellenállást helyezünk el, amivel $0\dots 27\ \Omega$ -mal növelhetjük a 2-es ág ellenállását.

Az ellentétes irányú alakváltozások kiegyensúlyozásához a 4-es ágba egy rögzített $8\ \Omega$ ellenállást kell beépíteni.



20. ábra. Kapcsolási rajz

A terheletlen mérőbéllyegek és a velük párhuzamos ellenállások szobahőmérsékleten megmért értékei a következő, 2. táblázatban szerepelnek.

Az áramkör tartalmaz egy kettős kapcsolót is (K5.1, K5.2), amivel a potenciométer, valamint a 2-es és a 4-es ágak hozzáadott ellenállásai rövidre zárhatók (a kapcsoló „N” helyzetében), ezáltal a híd kiegyensúlyozatlanná alakítható (mind az öt lehetséges konfigurációjában).

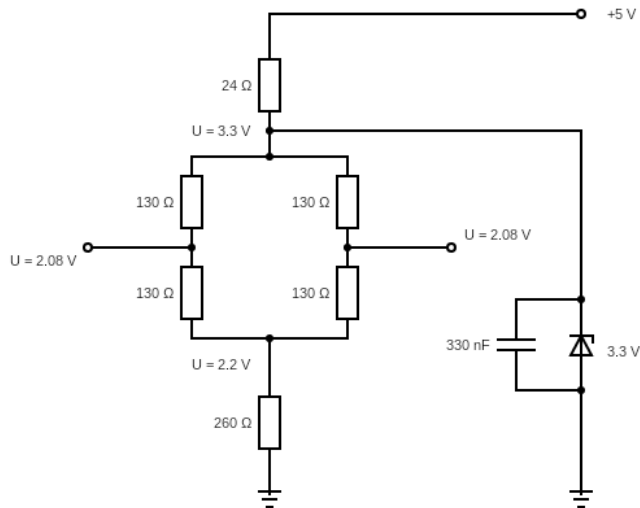
Az áramkörhöz tartozik egy $\pm 120\ \mu\text{A}$ méréshatárú, középállású, elektrodinamikus mérőműszer, amit a kiegyensúlyozáshoz használunk. Ennek a belső ellenállása $370\ \Omega$, ami nem sokkal nagyobb a mérőbéllyegek ellenállásánál. Emiatt a kiegyensúlyozatlan híd átlófeszültségének a megmérésehez csak a pontosabb, (19) képlet alkalmazásakor lenne használható (feszültségmérőként kalibrálva), így ez null detektorként szolgál. Ezt a K8-as nyomógombbal kapcsolhatjuk az áramkörbe. E gombot benyomott állapotában negyed fordulattal elforgatva reteszeltethetjük, így az kapcsolóként is működhet.

2. táblázat. Az ellenállások értéke és azok helye

Ág	1	2	3	4
Helye	hosszirányú, felső oldal	keresztirányú, felső oldal	hosszirányú, alsó oldal	keresztirányú, alsó oldal
B (Ω)	128.7	127.7	128.3	128.3
R (Ω)	127.7	127.7	127.8	127.7

Ahhoz, hogy a bélyegek a mérés közben az átfolyó áram hőhatása miatt túlságosan ne melegedjenek át, a rájuk eső feszültséget 1 V-ra korlátozzuk.

Az átlófeszültség pontosabb megméréséhez egy mérőerősítőt (műszererősítőt), egy INA121P integrált áramkört használunk. Ezt 5 V feszültséggel tápláljuk be. Az áramkör adatlapjából kiderül, hogy a torzítások elkerülése végett a megméréendő feszültségnek a negatív tápfeszültség fölött (ami most 0 V) legalább 2.1 V-tal és a pozitív tápfeszültség alatt (ami az esetünkben 5 V) legalább 1.2 V-tal kell lennie. Ezekkel az adatokkal kiszámítható, hogy a mérőerősítő bemenetein a feszültség a (2.1 V, 3.8 V) intervallumon kell legyen.



21. ábra. A híd betáplálása

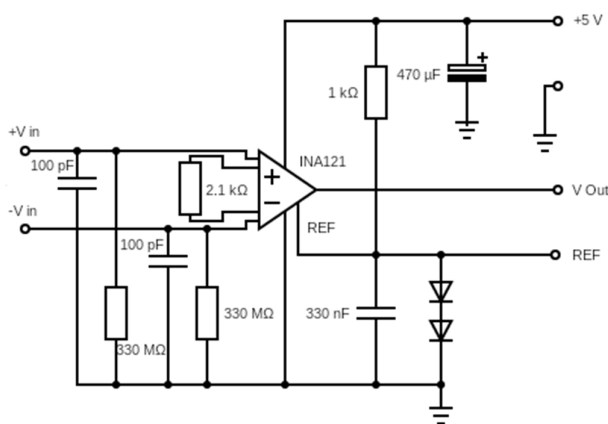
Ehhez a híd betáplálási feszültséget egy Zener-diódával 3.3 V-ra korlátozzuk és egyszerűsített azzal stabilizáljuk is, a dióda zaját pedig egy 330 nF kapacitású kondenzátorral próbáljuk csökkenteni. Az 5 V-os feszültséget egy áramerősség-korlátozó 24 Ω értékű ellenálláson keresztül kötjük be (21. ábra). Ez az ellenállás kellőképpen kicsi kell legyen ahhoz, hogy a Zener-diódán kellőképpen nagy áram tudjon átfolyani a szabályozott feszültség fenntartásához.

Ha a mérőhidat közvetlenül a 3.3 V feszültségre csatlakoztatnánk, akkor az átlófeszültség mérőpontjaiban a feszültség kb. ennek a fele (1.65 V) lenne, ami kívül esik az előbbieken említett (2.1 V, 3.8 V) intervallumon és ráadásul egy-egy bélyegre is kb. 1.65 V feszültségesés jutna, ami meghaladja az említett 1 V-os korlátot.

A mérőhíd ellenállásainak eredője kb. 130 Ω (ugyanis két-két 130 Ω -os sorba kötött ellenállást kapcsolunk párhuzamosan). Ha ezzel egy 260 Ω -os ellenállást kapcsolunk sorosan

úgy, hogy ez utóbbi legyen a test felől, akkor az így kapott feszültségosztó $1/3 - 2/3$ arányban osztja el a 3.3 V -ot a híd eredő ellenállása (amire kb. 1.1 V jut) és a test felől bekötött ellenállás között (ez utóbbin a feszültség kb. 2.2 V lesz). Így az átlófeszültségek mérőpontjában a feszültség értéke kb. $2.2 + 1.1/2 = 2.75\text{ V}$ lesz, a mérőbéllyegeken pedig kb. $1.1/2 = 0.55\text{ V}$ feszültségesés fog fellépni. Mérés közben a híd betáplálási feszültsége a béllyegek ellenállásának megváltozása miatt elhanyagolható mértékben ugyan, de változni fog.

A híd átlófeszültségét az ábrán a „+V out” és a „-V out” jelű csatlakozókon keresztül vezetjük ki a mérőerősítő fele. A kapcsok között mért feszültségkülönbség polaritása a terhelés irányától függ, tehát a „+” jelű kimenet feszültsége nem feltétlenül nagyobb a „-” kimeneten mérténél. Kísérletileg megállapítható, hogy a standon levő lemez alakváltozásától, a beállított konfigurációtól, a potenciométer beállításától meg a hozzáadott ellenállások számától függően az átlófeszültség abszolút értéke nem haladja meg az 45 mV -ot.



22. ábra. A mérőerősítő

A mérőerősítő egy INA121 integrált áramkörre épül, amelyet differenciál-erősítőként használunk (22. ábra). Az erősítő $\pm V$ in bemeneteire a híd $\pm V$ out kimeneteit csatlakoztatjuk. A bemenetek zaját egy-egy 100 pF -os kondenzátorral szűrjük, s azokat egy-egy $330\text{ M}\Omega$ -os ellenállással a testre kötjük. Ez a két ellenállás a híd lekapcsolásakor (a hatállású körkapcsoló 1-es állásában) jut szerephez, azok nélkül a be nem kötött, lebegő bemenetek miatt az erősítő kimenetén a feszültség széles skálán, véletlenszerűen alakulna, ami negatívan hatna a rákapcsolt mintavételező áramkörre.

Az erősítő betáplálása nem szimmetrikus. A pozitív oldalon a feszültség 5 V , amit egy $470\text{ }\mu\text{F}$ -os kondenzátorral szűrünk, a negatív oldal pedig testre van kötve.

Az erősítési tényezőt egy R_G ellenállással lehet beállítani. Az adatlap szerint az erősítési tényező

$$G_e = 1 + \frac{50\text{ k}\Omega}{R_G}. \quad (47)$$

A „V Out” kimeneten mért feszültség a bemenetek feszültségkülönbségével arányos és azt a „REF” kivezetésen beállított feszültséghez viszonyítva kell értelmezni:

$$V_{Out} = G_e \cdot \Delta V_{in} + V_{REF}. \quad (48)$$

A kimeneti feszültséget egy ESP32 WEMOS LoLin32 Lite mikrokontroller mintavételezi, egy analóg bemenetén keresztül (23. ábra). Sajnos e mikrokontroller analóg-digitális átalakítója csak egy szűkebb tartományon lineáris. Az alapértelmezett beállítások mellett ez a tartomány kb. 150 mV és 2700 mV között van, a tényleges méréshatárok pedig 0 mV és kb. 3100 mV lennének (mivel az áramköröknek eléggé nagy a szórása, a pontosabb mérések érdekében ezeket az értékeket és a lineáris szakasz meredekségét egyedenként kell megállapítani).

A bemenet polaritása fordított is lehet és a kimenetet a testhez viszonyítjuk. Emiatt a V_{REF} feszültséget a lineáris szakasz közepe (1.35 V) körül kell felvenni. Mivel ennek megfelelő Zener-diódát nehezen lehet felhajtani, e célra két sorba kötött, nyitó irányban bekötött szilícium-alapú egyenirányító diódát használunk, a kettő nyitófeszültsége összesen 1.585 V, ami a V_{REF} feszültséggel azonos. Az áramerősség korlátozására egy 1 k Ω -os ellenállást, a diódák zajának csökkentésére pedig egy 330 nF -os kondenzátort használunk. A V_{REF} feszültséget az ESP32-vel a mérések során folyamatosan mintavételezzük.

A nulla bemenet a kimeneten elméletileg a V_{REF} feszültség kellene megjelenjen (gyakorlatilag egy nem túl nagy offset-feszültséget mérhetünk, a standunk esetében ez mintegy 4 mV). Fordított polaritású bemenet esetében a kimeneten egy V_{REF} -nél kisebb feszültséget, ellenkező esetben egy annál nagyobb feszültséget mérhetünk. Az erősítési tényezőt úgy kell beállítanunk, hogy a mérések során a legnagyobb abszolút értékű bemeneti feszültségek esetében is a kimenet a lineáris tartományon maradjon. A bemeneti feszültség ± 45 mV határértékeivel számolva az erősítési tényezőt $G_e = 25$ értékkel állíthatjuk be, amihez $R_G = 2083 \Omega$ kellene legyen. A 22. ábrán ennek a kerekített értéke jelenik meg, de az ellenállások értékének szórását kihasználva, a tényleges ellenállás meghatározásával az áramkörbe egy $R_G = 2080 \Omega$ megmért értékű példányt illesztettünk be (ez tulajdonképpen két sorba kötött ellenállásból tevődik össze). A kísérletileg meghatározott erősítési tényező ezzel $G_e = 25.6$ lett (tehát valamivel nagyobb, mint ami az adatlapon szereplő képlet alapján számítható lenne).

A bemenet és a kimenet elméleti viszonyát ennek megfelelően a 3. táblázatban feltüntetett feszültségekkel adhatjuk meg.

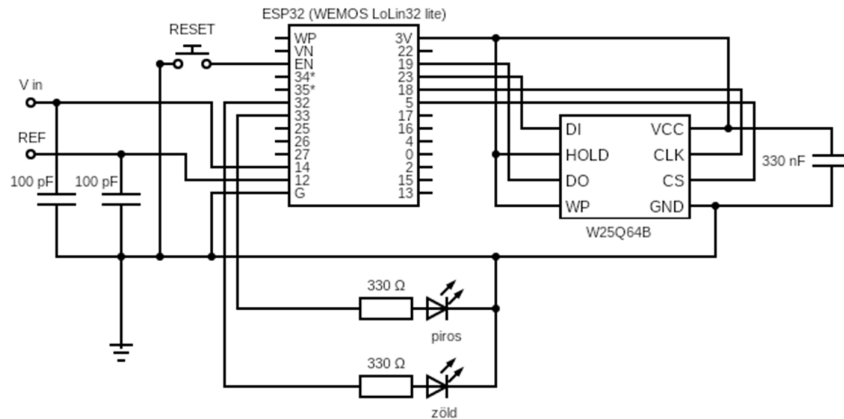
A mérések elvégzéséhez a V_{REF} feszültséget az ESP32 12-es csatlakozójára, a mérőerősítő V_{Out} kimeneti feszültségét pedig a 14-es csatlakozójára vezetjük (23. ábra). Az ESP32-es analóg-digitális átalakítója nagyon zajos, az adatlapja egy-egy, a csatlakozó közvetlen közelében elhelyezett, testre kötött zavarcsűrő kondenzátor beépítését és a többszörös mintavételezéssel nyert adatok átlagolását javasolja ennek a kiküszöbölésére. E célból 100 pF -os kondenzátorokat használunk, ugyanis egy nagyobb kondenzátor az INA121-es erősítő begerjedéséhez vezethet.

3. táblázat. Az erősítő bemeneti és kimeneti feszültsége

Bemenet, $(+V_{in}) + (-V_{in})$	-45 mV	0 mV	+45 mV
Kimenet, V_{Out}	433 mV	1585 mV	2737 mV

Az ESP32-nek egy belső feszültség-referenciája van, ami a jelek szerint nem teljesen stabil: egy beállított, rögzített bemeneti feszültség esetében is a mintavételezett feszültség enyhébb, véletlenszerű hullámzást mutat. Ennek következtében az INA121 kimeneti

feszültségét csak bizonytalanságokkal tudnánk megállapítani, még hosszabb időn át történő átlagolással is. A véletlenszerű hullámzás azonban mindkét mintavételezett bemenetet egyformán érinti, emiatt a $V_{Out} - V_{REF}$ különbség sokkal stabilabb lesz. Néhány minta átlagolásával a zaj az ESP32 felbontásánál (a mintavételezett jel 1 bitnyi változásának megfelelő feszültség-különbségnél) kisebb lesz.



23. ábra. A mikrokontroller

A mikrokontrolleren egy program fut (a magyarázatokkal ellátott forráskód a csatolmányban), aminek során az adatokat egy W25Q64B integrált áramkör (ami egy 64 MB kapacitású memória) tárolja, valamint a felhasználó fele zöld és piros ledekkel jelzi a programfutás menetét. Mivel az ESP32 a stand dobozán belül helyezkedik el, a RESET gombja a felhasználó számára nem érhető el. Így, ha szükségessé válik, egy nyomógomb segítségével, az EN csatlakozó testre kötésével lehet megoldani az ESP32 alaphelyzetbe állítását.

Az ESP32 mikrokontrollert egy stabilizált, nominálisan 5 V-os feszültségforrásról tápláljuk be (amit az INA121-es betáplálására is használunk), ugyanis a számítógép USB feszültsége erősen zajos és folyton ingadozik.

A stand tartozékai és kezelőelemei

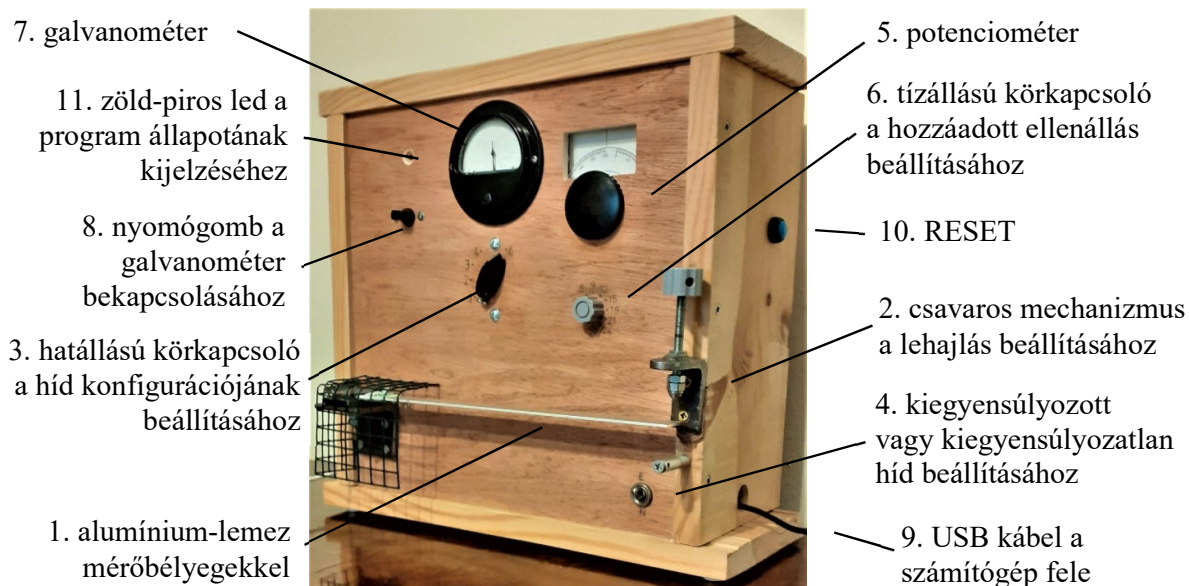
A 23. ábrán levő fényképen láthatók a standnak a felhasználó által kezelhető, beállítható elemei. Ezek közül a legfontosabb az 1. próbatesszt, ami egy alumínium lemez, amelyen a mérőbéllyegek helyezkednek el. A béllyegek a lemez bal oldali felfogatásának közelében helyezkednek el és azokat a sérülés ellen egy rács védi

A próbatesszt jobb oldali, szabad végénél egy csavaros mechanizmus helyezkedik el, amelynek az orsója M6-os menetű. Egy körbeforgatásra a csavar vége 1 mm-rel mozdul el. A csavar fejének kialakítása lehetővé teszi az 1/16-od elfordítás aránylag pontos beállítását is. A lemez szabad vége mintegy 15 mm-rel hajlítható le vagy fel; ekkor még az alakváltozás kicsinek és lineárisan rugalmasnak tekinthető. Az ennél nagyobb elmozdulást a mechanizmus gátolja meg.

A tanulmányozott híd konfigurációját a 3. körkapcsolóval és a 4. kapcsolóval állíthatjuk be. A körkapcsoló a híd típusát állítja (negyedhíd, félhíd, ...), a kapcsoló pedig azt, hogy kiegyensúlyozott vagy kiegyensúlyozatlan módon fogjuk a méréseket elvégezni.

Ha a kiegyensúlyozott hidat használjuk, akkor azt az 5. potenciométerrel és a 6. körkapcsolóval hozzáadott ellenállások segítségével tudjuk megtenni azt. A potenciométer skálájának nulla pozíciója 0.03 Ω -nak felel meg, a 200-as pedig 3.5 Ω -nak, így egy beosztás

0.01735 Ω -nak felel meg. A tízállású körkapcsolóval állásonként 3 Ω -mal tudjuk változtatni az ellenállás nagyságát.



24. ábra. A stand tartozékai és kezelőeszközei

Ha a 4. kapcsolót a kiegyensúlyozatlan hídra állítjuk, akkor az 5. potenciométernek és a 6. körkapcsolónak nincsen semmi hatása.

Megjegyzendő, hogy a 4. kapcsolónak a kiegyensúlyozott hídnak megfelelő állásában is lehet kiegyensúlyozatlan méréseket végezni, azonban ilyenkor fontos az, hogy a potenciométer ellenállásán, illetve a hozzáadott ellenálláson a mérés ideje alatt ne változtassunk. Ilyen esetben a hidat a próbatest terheletlen állapotában kiegyensúlyozzuk és ezen a beállításon a továbbiakban nem változtatunk.

A kiegyensúlyozásnál használhatjuk a 7. galvanométert, amit a benyomott állapotában negyed elforgatással reteszeltető 8. nyomógombbal tudunk a híd átlójára kapcsolni.

A kiegyensúlyozatlan híd esetében, mivel a stand nem tartalmaz az átlófeszültség kijelzésére alkalmas eszközt és mivel a mérőerősítő kimenete nincs kivezetve, az eszközt egy számítógéphez kell csatlakoztatni. Ezt a 9. USB kábellel lehet megoldani. Ez csak az adatátvitelre szolgál, rajta keresztül a standot tápfeszültséggel ellátni nem lehet. Ha a számítógép nem tud az ESP32-vel kommunikálni, akkor a 10. gombbal lehet a mikrokontrollert alaphelyzetbe állítani. A mikrokontroller a 11. piros-zöld led segítségével jelzi a rajta futó program állapotát.

A számítógépen a legegyszerűbben az Arduino IDE-t lehet az parancsok kiküldésére és az adatok fogadására használni, de használhatunk más, soros porton keresztüli kommunikációra alkalmas szoftvert is. Az adatátviteli sebesség 115200 baud.

A mintavételezés

Az ESP32 lapkáját egy USB-kábellel lehet a számítógéphez kötni.

A mintavételezés 12 bit felbontással történik, vagyis az analóg-digitális átalakító 4096 különböző értéket tud megkülönböztetni (0 és 4095 között). Ha elfogadjuk, hogy a méréshatár 3.1 V és az átalakító lineáris, akkor a mintavételezés elméleti felbontása 0.757 mV/bit lenne. A valóságban ez az érték valamivel nagyobb.

A begyűjtött adatok tárolására 2 byte is elegendő lenne, azonban az ESP32 esetében, az Arduinótól eltérően, az „int” egész számok tárolása fenntartott hely 4 byte .

A bekapcsoláskor az ESP32 alaphelyzetbe áll, miután egy pár útmutatást küld ki a felhasználó fele, a soros porton keresztül:

„A következő utasításkódok egyikét kell bevinni:
a - adatgyűjtés, 1000 minta/s, t = 30 s
A - adatgyűjtés, 1000 minta/s, t = 120 s
e - élő adat (egység) (kb. 1.9 kHz), x - megállít
E - élő adat (absz. egység) (kb. 1.9 kHz), x - megállít
v - élő adat (feszültség) (kb. 1.9 kHz), x - megállít
V - élő adat (absz. feszültség) (kb. 1.9 kHz), x - megállít”

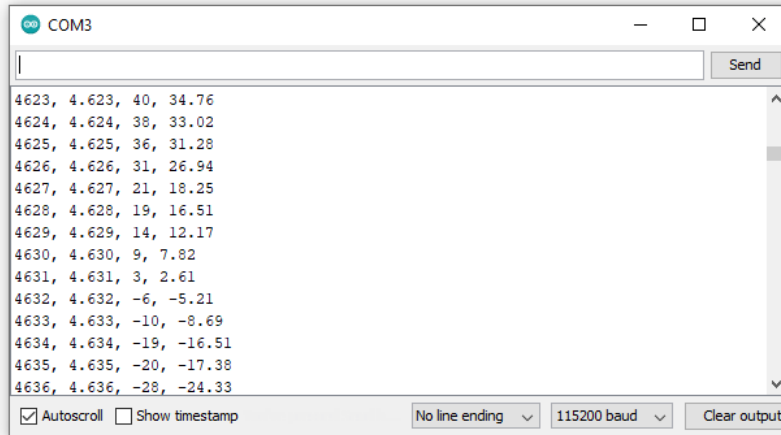
A felhasználó a megfelelő karakter visszaküldésével tudja elindítani (illetve, esetenként megállítani) a kívánt folyamatot. Mivel a program csak egy karaktert vár, az Arduino IDE „Serial Monitor”, illetve „Serial Monitor” ablakában a „No line ending” beállítást kell kiválasztani.

Az „a” és az „A” betűk automatikus mintavételezést indítanak el. Ekkor a mintavételezési periódus 1 ms , amit az ESP32 egy megszakítás-rutin segítségével ér el. A kisbetű egy kb. 30 s , a nagybetű pedig egy kb. 120 s időtartamú mintavételezést indít el (pontosabban 30720, illetve 122880 adat begyűjtéséről van szó). A mintavételezés folyamata alatt nyert adatokat (adatonként 2 byte) az ESP32 egy SPI csatornán keresztül a W25Q64B memóriájában tárolja, majd a mintavételezés befejezése után azokat onnan kiolvassva a soros porton a számítógép fele küldi. Ekkor a vesszővel elválasztott adatok az Arduino IDE „Serial Monitor” ablakában oszlopokba rendezve jelennek meg (25. ábra). Ezek a minta sorszáma (az első 1-es), a mintavételezés időpontja (az első esetben ez 0) és maga a mintavételezett adat (a nem átlagolt $V_{Out} - V_{REF}$ különbség), a mintavételezés során kapott 0 és 4095 közötti számok formájában, valamint mV -ra átszámítva. Ezeket az adatokat innen ki lehet másolni és azokat egy *.csv kiterjesztésű szöveges állományba beillesztve egy Excelben azonnal megnyitható adatállományt kapunk. Az Excelben alkalmunk nyílik az adatok feldolgozására, grafikus ábrázolására.

A W25Q64B memóriája 256 byte nagyságú tömbökre (page) van osztva; egy-egy ilyen tömb a mi esetünkben 128 adat tárolására szolgál. 16 tömb alkot egy 4 kB nagyságú szektort (sector), 16 szektor pedig egy 64 kB nagyságú blokkot (block). Az adatok tárolására a 120 másodpercig tartó mintavételezés esetében a 122880 adat tárolásához 960 tömb szükséges, tehát elegendő az első négy 64 kB nagyságú blokkot használni.

Az adatokat tömböknként lehet beírni és kiolvasni, beírás előtt pedig az illető tömböt törölni kell. Mivel ez utóbbi egy időigényes folyamat (a teljes chip törlése kb. 20 másodpercig tart), a program csak az első négy 64 kB -os blokkot törli.

Ha még több adatot szeretnénk tárolni, akkor a programban meg kell változtatni a *pageMax* paramétert és az *Erase* függvényben további blokkokat is törölni kell.



25. ábra. Az Arduino IDE Serial Monitor ablaka automatikus mintavételezéskor

Az „e” és az „v” betűk az élő, $V_{Out} - V_{REF}$ adatok tárolás nélküli megjelenítésére szolgálnak. Ezeket az Arduino IDE „Serial Monitor” ablakában is gyorsan elfutó számsor formájában is megtekinthetjük (ilyenkor nincs sorszám és idő sem), de igazából azoknak a „Serial Plotter” ablakban való grafikon formájú ábrázolása a cél (25. ábra). Ezalatt a mintavételezés nincs időzítve, az ESP32 folyamatosan mintavételezi a két bemenetet. A kiírt vagy kirajzolt adat az utolsó 256 minta, $V_{Out} - V_{REF}$ mozgóátlaga, amiből az offset-feszültséget is kivonjuk. A mintavételezési frekvencia kb. 1900 Hz, ami azt jelenti, hogy a kiírt vagy kirajzolt adat az utolsó 0.135 s alatt megmért adatok átlaga. Az „e” betűvel a mintavételezés során kapott 0 és 4095 közötti számok mozgóátlagát kapjuk (tizedes szám formájában, tehát 1 bitnél kisebb felbontásban), míg a „v” betűvel ezt az adatot mV-ban megadott feszültség formájában kapjuk.

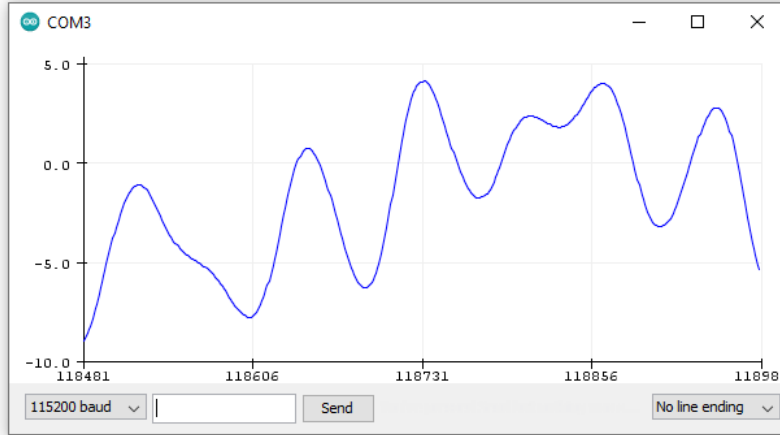
Az „E” és az „V” betűk az előbbi esethez hasonlóan működnek, de a V_{Out} feszültség mintavételezésével (tehát a mintavételezés során kapott „nyers”, de átlagolt adatok: most nincs kivonva a V_{REF} sem és az offset-feszültség sem).

A mintavételezés során kapott 0 és 4095 közötti A relatív szám és a tényleges feszültség közötti kapcsolatot kalibrálással állapíthatjuk meg (ehhez a bemenetre ismert nagyságú feszültség-értékeket kapcsolunk és megállapítjuk a megfelelő kimeneti adatokat). Az így kapott képlet a következő:

$$U = 0.809 \cdot (A - 4.4) \text{ mV}, \quad (49)$$

ahol az analóg-digitális átalakító lineáris szakaszának a meredeksége 0.809 mV/egység, az INA121 erősítő offset-feszültsége pedig 4.4 egység. Megjegyzendő, hogy ez nem a híd átlófeszültsége: azt a mintavételezéssel kapott feszültséget az erősítési tényezővel osztva kapjuk meg:

$$\Delta U = \frac{U}{G_e} = \frac{U}{25.6}. \quad (50)$$



26. ábra. Az Arduino IDE Serial Plotter ablaka élő adat mintavételezéskor

A kiegyensúlyozatlan hosszirányú negyedhíd

A hosszirányú negyedhíd esetében az R_1 -es ellenállás az 1. bélyeg változó ellenállása, a többi három pedig rögzített értékű. Ez a bélyeg a próbatest felső oldalán, a hajlítás miatt megjelenő feszültség irányában van. Így amikor azt lefele hajlítjuk, akkor a próbatest felső oldalának megnyúlása miatt a bélyeg ellenállása meg fog növekedni, ami az átlófeszültség növekedését idézi elő.

A kiegyensúlyozatlan híd átlófeszültségét a (20) képlet adja, ami a kiiktatott galvanométer és a mérőerősítő nagyon nagy bemeneti ellenállása miatt a mi esetünkben egy kellőképpen pontos reláció. Az ellenállásoknak és a bélyegeknak a 20. ábrán látható kapcsolási rajzon levő jelölésével és az átlófeszültség ott szereplő polaritásával ezt most a következőképpen írjuk újra:

$$U_G = U \cdot \left(\frac{R_1}{R_1 + R_3} - \frac{R_2}{R_2 + R_4} \right). \quad (51)$$

A terheletlen bélyeg B_1 ellenállásával, a bélyeg g tényezőjével és a bélyeg által megmért ε fajlagos alakváltozással

$$R_1 = B_1 \cdot (1 + G \cdot \varepsilon), \quad (52)$$

amivel

$$U_G = U \cdot \left(\frac{B_1 \cdot (1 + G \cdot \varepsilon)}{B_1 \cdot (1 + G \cdot \varepsilon) + R_3} - \frac{R_2}{R_2 + R_4} \right). \quad (53)$$

Ha a szakirodalomban gyakran alkalmazott közelítést alkalmazzuk, mi szerint a második tört nevezőjében a $G \cdot \varepsilon$ szorzat elhanyagolhatóan kicsi, akkor a fajlagos alakváltozás és az átlófeszültség egyenes arányosságához jutunk. Ez a megoldás nem a legjobb, ugyanis már aránylag kis fajlagos alakváltozás esetében is jelentős lehet az elkövetett hiba.

Mivel általában a hidat alkotó ellenállások közel állnak egymáshoz (ideális esetben azonosak), az előbbi képletet egyszerűsíteni lehet. Az egyszerűsítés során feltételezzük, hogy a B_1 / R_3 és az R_2 / R_4 hányadosok jó közelítéssel egységnyiek.

Ha viszont ezt a közelítést nem fogadjuk el, akkor az $a = R_3 / B_1$ és a $b = R_4 / R_2$ jelölések bevezetésével, az első törtet B_1 -gyel, a másodikat pedig R_2 -vel egyszerűsítve, az

$$U_G = U \cdot \left(\frac{1 + G \cdot \varepsilon}{1 + G \cdot \varepsilon + a} - \frac{1}{1 + b} \right) \quad (54)$$

relációhoz jutunk. Innen

$$\varepsilon = \frac{u \cdot (1 + a + b + a \cdot b) + a - b}{G \cdot [b - u \cdot (1 + b)]}, \quad (55)$$

ahol

$$u = \frac{U_G}{U}. \quad (56)$$

Ha $a = b = 1$, akkor

$$\varepsilon = \frac{4 \cdot u}{G \cdot (1 - 2 \cdot u)}. \quad (57)$$

A számításokat az ellenállások 2. táblázatban szereplő értékeivel végezzük el. A mérés kezdetén, a próbatest terheletlen állapotában is, az átlófeszültség általában nem nulla. Ez elsősorban onnan származik, hogy a hidat alkotó négy ellenállás nem azonos értékű, de ugyanakkor a próbatest saját súlya és a hőmérséklet változása által előidézett alakváltozás is szóba jöhetnek, mint előidéző okok. A mérés kezdetén leolvasott átlófeszültséggel kiszámíthatunk egy ε_0 kezdeti fajlagos alakváltozást, amit aztán a terhelt állapotban kiszámolt értékből kivonva annak „nettó” értékéhez jutunk.

A 4. táblázat, valamint a 27. ábra, egy kísérlet során megmért fajlagos alakváltozás és a terhelés kapcsolatát mutatja be. A terhelés $m = 4$ g tömegű nehezekekkel történt, amelyeket a próbatest szabad végére függesztettünk fel. A táblázatból a nettó átlófeszültség és a fajlagos alakváltozás (másképpen az átlófeszültség változása és a fajlagos alakváltozás változása) közötti kapcsolatot is megállapíthatjuk.

A kiegyensúlyozatlan keresztirányú negyedhíd

A keresztirányú negyedhíd esetében az R_2 -es ellenállás a 2. bélyeg változó ellenállása, a többi három pedig rögzített értékű. Ez a bélyeg szintén a próbatest felső oldalán van, viszont a hajlítás következtében megjelenő feszültség irányára merőlegesen helyezkedik el. Amikor a próbatestet lefele hajlítjuk, akkor a felső oldal hosszirányú megnyúlását annak harántirányú rövidülése követi, a bélyeg ellenállása ennek következtében csökkenni fog. A híd kialakítása folytán ez az átlófeszültség növekedéséhez vezet.

A hosszirányú és a harántirányú fajlagos alakváltozást a szilárdságtan hipotézisei szerint a (24) összefüggés köti össze. Ennek alapján a bélyeg ellenállása a hosszirányú fajlagos alakváltozással

$$R_2 = B_2 \cdot (1 - G \cdot \nu \cdot \varepsilon), \quad (58)$$

amivel

$$U_G = U \cdot \left(\frac{R_1}{R_1 + R_3} - \frac{B_2 \cdot (1 - G \cdot \nu \cdot \varepsilon)}{B_2 \cdot (1 - G \cdot \nu \cdot \varepsilon) + R_4} \right). \quad (59)$$

Amennyiben $R_3/R_1 = a$, $R_4/B_2 = b$ és $U_G/U = u$, akkor a fajlagos alakváltozásra a következő képletet kapjuk:

$$\varepsilon = \frac{u \cdot (1 + a + b + a \cdot b) + a - b}{G \cdot \nu \cdot [a + u \cdot (1 + a)]}. \quad (60)$$

Ha $a = b = 1$, akkor

$$\varepsilon = \frac{4 \cdot u}{G \cdot \nu \cdot (1 + 2 \cdot u)}. \quad (61)$$

Megmért eredmények 4. táblázatban, valamint a 27. ábrán láthatók.

Az előző kísérletben a hosszirányú alakváltozás és az átlófeszültség kapcsolatát derítettük fel, ebben a kísérletben pedig a hosszirányú alakváltozás következtében létrejövő harántirányú alakváltozás és az átlófeszültség kapcsolatára derül fény. Ha feltételezzük, hogy a két bélyeg tényezője között nincs számottevő eltérés, akkor a feszültségek hányadosa a fajlagos alakváltozások hányadosával egyenlő, az pedig a (24) képlet alapján a Poisson együtthatót adja. A megmért adatok alapján a próbatest anyagának a Poisson-tényezője $\nu = 0.31$ -nek tekinthető.

A kiegyensúlyozatlan Poisson-híd

Ez esetben a hídban két aktív mérőbélyeg van, félhíd kapcsolatban: az 1. hosszirányú és a 2. keresztirányú bélyeg. Mindkettő a próbatest felső oldalán helyezkedik el. A lefele hajlításkor az első megnyúlik, a második megrövidül. Ez utóbbi rövidülése a (24) reláció szerint követi a hosszirányú alakváltozást. A két bélyeg ellenállásának változását az (52), illetve az (58) képletek írják le, amelyekkel az átlófeszültség és a fajlagos alakváltozás kapcsolatára az

$$U_G = U \cdot \left(\frac{B_1 \cdot (1 + G \cdot \varepsilon)}{B_1 \cdot (1 + G \cdot \varepsilon) + R_3} - \frac{B_2 \cdot (1 - G \cdot \nu \cdot \varepsilon)}{B_2 \cdot (1 - G \cdot \nu \cdot \varepsilon) + R_4} \right) \quad (62)$$

összefüggést kapjuk. Itt, és a továbbiakban is, feltételezzük, hogy a bélyegtényezők azonosak.

Az $R_3/B_1 = a$, $R_4/B_2 = b$ és $U_G/U = u$ jelölésekkel a fajlagos alakváltozásra a következő képlethez jutunk (a levezetés során elhanyagoljuk az ε^2 -et tartalmazó tagot):

$$\varepsilon = \frac{u \cdot (1 + a + b + a \cdot b) + a - b}{G \cdot \{ \nu \cdot [a + u \cdot (1 + a)] + (b - u \cdot (1 + b)) \}}. \quad (63)$$

Ha $a = b = 1$, akkor

$$\varepsilon = \frac{4 \cdot u}{G \cdot [\nu \cdot (1 + 2 \cdot u) + (1 - 2 \cdot u)]}. \quad (64)$$

Kísérleti eredmények 4. táblázatban, valamint a 27. ábrán láthatók. A számításokhoz szükséges Poisson-együtthatót az előbbi pontban határoztuk meg.

A kiegyensúlyozatlan félhíd

Ez esetben is a hídban két aktív mérőbélyeg van, félhíd kapcsolatban: az 1. és a 3. hosszirányú bélyegek, amelyek közül az első a próbatest felső, a második pedig annak az alsó oldalán helyezkedik el. A lefele hajlításkor az első megnyúlik, a második megrövidül. Az előbbi az (52), az utóbbi pedig az

$$R_3 = B_3 \cdot (1 - G \cdot \varepsilon) \quad (65)$$

reláció szerint követi a hosszirányú alakváltozást, így az átlófeszültség és a fajlagos alakváltozás kapcsolatára most az

$$U_G = U \cdot \left(\frac{B_1 \cdot (1 + G \cdot \varepsilon)}{B_1 \cdot (1 + G \cdot \varepsilon) + B_3 \cdot (1 - G \cdot \varepsilon)} - \frac{R_2}{R_2 + R_4} \right) \quad (66)$$

összefüggést kapjuk.

Ha bevezetjük a $B_3/B_1 = a$, $R_4/R_2 = b$, $U_G/U = u$ jelöléseket, akkor a fajlagos alakváltozást az

$$\varepsilon = \frac{u \cdot (1 + a + b + a \cdot b) + a - b}{G \cdot [a + b - u \cdot (1 - a + b - a \cdot b)]}. \quad (67)$$

relációval írhatjuk le (az ε^2 -et tartalmazó tagok elhanyagolásával).

Ha $a = b = 1$, akkor

$$\varepsilon = \frac{2 \cdot u}{G}. \quad (68)$$

Megmért eredmények 4. táblázatban, valamint a 27. ábrán láthatók.

A kiegyensúlyozatlan teljes Poisson-híd

Ebben az esetben a híd négy aktív mérőbélyegből, két összeépített Poisson-hídból áll. A felső oldalon az 1. hosszirányú és a 2. keresztirányú bélyeg, az alsón pedig a 3. hosszirányú és a 4. keresztirányú bélyeg áll. A lefele hajlításkor az első és a negyedik megnyúlik, a második és a harmadik megrövidül. Keresztirányú bélyegek a (24) reláció szerint követik a hosszirányú alakváltozást. Az első bélyeg ellenállásának változását az (52), a másodikét az (58), a harmadikét a (65), a negyedik bélyegét pedig az

$$R_4 = B_4 \cdot (1 + G \cdot \nu \cdot \varepsilon) \quad (69)$$

reláció adja. Ezekkel

$$U_G = U \cdot \left(\frac{B_1 \cdot (1 + G \cdot \varepsilon)}{B_1 \cdot (1 + G \cdot \varepsilon) + B_3 \cdot (1 - G \cdot \varepsilon)} - \frac{B_2 \cdot (1 - G \cdot \nu \cdot \varepsilon)}{B_2 \cdot (1 - G \cdot \nu \cdot \varepsilon) + B_4 \cdot (1 + G \cdot \nu \cdot \varepsilon)} \right). \quad (70)$$

A $B_3/B_1 = a$, $B_4/B_2 = b$, $U_G/U = u$ jelölésekkel a fajlagos alakváltozást az

$$\varepsilon = \frac{u \cdot (1 + a + b + a \cdot b) + a - b}{G \cdot \{\nu \cdot [a + b + u \cdot (1 + a - b - a \cdot b)] + [a + b - u \cdot (1 - a + b - a \cdot b)]\}} \quad (71)$$

összefüggés fogja adni (ahol ezúttal is elhanyagoltuk az ε^2 -et tartalmazó tagokat), ami az $a = b = 1$ esetre az

$$\varepsilon = \frac{2 \cdot u}{G \cdot (\nu + 1)} \quad (72)$$

képlethez vezet.

Megjegyzendő, hogy ha négy hosszirányú bélyeggel építjük meg a „klasszikus” teljes hidat, akkor a bélyegek elhelyezkedése más kellene legyen. A 20. ábrán látható kapcsolási rajz számozását megtartva az 1. és a 4. bélyegek lehetnének a felső (nyújtott) oldalon, a 2. és a 3. pedig a próbatest másik oldalán (a standunkon szereplő konfigurációból kiindulva a 2. és a 4. bélyeget meg kell cserélni). Ebben az esetben az első bélyeg ellenállásának megváltozását az (52), a harmadikét a (65) képlet írná le, a nyomott oldalon levő második bélyegre

$$R_2 = B_2 \cdot (1 - G \cdot \varepsilon), \quad (73)$$

a nyújtott oldalon levő negyedik bélyegre pedig

$$R_4 = B_4 \cdot (1 + G \cdot \varepsilon). \quad (74)$$

Ezekkel:

$$U_G = U \cdot \left(\frac{B_1 \cdot (1 + G \cdot \varepsilon)}{B_1 \cdot (1 + G \cdot \varepsilon) + B_3 \cdot (1 - G \cdot \varepsilon)} - \frac{B_2 \cdot (1 - G \cdot \varepsilon)}{B_2 \cdot (1 - G \cdot \varepsilon) + B_4 \cdot (1 + G \cdot \varepsilon)} \right). \quad (75)$$

Észrevehetjük, hogy a (73) képlet az (58)-astól, illetve a (74) a (69)-estől csak annyiban különbözik, hogy nem szerepel bennük a Poisson tényező. Éppen ezért, a keresett összefüggéseket a tényező $\nu = 1$ értékének a teljes Poisson-hídra kapott relációkba való behelyettesítésével közvetlenül is megkaphatjuk:

$$\varepsilon = \frac{u \cdot (1 + a + b + a \cdot b) + a - b}{2 \cdot G \cdot [a + b + u \cdot (a - b)]}, \quad (76)$$

ahol $a = B_3 / B_1$, $b = B_4 / B_2$, $u = U_G / U$. Ha $a = b = 1$, akkor

$$\varepsilon = \frac{u}{G}. \quad (77)$$

Megmért eredmények az 5. táblázatban, valamint a 28. ábrán láthatók.

A bélyegtényező meghatározása

A használt mérőbélyegek csomagolásán a bélyegtényező értéke $G = 108 \pm 5\%$ gyanánt van feltüntetve, azzal a megjegyzéssel, hogy az egy átlagos értéknek tekintendő, mivel az a megnyúlás mértékének függvényében változik. Ezek miatt felvetődik a bélyegtényezőnek a kisebb mértékű megnyúlásokra érvényes értékének pontosabb, kísérleti meghatározása. Ehhez a szilárdságtan képleteit használjuk.

A lemez szilárdságtani viselkedésére tett hipotézisek alapján ki lehet jelenteni, hogy a próbatest szabad végének függőleges irányú elmozdulása (a lehajlás) és az átlófeszültség között lineáris kapcsolatnak kell lennie. A szilárdságtanban a konzolosan befogott rúd szabad végét merőlegesen terhelő F erő által, az erő támadáspontjában idézett lehajlást a

$$\delta = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_z} = \frac{4 \cdot F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot b \cdot h^3}, \quad (78)$$

képlettel lehet kiszámítani, ahol

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (79)$$

a téglalap alakú keresztmetszetnek a hajlítás tengelyére számított másodrendű nyomatéka.

Az F erő hajlítja a próbatestet, a (42) képlet alapján a bélyegek által megmért fajlagos alakváltozás értéke, amit a lemez két oldalán mérhetünk, az

$$\varepsilon = \frac{6 \cdot F \cdot (l - d)}{E \cdot b \cdot h^2} \quad (80)$$

képlettel számítható.

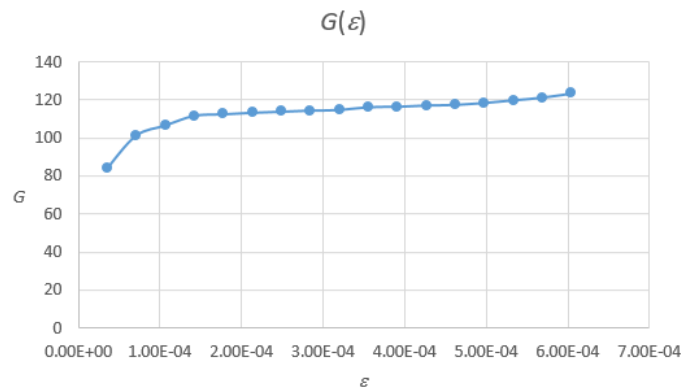
A két utóbbi képletből az erőt kiküszöbölve egy pusztán geometriai jellegű mennyiségeket tartalmazó relációhoz, a lehajlás és a fajlagos alakváltozás között fennálló

$$\varepsilon = \delta \cdot \frac{3 \cdot h \cdot (l - d)}{2 \cdot l^3} \quad (81)$$

egyenes arányossághoz jutunk. E képletben:

- $l = 0.2725$ m, a rúd szabad hossza,
- $d = 0.024$ m, a mérőbéllyegek középpontjának a távolsága a merev befogástól,
- $h = 0.00193$ m a próbatest keresztmetszetének a vastagsága (a lemez vastagsága).

A bélyegtényező kísérleti meghatározásához a standon levő csavaros mechanizmussal beállítjuk a lehajlás mértékét, a (81) képlettel kiszámítjuk a megfelelő fajlagos alakváltozást, majd le olvassuk a megfelelő átlófeszültséget. A teljes hídra megállapított (71) összefüggés alapján ki tudjuk számítani a bélyegtényező értékét. A kiszámított mennyiségek a 4. táblázatban szerepelnek, amelyekkel meg tudjuk rajzolni a $G(\varepsilon)$ függvény görbét (27. ábra).



27. ábra. A bélyegtényező nagysága

4. táblázat. A bélyegtényező kiszámítása

δ (mm)	Átlófeszültség (egység)	U_G (mV)	ε	G
0	-30	0.00	0	
1	54	3.05	3.555E-05	84.1
2	139	6.15	7.111E-05	101.4
3	223	9.20	1.067E-04	106.7
4	314	12.51	1.422E-04	111.8
5	397	15.53	1.778E-04	112.6
6	481	18.58	2.133E-04	113.4
7	565	21.64	2.489E-04	113.9
8	650	24.73	2.844E-04	114.5
9	734	27.78	3.200E-04	114.8
10	827	31.17	3.555E-04	116.3
11	912	34.26	3.911E-04	116.6
12	1001	37.49	4.266E-04	117.2
13	1088	40.66	4.622E-04	117.5
14	1182	44.07	4.977E-04	118.5
15	1282	47.71	5.333E-04	119.9
16	1384	51.42	5.688E-04	121.3
17	1497	55.53	6.044E-04	123.5

A megmért adatok alapján kitűnik, hogy a használt félvezető-alapú mérőbéllyeg a nagyon kis alakváltozások tartományán ($\varepsilon < 10^{-4}$) erősen nemlineáris jelleget mutat. E tartomány

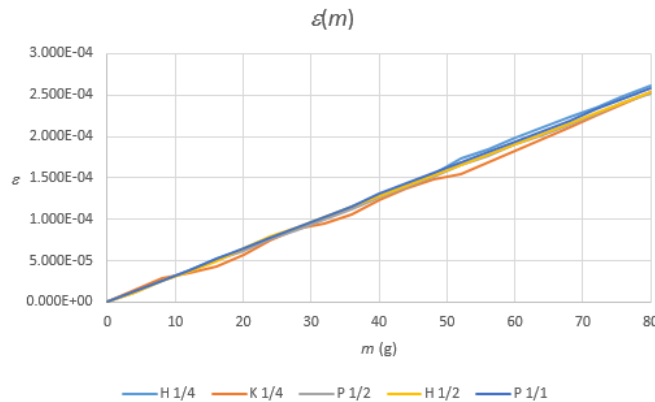
fölött, a próbatest legnagyobb alakváltozása által lehatárolt intervallumon, a bélyegállandó már kevésbé változik, a nominális nagysága gyanánt pedig elfogadjuk az ezen az intervallumon átlagolással kapott $G = 116$ -os értéket.

Az 5. táblázatban, valamint a 28. ábrán feltüntetett kísérleti eredményeket ezzel az átlagolt értékkel számítottuk ki.

Megjegyzendő, hogy a $G(\varepsilon)$ függvény felhasználásával a mérési eredményeket pontosabbá lehetne tenni, ehhez azonban a hosszirányú és a harántirányú bélyegek tényezőjét külön-külön kellene meghatározni (mivel ez utóbbiak kb. harmad akkora alakváltozást mérnek az előbbiekhöz képest), egy iteratív számítási eljárással.

5. táblázat. Mérési eredmények

m (g)	Hosszirányú 1/4			Keresztirányú 1/4			Poisson 1/2			Hosszirányú 1/2			Poisson 1/1		
	U_σ (mV)	ε_I	ε	U_σ (mV)	ε_I	ε	U_σ (mV)	ε_I	ε	U_σ (mV)	ε_I	ε	U_σ (mV)	ε_I	ε
0	0.00	6.071E-05	0.000E+00	0.00	2.108E-05	0.000E+00	0.00	-4.575E-05	0.000E+00	0.00	-1.342E-05	0.000E+00	0.00	-1.016E-05	0.000E+00
4	0.44	7.437E-05	1.366E-05	0.15	3.519E-05	1.411E-05	0.51	-3.380E-05	1.194E-05	0.76	-1.555E-06	1.186E-05	1.13	3.101E-06	1.327E-05
8	0.80	8.577E-05	2.506E-05	0.29	4.929E-05	2.821E-05	1.09	-2.014E-05	2.561E-05	1.60	1.144E-05	2.485E-05	2.22	1.594E-05	2.610E-05
12	1.24	9.948E-05	3.877E-05	0.36	5.633E-05	3.525E-05	1.60	-8.171E-06	3.758E-05	2.40	2.386E-05	3.728E-05	3.31	2.878E-05	3.894E-05
16	1.67	1.132E-04	5.249E-05	0.44	6.338E-05	4.230E-05	2.15	4.665E-06	5.041E-05	3.20	3.629E-05	4.971E-05	4.40	4.161E-05	5.178E-05
20	2.04	1.247E-04	6.394E-05	0.58	7.746E-05	5.638E-05	2.62	1.580E-05	6.155E-05	4.18	5.154E-05	6.496E-05	5.45	5.402E-05	6.419E-05
24	2.47	1.384E-04	7.771E-05	0.76	9.506E-05	7.398E-05	3.20	2.952E-05	7.527E-05	5.09	6.566E-05	7.908E-05	6.55	6.686E-05	7.703E-05
28	2.84	1.499E-04	8.919E-05	0.91	1.091E-04	8.805E-05	3.71	4.153E-05	8.728E-05	5.82	7.696E-05	9.038E-05	7.64	7.970E-05	8.986E-05
32	3.20	1.614E-04	1.007E-04	0.98	1.162E-04	9.508E-05	4.25	5.442E-05	1.002E-04	6.58	8.882E-05	1.022E-04	8.73	9.254E-05	1.027E-04
36	3.64	1.752E-04	1.145E-04	1.09	1.267E-04	1.056E-04	4.76	6.646E-05	1.122E-04	7.45	1.024E-04	1.158E-04	9.82	1.054E-04	1.155E-04
40	4.07	1.891E-04	1.284E-04	1.27	1.443E-04	1.232E-04	5.35	8.023E-05	1.260E-04	8.25	1.148E-04	1.282E-04	11.13	1.208E-04	1.309E-04
44	4.44	2.006E-04	1.399E-04	1.42	1.583E-04	1.372E-04	5.85	9.230E-05	1.380E-04	9.05	1.272E-04	1.407E-04	12.22	1.336E-04	1.438E-04
48	4.91	2.157E-04	1.550E-04	1.53	1.688E-04	1.478E-04	6.44	1.061E-04	1.518E-04	9.89	1.402E-04	1.536E-04	13.27	1.460E-04	1.562E-04
52	5.49	2.342E-04	1.735E-04	1.60	1.758E-04	1.548E-04	6.98	1.191E-04	1.648E-04	10.69	1.527E-04	1.661E-04	14.36	1.589E-04	1.690E-04
56	5.82	2.447E-04	1.840E-04	1.75	1.899E-04	1.688E-04	7.49	1.312E-04	1.769E-04	11.49	1.651E-04	1.785E-04	15.38	1.709E-04	1.810E-04
60	6.25	2.586E-04	1.979E-04	1.89	2.039E-04	1.828E-04	8.07	1.450E-04	1.907E-04	12.26	1.769E-04	1.904E-04	16.47	1.837E-04	1.939E-04
64	6.65	2.714E-04	2.107E-04	2.04	2.179E-04	1.968E-04	8.55	1.563E-04	2.020E-04	13.09	1.899E-04	2.034E-04	17.56	1.965E-04	2.067E-04
68	7.05	2.843E-04	2.235E-04	2.18	2.319E-04	2.108E-04	9.09	1.693E-04	2.150E-04	13.86	2.018E-04	2.152E-04	18.66	2.094E-04	2.195E-04
72	7.42	2.959E-04	2.352E-04	2.33	2.459E-04	2.248E-04	9.60	1.814E-04	2.272E-04	14.69	2.148E-04	2.282E-04	19.78	2.226E-04	2.328E-04
76	7.82	3.088E-04	2.481E-04	2.47	2.599E-04	2.388E-04	10.18	1.953E-04	2.411E-04	15.53	2.278E-04	2.412E-04	20.91	2.359E-04	2.461E-04
80	8.22	3.217E-04	2.610E-04	2.62	2.739E-04	2.528E-04	10.66	2.066E-04	2.524E-04	16.29	2.396E-04	2.531E-04	21.89	2.475E-04	2.576E-04



28. ábra. Mérési eredmények

A próbatest anyagának Young-modulusza

A szilárdságtani számításokhoz általában két jellemző, az E Young-modulusz és a ν Poisson-együttható ismerete szükséges.

A Poisson-tényezőt az egy adott terhelés által létrehozott harántirányú és hosszirányú fajlagos alakváltozás hányadosaként (tulajdonképpen az azoknak megfelelő átlófeszültségek hányadosaként) határoztuk meg, a hosszirányú és a keresztirányú negyedhidakkal kapott kísérleti eredmények segítségével. A próbatest anyagának (alumínium) a Poisson-tényezője

ekképpen $\nu = 0.31$ -nek adódott. A szakirodalmi adatok szerint az alumínium Poisson tényezője 0.33, az alumínium-ötvözeteké pedig 0.32 és 0.35 között van.

A Young-moduluszt a (42) képlet segítségével tudjuk meghatározni, amikor az ismert $F = m \cdot g$ terhelőerő (egy m tömegű test súlya) által előidézett ε fajlagos alakváltozást mérjük meg a híd segítségével:

$$E = \frac{6 \cdot F \cdot (l-d)}{\varepsilon \cdot b \cdot h^2} = \frac{6 \cdot m \cdot g \cdot (l-d)}{\varepsilon \cdot b \cdot h^2}, \quad (82)$$

ahol:

- $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, a gravitációs gyorsulás,
- $l = 0.2725 \text{ m}$, a rúd szabad hossza,
- $d = 0.024 \text{ m}$, a mérőbéllyegek középpontjának a távolsága a merev befogástól,
- $b = 0.0199 \text{ m}$ a próbatest keresztmetszetének a szélessége (a lemez szélessége),
- $h = 0.00193 \text{ m}$ a próbatest keresztmetszetének a vastagsága (a lemez vastagsága).

Az 5. táblázat adataival, a kapott eredmények átlagolásával, a próbatest anyagának Young-moduluszára az $E = 60.94 \text{ GPa}$ értékéhez jutunk. A szakirodalmi adatok szerint az alumínium Young-modulusza 69 GPa .

A kiegyenlített híd, mint mérleg és mint elmozdulás-mérő

A fajlagos alakváltozás és az átlófeszültség kapcsolata a kísérleteink szerint jó közelítéssel lineáris, így a terhelés, illetve a lehajlás és az átlófeszültség kapcsolata is az kell legyen.

Az 5. táblázat adataival megállapíthatjuk az átlófeszültség és a szabad végen ható függőleges terhelés viszonyát. A teljes hídra ez például $\Delta U_G / \Delta m = 0.275 \text{ mV/g}$. Ekképpen az átlófeszültség megméréseivel ki lehet számítani a lemezt terhelő tömeget (súlyt), miáltal az mérlegként használható.

Hasonlóképpen, a 4. táblázat alapján meghatározhatjuk az átlófeszültség és a szabad vég lehajlásának kapcsolatát is. A teljes híd használata esetében $\Delta U_G / \Delta \delta = 3.12 \text{ mV/mm}$. E tényező ismeretében, az átlófeszültség megméréseivel a lemez végének függőleges irányú elmozdulására következtethetünk, így a készülékünk elmozdulás-mérőként is használható.

Megjegyzendő, hogy ha pontosabb mérleget, illetve elmozdulás-mérőt szeretnénk építeni, akkor a mérőbéllyeg nemlineáris volta miatt azt kísérletileg meghatározott értékekkel kalibrálni kell.

Szabadlengés mérése kiegyenlített hiddal

Időben változó alakváltozás megmérése a kiegyensúlyozott híd nem alkalmas, mivel a híd kiegyenlítése alatt a megmért jel folyton változhat. A kiegyensúlyozatlan híd használatával kiküszöbölhetjük a híd kiegyenlítésének hosszadalmas folyamatát: az átlófeszültséget egy digitális eszközzel mintavételezhetjük és némi programozással akár megoldhatjuk azt is, hogy az közvetlenül a megmért fajlagos alakváltozást adja vissza.

Az időben változó alakváltozás megmérést a próbatest szabadlengésének kísérleti tanulmányozásával példázzuk.

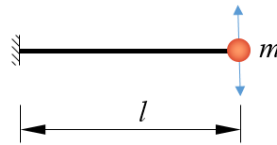
A kísérletezéshez a standon levő, konzolosan befogott rugalmas lemezen, annak szabad végén, egy 40 g tömegű nehezéket helyezünk el.

A lemeznek a hossza mentén megoszló saját tömege $\mu = 0.1027 \text{ kg/m}$, a lengő rész teljes tömege pedig mintegy 0.030 kg . Ha a lemez tömegét nem hanyagoljuk el a ráhelyezett

nehezék $m = 0.040$ kg tömege mellett, akkor egy végtelen sok dinamikai szabadságfokkal rendelkező, folytonos rendszerrel állunk szemben. Az ilyen rendszerek elméleti tanulmányozása eléggé nehézkes, éppen ezért a lengő rúd tehetetlenségét vagy elhanyagoljuk, vagy pedig azt a szabad végen lokalizált „effektív” (másképpen: redukált) tömeggel modellezhetjük, amit a következő képlettel számítunk ki:

$$m_{eff} = 0.2235 \cdot \mu \cdot l = 0.2235 \cdot 0.1027 \cdot 0.2725 = 0.006 \text{ kg} . \quad (83)$$

Ha a lengés amplitúdója kicsi, akkor a nehezék vízszintes irányú elmozdulása elhanyagolható lesz a függőlegeshez viszonyítva, így a nehezékekkel terhelt lemez az egy dinamikai szabadságfokkal rendelkező rendszer megvalósításának tekinthető (29. ábra).



29. ábra. Egy dinamikai szabadságfokkal rendelkező lengő rendszer

Ha a lemezt a befogástól számított l távolságra egy F függőleges terhelés éri, akkor az erő támadáspontja a rugalmas alakváltozás következtében, a (78) képlet alapján, a

$$\delta = \frac{4 \cdot l^3}{E \cdot b \cdot h^3} \cdot F = \frac{1}{k} \cdot F \quad (84)$$

távolságon mozdul el (ez a lemeznek az erő támadáspontjában mért lehajlásának az az összetevője, amit az illető erő idézett elő). Ebben az összefüggésben a

$$k = \frac{E \cdot b \cdot h^3}{4 \cdot l^3} = \frac{60.94 \cdot 10^9 \cdot 0.0199 \cdot 0.00193^3}{4 \cdot 0.2725^3} = 107.71 \text{ N/m} \quad (85)$$

arányossági tényezőt a lemez merevségének tekinthetjük, ami számszerűen azzal az erővel egyenlő, ami a szabad vég egységnyi lehajlását idéz elő.

A rendszer szabadlengésének egyenlete a tehetetlenségi erő és a rugalmas alakváltozásból származó visszatérítő erő egyensúlyát leíró,

$$m \cdot \ddot{\delta} + k \cdot \delta = 0 \quad (86)$$

differenciál-egyenlet, aminek a

$$\delta = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad (87)$$

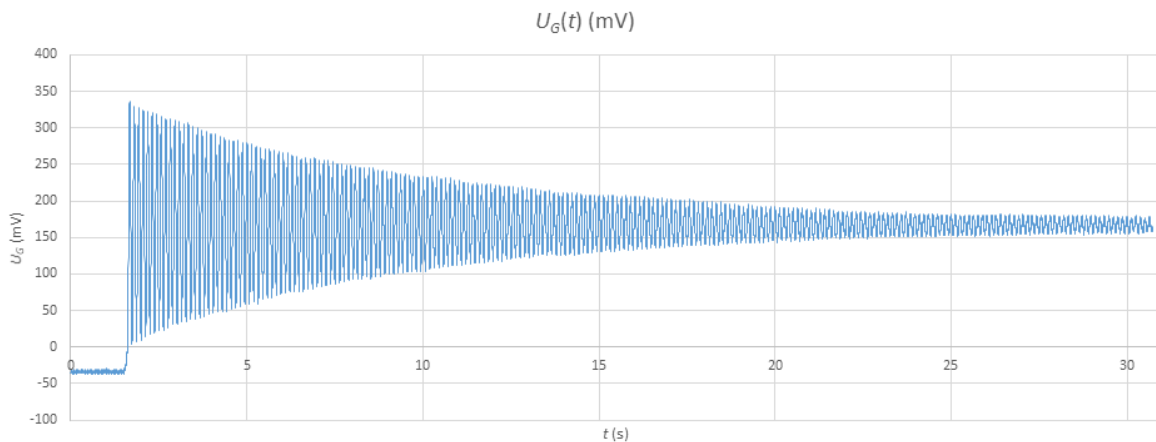
megoldása az A amplitúdójú, ω körfrekvenciájú és φ kezdeti fázisszögű szinuszos (harmonikus) mozgás egyenlete. Amennyiben a kezdetben a kitérített tömeg nyugalomban volt, a mozgás amplitúdója azonos a kezdeti kitéréssel ($A = \delta_0$) és a kezdőfázis nulla ($\varphi = 0$), a csillapítatlan lengőmozgás körfrekvenciája, a lengő lemez tehetetlenségének elhanyagolásával pedig

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{107.71}{0.04}} = 51.9 \text{ rad/s} , \quad (88)$$

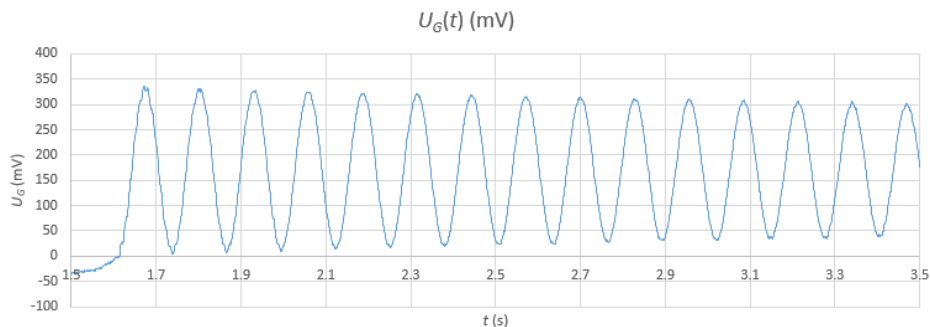
ami az $f_n = \omega_n / (2 \cdot \pi) = 8.26 \text{ Hz}$ frekvenciának és a $T_n = 1 / f_n = 0.121 \text{ s}$ periódusnak felel meg. ω megnevezése a *csillapítatlan saját-körfrekvencia* vagy *természetes körfrekvencia*.

Az adatokat kísérletileg rögzítjük, kiegyensúlyozatlan teljes híddal, az „a” utasításkóddal. A mintavételezés kb. 30 másodpercig tart, és kb. ugyanennyi idő alatt jelennek meg az adatok a Serial Monitor ablakában. Az adatokat innen kimásoljuk és beillesztjük egy üres *.txt állományba, az esetleges fölösleges első sorok kitörlésével (az első sor a mérés kezdetén rögzített adatot kell tartalmazza). Ha mentés után az állomány kiterjesztését *.csv-re állítjuk át, akkor azt az Excel minden különösebb, a felhasználó által asszisztálandó adat-importálási művelet nélkül megnyitja.

A lemezen elhelyezett mérőbéllyegek a kitéréssel arányos $\varepsilon(\delta)$ fajlagos alakváltozást mérik (ld. a (81) összefüggést), a rögzített adatok (30. és 31. ábra) tehát a lengőmozgás időbeni lefutására engednek következtetni. Ezek elemzéséből, pl. a grafikus ábrázolásából, két dologra derül fény: a mozgás periódusa nem azonos a kiszámítottal, a lengőmozgás amplitúdója pedig az idő folyamán folyamatosan, exponenciálisan csökken.



30. ábra. Az 1 ms periódussal mintavételezett átlófeszültség grafikonja



31. ábra. Az átlófeszültség grafikonja a lengés kezdetén

A periódust a rögzített görbe egymást követő csúcsai közötti időintervallumok átlagolásával számíthatjuk ki, de pl. a görbe Excelben kiszámított Fourier-transzformációjából is kiindulhatunk. Az így kapott érték $T = 0.128 \text{ s}$, amihez az $f = 7.81 \text{ Hz}$ frekvencia tartozik.

A mozgás kezdetén az átlófeszültség lassú növekedése annak köszönhető, hogy az egyensúlyi helyzetéből kitérített és rögzített végű lemez kényszerének felszabadítása nem

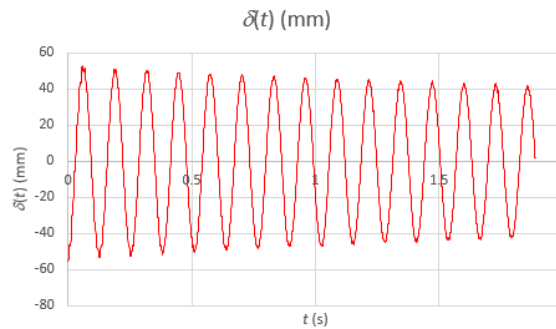
hirtelen történt. A kiszámított periódusból és az amplitúdó-csúcsok helyzetéből ki lehet számítani a tényleges szabad lengés kezdetének a pillanatát: $t_0 = 1.612$ s.

A szabad lengés az egyensúlyi helyzet körül történik, így az egyensúlyi helyzetnek megfelelő átlófeszültséget a lengés ideje alatt átlagolt értéknek vesszük: $U_G(\delta = 0) = 171.0$ mV.

Az átlófeszültségből a $\Delta U_G / \Delta \delta = 3.12$ mV/mm arányosság felhasználásával számolunk elmozdulást:

$$\delta(t) = \frac{U_G(t) - U_G(\delta = 0)}{\Delta U_G / \Delta \delta}, \quad (89)$$

a kapott mennyiségekkel pedig megrajzoljuk e függvény grafikonját (32. ábra).



32. ábra. Az elmozdulás grafikonja

Az így kapott tapasztalati görbét a (87) egyenlettel egybevetve megállapíthatjuk, hogy:

- a lengés körfrekvenciája $\omega = 49.09$ rad/s ;
- a lengés periódusa $T = 0.128$ s, frekvenciája $f = 7.81$ Hz ;
- a kezdeti fázis $\varphi = -\pi/2$;
- az amplitúdó a kezdetben $A = 55.6$ mm , viszont az folyamatosan csökken.

A periódus mért és a számított értéke közötti különbségek egyrészt a lemez tehetetlenségének elhanyagolásának tulajdonítható, de ugyanakkor tekintetbe kell vegyünk azt is, hogy elhanyagoltuk a mechanikai energiát felemésztő, disszipatív erők hatását is. Ugyanezek az erők vezetnek az amplitúdó folyamatos csökkenéséhez is.

A disszipatív hatást a lengéstanban többnyire viszkózus, sebességgel arányos csillapító erővel modellezzük; az arányosságot a c csillapítási tényező adja. Ehhez a csillapításhoz a levegővel való súrlódás is hozzájárul, ami ténylegesen áramláshoz, viszkozitáshoz köthető, azonban döntő szerepe az anyag belső súrlódásának van. A mozgásegyenletet tehát a viszkózus csillapító erővel ki kell egészítenünk:

$$m \cdot \ddot{\delta} + c \cdot \dot{\delta} + k \cdot \delta = 0. \quad (90)$$

Ha a kezdetben a kitérített tömeg nyugalomban volt, akkor a differenciál-egyenlet megoldása:

$$\delta(t) = A \cdot \exp(-\zeta \cdot \omega_n \cdot t) \cdot \left[\cos(\sqrt{1-\zeta^2} \cdot \omega_n \cdot t) + \frac{\zeta \cdot \omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \sin(\sqrt{1-\zeta^2} \cdot \omega_n \cdot t) \right], \quad (91)$$

ahol

$$\zeta = c / c_{cr} \quad (92)$$

a csillapítási viszony, ahol

$$c_{cr} = 2 \cdot m \cdot \omega = 2 \cdot \sqrt{k \cdot m} \quad (93)$$

a csillapítási tényező kritikus értéke (amire a mozgás már aperiodikussá válik).

A (91) összefüggésben a szögletes zárójel előtti tag az exponenciálisan csökkenő amplitúdó. A zárójelben több helyen előforduló

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot \omega_n \quad (94)$$

menyiség a csillapított lengés körfrekvenciája (csillapított saját-körfrekvenciája), ami nagyobb a csillapítatlannál. Esetünkben ez nem más, mint a kísérletileg meghatározott körfrekvencia.

Végző soron a (91) egyenlet átírható a sokkal egyszerűbb

$$\delta(t) = A \cdot \exp(-\zeta \cdot \omega_n \cdot t) \cdot \cos(\omega_d \cdot t + \varphi) \quad (95)$$

formában, a már ismert jelölésekkel.

A csillapítás mértékét az amplitúdó csökkenésének alapján lehet meghatározni. A lengéstanban definiáljuk a csillapított lengőmozgás *logaritmikus dekrementumát* bármely két, egymást követő amplitúdó-csúccsal

$$\Delta = \ln \frac{\delta(t)}{\delta(t+T)} \quad (96)$$

A kísérletileg rögzített adatainkkal $\Delta = 0.003$.

A logaritmikus dekrementum felhasználásával meghatározhatjuk a csillapítási viszony nagyságát:

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot \pi}{\Delta}\right)^2}} = 4.8 \cdot 10^{-4} \quad (97)$$

Felhasználásával, a (94) képlet alapján a csillapítatlan körfrekvenciát a

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (98)$$

képlet segítségével határozhatjuk meg, ami a mi esetünkben, a csillapítási viszony csekély nagysága miatt csak kevéssel lesz nagyobb a kísérletileg meghatározott csillapított körfrekvenciánál.

A (88) képlet segítségével a lengő tömeg nagyságát is kiszámíthatjuk:

$$m = \frac{k}{\omega_n^2} = \frac{107.71}{49.09^2} = 0.045 \text{ kg} \quad (99)$$

A terhelő nehezék tömege 0.04 kg, ami a lemez szabad végén egy rövid kis távolságon oszlik meg (tehát koncentrálnak tekinthető), így a számított lengő tömeg mintegy 0.005 kg-mal nagyobb a nehezékénél. A kettő közötti különbség a lemez (83) képlettel kiszámított effektív tömegének jó közelítése.

Mérés kiegyensúlyozott hiddal

Amennyiben időben állandó alakváltozást mérünk, azaz a híd kiegyensúlyozásához szükséges időtartam alatt az nem változik, akkor a kiegyensúlyozott híd módszerével is dolgozhatunk. Ebben az esetben a híd valamelyik ágában egy hozzáadott ellenállás nagyságát úgy kell beállítanunk, hogy a megmérhető átlófeszültség nulla legyen. Az átlófeszültség tényleges értékét nem kell megmérni, a fajlagos alakváltozás nagyságát a hozzáadott ellenállás ΔR nagyságából állapítjuk meg.

A 20. ábrán látható kapcsolási rajzon a ΔR hozzáadott ellenállást a bal alsó, 2. ágon levő 3.5Ω -os potenciométer és az azzal sorba kötött, 3Ω -os lépésekben 0 és 27Ω között változtatható ellenállás jelenti. A 4 számmal jelölt jobb alsó ág is tartalmaz egy rögzített nagyságú $R_0 = 8 \Omega$ -os ellenállást, ami a fordított irányú alakváltozás méréséhez szükséges (ugyanis a bal oldali ág ellenállását csak növelni lehet, csökkenteni nem).

A kiegyensúlyozott hosszirányú negyedhíd

A kiegyensúlyozatlan híd átlófeszültségét az (53) képlet adta, aminek a felírásánál feltételeztük, hogy az átlófeszültség megmérése használt eszköz ellenállása nagyon nagy. E képletet ki kell egészítenünk a hozzáadott ellenállásokkal

$$U_G = U \cdot \left(\frac{B_1 \cdot (1 + G \cdot \varepsilon)}{B_1 \cdot (1 + G \cdot \varepsilon) + R_3} - \frac{R_2 + \Delta R}{R_2 + \Delta R + R_4 + R_0} \right). \quad (100)$$

Ha a készüléken levő galvanométerrel szeretnénk megmérni ezt a feszültséget, akkor ez a képlet nem lesz túlságosan pontos, mivel a használt eszköz belső ellenállása nem nagyon nagy a mérőbéllyegek ellenállásához viszonyítva. Ez azonban most nem jelent gondot, ugyanis a kiegyensúlyozott híd esetében a galvanométeren nem folyik át áram, a mérés pedig a ΔR ellenállás olyan mértékű beállításán alapul, amikor ez az állapot bekövetkezik.

A híd kiegyensúlyozott állapotában tehát $U_G = 0$:

$$\frac{B_1 \cdot (1 + G \cdot \varepsilon)}{B_1 \cdot (1 + G \cdot \varepsilon) + R_3} - \frac{R_2 + \Delta R}{R_2 + \Delta R + R_4 + R_0} = 0. \quad (101)$$

Vezessük be $a = R_3 / B_1$ és $b = (R_4 + R_0) / (R_2 + \Delta R)$ jelöléseket! Ezekkel az előbbi egyenlőség a

$$\frac{1 + G \cdot \varepsilon}{1 + G \cdot \varepsilon + a} = \frac{1}{1 + b} \quad (102)$$

formára hozható, ahonnan

$$\varepsilon = \frac{a - b}{G \cdot b}. \quad (103)$$

A számításokat ΔR beállított nagyságával, az $R_0 = 8 \Omega$ -os, valamint a többi ellenállás 2. táblázatban szereplő értékével végezzük el.

ΔR -hez leolvassuk a potenciométer beosztásos skáláján megjelenő n értéket, valamint a körkapcsoló R_k állását (a végállásában a potenciométer legkisebb ellenállása 0.03Ω):

$$\Delta R = R_k + \frac{n}{200} \cdot 3.47 + 0.03 \Omega. \quad (104)$$

A kiegyensúlyozott keresztirányú negyvedhíd

Ez esetben az átlófeszültséget az (59) reláció adja, ahonnan az $U_G = 0$ feltételből

$$\frac{R_1}{R_1 + R_3} = \frac{(B_2 + \Delta R) \cdot (1 - G \cdot \nu \cdot \varepsilon)}{(B_2 + \Delta R) \cdot (1 - G \cdot \nu \cdot \varepsilon) + R_4 + R_0}. \quad (105)$$

Az $R_3 / R_1 = a$, $(R_4 + R_0) / (B_2 + \Delta R) = b$ jelölésekkel:

$$\varepsilon = \frac{a - b}{G \cdot \nu \cdot a}. \quad (106)$$

A kiegyensúlyozott Poisson-híd

A (62) képlet alapján az egyensúly feltétele

$$\frac{B_1 \cdot (1 + G \cdot \varepsilon)}{B_1 \cdot (1 + G \cdot \varepsilon) + R_3} = \frac{B_2 \cdot (1 - G \cdot \nu \cdot \varepsilon)}{B_2 \cdot (1 - G \cdot \nu \cdot \varepsilon) + R_4}, \quad (107)$$

ahonnan, az $R_3 / B_1 = a$, $(R_4 + R_0) / (B_2 + \Delta R) = b$ jelölésekkel:

$$\varepsilon = \frac{a - b}{G \cdot (\nu \cdot a + b)}. \quad (108)$$

A kiegyensúlyozott félhíd

Az egyensúly feltételét a (66) képlet alapján a következő egyenlőség adja:

$$\frac{B_1 \cdot (1 + G \cdot \varepsilon)}{B_1 \cdot (1 + G \cdot \varepsilon) + B_3 \cdot (1 - G \cdot \varepsilon)} = \frac{R_2}{R_2 + R_4}, \quad (109)$$

ahonnan, a $B_3 / B_1 = a$, $(R_4 + R_0) / (R_2 + \Delta R) = b$ jelölések bevezetésével fajlagos alakváltozás

$$\varepsilon = \frac{a - b}{G \cdot (a + b)}. \quad (110)$$

A kiegyensúlyozott teljes Poisson-híd

Az egyensúly feltétele a (70) reláció alapján

$$\frac{B_1 \cdot (1 + G \cdot \varepsilon)}{B_1 \cdot (1 + G \cdot \varepsilon) + B_3 \cdot (1 - G \cdot \varepsilon)} = \frac{B_2 \cdot (1 - G \cdot \nu \cdot \varepsilon)}{B_2 \cdot (1 - G \cdot \nu \cdot \varepsilon) + B_4 \cdot (1 + G \cdot \nu \cdot \varepsilon)}, \quad (111)$$

a $B_3 / B_1 = a$ és a $(R_4 + R_0) / (R_2 + \Delta R) = b$ jelölésekkel a fajlagos alakváltozásra az

$$\varepsilon = \frac{a - b}{G \cdot (\nu + 1) \cdot (a + b)} \quad (112)$$

összefüggést kapjuk.

A kiegyensúlyozatlan teljes Poisson-hídnál leírt teljes hídra is hasonlóképpen lehet megállapítani a minket érdeklő képletet, az egyensúly

$$\frac{B_1 \cdot (1 + G \cdot \varepsilon)}{B_1 \cdot (1 + G \cdot \varepsilon) + B_3 \cdot (1 - G \cdot \varepsilon)} = \frac{B_2 \cdot (1 - G \cdot \varepsilon)}{B_2 \cdot (1 - G \cdot \varepsilon) + B_4 \cdot (1 + G \cdot \varepsilon)}. \quad (113)$$

feltételéből:

$$\varepsilon = \frac{a-b}{2 \cdot G \cdot (a+b)}, \quad (114)$$

ahol $a = B_3 / B_1$, $b = (B_4 + R_0) / (B_2 + \Delta R)$.

Kísérleti eredmények kiegyensúlyozott hidakkal

A kísérletezéshez a 24. ábrán 4-essel jelölt kapcsolót az „E” állásba kell billenteni. A 3. kapcsolóval beállítjuk a híd kívánt típusát. A 2. csavaros mechanizmussal a lemezt enyhén legörbítjük, hogy egy stabil kiinduló helyzetet biztosítsunk (egyébként a szerkezet könnyen beleng: akár a padló rezgéseit is átveszi, amikor a kísérleti berendezést tartó asztal körül járkálunk), majd az 5. potencióméter és a 6. körkapcsoló segítségével kiegyensúlyozzuk a hidat.

Az átlófeszültséget az Arduino IDE programján keresztül is figyelhetjük, de számítógép nélkül is boldogulhatunk. A $U_G = 0$ állapot közvetlen környékén a 11. led sárga (zöld + piros) fényel világít; pozitív irányú eltérés esetén annak a fénye piros, negatív irányú esetén az zöld.

A kiegyensúlyozáshoz használhatjuk a 7. galvanométert is. Amikor távol állunk az egyensúlyi állapottól, a 8. gombot benyomva és negyed fordulattal elforgatva azt benyomott állapotában reteszeltjük. A kiegyensúlyozásnál a galvanométer tűjét a középállásába iparkodunk juttatni. Amikor ez sikerül, a 8. gomb reteszelését megszüntetjük, és azt figyeljük, hogy a gombot ismételt benyomva és feleresztve a tű mozdulni látszik-e: ha nem, akkor a hidat sikerült kiegyensúlyozni.

A csavaros mechanizmussal a próbatest lehajlását lépcsőzetesen növeljük, és minden lépésben újból kiegyenlítjük a hidat. A kiegyensúlyozáshoz szükséges értékeket lejegyezzük, majd az előbbi fejezetekben levezetett képletekkel kiszámoljuk az ε_i fajlagos alakváltozásokat.

Mivel a kiinduló állapotban a mérőbéllyegek terhelve voltak, az alakváltozásokat az akkor mért értékekhez viszonyítjuk:

$$\varepsilon = \varepsilon_i - \varepsilon_i(d=0). \quad (115)$$

Az így kapott eredményeket a 6. táblázat foglalja össze.

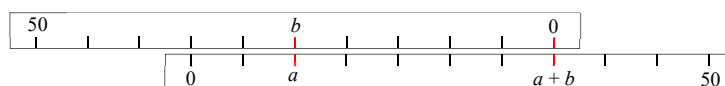
6. táblázat. Mérési eredmények

	d (mm)	n	R_k (Ω)	ΔR (Ω)	a	b	ε_i	ε
Hosszirányú 1/4	0	79	9	10.37065	0.993007	0.982830167	8.926E-05	0.000E+00
	1	122.5	9	11.12538	0.993007	0.977487005	1.369E-04	4.761E-05
	2	157	9	11.72395	0.993007	0.973290457	1.746E-04	8.537E-05
	3	192	9	12.3312	0.993007	0.96906975	2.129E-04	1.237E-04
Kereszt- irányú 1/4	0	64	3	4.1104	1.000783	1.029509052	-7.733E-04	0.000E+00
	1	75.5	3	4.309925	1.000783	1.027953012	-7.314E-04	4.189E-05
	2	86	3	4.4921	1.000783	1.026536382	-6.932E-04	8.002E-05
	3	96.5	3	4.674275	1.000783	1.02512365	-6.552E-04	1.180E-04
Poisson 1/2	0	63.5	6	7.101725	0.993007	1.006663676	-8.889E-05	0.000E+00
	1	108	6	7.8738	0.993007	1.000930858	-5.180E-05	3.709E-05
	2	152.5	6	8.645875	0.993007	0.995262966	-1.481E-05	7.408E-05
	3	196	6	9.4006	0.993007	0.989784144	2.125E-05	1.101E-04
Hosszirányú 1/2	0	137	12	14.37695	0.996892	0.955116224	1.845E-04	0.000E+00
	1	10.5	15	15.18218	0.996892	0.949733583	2.088E-04	2.435E-05
	2	86	15	16.4921	0.996892	0.94110565	2.482E-04	6.366E-05
	3	155.5	15	17.69793	0.996892	0.933300802	2.840E-04	9.952E-05
Teljes Poisson	0	46	12	12.7981	0.996892	0.96584936	1.033E-04	0.000E+00
	1	140	12	14.429	0.996892	0.954766445	1.410E-04	3.767E-05
	2	42	15	15.7287	0.996892	0.94611469	1.707E-04	6.738E-05
	3	136.5	15	17.36828	0.996892	0.935421614	2.078E-04	1.045E-04

AZ ANALÓG SZÁMÍTÓGÉP

Általánosságban, az analóg számítógép egy olyan készülék, amin egy matematikai feladattal analóg fizikai-geometriai jelenség megy végbe. E jelenség követésével, a tapasztalati úton megszerzett fizikai vagy geometriai mennyiségeken keresztül a kitűzött matematikai feladat megoldására következtetünk, tehát a készüléket egy számítási folyamat elvégzésére használjuk. A gép működésének szempontjából lényeges, hogy a rajta lezajló jelenség legyen analóg a megoldandó matematikai feladattal, vagyis a jelenséget leíró összefüggések matematikai formája legyen azonos a kitűzött feladatével.

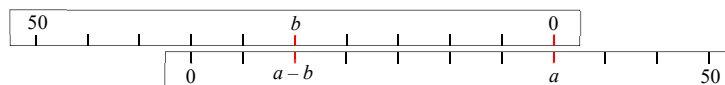
Ha ezt egy nagyon egyszerű példával szeretnénk szemléltetni, akkor vegyünk két, milliméteres beosztású, 50 cm hosszú vonalzót. Ezek segítségével egy egyszerű analóg összeadó-gépet tudunk szerkeszteni, amivel két szám $a + b$ összegét tudjuk kiszámítani. Ehhez a két vonalzót egymás mellé fektetjük úgy, hogy a beosztásos skálák egymással szemben legyenek (1. ábra). Az egyik vonalzón kikeressük az a számnak megfelelő beosztást (ha 1 cm egy egység, akkor ez 0 és 50 közötti, egy tizedes pontossággal megadott szám lehet). A másik vonalzón a b számnak megfelelő beosztást keressük ki, ezt a vonalzót pedig olyanképpen csúsztatjuk el a másik mellett, hogy a kikeresett beosztások találjanak egymással. Ekkor a második vonalzó beosztásának a kezdete (ami a 0 cm -nek felel meg) az első vonalzón a két szám $a + b$ összegére mutat (de ugyanígy az első vonalzó kezdete is a második vonalzón az összegre mutat).



1. ábra. Analóg összeadás

Némi gyakorlással az analóg összeadó-gépünkkel gyorsabban tudunk összeadni két számot, mintha a műveletet papíron végeznénk el, ráadásul a számításban elkövetett tévedés lehetősége is kisebb (a beállítás-leolvasás közben elkövetett tévedésre korlátozódik), azonban e módszernek van néhány korlátja, hiányossága is:

- az összeadandók 0 és 50 közötti, egy tizedes pontossággal megadott számok lehetnek (a beosztások másként történő értelmezésével azonban azok lehetnének 0 és 500, vagy akár 0 és 5 közötti számok; az előbbi esetben egységnyi, a második esetben pedig egy századnyi pontossággal);
- az összeg sem haladhatja meg az 50-et.

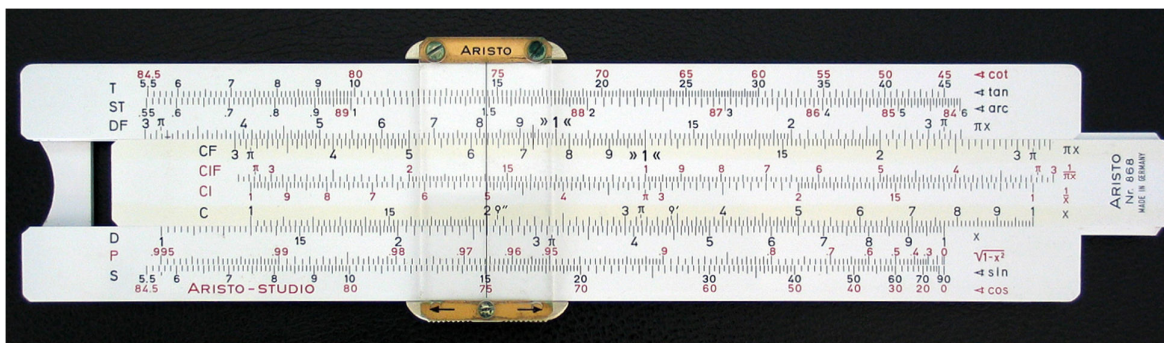


2. ábra. Analóg kivonás

Hasonló módon, a gépünkkel elvégezhetjük a kivonás műveletét is: az $a - b$ különbség kiszámításához az első vonalzó a -nak megfelelő beosztásához a második vonalzó 0 kezdetét illesztjük, majd megkeressük ez utóbbin a b számnak megfelelő beosztást. Az első vonalzón

a b -nek megfelelő beosztás az $a - b$ különbségre mutat (2. ábra). Ez nyilván csak akkor működik, ha a különbség pozitív – ellentétes esetben fel kell cserélnünk a két számot.

A másik két alapművelet, a szorzás és az osztás is elvégezhető a két vonalzó segítségével: ehhez a logaritmusfüggvény szorzatot összeggé alakító ($\lg a \cdot b = \lg a + \lg b$), illetve a hányadost különbséggé alakító tulajdonságát ($\lg a/b = \lg a - \lg b$) használjuk fel. Ekkor a vonalzó beosztásait az a és b számok logaritmusaként fogjuk fel, tehát a művelet elvégzéséhez valamilyen módon ki kellene számítani a $\lg a$ és a $\lg b$ mennyiségeket (az erre alkalmas számítógépek megjelenése előtt ezeket táblázatokból lehetett kiolvasni). Ahhoz, hogy ezt elkerüljük, a vonalzó beosztásainak a számozása nem a számok logaritmusát, hanem magukat a számokat mutatja. A skála beosztása tehát nem egyenes, hanem logaritmikus. Ha tízes alapú logaritmus alapján szerkesztjük azt meg, akkor centiméterenként az a és b számok egy-egy nagyságrenddel fognak változni (0.1, 1, 10, 100, stb.). Az így létrehozott eszköz a John Napier által, a logaritmusról írt értekezés megjelenését követően jelent meg, 1630-ban William Oughtred fejlesztése gyanánt és *logarléc* néven ismerjük. Az idők folyamán ezt több skálával is ellátták (3. ábra), amelyekkel egyéb műveleteket is el lehetett végezni (pl. négyzetre emelést és gyökvonást, trigonometriai függvények értékeinek kiszámítását).



3. ábra. Logarléc [forrás: Wikipédia]

A 3. ábrán látható logarlécen a léctesten levő „D” és a nyelven levő „C” skálákkal lehet a szorzást elvégezni. A képen látható beállításon a „D” skálán, a „C”-nek az 1-essel jelölt kezdetének megfelelő beosztásánál, az $a = 1.3$ szám van beállítva. A „C” skálán levő beosztások a b számnak felelnek meg. Az átlátszó csúszkán levő vonal a $b = 2$ értékre mutat, aminek megfelelően a „D” skálán leolvasott szorzat $a \cdot b = 2.6$.

A logarléc három és fél évszázadon keresztül a számítások elvégzésének egyik legfontosabb eszköze volt, csak a zsebszámítógépek elterjedésével kopott ki a használatból.

Az idők folyamán elég sok, analóg számítógépként működő mechanikus szerkezetet találtak fel, kezdve az Antikithéra közelében megtalált ókori szerkezettel, amivel a bolygók helyzetét és a napfogyatkozások idejét lehetett kiszámítani, azonban a továbbiakban csak a műveleti erősítőkkel megépített elektronikus analóg számítógépekről lesz szó.

Az elektronikus analóg számítógépek a digitálisak előtt jelentek meg, 1940 körül, a használatuk pedig éppen a digitális számítógépek megjelenésekor szorult a háttérbe, mintegy két évtizeddel később. Működésük alapján az áramköri elemek bemenete és kimenete közötti kapcsolat áll. Például egy kondenzátor feszültsége a felhalmozódó töltésmennyiség, vagyis a befolyó áramerősség időbeni integráljától függ, így a kondenzátorral létre lehet hozni egy olyan áramkört, aminek a kimeneti feszültsége a bemeneti feszültség integráljával áll egyenes arányban. Ez a későbbiekben bemutatott integráló áramkör lenne.

Ha össze szeretnénk hasonlítani a digitális és az analóg számítógépeket, akkor a következő észrevételeket tehetjük:

– Az analóg számítógép programozása az áramkör összeállításából áll. Az áramkör moduláris felépítésű, egy modul egy bizonyos művelet elvégzésére alkalmas. Az analóg számítógép a megoldandó feladatnak megfelelően egymáshoz kapcsolt egységekből áll. Ez lehet egy bizonyos feladat megoldására „szakosodott” eszköz (amikor legfennebb csak a paramétereken változtathatunk, de az áramkör felépítését nem lehet módosítani), de az lehet egy újrakonfigurálható, „univerzális” áramkör is. Ez utóbbiak programozása nem igényel különösebb szaktudást. Ezzel szemben a digitális számítógépek programozása egy összetettebb, szaktudást igénylő folyamat.

– Az analóg számítógéppel csak aránylag egyszerű, feladatokat lehet megoldani (jellemzően differenciálegyenleteket), a digitális számítógépekre viszont nagy komplexitású programokat lehet írni.

– Az analóg számítógépek számítási pontossága a használt elektronikus alkatrészek minőségétől és a mérőeszközök pontosságától függ. Az eredmény pontosságára nézve negatív hatással van a használt elektronikus alkatrészek, kapcsolások nem-ideális viselkedése is. Ezek következtében a digitális számítógépekhez viszonyítva az analóg gépek pontossága jóval kisebb. Ugyanakkor megjegyzendő, hogy pl. a differenciálegyenletek digitális számítógéppel történő megoldása általában lépésenkénti integrálással lehetséges, ez pedig a sorozatos kerekítési hibák miatt a lépések számának növekedésével egyre nagyobb eltérésekhez vezet. Az analóg számítógépeknél ez nem fordul elő.

– Az analóg számítógépek adattárolási lehetősége maximum egy állapot tartására korlátozódik (a „számításokat” egy adott pillanatban megállítjuk). Ezzel szemben a digitális számítógépek adattárolási kapacitását gyakorlatilag csak a megépítésükre szánt összeg korlátozza.

– Az analóg számítógépek számítási sebessége nagy, a számítások akár valós idejűek is lehetnek. Ezzel szemben a digitális számítógépek sebességét a használt hardver korlátozza.

– Az analóg számítógép a kiszámított eredményt vizuálisan tálalja, pl. egy analóg mérőműszer skáláján leolvasható pillanatnyi érték gyanánt, vagy pedig egy oszcilloszkóp képernyőjén grafikonként megjelenítve. A digitális számítógépekkel az eredmények megjelenítésére számtalan lehetőség kínálkozik.

– Gazdasági szempontból meg szokták említeni azt, hogy egy analóg számítógép csak néhány elektronikus alkatrészből áll, így az ára jóval kisebb lehet egy digitális rendszerénél. Ez a jelenlegi körülmények között nem biztos, hogy igaz, hiszen az analóg számítógép felépítéséhez szükséges kapcsolók, precíziós potenciométerek ára sokszorosa lehet egy mikrokontrolleres lapkánál (pl. Arduino, ESP) vagy mikroszámítógépnél (pl. Raspberry Pi).

A felsoroltakat egybevetve megállapítható, hogy az analóg számítógép inkább csak a gyorsaságát és a kerekítési hibák hiánya miatti stabilabb eredményeit tudja előnyként felmutatni a digitális utódával szemben. Ezeknek az előnyöknek a kiaknázására az utóbbi időben analóg-digitális számítógépek fejlesztésére tettek kísérleteket, amelyek a két rendszer előnyeit próbálják összekovácsolni. Lényegüket tekintve ezek a gépek egy digitál-analóg átalakítóval (DAC) megoldott függvénygenerátorral állítják elő az analóg számítógép bemenetét, míg annak a kimenetét egy analóg-digitál átalakító (ADC) mintavételezi. Ilyenképpen az analóg áramkörök csak a számításokat (pl. a differenciál-egyenlet megoldását) végzik el, a bemeneti adatok előállítására és a kimeneti adatok rögzítése, feldolgozása és megjelenítése egy digitális számítógéppel történik.

A műveleti erősítő

A műveleti erősítő egy differenciál-bemenettel és egy kimenettel rendelkező elektronikus áramkör, amelyet rendszerint szimmetrikus tápról működtetünk. A differenciál-bemenetet egy

pozitív (vagy nem-invertáló) és egy negatív (invertáló) csatlakozó alkotja. A pozitív bemeneten a feszültség V_{in+} , a negatívon pedig V_{in-} , így a bemeneteken levő feszültségkülönbség

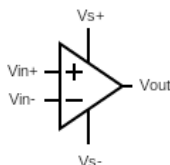
$$V_{in} = V_{in+} - V_{in-}. \quad (1)$$

Az ideális műveleti erősítő kimenetén a feszültség egyenes arányos a bemeneten levő feszültség-különbséggel:

$$V_{out} = A \cdot V_{in} = A \cdot (V_{in+} - V_{in-}), \quad (2)$$

ahol A az erősítési tényező. Ezt a feszültséget a földhöz (testhez) viszonyítva mérjük, akár csak a szimmetrikus táp V_{s+} és V_{s-} feszültségét is.

Maga az áramkör többé-kevésbé bonyolult felépítésű, azonban a kapcsolási rajzokon csak szimbolikusan szokták jelölni (4. ábra). Bár felépíthető diszkrét elemekből is, a gyakorlatban ez egy integrált áramkör szokott lenni.



4. ábra. A műveleti erősítő jelölése

Az integrált erősítőnek más kivezetései is lehetnek, például a nulla bemenetnek megfelelő nulla kimeneti feszültség (az offset-feszültség) beállításához szükséges áramköri elemek csatlakoztatásához.

Az ideális műveleti erősítő bemeneti ellenállása végtelen nagy, vagyis a bemeneteken keresztül nem folyik át áram. A gyakorlatban ez az ellenállás valóban nagyon nagy: bipoláris tranzisztorokkal megvalósított erősítő esetében több tíz vagy száz $M\Omega$, térvezérlésű tranzisztorokkal (FET) pedig $T\Omega$ nagyságrendű.

Az ideális műveleti erősítő kimeneti ellenállása nulla, vagyis az tetszőlegesen nagy áramot előállító feszültség-generátor lenne; ezzel szemben a valódi erősítők kimeneti ellenállása tíz vagy száz Ω nagyságrendű szokott lenni.

Ideálisan a nyílt hurkú erősítés végtelen nagy, $A = \infty$, valójában az több százezer, vagy még annál is több. Ezt az erősítést akkor értelmezzük, amikor a kimenet és a bemenet között nincs visszacsatolás. Ennek túlzottan nagy fontossága nincs, mert már nagyon kis bemeneti feszültségkülönbségre is a kimenet elérheti a telítettséget. Ugyanakkor a nyílt hurkú erősítési tényező szórása nagyon nagy, így kalibrálás nélkül azt nem lehet az adatlapi információk alapján kellő pontossággal megállapítani.

Visszacsatolt áramkörökben az erősítési tényező ideálisan állandó és frekvencia-független kellene legyen, a tápfeszültség változása pedig nem kellene befolyásolja a kimeneti feszültséget.

A differenciál-erősítőknek van még egy fontos jellemzője a közös módusú erősítési tényező. A valódi erősítők kimenetén megjelenő feszültséget a (2) egyenletnél jobban megközelíti a

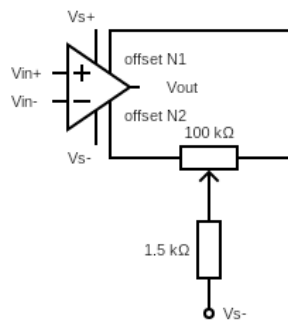
$$V_{out} = A_d \cdot (V_{in+} - V_{in-}) + A_k \cdot (V_{in+} + V_{in-}) / 2 \quad (3)$$

reláció, mi szerint nem csak a bemeneti feszültségek különbsége, hanem azoknak a $(V_{in+} + V_{in-}) / 2$ átlagaként kiszámolt közös módusú összetevője is szerephez jut (ha mindkét bemenetet azonos potenciálon tartjuk, akkor a kimeneten megjelenő feszültség e potenciál

nagyságától függ). Ez nyilvánvalóan lehetetlenné teszi azt, hogy a megmért kimeneti feszültség alapján kiszámítsuk a bemenetek közötti feszültségekülönbséget, így e számításokban csak a (2) egyenletet használhatjuk. Az elhanyagolt közös módusú összetevő nyilván rontja a pontosságot. Szerencsére az A_k közös módusú erősítési tényező rendszerint jóval kisebb az A_d differenciális erősítésnél, így az elkövetett hiba nem túlságosan nagy. Arra, hogy az mekkora, a *közös módusú elnyomás* utal:

$$CMMR = \frac{A_d}{|A_k|} \quad (4)$$

(common-mode rejection ratio), amit rendszerint decibelben adnak meg. Az ideális erősítő esetében $A_k = 0$ és ez az érték végtelen nagy.



5. ábra. TL081 műveleti erősítő, az offset-feszültség kompenzálásának lehetőségével

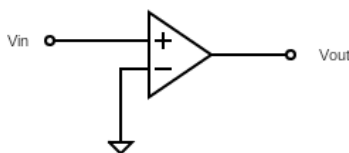
Az áramköröinket TL081IP műveleti erősítőkkal építjük meg. Adatlapi jellemzői szerint ezek betáplálása maximum ± 18 V feszültségű szimmetrikus tápról történik. A bemeneteken a feszültség nem haladhatja meg a ± 15 V -ot és a szimmetrikus táp feszültségét sem (a bemenetek közötti feszültségekülönbség értelem-szerűen maximum ± 30 V, de nem több $\pm 2 \cdot V_s$ -nél). A kimenete rövidzár-védett, így nem gond az, ha véletlenül a testre kerül. A bemeneti ellenállása $1 \text{ T}\Omega$, a kimeneti ellenállást tekintve viszont nincs gyári adat. ± 15 V -os tápfeszültséggel, szobahőmérsékleten, a nyílt hurkú erősítési tényezője 3 MHz -es sávszélességen tipikusan 200 V/mV (vagyis 200000). A kivezérelhetősége (az a tartomány, amelyen a kimeneti feszültség a bemeneti lineáris függvénye) minimum ± 12 V ($10 \text{ k}\Omega$ -os terheléssel). A közös módusú elnyomása tipikusan 86 dB, azaz a differenciális erősítési tényező 20000-szer nagyobb a közös módusúnál (ha a kimenetet egy 50Ω -os ellenállással terheljük). A kimenet offset-feszültségét egy külső ellenállással lehet beállítani (kompenzálni), az 5. ábra szerint.

A következőkben az áramköri vázlatokon a tápfeszültséget és az offset-feszültség kompenzálását nem ábrázoljuk. Az alapkapsolások ismertetésénél feltételezzük, hogy a műveleti erősítő ideális.

A nyílt hurkú erősítő

A 6. ábrán levő kapcsolási rajzon a nem-invertáló bemenetet a földre kötöttük, így a kimeneten megjelenő V_{out} feszültség, a (2) összefüggés alapján, a V_{in} bemeneti feszültséggel egyenesen arányos; az arányossági tényező a nyílt hurkú erősítési tényező.

A bemeneti és kimeneti feszültségek nagyságát a földhöz viszonyítjuk, ahogyan a $\pm V_s$ tápfeszültséget is.



6. ábra. Nyílt hurkú erősítő

Meg lehetne építeni azt a verziót is, amikor a bemeneti feszültséget az invertáló bemenetre kapcsoljuk és a nem-invertáló bemenetet földeljük. Ekkor a kimeneti feszültség előjele a bemenetiével ellentétes lesz.

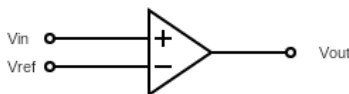
A kettő kombinációjaként a nyílt hurkú differenciál-erősítőt is megalkothatnánk, ahol a bemeneti feszültséget a nem-invertáló és az invertáló bemenetek közötti feszültségkülönbségként értelmezzük, az (1) képlet szerint. megjegyzendő, hogy az előbbi két kapcsolás is tulajdonképpen egy-egy differenciál-erősítő, ahol az egyik bemeneten a feszültséget a földre kötéssel 0 V-ra állítjuk be.

A műveleti erősítők nyílt hurkú erősítési tényezője nagyon nagy (a használt típusé kb. 200000). A nagyságát tekintve elég nagy a bizonytalanság a példányokként mérhető értékek nagy szórása miatt, ráadásul az erősen frekvenciafüggő.

A kimeneten a feszültség határértéke a tápfeszültségnél néhány voltal kisebb. Ha ez a határérték 10 V, akkor abban az esetben, amikor a bemeneti feszültség meghaladja az $50 \mu\text{V}$ -ot, az erősítő telített állapotba kerül (bármilyen bemenetre a kimenet 10 V lesz). Jelöljük a bemeneti feszültségnek a kimenet telítettségét előidéző határértékét V_t -vel.

Ha a nyílt hurkú erősítőnek, a 7. ábrán „-”-szal jelölt invertáló bemenetére egy V_{ref} referenciafeszültséget, a „+”-szal jelölt nem-invertáló bemenetre pedig egy V_{in} bemeneti-feszültséget kapcsolunk, akkor a következőket tapasztalhatjuk:

- ha a V_{in} és a V_{ref} feszültségek különbsége $-V_t$ és $+V_t$ közé esik, akkor a kimeneti feszültség ezzel a különbséggel lesz arányos;
- ha $V_{in} - V_{ref} \geq V_t$, vagyis V_{in} eléri vagy meghaladja a $V_{ref} + V_t$ határértéket, akkor a kimenet telített állapotba kerül, a feszültsége valamivel $+V_s$ alatt lesz;
- hasonló körülmények között, ha $V_{in} - V_{ref} \leq -V_t$, vagyis V_{in} a $V_{ref} - V_t$ határértékig vagy az alá csökken, akkor a telített kimenet feszültsége valamivel $-V_s$ fölött lesz.



7. ábra. Komparátor

Mivel V_t nagyon kis értékű (néhány tíz μV), a következőképpen idealizálhatunk:

$$\begin{cases} \text{ha } V_{in} > V_{ref}, \text{ akkor } V_{out} = +V_s, \\ \text{ha } V_{in} < V_{ref}, \text{ akkor } V_{out} = -V_s. \end{cases} \quad (5)$$

Ez az idealizálás nem tartalmazza a $V_{in} = V_{ref}$ esetet: ekkor elméletileg $V_{out} = 0$.

Ezt az áramkört komparátornak nevezik, ami a V_{in} feszültséget hasonlítja össze a V_{ref} referenciafeszültséggel. Ez utóbbi nagysága lehet beállított, állandó értékű (a legegyszerűbb esetben egy Zener-diódával vagy feszültségosztóval oldhatjuk meg), vagy pedig egy, a V_{in} -hez hasonló módon változó feszültségint.

Nyilván ez az áramkör a bemenet ($-V_t, +V_t$) intervallumán nem az idealizált módon viselkedik és a bemeneti feszültségnek a referenciafeszültség körüli kis ingadozásait követvén a kimenet állapota sűrűn váltakozhat a két lehetséges feszültségérték között.

A fenti okok miatt (az erősítési tényező túl nagy és bizonytalan a nagysága, a komparátor pedig a referenciafeszültség környékén megbízhatatlanul működik), a nyílt hurkú erősítőt nem szokták használni. A helyzetet visszacsatolással lehet javítani.

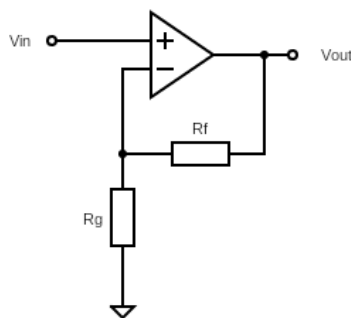
A nem-invertáló erősítő

Zárt hurkú változatában a nem-invertáló erősítő kimenetét az invertáló bemenetre csatoljuk vissza (negatív visszacsatolás, 8. ábra); így jön létre a bemenet és a kimenet közötti zárt hurok. Mivel a nyílt hurkú verziót nem igazán használjuk, a „nem-invertáló erősítő” megnevezés általában zárt hurkút jelent.

A negatív visszacsatolás következtében az invertáló bemeneten az R_f és az R_g ellenállásokból alkotott feszültségosztó által beállított

$$V_f = \frac{R_g}{R_g + R_f} \cdot V_{out} \quad (6)$$

feszültség jelenik meg (itt feltételezzük, hogy a bemeneteken átfolyó áram erősege elhanyagolhatóan kicsi).



8. ábra. Nem-invertáló erősítő

A differenciál-erősítő kimenetén megjelenő feszültség tehát a (2) összefüggés alapján

$$V_{out} = A_o \cdot (V_{in} - V_f) = A_o \cdot \left(V_{in} - \frac{R_g}{R_g + R_f} \cdot V_{out} \right), \quad (7)$$

ahol A_o a nyílt hurkú erősítési tényező. Ezt az összefüggést átrendezzük:

$$V_{out} \left(1 + A_o \cdot \frac{R_g}{R_g + R_f} \right) = A_o \cdot V_{in}, \quad (8)$$

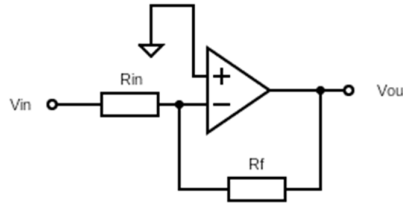
majd a kimeneti és a bemeneti feszültségek hányadosával meghatározzuk a nem-invertáló erősítő tényezőjét:

$$A = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{A_o}{1 + A_o \cdot \frac{R_g}{R_g + R_f}} = \frac{1}{\frac{1}{A_o} + \frac{R_g}{R_g + R_f}} \approx \frac{R_g + R_f}{R_g}, \quad (9)$$

mivel A_o nagyon nagy (ideálisan ∞). Az erősítési tényező tehát legalább egységnyi, a kimeneten pedig a feszültség előjele megegyezik a bemeneti feszültségével.

Az invertáló erősítő

Szintén negatív visszacsatolással működik az invertáló erősítő (9. ábra).



9. ábra. Invertáló erősítő

Amennyiben az invertáló bemeneten átfolyó áram erősségét elhanyagoljuk, akkor ezen a bemeneten az R_f és az R_{in} ellenállásokból alkotott feszültségosztó által beállított

$$V_f = V_{in} + \frac{R_{in}}{R_{in} + R_f} \cdot (V_{out} - V_{in}) \quad (10)$$

feszültség jelenik meg. A nem-invertáló bemenet földelve van, ekképpen az áramkört leíró egyenlet

$$V_{out} = A_o \cdot (0 - V_f) = -A_o \cdot \left(V_{in} + \frac{R_{in}}{R_{in} + R_f} \cdot (V_{out} - V_{in}) \right). \quad (11)$$

Innen

$$V_{out} \cdot \left(1 + A_o \cdot \frac{R_{in}}{R_{in} + R_f} \right) = -V_{in} \cdot A_o \cdot \left(1 - \frac{R_{in}}{R_{in} + R_f} \right), \quad (12)$$

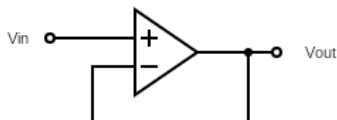
az erősítési tényező pedig

$$A = \frac{V_{out}}{V_{in}} = - \frac{A_o \cdot \left(1 - \frac{R_{in}}{R_{in} + R_f} \right)}{1 + A_o \cdot \frac{R_{in}}{R_{in} + R_f}} \approx - \frac{1 - \frac{R_{in}}{R_{in} + R_f}}{\frac{R_{in}}{R_{in} + R_f}} = - \frac{R_f}{R_{in}}. \quad (13)$$

Az erősítési tényező nagysága tehát bármilyen (egységnyinél kisebb is) lehet, a kimeneten pedig a feszültség előjele a bemeneti feszültségének fordítottja.

A feszültségkövető áramkör és az inverter

Ha a 8. ábrán levő nem-invertáló erősítő kimenetét közvetlenül kapcsoljuk az invertáló bemenetre ($R_f = 0$), akkor az erősítési tényező (9) képletéből az következik, hogy az éppen egységnyi lesz. Ebben az esetben az R_{in} ellenállást is elhanyagolhatjuk, és így a 10. ábrán látható feszültségkövető áramkörhöz jutunk. Ez tehát nem más, mint egy egységnyi erősítésű nem-invertáló erősítő.



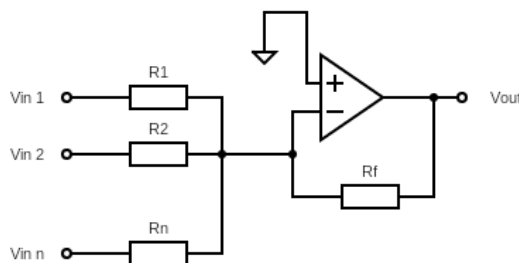
10. ábra. Feszültségkövető

A nagy bemeneti ellenállásának köszönhetően a meghajtó fokozatot nem terheli, a kis kimeneti ellenállásának köszönhetően pedig feszültséggenerátorként működik. Akkor alkalmazzuk, amikor a meghajtó és a meghajtott áramköröket el szeretnénk szigetelni egymástól.

Hasonlóképpen, az egységnyi erősítésű invertáló áramkört, az invertert is megépíthetjük: ha a 9. ábrán levő kapcsolási rajzon $R_f = R_{in}$, akkor a (13) képlet szerint az erősítési tényező -1 lesz: a kimeneten a bemeneti feszültség fog megjelenni, de fordított előjellel. Ez az áramkör is nagy bemeneti és kis kimeneti ellenállással rendelkezik.

Az összeadó áramkör

Ha egy invertáló erősítő bemenetére egy-egy ellenálláson keresztül több feszültséget is kapcsolunk (11. ábra), akkor a kimeneti feszültség a bemeneti feszültségek összegzett hatásaként fog megjelenni. A szakirodalomban a kimenetet néha a bemenetek súlyozott átlagaként említik. A műveleti erősítőnek ez a kapcsolása az összeadó áramkör.



11. ábra. Összeadó áramkör

Az áramkör egyenletéhez felírjuk az áramkör V_{ini} bemeneteitől az erősítő invertáló bemenete fele folyó áram erősségét (V_f az invertáló bemeneten mért feszültség):

$$I_i = \frac{V_f - V_{ini}}{R_i}. \quad (14)$$

Amennyiben az erősítő bemenetén keresztül folyó áram erősségét elhanyagolhatjuk, akkor ezeknek az áramoknak az összege az R_f ellenálláson folyik keresztül. Ohm törvényének újbóli alkalmazásával

$$\sum_{i=1,n} I_i = \frac{V_{out} - V_f}{R_f}, \quad (15)$$

ahol a már ismert összefüggés szerint $V_{out} = -A_o \cdot V_f$. Az előbbieket alapján, V_f kiküszöbölésével

$$\sum_{i=1,n} \frac{-V_{out} / A_o - V_{in i}}{R_i} = \frac{V_{out} + V_{out} / A_o}{R_f}, \quad (16)$$

és mivel az A_o nagyon nagy, végső soron a kimeneti feszültségre, a V_{out} / A_o tagok elhanyagolásával a következőt kapjuk:

$$V_{out} = -R_f \cdot \sum_{i=1,n} \frac{V_{in i}}{R_i} = - \left(V_{in 1} \cdot \frac{R_f}{R_1} + V_{in 2} \cdot \frac{R_f}{R_2} + \dots + V_{in n} \cdot \frac{R_f}{R_n} \right), \quad (17)$$

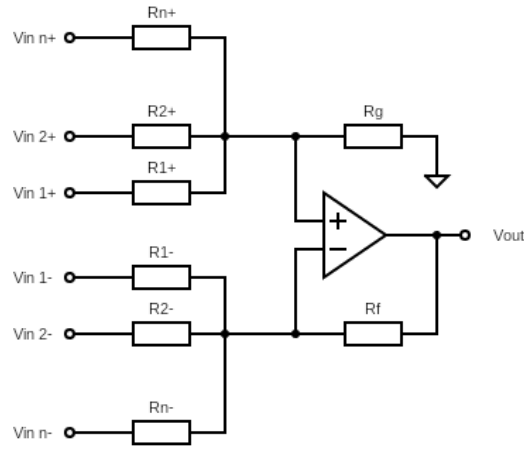
Amikor $R_1 = R_2 = \dots = R_n = R_g$, a kimeneti feszültség a bemeneti feszültségek összegével egyenes arányban fog állni, az arányossági tényező pedig R_f / R_g . Ahhoz, hogy a kimeneten ténylegesen a bemenetek említett súlyozott átlaga jelenjen meg, az R_f / R_i hányadosok által megadott súlyzó tényezők összege 1 kellene legyen.

Itt meg kell jegyeznünk azt, hogy a (17) képlet jobb oldalán a tagok algebrai összege áll, a bemeneti feszültségek negatív előjelűek is lehetnek.

A kivonó áramkör

A legegyszerűbb verziójában ez egy olyan visszacsatolt differenciál-erősítő, ahol a kisebbítendő a nem-invertáló, a kivonandót pedig az invertáló bemenetre kötjük, a kimeneten pedig a kettő különbségével összefüggésben álló feszültség jelenik meg. A két bemenet más-más erősítési tényezővel rendelkezhet, a kimeneten pedig az e tényezőkkel megszorított feszültségek különbségét mérhetjük meg.

A helyzetet egy kissé bonyolultabbá teszi az a tény, hogy a nem-invertáló bemenet erősítése egységnyi vagy annál nagyobb. Ha egységnyinél kisebb szorzótényezőre van szükségünk, akkor e bemenetre egy feszültségosztón keresztül kell rákötnünk a kisebbítendőhöz tartozó feszültséget, ahogyan az a 12. ábrán látható több bemenetű kivonó áramkör kapcsolási rajzán látható.



12. ábra. Kivonó áramkör

Az áramkör egyenletéhez az invertáló bemenet hozzájárulását az előbbi fejezet (17) képletével azonos módon vezethetjük le. E levezetésből az invertáló bemenet V_f feszültségéhez vezető összefüggésre van most szükségünk:

$$\sum_{i=1,n-} I_{i-} = \sum_{i=1,n-} \frac{V_f - V_{in i-}}{R_{i-}} = \frac{V_{out} - V_f}{R_f}. \quad (18)$$

A nem-invertáló bemenet esetében is hasonló a levezetés: ha a bemenet feszültségét V_g -vel jelöljük, akkor a $V_{in i+}$ bemenetektől az erősítő invertáló bemenete fele folyó áram erőssége

$$I_{i+} = \frac{V_{in i+} - V_g}{R_{i+}}. \quad (19)$$

Az erősítő bemenetén keresztül folyó áram erősségének elhanyagolásával ezek összege az R_g ellenálláson átfolyva azon V_g nagyságú feszültségést hoz létre:

$$\sum_{i=1,n+} I_{i+} = \sum_{i=1,n+} \frac{V_{in i+} - V_g}{R_{i+}} = \frac{V_g}{R_g}. \quad (20)$$

A (20) képlet felhasználásával

$$V_g \cdot \left(1 + R_g \cdot \sum_{i=1,n+} \frac{1}{R_{i+}} \right) = R_g \cdot \sum_{i=1,n+} \frac{V_{in i+}}{R_{i+}}, \quad (21)$$

ahonnan

$$V_g = \frac{R_g \cdot \sum_{i=1,n+} \frac{V_{in i+}}{R_{i+}}}{1 + R_g \cdot \sum_{i=1,n+} \frac{1}{R_{i+}}}. \quad (22)$$

A (18) képletből pedig

$$V_f \cdot \left(1 + R_f \cdot \sum_{i=1, n-} \frac{1}{R_{i-}} \right) = R_f \cdot \sum_{i=1, n-} \frac{V_{in i-}}{R_{i-}} + V_{out} \cdot \quad (23)$$

A differenciál-erősítő kimenetén megjelenő feszültség a (2) képlet szerint, a mostani jelöléseinkkel:

$$V_{out} = A_o \cdot (V_g - V_f). \quad (24)$$

Mivel a nyílt hurkú erősítési tényező nagyon nagy (elméletileg végtelen), a zárójelben levő különbség nagyon kicsi kell legyen (elméletileg nulla), tehát elfogadhatjuk a

$$V_g \approx V_f \quad (25)$$

megközelítést. Ezzel, ha a (23) képletben V_f -et V_g (22) képlettel megadott kifejezésével helyettesítjük, akkor a kimeneti feszültség következő kifejezéshez jutunk:

$$V_{out} = \frac{R_g \cdot \sum_{i=1, n+} \frac{V_{in i+}}{R_{i+}}}{1 + R_g \cdot \sum_{i=1, n+} \frac{1}{R_{i+}}} \cdot \left(1 + R_f \cdot \sum_{i=1, n-} \frac{1}{R_{i-}} \right) - R_f \cdot \sum_{i=1, n-} \frac{V_{in i-}}{R_{i-}}, \quad (26)$$

amit az áttekinthetőbb

$$V_{out} = \sum_{i=1, n+} k_{i+} \cdot V_{in i+} - \sum_{i=1, n-} k_{i-} \cdot V_{in i-} \quad (27)$$

formára hozhatunk.

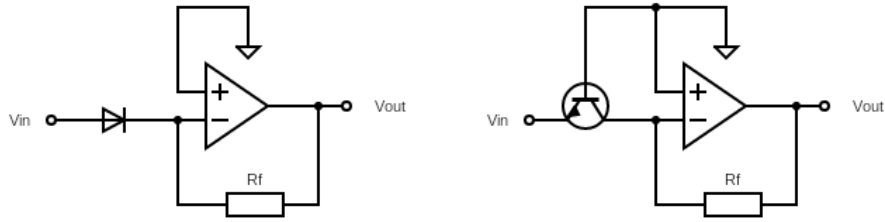
Nyilvánvalóan a legáltalánosabb esetben a k_{i+} és a k_{i-} tényezők kifejezése meglehetősen bonyolult, azonban amikor a nem-invertáló bemenetek (azaz a kisebbítendőké) száma egyenlő az invertáló bemenetekével (vagyis a kivonandókéval, $n_+ = n_- = n$), a bemeneti ellenállások azonosak (bármely i -re $R_{i+} = R_p$ és $R_{i-} = R_n$), valamint $R_g / R_p = R_f / R_n = k$, akkor

$$V_{out} = k \cdot \left(\sum_{i=1, n} V_{in i+} - \sum_{i=1, n} V_{in i-} \right). \quad (28)$$

Ha a felsorolt feltételek nem teljesülnek, akkor rugalmasabban kezelhetjük a helyzetet egy összetettebb áramkörrel: pl. a kivonandókat egy összegző áramkörrel összeadjuk (a tagokat egyenként skálázhatjuk), az összeg előjelét pedig egy inverterrel megfordítjuk. Ezt és a kisebbítendőket egy második összegző áramkörrel adjuk össze (a tagokat itt is egyenként skálázhatjuk).

Az exponenciáló áramkör

Ennek az áramkörnek a feladata a kimeneti feszültségnek a bemenet exponenciális függvényeként való beállítása. Ehhez egy nem-lineáris áramköri elemet lehet felhasználni: egy diódát (a 13. ábra bal oldalán), vagy pedig egy bipoláris tranzisztort (az ábrán a jobb oldalon).



13. ábra. Exponenciáló áramkör

Nyitóirányban, a félvezető diódán átfolyó áram erősségét az exponenciális

$$I(V) = I_s \cdot e^{\lambda \cdot V} = I_s \cdot \exp(\lambda \cdot V). \quad (29)$$

egyenlet írja le, ahol I_s a záró irányú telítési áram, a λ kitevő pedig a félvezető anyagától és a hőmérséklettől függő paraméter. Ezzel azonos egyenlet írja le a földelt bázisú tranzisztor kollektor-áramát is. Ha az invertáló bemeneten átfolyó áram erősségét elhanyagoljuk, akkor az R_f ellenálláson fellépő feszültségesés is a bemeneti feszültség exponenciális függvénye lesz. A bemenet feszültsége ekkor

$$V_f = V_{out} + R_f \cdot I_s \cdot \exp[\lambda \cdot (V_{in} - V_f)]. \quad (30)$$

A nagyon nagy nyílt hurkú erősítési tényező miatt V_f nagyon közel kell álljon a nem-invertáló bemenet feszültségéhez, ami földelve van (vagyis $V_f \approx 0$), így a kimenet feszültsége

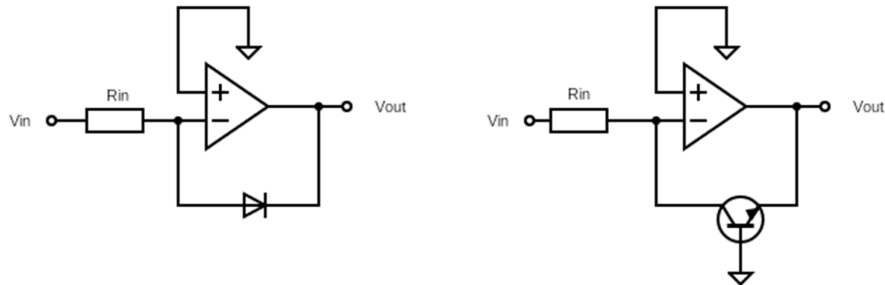
$$V_{out} = -R_f \cdot I_s \cdot \exp(\lambda \cdot V_{in}) \quad (31)$$

lesz.

Az I_s záró irányú telítési áram erősségét az alkatrészek adatlapjából tudjuk meg; szobahőmérsékleten az μA nagyságrendű, Szilíciumból készült diódák és tranzisztorok esetében λ értéke 40 V^{-1} körül van. A tranzisztoros változat előnye a diódással szemben az, hogy szélesebb feszültségtartományon működik.

A logaritmáló áramkör

A feladata az előbbi áramkörének a fordítottja, kimeneti feszültségnek a bemenet logaritmusaként való beállítása. Ezt az áramkört is egy diódával vagy egy tranzisztorral építhetjük fel (14. ábra), azonban a nem-lineáris áramköri elem nem a bemeneten, hanem a visszacsatoló hurokban van.



14. ábra. Logaritmáló áramkör

Az áramkör egyenletéhez a félvezető-eszközön fellépő feszültségesés képletére van szükségünk, amit a (29) egyenlet alapján a következőképpen írhatunk fel:

$$V(I) = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \frac{I}{I_s} \quad (32)$$

Az I erősségű áram az R_{in} ellenálláson és a vele soros félvezető-eszközön folyik át (a diódán átfolyó áram, illetve a tranzisztor kollektor-árama), mivel a műveleti erősítő invertáló bemenetén keresztül átfolyó áram erőssége elhanyagolható. E bemeneten a feszültség

$$V_f = V_{out} + \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \frac{I}{I_s}, \quad (33)$$

ahol

$$I = \frac{V_{in} - V_f}{R_{in}} \quad (34)$$

Ahogy az exponenciális áramkörnél, a földre kötött nem-invertáló bemenet miatt $V_f \approx 0$, tehát

$$V_{out} = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln \frac{V_{in}}{I_s \cdot R_{in}}, \quad (35)$$

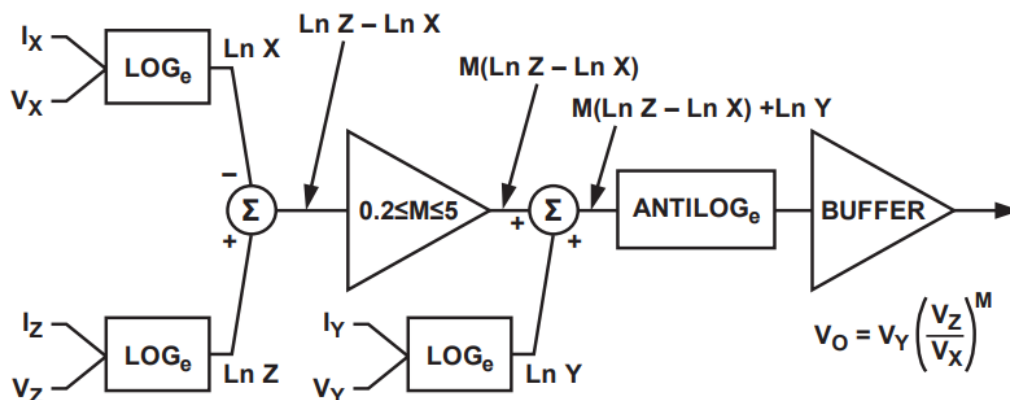
vagyis a kimeneti feszültség a bemeneti feszültség természetes logaritmusának a függvénye.

Megjegyzendő, hogy a hőmérséklet nagyban befolyásolja λ értékét, ugyanakkor a záró irányú telítési áram nagysága körül is elég sok a bizonytalanság. Ezek miatt az exponenciális és logaritmás áramköröket a legbiztonságosabban az erre a célra kifejlesztett, a hőmérséklet-kompenzálást is megoldó integrált áramkörökkel valósíthatjuk meg. Ezek működési elve a bemutatottakkal azonos.

A szorzó áramkör

Szorzást, osztást, hatványozást műveleti erősítővel felépített egyszerű áramkörrel elvégezni nem lehet, azonban a logaritmus tulajdonságait kihasználva ($\ln a \cdot b = \ln a + \ln b$, $\ln a/b = \ln a - \ln b$, $\ln a^c = c \cdot \ln a$) logaritmás, összegző, kivonó és exponenciális áramköröket kombinálva ez a feladat is megoldható.

Példaként az Analog Devices AD538-as integrált áramkörének az átviteli (transzfer-) függvénye $V_{out} = V_y \cdot (V_z/V_x)^M$. Az x , y és z bemenetek feszültségét egy-egy logaritmás áramkör alakítja át (15. ábra). A $\ln V_x$ és $\ln V_z$ feszültségek egy differenciál-erősítő kimenetén az $M \cdot (\ln V_z - \ln V_x)$ különbséget állítják elő, ahol az M erősítési tényező, 0.2 és 5.0 között, külső ellenállásokkal paraméterezhető. Ehhez a különbséghez egy összegző áramkör hozzáadja a $\ln V_y$ feszültséget, így annak a kimenete $M \cdot (\ln V_z - \ln V_x) + \ln V_y$ lesz. Ez a kimenet egy exponenciális áramkör bemeneteként, annak kimenetén előállítja a kívánt átviteli függvénynek megfelelő jelet (ez egy feszültségkövető áramkörön keresztül van kivezetve). A bemenetek nem csak feszültségek, hanem áramerősségek is lehetnek; a működési vázlaton ezek I_x stb. jelöléssel szerepelnek.



15. ábra. Az AD538-as áramkör adatlapban szereplő működési vázolata

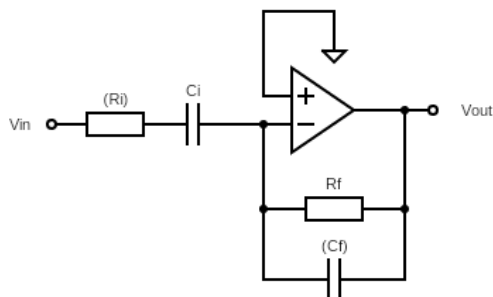
Megjegyzendő, hogy léteznek más elven működő analóg szorzó áramkörök. Ilyen a Gilbert-cella, ami egy olyan differenciál-erősítő, aminek az erősítése a vezérlőfeszültség nagyságától függ. A cella kimenetén a feszültség az erősítő bemeneti feszültségének és a vezérlőfeszültségnek a szorzatával arányos; ezt az áramkört rendszerint modulátorként szokták használni.

A differenciáló (deriváló) áramkör

Egy kondenzátoron átfolyó áram erősségét a következő összefüggés adja:

$$I(t) = C \cdot \frac{dU(t)}{dt}, \quad (36)$$

vagyis az arányos a kondenzátor kapcsain mért feszültség időbeni változásával (e feszültség idő szerinti deriváltjával), az arányossági tényező pedig a kondenzátor kapacitása. Ha a kondenzátort egy műveleti erősítő bemenetére kapcsoljuk, akkor a kimeneti feszültség ideális esetben a bemeneti jel idő szerinti deriváltjával lesz arányos. A 16. ábrán az így megépített differenciáló áramkör kapcsolási rajza szerepel. Az ideális áramkörben a zárójelbe tett elemek nem szerepelnek: azok az áramkör stabil működéséhez szükségesek.



16. ábra. Differenciáló áramkör

Ha ezúttal is élünk azzal a feltételezéssel, hogy az erősítő bemenetén keresztül nem folyik áram, akkor az R_f visszacsatoló-ellenálláson fellépő feszültségesés nagysága az előbbi képlet szerint

$$V_f = R_f \cdot I(t) = R_f \cdot C_i \cdot \frac{dV_{in}(t)}{dt}, \quad (37)$$

lesz, amivel az erősítő kimeneti feszültsége, a bemenet nagy impedanciája miatt, jó közelítéssel

$$V_{out}(t) = -R_f \cdot C_i \cdot \frac{dV_{in}(t)}{dt}. \quad (38)$$

Az ideális felépítésű differenciáló áramkör hajlamos a begerjedésre. A begerjedést egy kis kapacitású, a visszacsatoló ellenállással párhuzamosan bekötött C_f kondenzátorral lehet elkerülni.

Mivel a kimenet a bemenet deriváltjával arányos, az áramkör zajérzékeny, a túlságosan nagymértékű erősítés miatt a zaj elfedheti a bemeneti jelet. A kimeneti jel nagysága frekvenciafüggő: pl. ha a bemeneti feszültség

$$V_{in} = U \cdot \sin \omega \cdot t, \quad (39)$$

akkor a kimeneti feszültség

$$V_{out} = -\omega \cdot R_f \cdot C_i \cdot U \cdot \cos \omega \cdot t, \quad (40)$$

lesz. Az erősítési tényező a két jel amplitúdójának a hányadosaként

$$A = \omega \cdot R_f \cdot C_i, \quad (41)$$

tehát a frekvenciával együtt növekedik, így nagy frekvencián az erősítési tényező értéke nagyon nagy lehet. Ezt a hatást egy, a bemeneti kondenzátorral sorba kötött R_i ellenállással lehet csökkenteni, ami az erősítési tényezőt az R_f / R_i határértékre korlátozza, a kapcsolat pedig bizonyíthatóan az

$$f_1 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R_i \cdot C_i} \quad (42)$$

határfrekvenciáig viselkedik differenciáló áramkörként.

A 16. ábrán levő gyakorlati kapcsolás az

$$f_2 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R_f \cdot C_f} \quad (43)$$

határfrekvencia fölött a következő fejezetben ismertetett integráló áramkörként működik. E két frekvencia között az áramkört feszültségkövetőnek tekinthetjük.

Az integráló áramkör

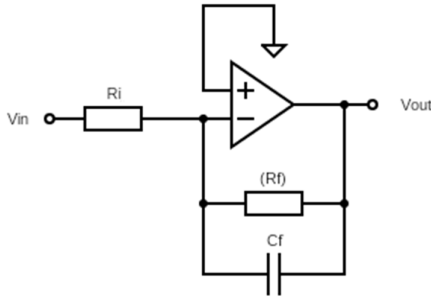
A kondenzátorra felírt (36) összefüggést megfordíthatjuk. Annak integrálásával, a kondenzátor feszültségét az átfolyó áram (felhalmozott töltésmennyiség) függvényében az

$$U(t) = U_0 + C \cdot \int_{t_0}^t I(\tau) d\tau \quad (44)$$

formában kapjuk, ahol az összeg első tagja (U_0) a kondenzátor feszültsége a kezdeti t_0 pillanatban, a második pedig az átfolyó áram erősségének határozott integrálja. A kondenzátor kapcsain mért feszültség tehát az átfolyó áramerősség időbeni határozott integráljával áll lineáris kapcsolatban. E feszültség az idő függvénye, a határozott integrál felső határértékének megfelelően.

Ezek alapján, a 17. ábrán látható kapcsolási rajzon levő műveleti erősítő visszacsatoló áramkörében levő C_f kondenzátor kapocsfeszültsége a bemeneti R_i ellenálláson átfolyó áram erősségének határozott integráljával áll kapcsolatban, ideálisan

$$V_{out}(t) = V_{out}(t=0) - \frac{1}{R_i \cdot C_f} \cdot \int_0^t V_{in}(t) dt. \quad (45)$$



17. ábra. Integráló áramkör

A $V_{out}(t=0)$ kezdeti feszültséget a C_f kondenzátor előzetes feltöltésével állíthatjuk be, a kapcsolási rajzon nem ábrázolt kapcsoló és feszültségforrás segítségével (például a testre kötésével azt lenullázhatjuk).

Az így megépített integráló áramkör azonban nem lesz ideális, ugyanis az erősítő nem-nulla bemeneti „bias” áramerőssége gondokat okoz. Alacsony frekvencián a visszacsatoló kondenzátor miatt az erősítő nyílt hurkúhoz fog közelíteni, ami miatt az erősítési tényező nagyon nagy lesz és ez instabil működéshez vezet. E hátrányok kiküszöböléséhez a visszacsatoló hurokba egy nagyobb értékű R_f ellenállást illesztünk be, ami a bias áramot elvezeti és az erősítési tényező nagyságát is korlátozza. E gyakorlati kapcsolás a (43) képlettel megadott f_2 alsó és az

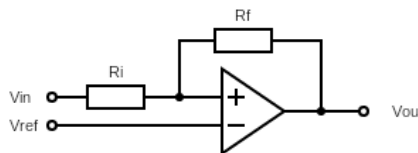
$$f_3 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R_i \cdot C_f} \quad (46)$$

felső határértékekkel megadott frekvencia-tartományon viselkedik integráló áramkörként.

A bemenetre egy soros C_i kondenzátort is köthetünk, ami leválasztja a bemenet nem-kívánt egyenfeszültségű összetevőjét. Ekkor az integráló kapcsolási rajza tulajdonképpen azonossá válik a deriváló áramkörnek a 16. ábrán látható rajzával.

A nem-invertáló hiszterézises komparátor (Schmitt-trigger)

Az előbbiektől eltérően ez egy pozitív visszacsatolású erősítő, amelynek a nem-invertáló bemenetére egy R_i ellenálláson keresztül egy V_{in} feszültséget kapcsolunk, az invertáló bemenetet pedig a V_{ref} referencifeszültségen tartjuk.



18. ábra. Nem-invertáló hiszterézises komparátor

Az erősítő nem-invertáló bemenetének a feszültsége a V_{in} bemeneti és a V_{out} kimeneti feszültségtől is függ:

$$V_{in+} = V_{in} \cdot \frac{R_f}{R_i + R_f} + V_{out} \cdot \frac{R_i}{R_i + R_f}. \quad (47)$$

(ideális esetben a két ellenálláson keresztül ugyanaz az $I = (V_{out} - V_{in}) / (R_i + R_f)$ erősségű áram folyik keresztül, ezzel pedig kiszámíthatjuk az ellenállásokon fellépő feszültségesést).

A V_{out} feszültséget viszont az invertáló és a nem-invertáló bemenetek együttesen határozzák meg, a 7. ábrán látható komparátor esetéhez hasonló módon:

$$\begin{cases} \text{ha } V_{in+} > V_{ref}, \text{ akkor } V_{out} = +V_s, \\ \text{ha } V_{in+} < V_{ref}, \text{ akkor } V_{out} = -V_s. \end{cases} \quad (48)$$

A két áramkör közötti különbséget a pozitív visszacsatolás jelenti, az (5) relációktól eltérően pedig a billenést nem az áramkör bemenetére kapcsolt V_{in} , hanem az erősítő nem-invertáló bemenetén megjelenő V_{in+} feszültség függvényében kell vizsgálnunk. A billenés akkor történik, amikor $V_{in+} = V_{ref}$.

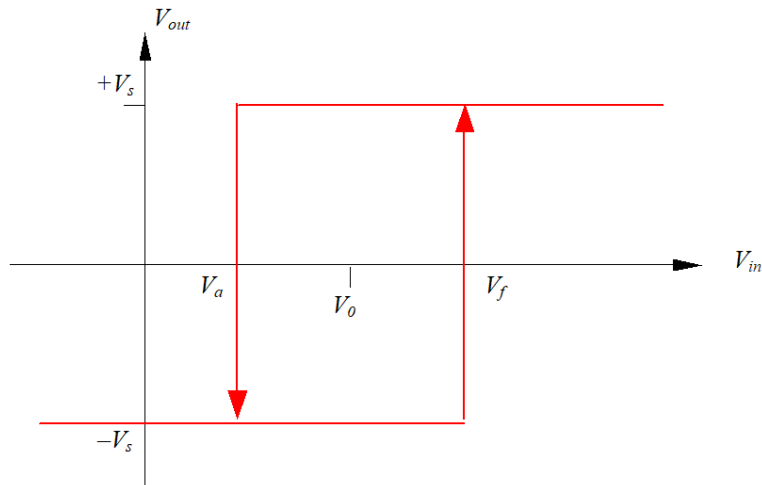
Az áramkör vizsgálatához tételezzük fel, hogy a kezdetben a kimenet a kikapcsolt állapotban van (azaz $V_{out} = -V_s$). A (47) összefüggés szerint a kimenet átbillenése akkor következik be, amikor a növekvő bemeneti feszültség értéke eléri a

$$V_{in} = V_{ref} \cdot \frac{R_i + R_f}{R_f} + V_s \cdot \frac{R_i}{R_f} = V_f \quad (49)$$

felső küszöbértéket (e pillanatban $V_{in+} = V_{ref}$). Átbillenés után, a bekapcsolt kimenet feszültsége $V_{out} = +V_s$, ami csak akkor billen át ismét kikapcsolt állapotába, ha a bemenet csökkenő feszültsége eléri a

$$V_{in} = V_{ref} \cdot \frac{R_i + R_f}{R_f} - V_s \cdot \frac{R_i}{R_f} = V_a \quad (50)$$

alsó küszöbértéket (a billenés, az előbbi esettel azonos módon, ismét a V_{in+} és a V_{ref} feszültségek egyenlőségének bekövetkezésekor történik meg).



19. ábra. A hiszterézises komparátor feszültségviszonyai

A be- és kikapcsolási küszöbértékek közötti különbség miatt ez az áramkör stabilabb, mint a 7. ábrán látható egyszerű komparátor, azonban ugyanezen okok miatt a bemeneti feszültség $[V_a, V_f]$ intervallumán a kimenet állapota az utolsó átbillenés során felvettl azonos. A 19. ábra ezt a hiszterézises viselkedést szemlélteti.

Az átbillenés tehát a

$$V_0 = V_{ref} \cdot \frac{R_i + R_f}{R_f} \quad (51)$$

közéérték (és nem a V_{ref}) körül történik, a hiszterézis szélessége pedig

$$\Delta V_{in} = 2 \cdot V_s \cdot \frac{R_i}{R_f}. \quad (52)$$

A fenti képletek egy szimmetrikus betáplálású komparátorra érvényesek, a gyakorlatban pedig a kimeneti feszültség nem $\pm V_s$, hanem egy ahhoz közeli érték.

Műveleti erősítővel megépített S-R bistabil multivibrátor (S-R flip-flop)

A bistabil multivibrátorok olyan billenő áramkörök, amelyeknek a kimenete (akárcsak az előbbi fejezetekben szereplő komparátoroké) a két lehetséges állapot valamelyikében van, és ebből az állapotból csak a megfelelő bemenetre kapcsolt feszültséggel lehet átbillenteni. A billenések között mindkét lehetséges állapot stabil, tehát onnan az áramkör önmagától nem térhet vissza. Ezek közül a legegyszerűbb felépítésű az S (*set*) R (*reset*) multivibrátor, amelynek az S beállító bemenetére kapcsolt feszültség a kimenetet felemeli, míg az R törlő bemenetre kapcsolt feszültség a kimenet alacsony szintjét állítja be. Az S és az R bemenetek közül csak az egyik lehet magas: ha egyszerre mindkét bemenetet felemelnénk, az egy instabil állapothoz vezetne: ezen csak egy bonyolultabb felépítésű áramkörrel lehet javítani.

Az S-R multivibrátor logikai táblázatát tehát emígy állíthatjuk össze:

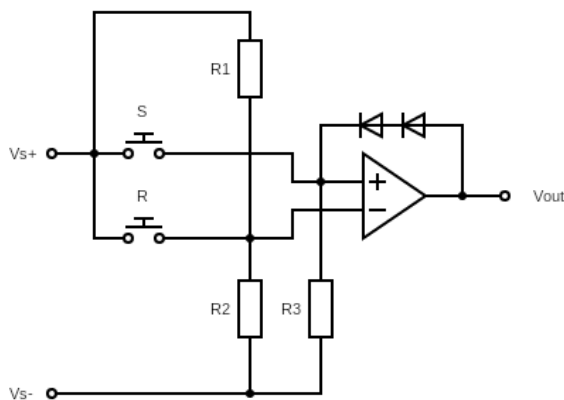
S	R	kimenet
0	0	nem változik
1	0	1 (magas)
0	1	0 (alacsony)
1	1	instabil (tiltott)

1. táblázat. Az S-R multivibrátor logikai táblázata

Az S-R bistabil áramkört többféle módon is megépíthetjük, a 20. ábrán egy műveleti erősítővel megvalósított kapcsolási rajzot láthatunk.

E felépítésben, ha az R törlő gombot nem nyomtuk meg, az invertáló bemenet a pozitív és a negatív tápfeszültség, valamint az R_1 és az R_2 ellenállásból álló feszültségosztó által meghatározott feszültségen van: szimmetrikus tápfeszültség és feszültségosztó ($R_1 = R_2$) esetében az ideálisan nulla. A továbbiakban ezt az esetet vizsgáljuk.

Ha az S beállító gomb sincs megnyomva, akkor a nem-invertáló kimenet feszültsége az erősítő (tehát a bistabil) kimenetének megfelelően alakul. Ha a kimenet magas (a V_{s+} tápfeszültséghez közeli pozitív szinten van), akkor a visszacsatoló diódáknak köszönhetően a nem-invertáló bemenet feszültsége is pozitív. Az invertáló bemenet feszültsége nulla és ekkor teljesül a $V_{in+} > V_{in-}$ feltétel, ami a kimenetet magas szinten tartja. Ha viszont a kimenet alacsony (tehát a V_{s-} tápfeszültséghez közeli negatív szinten van), akkor a visszacsatoló diódák nem vezetnek és a nem-invertáló bemenetet az R_3 ellenállás negatív feszültségre állítja, amikor is $V_{in+} < V_{in-}$, ez pedig a kimenetet alacsony szinten tartja.

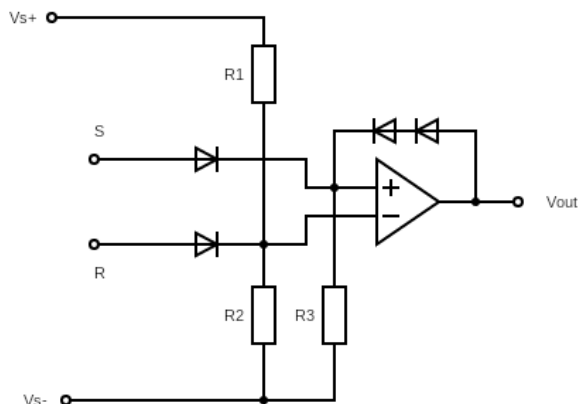


20. ábra. S-R bistabil multivibrátor

Ha a kimenet alacsony, akkor az S beállító gomb megnyomása a pozitív tápfeszültséget a nem-invertáló bemenetre kapcsolja, ami magasabb az invertáló bemenet nulla feszültségénél, így a műveleti erősítő kimenetét magas szintre állítja. Az előbbieken ismertetett okok miatt a kimenet a gomb felengedése után is magas marad, az S gomb ismételt megnyomása pedig nem hoz változást.

Ha viszont a kimenet magas és megnyomjuk az R törlő gombot, akkor az invertáló bemenet lesz a pozitív tápfeszültségen, ami a visszacsatoló hurokban levő két diódán fellépő feszültségésés miatt magasabb a nem-invertáló bemenet feszültségénél, tehát a műveleti erősítő

bemenetét alacsony szintre hozza vissza, ami a gomb felengedése után is megmarad. Az R gomb ismételt megnyomása szintén nem okoz további változást.



21. ábra. Impulzusokkal vezérelt S-R bistabil multivibrátor

Ha gombok helyett impulzusokkal akarjuk működtetni az áramkört, a bemeneteket diódákon keresztül kell bekötni (21. ábra). Az R_1 és az R_2 ellenállások megválasztásával beállítható az S bemenetnek az a minimális feszültségszintje, ami a kimenet felemelését idézi elő: az átbillenéshez $V_{in+} > V_{s-} + (V_{s+} - V_{s-}) \cdot R_2 / (R_1 + R_2)$, az S bemenet feszültsége pedig a dióda nyitófeszültségével kell nagyobb legyen ennél a határértéknél. A visszacsatoló hurokban levő diódák egyike a bemenetekre csatolt diódákon fellépő feszültségesést kompenzálja.

Ezt a fajta áramkört gyakran alkalmazzák túlfeszültség detektálására, biztonsági kapcsolók felépítésében, pl. a tápfeszültség-forrásokban.

Egy megoldandó példa

A mechanika tárgykörén belül klasszikusnak számít az egy dinamikai szabadságfokkal rendelkező rugalmas rendszer mozgásának tárgyalása (22. ábra). Az ilyen rendszer az egyensúlyi helyzetéből csak egy irányban mozdulhat el.

Az egyensúlyi helyzetből való kitérés valamilyen külső hatásra történik meg. Ha a mozgás egy időben változó külső erő hatására történik, akkor a gerjesztett rendszer kényszerlengéséről beszélünk, ha pedig az erőhatás megszűnté utáni mozgást vizsgáljuk, akkor a magára hagyott rendszer szabad lengését tanulmányozzuk.

Az idealizált modell feltételezi, hogy a rendszer lineárisan rugalmas, vagyis az egyensúlyi helyzetéből kitérített tömeget (az ábrán a merev test m tömegét) annak elmozdulásával egyenesen arányos nagyságú erő iparkodik visszahozni az egyensúlyi helyzetébe. Ezt a hatást a 22. ábrán a k állandójú rugó modellezi.

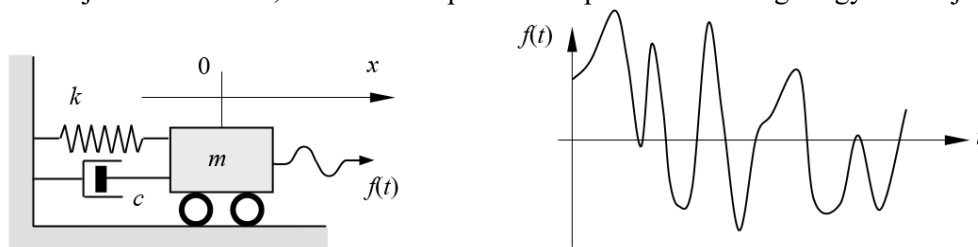
E változó nagyságú erő a tömeg változó sebességű mozgását idézi elő, aminek során fellép a gyorsulással arányos tehetetlenségi erő is.

Ha a valósághoz közelebbi modellt szeretnénk teremteni, akkor figyelembe kell venni a mechanikai energiát felemészítő (disszipatív) hatásokat is, amelyek folyamatosan fékezik a mozgó testet. A legegyszerűbb esetben ezt viszkózus csillapításként modellezzük, amikor a fékező erő a mozgási sebességgel egyenesen arányos. A 22. ábrán ezt a hatást c csillapítási tényezővel rendelkező lengéscsillapító képviseli.

A kényszerrezgésének mozgásegyenletét d'Alambert elve alapján írhatjuk fel. Ez a rendszerre ható erők egyensúlyi egyenlete:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = f(t). \quad (53)$$

ahol a bal oldalon az első tag az m tömegű testre ható tehetetlenségi erő, a második a viszkózus csillapítás, a harmadik tag pedig a rugalmas visszatérítő erő. A jobb oldalon a gerjesztő $f(t)$ erő áll. Ha a jobb oldal nulla, akkor ez a képlet a csillapított szabadlengés egyenletét jelenti.



22. ábra. Egy dinamikai szabadságfokkal rendelkező rendszer

Ezt az egyenletet a tömeggel való osztással átalakíthatjuk:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \cdot \dot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = \frac{f(t)}{m}. \quad (54)$$

A lengéstanban bizonyítást nyer az, hogy a magára hagyott csillapítatlan rendszer ($c = 0$) harmonikus lengőmozgást végez, amelynek a frekvenciája a rendszer csillapítatlan saját-körfrekvenciája:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (55)$$

Ugyanakkor megállapítást nyer az is, hogy amennyiben a rendszer csillapított (ekkor $c > 0$), a szabadlengés harmonikus lesz ugyan, de az amplitúdója az idő múlásával exponenciálisan csökken, és a saját-körfrekvenciája is kisebb lesz az iménti értéknél. A csillapítás egy bizonyos c_c kritikus nagyságától kezdve az egyensúlyi helyzetéből kitérített, majd magára hagyott rendszer mozgása aperiodikussá válik. A rendszert a csillapítását tekintvén a

$$\xi = \frac{c}{c_c}. \quad (56)$$

csillapítási hányadossal jellemezhetjük (ha $\xi = 0$, akkor csillapítatlan; ha $\xi \in (0,1)$, akkor alulcsillapított; ha $\xi = 1$, akkor kritikus csillapítású; ha pedig $\xi > 1$, akkor az túlcsillapított rendszer). A csillapítás kritikus nagysága bizonyíthatóan

$$c_c = 2 \cdot \sqrt{k \cdot m}, \quad (57)$$

a c/m hányados pedig

$$\frac{c}{m} = \frac{\xi \cdot c_c}{m} = 2 \cdot \xi \cdot \omega_n. \quad (58)$$

Megállapítható, hogy az alulcsillapított rendszer saját-körfrekvenciája:

$$\omega_d = \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \omega_n. \quad (59)$$

A fenti mennyiségek felhasználásával az (53) mozgásegyenlet a következőképpen paraméterezhető:

$$\ddot{x} + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot \dot{x} + \omega_n^2 \cdot x = a(t), \quad (60)$$

ahol a gerjesztést ezúttal az $a(t) = f(t)/m$ gyorsulás jelenti.

A megoldandó feladat tehát ennek a differenciálegyenletnek a megoldása lenne, amit analitikus módon néhány sajátos esetben lehet. Emiatt a számításokkal történő megoldás bizonyos lépésenként elvégzett, rekurzív számításokat feltételező numerikus eljárásokon alapul; példaként tekintsük a következőt.

A számításokat egy megválasztott és állandó Δt időlépéssel végezzük el. A gerjesztést és a kiszámított kinematikai mennyiségeket is az egymást követő, Δt lépéssel felvett pillanatokban határozzuk meg. A rekurzív képletek megállapításának céljából feltételezzük, hogy egy lépés alatt a rendszer gyorsulása lineárisan változik (az idő elsőfokú függvénye), így a gyorsulás „rántás”-nak is nevezett idő szerinti deriváltja, azaz $\ddot{x} = k$ állandó. Ekkor, a kinematikából ismert általános összefüggések alapján, a lépés elején érvényes értékek függvényében a gyorsulást, a sebességet és az elmozdulást a következőképpen állapíthatjuk meg:

$$a = \int k dt = a_0 + k \cdot t \Rightarrow \ddot{x}_{i+1} = \ddot{x}_i + k \cdot \Delta t \rightarrow k = \frac{\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i}{\Delta t}, \quad (61)$$

$$v = \int a dt = v_0 + a_0 \cdot t + k \cdot \frac{t^2}{2} \Rightarrow \dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \frac{\Delta t}{2} \cdot (\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}), \quad (62)$$

$$d = \int v dt = d_0 + v_0 \cdot t + a_0 \cdot \frac{t^2}{2} + k \cdot \frac{t^3}{6} \Rightarrow x_{i+1} = x_i + \Delta t \cdot \dot{x}_i + \frac{\Delta t^2}{3} \cdot \ddot{x}_i + \frac{\Delta t^2}{6} \cdot \ddot{x}_{i+1}. \quad (63)$$

Ezeket a megoldandó, az $i + 1$ lépésre felírt

$$\ddot{x}_{i+1} + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot \dot{x}_{i+1} + \omega_n^2 \cdot x_{i+1} = a_{i+1} \quad (64)$$

differenciálegyenletbe behelyettesítvén egy algebrai egyenlethez jutunk. Ebből a gyorsulást adó

$$\ddot{x}_{i+1} = \frac{a_{i+1} - \xi \cdot \omega_n \cdot (2 \cdot \dot{x}_i + \Delta t \cdot \ddot{x}_i) - \omega_n^2 \cdot \left(x_i + \Delta t \cdot \dot{x}_i + \frac{\Delta t^2}{3} \cdot \ddot{x}_i \right)}{1 + \xi \cdot \omega_n \cdot \Delta t + \omega_n^2 \cdot \frac{\Delta t^2}{6}} \quad (65)$$

rekurzív képletet kapjuk, amiben a gerjesztésnek az aktuális és a többi mennyiségnek a lépés elején érvényes értéke szerepel. Ezzel a gyorsulással, a (62) és a (63) képletekkel számítjuk ki a sebesség és az elmozdulás új értékét. Az e képletekben szereplő x_i , \dot{x}_i és \ddot{x}_i mennyiségek kiszámítása az előző lépésben történt meg. Az első lépésben ez utóbbiakat kezdeti feltételként kell megadnunk.

Ez az eljárás egyszerűen algoritmizálható, azonban néhány hiányossága is van. Ezek közül az egyik a folytonos mennyiségeknek diszkrét értékekkel való helyettesítéséhez köthető, a gyorsulás időlépés alatti változásának feltételezésével. Egy másik nagy hátránya a számítási hibák tovaterjedése: minden új eredmény a megelőző lépésben kiszámítottakra alapoz. Ezek a hibák összeadódnak és az időlépés rosszul megválasztott nagysága numerikus instabilitásokhoz vezethet (a számítás során gyorsan és egyre nagyobb amplitúdójú, a valóságban nem létező lengést leíró adatokhoz jutunk). Nyilván léteznek olyan módszerek, amelyek ezt az instabilitást kiküszöbölik, azonban a propagálódó számítási hibák problémája megmarad.

A feladatot megoldó analóg számítógép

Ha a megoldandó differenciálegyenlet (53) vagy (60) formáját megtekintjük, akkor a következő matematikai műveletek elvégzésének szükségességét állapíthatjuk meg:

- egy függvény első, illetve második deriváltjának kiszámítását;
- az előbbieket konstans mennyiséggel való szorzatainak kiszámítását;
- e szorzatok összegzését, illetve, a jobb oldalon levő gerjesztés bal oldalra történő átvitele miatt, annak kivonását a másik három tag összegéből.

Ha a differenciálegyenlet megoldásához analóg számítógépet szeretnénk építeni, akkor az ismertettek alapján a deriváltak kiszámításához egy-egy differenciáló áramkört használhatnánk. Az összeadást egy összeadó áramkörrel oldhatjuk meg, amivel (az ellenállások megválasztásával) a konstanssal való szorzást is meg lehetne oldani. A kivonáshoz, valamint a deriváló és az összeadó áramkörök kimenetének megfordításához (ezek mindegyike invertáló erősítő), egy-egy invertáló áramkör beépítése is szükségessé válik.

A differenciáló áramkör erősen zajérzékeny és begerjedhet, emiatt ésszerűbbnek tűnik a sebességek és az elmozdulások a

$$v(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau \quad (66)$$

és a

$$d(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau \quad (67)$$

integrálokkal történő felírása, és ennek alapján az integráló áramkörök használata. Az integrálás az idő szerint történik, amit az egyértelműség kedvéért a τ változó jelöl, a határozott integrálok felső határa pedig az aktuális t pillanat. A mozgásegyenlet némileg átrendezett, újabb

$$a(t) = -\frac{c}{m} \cdot v(t) - \frac{k}{m} \cdot d(t) + \frac{1}{m} \cdot f(t) \quad (68)$$

formája ekkor az

$$a(t) = -\frac{c}{m} \cdot \int_0^t a(\tau) d\tau - \frac{k}{m} \cdot \int_0^t v(\tau) d\tau + \frac{1}{m} \cdot f(t), \quad (69)$$

másképpen az

$$a(t) = -\frac{c}{m} \cdot \int_0^t a(\tau) d\tau - \frac{k}{m} \cdot \int_0^t \left(\int_0^\tau a(\tau^*) d\tau^* \right) d\tau + \frac{1}{m} \cdot f(t) \quad (70)$$

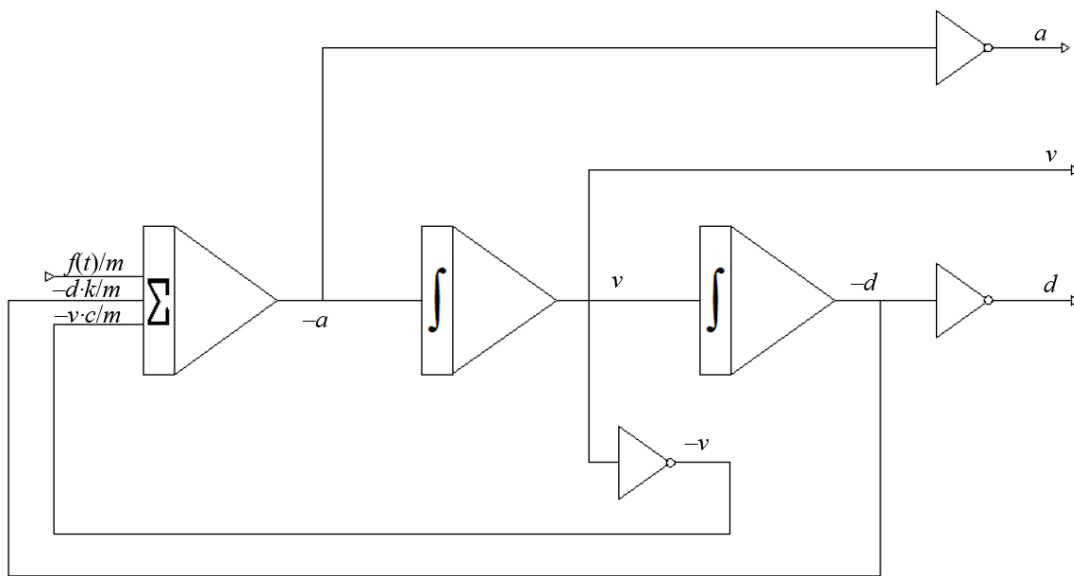
formára hozható, ami deriváltak helyett határozott integrálokat tartalmaz. A konstans együtthatóknak a lengő rendszer jellemzőivel, vagyis a természetes saját-körfrekvenciájával és a csillapítási hányadossal való kapcsolatát a már ismert összefüggések alapján könnyen megfejthetjük.

A differenciálegyenlet (ami az egy dinamikai szabadságfokkal rendelkező rendszer mozgásegyenlet) e három utóbbi formája alapján az azt megoldó analóg számítógép könnyen programozható. A 23. ábrán ennek a számítógépnek a blokkdiagramja látható, amely egy összegző és két integráló áramkörre épül, amit három inverter egészít ki. Az áramkörnek egy bemenete van (a gerjesztő erőnek megfelelően), a három kimeneten pedig a tömeg elmozdulása, sebessége és a gyorsulása jelenik meg. A bemenet és a kimenetek a mechanikai mennyiségekkel analóg (egyenesen arányos) feszültségek.

E számítógép egyik eleme a 11. ábra bal oldalán szereplő összeadó áramkör, aminek három bemenete van. Az első bemenetre a függvénygenerátorral előállított gerjesztést

kapcsoljuk. A másodikra az elmozdulás, a harmadikra pedig a sebesség kerül, a két integráló áramkör (17. ábra) kimeneteként. Az összeadó áramkör a (68) – (70) egyenletek jobb oldalát állítják elő; az $1/m$, k/m és c/m együtthatókat a bemeneti R_i ellenállások és a visszacsatoló R_f ellenállás segítségével programozhatjuk. Az összeadó áramkör egy invertáló erősítő, aminek a kimenetén az említett egyenletek jobb oldalán szereplő gyorsulást fordított előjellel kapjuk.

Az első integráló áramkör bemenete a fordított előjelű gyorsulás. Mivel ez is egy invertáló erősítő, a kimenetén a helyes előjelű sebességet kapjuk. Mivel az összegző áramkör bemenetén a sebesség negatív előjellel kell megjelenjen, ezt a kimenetet a 9. ábrán szereplő, egységnyi erősítésű inverterrel kapcsoljuk az összegző bemenetére.



23. ábra. A mozgásegyenletet megoldó analóg számítógép elvi vázlata

A második integráló áramkör bemenete az első kimenetén nyert sebesség, a kimenete pedig a fordított előjelű elmozdulás, amit közvetlenül kapcsolunk az összegző bemenetére.

A kiszámított adatok gyűjtéséhez a fordított előjelű adatokat (gyorsulást, elmozdulást) egy-egy inverterrel fordíthatjuk helyre.

A gyakorlatba ültetésnél figyelembe kell venni néhány tényezőt. A hibák csökkentése végett a nem invertálandó sebesség-kimenetet egy feszültségkövető áramkörön keresztül kellene kivezetni. Mivel a sebesség és az elmozdulás nagyságrendekkel kisebb lehet gyorsulásnál, az a és d kimeneteket az inverterek helyett egy-egy invertáló, a v kimenetet pedig egy nem-invertáló erősítőn keresztül lehet praktikusán kivezetni. Az összeadó és a két integráló áramkör telítődhet (negatív irányban is), ennek a bekövetkezését pedig nem árt kijelezni.

A megoldandó egyenlet paraméterezése az összeadó áramkör felépítésében résztvevő ellenállások megválasztásával lehetséges.

Az analóg számítógép felépítése

Kezdjük az **összeadó áramkörrel**. Ezt a 11. ábrán bemutatott vázlat alapján építjük fel. Az egyszerűség kedvéért a gerjesztésnek megfelelő bemenetre a skálázottnak tekintett, az

$f(t)/m$ hányadossal azonos nagyságú V_{in1} feszültséget kapcsoljuk. Ekkor a bemeneti R_1 ellenállás ugyanakkora kell legyen, mint a visszacsatoló R_f ellenállás: $R_1 = R_f = 100 \text{ k}\Omega$.

Az elmozdulás k/m skálatényezőjét, ami az egy dinamikai szabadságfokkal rendelkező rendszer csillapítatlan (55) sajátfrekvenciájának a négyzete, a pontosabb beállítás végett egy tíz fokozatban változtatható ellenállással oldjuk meg. A d elmozdulással azonos nagyságú V_{in2} feszültség együtthatóját az $R_2(k/m)$ ellenállás és a visszacsatoló ellenállás hányadosa adja, a következő táblázatban összefoglaltak szerint ($R_f = 100 \text{ k}\Omega$).

Fokozat	R_2 (k Ω)	$R_2/R_f = k/m = \omega_n^2$	ω_n (rad/s)
1	100	1	1
2	90	1.111111111	1.054092553
3	80	1.25	1.118033989
4	70	1.428571429	1.195228609
5	60	1.666666667	1.290994449
6	50	2	1.414213562
7	40	2.5	1.58113883
8	30	3.333333333	1.825741858
9	20	5	2.236067977
10	10	10	3.16227766

2. táblázat. Az elmozdulás együtthatójának táblázata és a saját-körfrekvencia lehetséges értékei

Ugyanígy a sebesség c/m skálatényezőjét, ami az (58) összefüggés szerint az egy dinamikai szabadságfokkal rendelkező rendszer csillapítási hányadosával áll összefüggésben, szintén egy tíz fokozatban változtatható ellenállással oldjuk meg. A v sebességgel azonos nagyságú V_{in3} feszültségnek a következő táblázatban feltüntetett együtthatója az $R_3(c/m)$ ellenállás és a visszacsatoló ellenállás hányadosa ($R_f = 100 \text{ k}\Omega$).

Fokozat	R_3 (k Ω)	$R_3/R_f = c/m = 2 \cdot \xi \cdot \omega_n$
1	∞ (nyitott)	0
2	200	0.5
3	100	1
4	60	1.666666667
5	50	2
6	40	2.5
7	30	3.333333333
8	25	4
9	20	5
10	15	6.666666667

3. táblázat. A sebesség együtthatójának táblázata

A csillapítási hányados nagysága a sajátfrekvenciától is függ, tehát azt az R_2 és az R_3 ellenállások együtt határozzák meg. A két tizedesre kerekített lehetséges értékek a 4. táblázatban láthatók.

Az így megvalósított áramkör az 5. ábrán látható TL081-es típusú integrált műveleti erősítőre épült, a kapcsolási rajz a 24. ábrán látható. A kapcsolási rajza (akárcsak a továbbiak sem) nem tartalmazza az offset-feszültség kompenzálására szolgáló elemeket és a tápfeszültség bekötését sem.

ξ		c/m									
		0.00	0.50	1.00	1.67	2.00	2.50	3.33	4.00	5.00	6.67
k/m	1.00	0	0.25	0.5	0.83	1	1.25	1.67	2	2.5	3.33
	1.11	0	0.24	0.47	0.79	0.95	1.19	1.58	1.9	2.37	3.16
	1.25	0	0.22	0.45	0.75	0.89	1.12	1.49	1.79	2.24	2.98
	1.43	0	0.21	0.42	0.7	0.84	1.05	1.39	1.67	2.09	2.79
	1.67	0	0.19	0.39	0.65	0.77	0.97	1.29	1.55	1.94	2.58
	2.00	0	0.18	0.35	0.59	0.71	0.88	1.18	1.41	1.77	2.36
	2.50	0	0.16	0.32	0.53	0.63	0.79	1.05	1.26	1.58	2.11
	3.33	0	0.14	0.27	0.46	0.55	0.68	0.91	1.1	1.37	1.83
	5.00	0	0.11	0.22	0.37	0.45	0.56	0.75	0.89	1.12	1.49
	10.00	0	0.08	0.16	0.26	0.32	0.4	0.53	0.63	0.79	1.05

4. táblázat. A csillapítási hányados lehetséges értékei

Az analóg számítógépünk következő fontos elemei a két **integráló áramkör**. Ezeket a 17. ábrán látható, gyakorlati áramkör vázlat alapján építjük meg. A bemeneti és a visszacsatoló ellenállást, valamint a visszacsatoló kondenzátort úgy választjuk meg, hogy a bemeneti jelnek a (43) összefüggéssel megadott alsó, és a (46) képlettel meghatározott felső frekvenciahatára a kívánalmaknak megfelelő legyen.

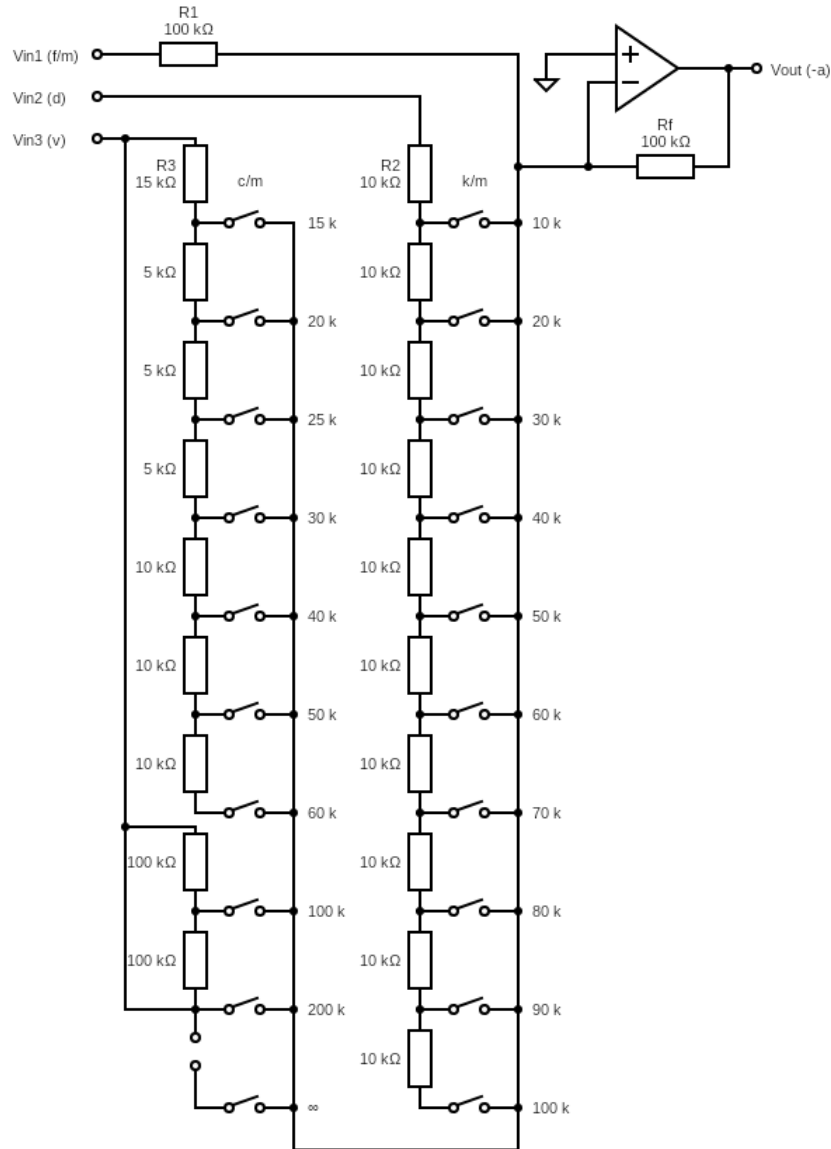
A felső határértéket tekintvén igazodjunk a 2. táblázat legnagyobb saját-körfrekvenciájának megfelelő kb. 0.5 Hz-es frekvenciához. Amennyiben $R_i = 100 \text{ k}\Omega$ és $C_f = 1 \mu\text{F}$, akkor a (46) képlet szerint a felső frekvenciaérték $f_3 = 1.59 \text{ Hz}$ (mintegy háromszor nagyobb a legnagyobb sajátfrekvenciánál). Az áramkör kimenetén a bemeneti feszültség integráljának a tízszerese fog megjelenni a (45) összefüggés szerint, ugyanis $1/(R_i \cdot C_f) = 1/(10^5 \cdot 10^{-6}) = 10$. A kimeneti értéket egy 1:10 arányú feszültségosztóval lehet a valós értékre skálázni.

Amennyiben a visszacsatoló ellenállás értékét $R_f = 10 \text{ M}\Omega$ -nak vesszük, a frekvencia alsó határértéke a felső egy százada lesz, vagyis $f_2 = 0.0159 \text{ Hz}$, ami a 2. táblázatban szereplő legkisebb körfrekvencia egy tizedének felel meg.

A kapcsolási rajzot ki kell egészítenünk egy nyomógommbal, amely a kezdeti feltételek beállításához szükséges. Ezeket a kezdeti feltételeket a (45) képletben szereplő $V_{out}(t=0)$ feszültség képviseli. Ha elfogadjuk azt, hogy a kezdetben a rendszer nyugalomban volt ($d(t=0) = 0$ és $v(t=0) = 0$), akkor a nyomógommbal a visszacsatoló kondenzátort kisüthetjük.

Ha pedig az egyensúlyi helyzetéből kimozdított és magára hagyott rendszer sajátlengését szeretnénk tanulmányozni, akkor az összeadó áramkör bemenetére egy kapcsoló segítségével 0.5 V feszültséget juttatunk, ami egy sztatikus gerjesztésnek felel meg (ha az adatokat nem skálázzuk, akkor egy fél egységnyi, időben nem változó f/m hányadosnak felel meg). Ezt egy diódán fellépő feszültségesséssel, egy feszültségosztóval állítjuk elő. A bekapcsolás egy hirtelen erő alkalmazásának felel meg. Ha a bekapcsolás után a rendszer „mozgása” megáll, akkor a kikapcsolás után az egyensúlyi helyzetéből kitérített és magára hagyott rendszer mozgását figyelhetjük meg.

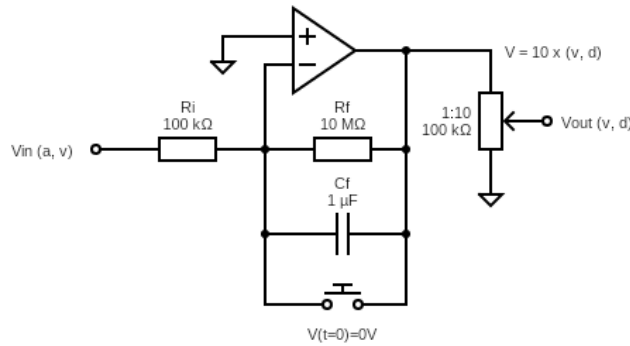
Az analóg számítógépünk szintén nélkülözhetetlen eleme az *inverter*, amely a sebességet adó integráló áramkör kimenetét fordítja meg. Ez egy olyan, a 9. ábra alapján megépített invertáló erősítő, amelynek a (13) képlettel kiszámítható erősítési tényezője egységnyi. Ezt az ellenállások $R_f = R_{in} = 100 \text{ k}\Omega$ megválasztásával érhetjük el.



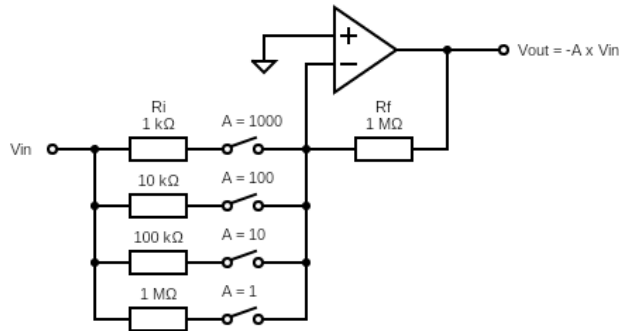
24. ábra. Az összeadó áramkör

Az analóg számítógépnek hasznos kiegészítői a kimeneti adatok mintavételezésénél alkalmazható kimeneti *invertáló erősítők*. A 23. ábra blokkvázlatán a fordított előjellel kapott gyorsulás és elmozdulás egy-egy inverteren keresztül van kivezetve: a kimeneti feszültségek mintavételezésének szempontjából hasznosabb ezeket egy-egy beállítható erősítésű invertáló erősítővel helyettesíteni. A kapcsolási rajz alapja ez esetben is a 9. ábrán bemutatott, azonban az R_{in} ellenállás egy körkapcsolóval az $1 \text{ k}\Omega$, $10 \text{ k}\Omega$, $100 \text{ k}\Omega$, $1 \text{ M}\Omega$, a nagyságrend szerint egyenletesen növekvő sorozatból választható ki, míg a visszacsatoló ellenállás értéke rögzített; az $R_f = 1 \text{ M}\Omega$. Ekképpen az erősítési tényező értéke (ami az R_f / R_{in} hányados) az 1, 10, 100

és 1000 lehetőségeken keresztül a tanulmányozott feladathoz igazítható. A kapcsolási rajz a 26. ábrán látható.



25. ábra. Az integráló áramkör



26. ábra. Az invertáló erősítő

Az egyik kimeneti adatot az analóg számítógép előjel-helyesen adja: ez a sebesség. E kimeneti jel mintavételezéséhez egy nem-invertáló erősítőt használhatnánk (8. ábra, (9) képlet), azonban itt gond lenne az R_g és az R_f ellenállások olyan megválasztásával, ami az erősítési tényező nagyságrendenként való növeléséhez lenne szükséges. Emiatt a sebességet adó jelet az integráló után kötött inverterről vesszük le és azt kötjük egy, a 26. ábrán látható kapcsolási rajzzal rendelkező invertáló erősítőhöz.

A klasszikus megoldású analóg számítógép bemeneti jelét egy analóg **függvénygenerátor** állítja elő, ami az előállított hullámformákat tekintvén elég szűkös lehetőségeket kínál fel. Emiatt ezt egy sokkal rugalmasabb egy digitális megoldással, egy digitál-analóg konverterrel (DAC) oldjuk meg. Úgy a digitális hullámforma előállításához, mint annak analóg jellé való átalakításához egy ESP32 mikrokontrollert használunk.

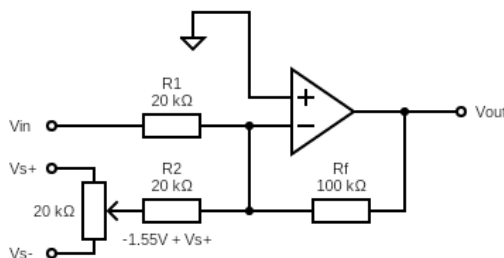
Az ESP32 digitál-analóg konvertere 8 bites, a kimeneti jel nominálisan a $[0, 3.3]$ V feszültség-intervallumon, kerekítve 13 mV -os lépésben 256 különböző értéket vehet fel. Az intervallum felső határa a mikrokontroller tápfeszültsége. Ez az áramkör a tápfeszültségét tekintve nem szimmetrikus, a DAC kimenete nem lehet negatív. Emiatt a digitális hullámforma létrehozásakor a $3.3/2 = 1.65$ V feszültséget vehetjük referenciaszintnek (ez felel meg a nullának), a kimenet pedig ez esetben legtöbb 1.65 V amplitúdóval ingadozhat e referenciaszint körül. Meg kell oldanunk tehát azt, hogy a DAC kimeneti feszültségéből az analóg számítógép összegző áramkörének bemenetén egy nulla középpérték körül ingadozó feszültséget kapjunk, ami az $f(t)/m$ gerjesztést fogja jelenteni.

A DAC azonban a tapasztalat szerint nem lineáris: a lineáris tartományának a közepe kb. 1.55 V, a tartomány szélessége pedig kb. 2.74 V, amin 228 lépésben változik a feszültség a mintegy 0.14–2.92 V feszültségtartományon.

Amennyiben az ESP32 áramkört és az analóg számítógépet közös testre kötnénk, a kimenetek mintavételezésekor jelentkezne probléma, ugyanis az előbbi nem tud negatív feszültségeket mintavételezni. Éppen ezért az ESP32 áramkör testvezetékét az analóg számítógép V_{s-} tápfeszültségére kötjük, a nulla középpérték körüli ingadozást pedig egy **differenciál-erősítő**vel, mint összeadó áramkörrel oldhatjuk meg, a 11. ábra szerint, ahol két bemeneti feszültséget összegzünk: A DAC $V_{s-} + 1.55$ V körül ingadozó feszültséget, valamint azt a V_{ref} referenciafeszültséget, amivel a (17) képlet alapján

$$-A \cdot [(V_{s-} + 1.55 \text{ V}) + V_{ref}] = 0 \Rightarrow V_{ref} = -V_{s-} - 1.55 \text{ V} = V_{s+} - 1.55 \text{ V}. \quad (71)$$

A referenciafeszültség (71) értékének megállapításakor feltételezzük azt, hogy a táp szimmetrikus ($V_{s-} = -V_{s+}$), valamint azt is, hogy a DAC kimenetén a középfeszültség 1.55 V. A valóságban a feszültségértékek valamilyen mértékben eltérnek, s emiatt a referenciafeszültséget egy potenciométerrel állítjuk be: a DAC kimenetét a nullának megfelelő középpértékre állítjuk, a potenciométert pedig úgy állítjuk be, hogy az összegző áramkör kimenetén a kívánt nulla feszültséghez jussunk.



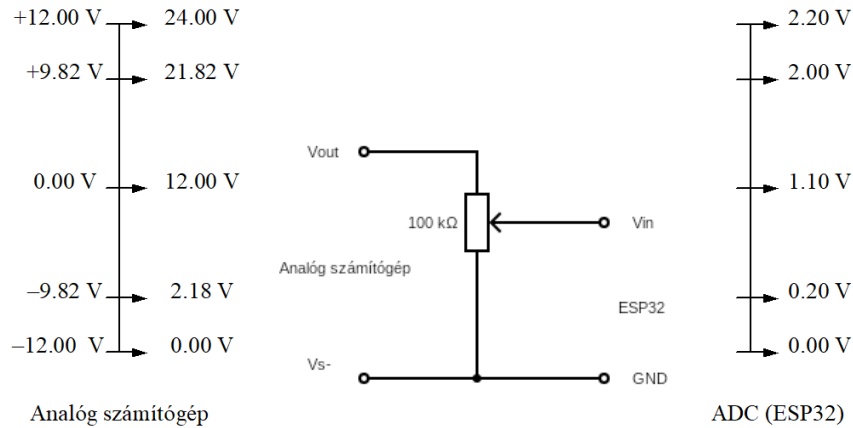
27. ábra. Összeadó áramkör a DAC és az analóg számítógép illesztéséhez

Amennyiben a visszacsatoló ellenállás $R_f = 100$ kΩ, a két bemeneti ellenállás pedig $R_1 = R_2 = 20$ kΩ, akkor az erősítési tényező $A = R_f / R_1 = R_f / R_2 = 5$ lesz. A DAC kimenetén a legnagyobb feszültség kb. 3.0 V, így az erősítő kimenetén a legnagyobb feszültség $5 \cdot (3.0 - 1.55) = 7.25$ V lesz. A kapcsolási rajz a 27. ábrán látható. A DAC által létrehozott bemeneti jel lépcsőkben változik, ennek simítására egy nem ábrázolt, kis kapacitású kondenzátort használunk. A kimeneten a jel fordított előjelű: ezt akár egy inverterrel is megfordíthatnánk, azonban egyszerűbb és olcsóbb megoldás a DAC kimenetének szoftveres megfordítása.

A klasszikus megoldású analóg számítógép kimeneti jelét valamilyen analóg eszköz, **kijelző** fogadja (feszültségmérő, oszcilloszkóp), azonban e helyett is egy digitális megoldást választunk: az említett ESP32 analóg-digitális átalakítóját (ADC). Ez az áramkör a pozitív feszültségek tartományán, kb. a 0.2 V -tól kezdődően a 2.4 V -ig terjedő tartományon működik megbízhatóan. Megjegyzendő, hogy az átalakító még ezen a tartományon is enyhén nem-lineáris, a maximális pontosság kedvéért pedig azt kalibrálni kellene.

Az analóg számítógép kimeneti feszültsége, kb. V_{s-} és V_{s+} közé tehető (nominálisan -12 V... $+12$ V), és mivel az ESP32 testvezetéke az analóg számítógép negatív tápfeszültségére van kötve, az átalakító bemeneti feszültsége 0 és 24 V között lenne, amit az

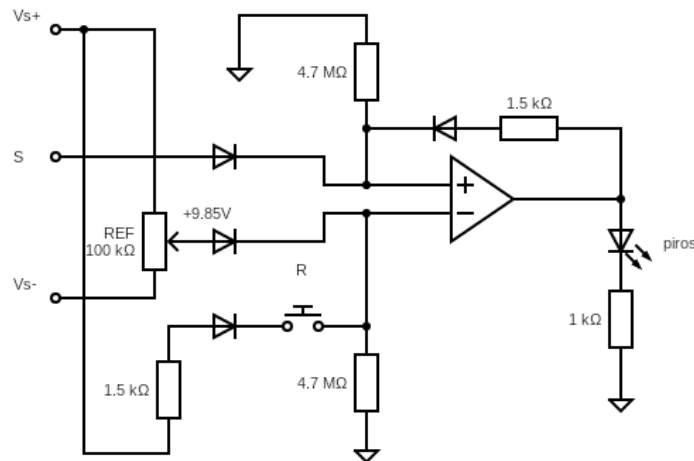
közvetlenül fogadni nem tud. Emiatt egy **feszültségosztót** kell alkalmaznunk, a 28. ábra szerint. Ez az ábra a feszültségviszonyokat is szemlélteti: az analóg számítógép szimmetrikus kimeneti tartománya az ADC lineárisnak tekinthető [0.2 V, 2.4 V] intervallumát célozza meg (ezt a potenciométer segítségével állítjuk be). Ekkor az intervallum alsó és felső határának a ± 9.82 V feszültség fog megfelelni, tehát az analóg számítógép kimeneti erősítőit úgy kell beállítani, hogy az elmozdulást, a sebességet és a gyorsulást jelentő feszültségek e határértékek között maradjanak. Ha a kimeneti feszültség mégis meghaladná ezeket a korlátokat, az ESP32 mégsem károsodna, mert a legnagyobb kimeneti feszültség is csak 2.2 V körül lenne.



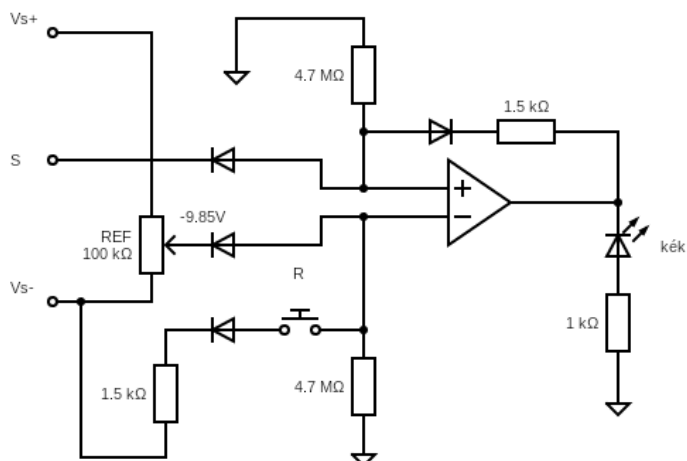
28. ábra. Feszültségosztó az analóg számítógép és az ADC illesztéséhez

Az analóg számítógép összeadó és integráló áramkörei műveleti erősítők köré épültek: nem árt kijelezni az erősítők esetleges telítettségének bekövetkezését. A telítettség mindkét irányban megtörténhet: a pozitív irányút a 29, a negatívát pedig a 30. ábrán látható, módosított **S-R bistabil áramkörrel** tudjuk detektálni.

Mindkét verzióban az áramkör „S” beállító bemenete az összeadó vagy az integráló áramkör kimenetére csatlakozik. Ez a bemenet egy megfelelő polaritású diódán keresztül csatlakozik a bistabil műveleti erősítőjéhez: a pozitív telítettséget kijelző esetében a nem invertáló, a negatívát kijelző esetében pedig az invertáló bemenetre.



29. ábra. A pozitív telítettséget kijelző áramkör



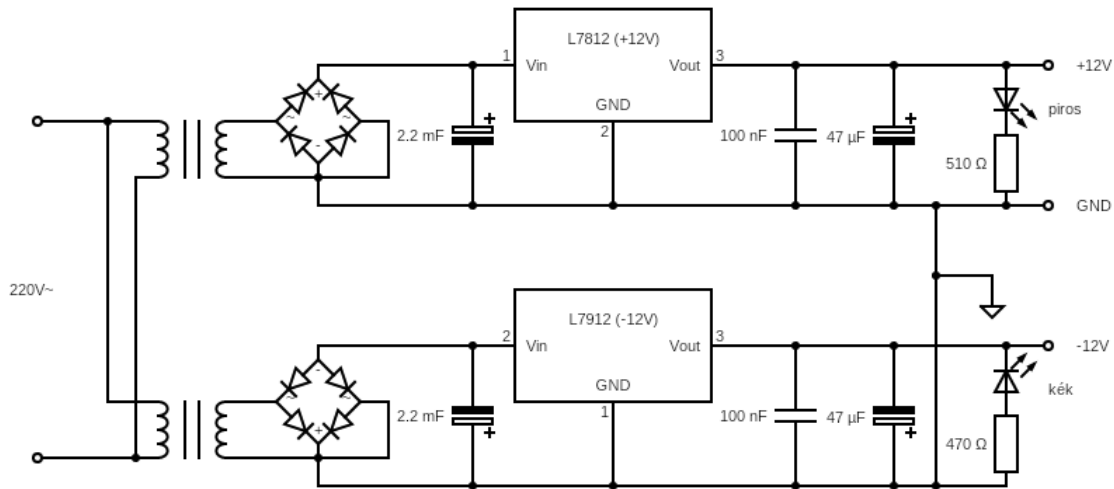
30. ábra. A negatív telítettséget kijelző áramkör

A bistabil műveleti erősítőjének másik bemenetére egy-egy referenciafeszültséget kapcsolunk, az első esetben ez $+9.85\text{ V}$, a másodikban pedig -9.85 V . Ezt a feszültséget a szimmetria megőrzésének céljából egy ugyanolyan diódán keresztül csatlakoztatjuk, mint amilyent a beállító bemenet esetében használtunk.

A bistabil műveleti erősítője, akár egy komparátoré, akkor billen át magas állapotba, amikor a nem invertáló bemenet feszültsége meghaladja az invertálóét: az első esetben amikor az áramkör bemenetén a feszültség nagyobb, a második esetben pedig amikor kisebb a beállított referenciafeszültségnél. A kimenetre csatlakoztatott LED ekkor világítani fog, jelezvén a telíttség elérését.

A komparátorral ellentétben, a visszacsatoló diódák miatt a bistabil a magas állapotban marad, a beállító bemenet feszültségének későbbi alakulásától függetlenül, azt csak az „R” törlő gomb megnyomásával lehet visszaállítani. Ez a gomb a pozitív tápfeszültségnek a megfelelő bemenetre kapcsolásával állítja be az invertáló és a nem invertáló bemenetek olyan feszültségviszonyát, amivel a kimenet alacsony szintre kapcsolható. Ekkor az eddig világító LED kialszik.

Végül, az analóg számítógép működtetéséhez szükséges *szimmetrikus tápfeszültségforrásról* se felejtkezzünk el (31. ábra). Ez két hálózati $230\text{ V}/15\text{ V}$ transzformátorból, két egyenirányító-hídből, egy pozitív és egy negatív 12 V -os feszültségszabályzóból, valamint töltő- és szűrőkondenzátorokból áll. A feszültségek meglétét egy-egy LED jelzi.



31. ábra. Szimmetrikus táp

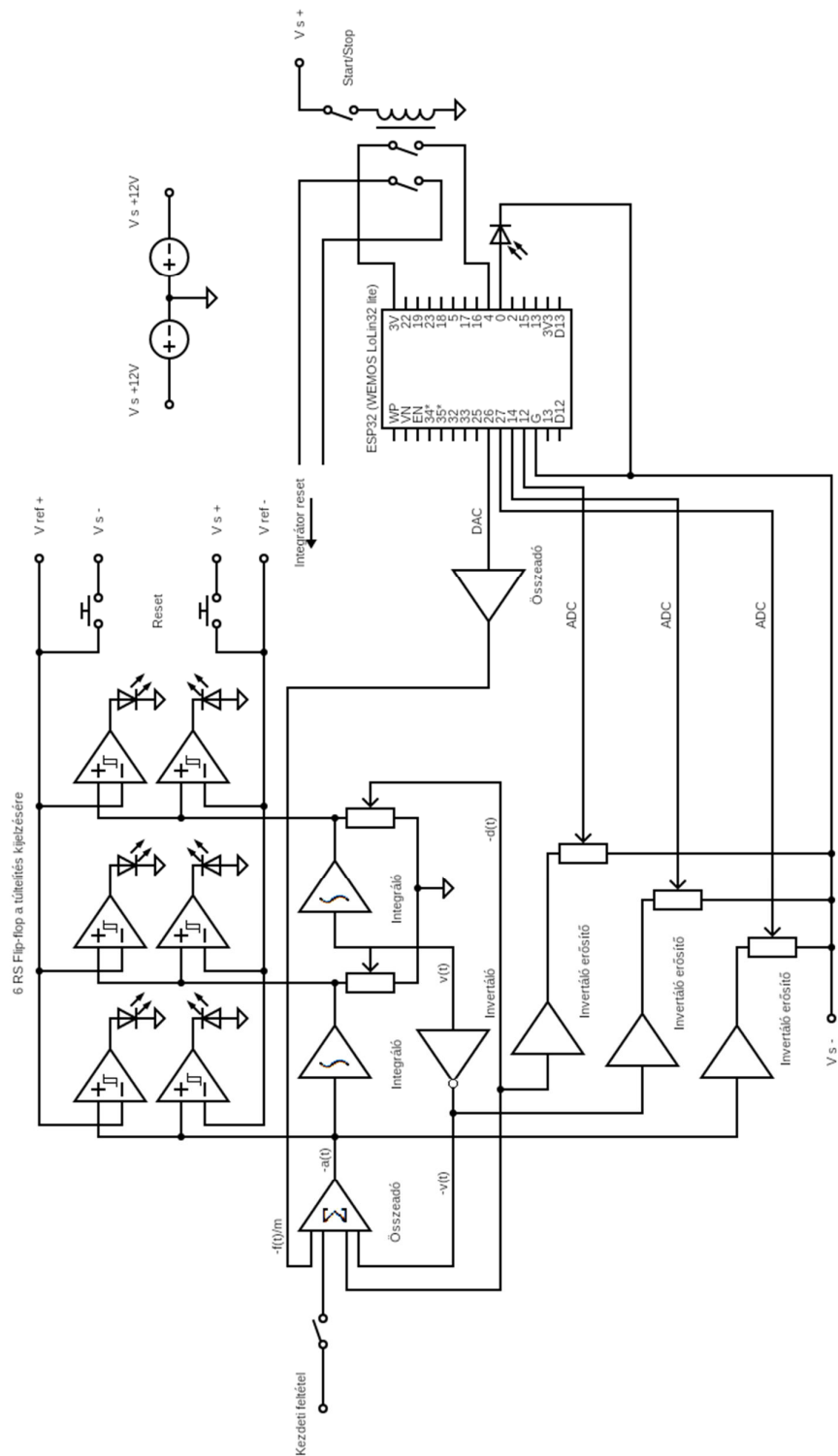
A transzformátorok szekunder áramerőssége 0.8 A , a két Graetz-hídon legtöbb 1.5 A , a feszültség-szabályzókon pedig 1.0 A folyhat át: ekképpen a tápról maximum 0.8 A erősségű áram vehető le, ami bőségesen elegendő az analóg számítógép működéséhez.

Megjegyzendő, hogy a használt feszültségszabályzók nem állíthatók és a kimeneti feszültségük, egyedenként, bizonyos határok közötti szórást mutat. Így a ténylegesen szimmetrikus táphoz ajánlott egy minél közelebb álló feszültségekkel rendelkező L7812 – L7912 párt keresni.

A fentiek alapján megépített áramkör blokkvázlata a 32. ábrán látható.

A gerjesztést és a mintavételezést megvalósító digitális áramkör

A hibrid számítógép digitális részéhez, az adatok megjelenítéséhez és gyűjtéséhez szolgáló számítógép mellett, egy ESP32-es típusú mikrokontroller is hozzátartozik, aminek egy DAC kimenetét és három ADC bemenetét használjuk az analóg számítógéppel való adatkommunikációban. A DAC kimenet segítségével állítjuk elő a rendszert gerjesztő jelet, vagyis függvénygenerátorként használjuk azt, míg az elmozdulás, a sebesség és a gyorsulás mintavételezését az ADC bemenetekkel oldjuk meg. Egy újabb ADC bemenet a folyamat elindítására és megállítására szolgáló kapcsoló állását figyeli, míg egy digitális kimenettel a kapcsoló állapotát jelző LED vezérlését oldjuk meg.

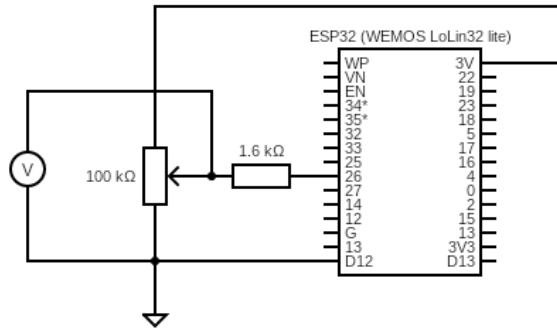


32. ábra. Az áramkör blokkvázlata

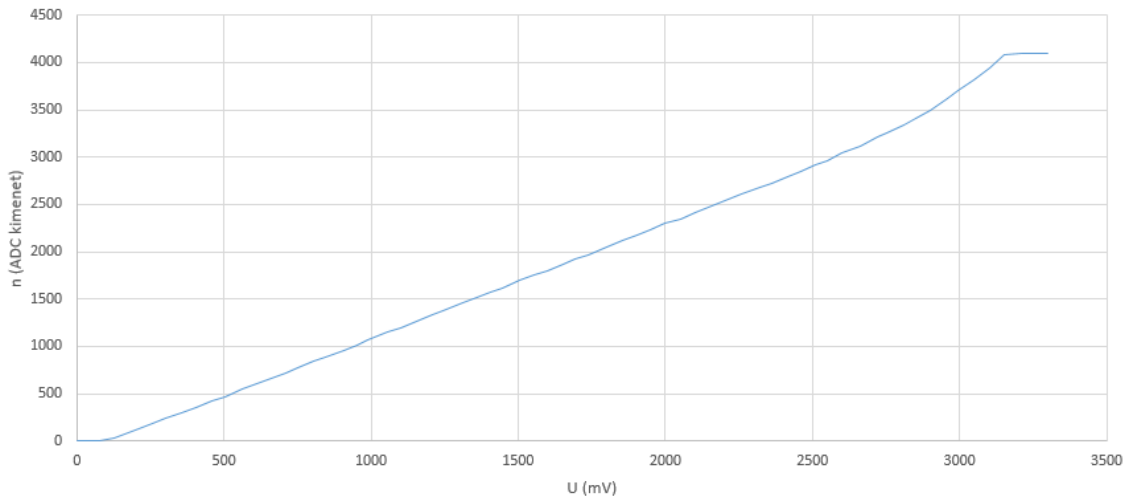
Az USB porton keresztül az ESP32-höz csatlakoztatott számítógépen futó Arduino IDE program „Serial Plotter” ablakában a kiküldött és a beolvasott jeleket valós időben

ábrázolhatjuk, így az helyettesíti a „klasszikus” analóg számítógépek kimeneti eszközöként használt oszcilloszkópot.

A használt mikrokontroller analóg-digitál átalakítójáról az adatlapja egy annyit említ meg, hogy a 0.0 – 3.3 V feszültségtartományon (vagyis a nullától a tápfeszültségig terjedő intervallumon) 12 bites felbontással dolgozik, ami 4096 egymástól megkülönböztethető értéket jelent, 0 és 4095 között, a mintavételezési frekvencia pedig kb. 6 kHz. A legegyszerűbb alkalmazásokban a felbontást egyenletesnek tartják, így a feszültséget a $3.3 \text{ V} / 4095 \text{ lépés} \approx 0.806 \text{ mV}$ -os lépéssel számolják ki.



33. ábra. Az ADC tesztelése



34. ábra. Az ADC jelleggörbéje

A tapasztalat szerint azonban az intervallum két végén az átalakító erősen nem-lineáris, a feszültség pontosabb megméréséhez pedig ezt figyelembe kell venni. A használt mikrokontroller analóg-digitál átalakítójának jelleggörbéjét a 33. ábrán látható egyszerű áramkörrel mérhetjük fel: a 100 kΩ-os potenciométerrel a bemeneti feszültséget kb. 50 mV-os lépésekben növelve, a feszültségmérővel megmért feszültséget és az ADC által visszaadott értékeket lejegyezzvén a 34. ábrán látható diagramhoz jutunk. Mivel az ADC zajos, egy adott feszültséglépcső megmérése során több beolvasott adatot kell átlagolnunk.

A mérések szerint a vizsgált példány jelleggörbéje a 200 mV – 2500 mV tartományon tekinthető lineárisnak (a szakirodalom felső határként általában a 2.4 V-os értéket jelöli meg).

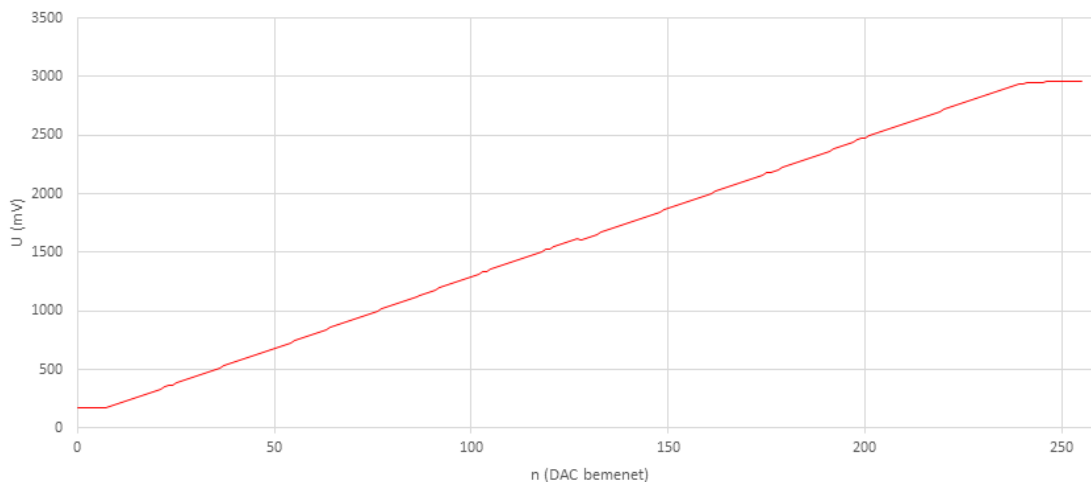
Ezen a szakaszon az ADC által visszaadott digitális n értékkel (ami egy 0 és 4095 közötti egész szám) a feszültséget az

$$U = 200.0 + 0.82382311 \cdot n \text{ mV} \quad (72)$$

képlettel, átviteli függvénnyel számíthatjuk ki.

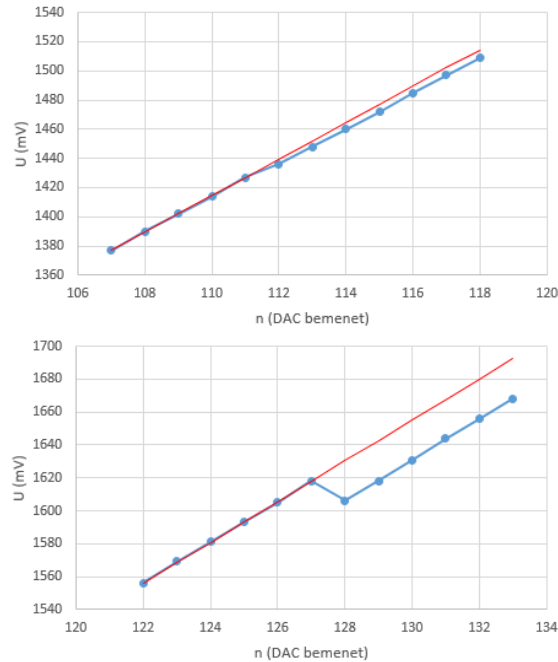
A digitál-analóg átalakítóról az adatlap annyit említ, hogy az 8 bites, vagyis 0 és 255 közötti bemenetre a 0.0–3.3 V feszültségtartományon 256 egymástól különböző feszültségértéket állíthat az be, viszont nincs információ arról, hogy milyen gyorsan tud változtatni a kimeneti feszültségen. Az alkalmazásokban az egymást követő értékek közötti különbséget $3.3 \text{ V} / 255 \text{ lépés} \approx 12.94 \text{ mV}$ -osnak veszik. Ritkábban lehet olvasni róla, de itt-ott felbukkan az az észrevétel, hogy a DAC sem teljesen lineáris, ráadásul a terheléstől függően viselkedik. Éppen ezért, ha a feszültség pontosabb beállítására van szükség, a DAC jelleggörbáját sem árt felmérni.

A tapasztalat szerint, ha a DAC kimenetét egy nem túl nagy ellenállással terheljük, akkor az egy tágabb intervallumon lesz közelítőleg lineáris (a kimenet legnagyobb terhelhetősége mintegy 10 mA). Ha a terhelő ellenállás értékét növeljük, akkor a kimeneti feszültségek tartományának a felső részén a lineáris jelleg ugyan javul, viszont az alsó részén a helyzet drámai romlásával számolhatunk. Éppen ezért a használt áramkört az analóg számítógéphez csatlakoztatva, kb. 330Ω -os terheléssel teszteltük, a kimenő feszültséget egy nagy impedanciájú eszközzel mértük és így a 35. ábrán látható görbéhez jutottunk.



35. ábra. A DAC jelleggörbéje

A mérések szerint a DAC jelleggörbéje a 8 és 238 értékek között tekinthető lineárisnak, néhány szépséghibával. A kisebbik gond az, hogy az $n = 16 + k \cdot 32$ bemenő értékeknél (ahol $k = 0, 1, \dots, 7$) a kimenő feszültség jelleggörbéje kb. 3 mV-os lépésekben kerül lennebb az ideális egyeneshez viszonyítva (a 35. ábra bal oldalán). A nagyobbik pedig az, hogy az $n = 128$ értéktől kezdődően a kimenet kb. 24 mV-tal kevesebb az elvártnál, a jelleggörbe két lépéssel jobbra tolódik el (a 36. ábra jobb oldalán). Ezek a hibák a terheléstől függetlenül ugyanott jelennek meg.



36. ábra. Ugrás-szerű változások a DAC jelleggörbéjén

E hibák figyelembe vételével a DAC átviteli függvényét a 8 és 236 értékek között a következőképpen állapíthatjuk meg:

$$n = 8 + \frac{U(\text{mV}) - 184}{12.009}, \quad (73)$$

aminek a fordítottja

$$U = (n - 8) \cdot 12.009 + 184 \text{ mV}, \quad (74)$$

ahol ha $n > 127$, akkor annak értékét 2-vel kell megnövelni (emiat a képletek érvényességi tartományának a felső határértéke nem 238, hanem csak 236). Ezen az intervallumon n -nek csak 229 lehetséges értéke lehet (tehát nem 256, ahogyan az a 8 bites felbontásból következne), az intervallum közepének pedig a 122-es érték felel meg. A kimeneti feszültség ekkor a 184 – 2922 mV intervallumon változik.

A függvénygenerátor és az adatgyűjtő

A gerjesztést előállító függvénygenerátor hardveres része az ESP32 DAC kimenetére épül, a kívánt függvényformát pedig annak programozásával, szoftveresen állíthatjuk elő. Ekképpen a függvénygenerátor bizonyos megkötések mellett igen rugalmasan használható. A legfőbb korlátot a relatív alacsony felbontás jelenti, de ugyanakkor a program ciklusideje felülről korlátozza a kimeneti frekvenciát.

Az Arduino IDE-ben megírt program ide vágó részéhez néhány beállítás tartozik. A kimenő jel lehet periodikus vagy sem, amit n_{Lepes} számú mintával (adattal) adunk meg, amit az `Adat []` vektor tárol. Periodikus függvények esetében az első és az utolsó minta azonos kell legyen: egy periódus végének pillanata egyben a következő periódus kezdetének pillanatát jelenti, így az `Adat []` vektorból az utolsó minta látszólag hiányzik. Két egymást követő minta közötti, milliszekundumban mért időbeni távolság dT , ami az analóg bemenetek mintavételezési periódusát is jelenti. A kimenő jel periódusa $T = n_{\text{Lepes}} \times dT$, a nem-periodikus jelnek a hossza pedig ennél dT -vel kevesebb:


```
const long nLepes = 100;
const float dT = 10;
int Adat[nLepes];
```

Néhány beállítást is meg kell adnunk. `Null` a DAC lineáris szakaszának a közepe, `Ampl` pedig a lineáris szakasz hosszának a fele. Mivel a DAC kimenete pozitív, a pozitív és a negatív értékek között változó függvényt a `Null` értékben centráljuk és gondoskodnunk kell arról, hogy a legnagyobb kitérése ne haladja meg az `Ampl` értéket (ugyanis kifutnánk a lineáris tartományból):

```
const float Null = 122.0;
const float Ampl = 114.0;
```

A definíciókat egyéb konstansokkal is kiegészíthetjük, mint pl. π értékével:

```
const double pi = 4 * atan(1);
```

A kimeneti függvény mintáinak létrehozása a program `Kimenet()` függvényével történik, amit a kívánalmainknak megfelelően kell megírunk. Ezt a mikrokontroller újraindításakor a `setup()` függvény hívja meg.

Példaképpen egy szinuszosan változó $\sin(\omega \cdot t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot t / T)$ függvény esetében, aminek a frekvenciája $f = 1/T$, ez a következőképpen néz ki:

```
void Kimenet() {
    long i;

    for (i = 0; i < nLepes; i++) {
        Adat[i] = round(Null - 0.5 * Ampl * sin(2 * pi * i / nLepes));
    }
}
```

Itt az i -edik lépésben az eltelt idő $t = i \times dT$, a függvény periódusa pedig a definícióknál ismertettek értelmében $T = nLepes \times dT$, így $t/T = i/nLepes$. Az utolsó adat azonos az elsővel, tehát i nem éri el az `nLepes` értéket. A kiszámított függvényértékeket skálázó 0.5 -ös szorzó a gerjesztés korlátozására szolgál. A függvény nulla értékének a `Null` kimenet felel meg, a mínusz előjel pedig a függvényértékek előjelének megfordítására szolgál: az analóg számítógép gerjesztését megoldó erősítő (tkp. összegző áramkör) ugyanis megfordítja a gerjesztés előjelét.

Ha a kiszámított érték meghaladja a 127-es értéket, a 36. ábra jobb oldalán látható ugrás miatt kettővel meg kell növelnünk azt.

A kiszámított adatok túlmutathatnak a megengedett 0 és 255 közötti tartományon, emiatt azokat alulról és felülről korlátoznunk kell. Egyébiránt ha `Adat[i]` 8 alatt vagy 236 fölött van, a kimenet erősen torzított lesz:

```
if (Adat[i] < 0) Adat[i] = 0;
if (Adat[i] > 127) Adat[i] += 2;
if (Adat[i] > 255) Adat[i] = 255;
}
}
```

A létrehozott mintákat a `loop()` függvényben küldjük ki, a megadott időlépéssel. Ehhez egy időzítőre is szükségünk van, amit az ESP32 hardveres megszakításaival tudunk célszerűen megoldani. A megszakításokhoz a definíciókhoz a következő három sort kell hozzáadni:

```
volatile bool TikTak;
hw_timer_t * timer = NULL;
portMUX_TYPE timerMux = portMUX_INITIALIZER_UNLOCKED;
```

a `setup()` függvényt a következőkkel kell kiegészíteni:

```
timer = timerBegin(0, 80, true);
timerAttachInterrupt(timer, &onTime, true);
timerAlarmWrite(timer, dT * 1000, true);
timerAlarmEnable(timer);
```

(az első sor az időzítő 1 μ s-os periódusát állítja be, a harmadik pedig azt, hogy az időzítő hányadik „ketyyenése” váltsa ki a megszakítást), a programba pedig be kell illeszteni a következő megszakítás-kezelő függvényt:

```
void IRAM_ATTR onTime() {
  portENTER_CRITICAL_ISR(&timerMux);
  TikTak = true;
  portEXIT_CRITICAL_ISR(&timerMux);
}
```

Ez a függvény minden megszakítás esetében, `dT` milliszekundumonként, azonnal végrehajtódik és a `TikTak` logikai változó értékét „igaz”-ra állítja.

A `loop()` függvény működéséhez még szükségünk van a következő beállításokhoz is, amelyek a bemeneti és a kimeneti csatlakozókat definiálják:

```
#define DAC1 25          DAC kimenet, gerjesztés
#define TESZT 26        tesztelésre használt bemenet
#define ADCd 12         ADC bemenet, elmozdulás
#define ADCv 14         ADC bemenet, sebesség
#define ADCa 27         ADC bemenet, gyorsulás
#define LED 0           zöld LED kimenet
#define SW 4            kapcsoló bemenet
#define OnBoardLedPin 22 az ESP32 lapkán levő LED
```

valamint néhány változó definíciójára is:

```
long Aktualis = 0;      aktuális lépés
float Dva;             elmozdulás
float dVa;             sebesség
float dvA;             gyorsulás
float t = 0;          idő
bool ld;              a zöld LED állapota
```

A digitális kimeneteket a `setup()` függvényben deklaráljuk, az ESP32 kék színű LED-jét pedig azonnal be is kapcsoljuk (ez mutatja, hogy az feszültség alatt van):

```
pinMode(LED, OUTPUT);
pinMode(OnBoardLedPin, OUTPUT);
digitalWrite(OnBoardLedPin, LOW);
```

Az analóg számítógépet kezelő programrész csak akkor működik, amikor a standon levő bal oldali kapcsoló a megfelelő állásban van. Az analóg számítógép működését, vagyis azt, hogy az adatok kiküldése és fogadása folyamatban van, az ESP32 mellett világító zöld színű LED jelzi. A kapcsoló várakozási helyzetében az analóg számítógép két integrátora automatikusan nullára inicializálódik. Ez a kapcsoló az ESP32 bekapcsolásakor már bármelyik állapotában lehet: a félreértések elkerülése végett már a `setup()` függvény végrehajtásakor megvizsgáljuk az állapotát:

```
if (analogRead(SW) > 2047) {
    ld = true;
    digitalWrite(LED, HIGH);
}
else {
    ld = false;
    digitalWrite(LED, LOW);
}
```

A `loop()` függvény a gerjesztés beállításához és a válasz beolvasásához a következőket végzi el:

```
void loop() {
    int i;
```

Amikor a gomb bekapcsolt állapotában van és éppen kettýent a `dt` ms-onként kettýenő óra, ha még nem volt bekapcsolva, akkor most bekapcsoljuk a zöld LED-et, majd visszaállítjuk a `TikTak` jelzést (ez arra szolgál, hogy a folyamatosan ismétlődő `loop()` függvény ne hajtja végre másodszor is a számításokat a következő kettýenés előtt):

```
if (TikTak && (analogRead(SW) < 2047)) {
    if (TikTak) {
        if (!ld) {
            digitalWrite(LED, HIGH);
            ld = true;
        }
        portENTER_CRITICAL(&timerMux);
        TikTak = false;
        portEXIT_CRITICAL(&timerMux);
    }
}
```

ezután beállítjuk az analóg kimenetet (kiírjuk a gerjesztést):

```
dacWrite(DAC1, Adat[Aktualis]);
```

majd a zajok kiküszöbölése végett egy párszor beolvassuk és átlagoljuk az analóg bemeneteket:

```
Dva = 0.0;
dVa = 0.0;
dvA = 0.0;
for (i = 1; i <= 10; i++) {
    Dva += analogRead(ADCd);
    dVa += analogRead(ADCv);
    dvA += analogRead(ADCa);
}
Dva *= 0.1;
dVa *= 0.1;
dvA *= 0.1;
```

Az adatokat a soros porton keresztül kiküldjük az ESP32-höz csatlakoztatott számítógéphez, amin célszerűen az Arduino IDE programja fut (használhatunk más programot is, ami a soros porton érkező adatokat fogadja). A következő két lehetőség közül az első az időt, a kiküldött és mintavételezett digitális adatokat írja ki. Az idő kiküldését az adatok táblázatos feldolgozásához, pl. az Arduino IDE „Serial Monitor”-ában való kiíratásakor használhatjuk:

```
Serial.println(String(t) + ", " + String(Adat[Aktualis]) + ", " +
String(Dva) + ", " + String(dVa) + ", " + String(dvA));
```

A második verzióban nem szerepel az idő, az adatok pedig feszültség formájában kerülnek kiírásra (a feszültségeket a digitális adatokból két, a későbbiekben leírt függvény számítja ki). Ezt a formát az adatoknak pl. az Arduino IDE „Serial Plotter”-ében levő kirajzolásához használhatjuk (ekkor nincs szükség az időre):

```
Serial.println(String(DVoltage(Adat[Aktualis])) + ", " +
String(AVoltage(Dva)) + ", " + String(AVoltage(dVa)) + ", " +
String(AVoltage(dvA)));
```

Végül léptetjük az időt, valamint a számlálót is (ez utóbbi a következő lépésre fog mutatni). Ha eljutottunk a periódus végéhez, akkor a számlálás újratekődik. Ha egy nem-periodikus függvényt akarunk kiküldeni, pl. egy impulzust, amit az utolsó mintával megadott „csend” követ, akkor egy pozícióval kell visszaugranunk az „Aktualis -= 1” utasítással:

```
Aktualis++;
if (Aktualis == nLepes) Aktualis = 0;
t += dt / 1000;
}
```

Amennyiben a kapcsolóval megállítjuk az analóg számítógépet, akkor a kimenetet a nulla gerjesztésnek megfelelő értékre állítjuk be, nullázzuk a számlálót és az időt, a zöld LED-et pedig kikapcsoljuk.

```
if (analogRead(SW) >= 2047) {
  dacWrite(DAC1, 122);
  t = 0;
  Aktualis = 0;
  if (ld) {
    ld = false;
    digitalWrite(LED, LOW);
  }
}
```

A soros port működéséhez a `setup()` függvényben inicializálnunk kell azt, a „Serial Monitor” és a „Serial Plotter” használatakor pedig győződjünk meg arról, hogy ugyanazt az átviteli sebességet állítottuk be:

```
Serial.begin(115200);
```

Végül, a digitális adatokból a megfelelő feszültséget kiszámító függvények a következők:

```
float AVoltage(float n) {
```

```

    return (200.0 + (n - 115.0) * 0.82382311);
}
float DVoltage(float n) {
    return (1100.0 + 5.0 * (184.0 + (n - 8) * 12.009 - 1553.026));
}

```

Az első a (72), a második pedig a (74) képletekkel megadott átviteli függvényekre támaszkodik.

Az utóbbi nem a DAC tényleges kimenetét, hanem az analóg számítógép gerjesztését adja, amit az ADC-vel való mintavételezés mímeléséhez 1100 mV -tal tolunk el. Erre az adatok összehasonlíthatósága miatt van szükségünk (pl. ahhoz, hogy a gerjesztés is és a válasz is ugyanazon vízszintes tengely körül ingadozzon az ábrázolás során).

A második függvény bővebb magyarázata a következő: a nulla gerjesztésnek a DAC $n=122$ értékű bemenete felel meg, amire annak kimenetén elméletileg az 1553.026 mV feszültség jelenik meg (gyakorlatilag egy ahhoz közel álló érték). Az ESP32 teste az analóg számítógép negatív tápfeszültségére van kötve, így a DAC kimeneti feszültsége az analóg számítógép negatív tápfeszültségéhez viszonyított értéként jelenik meg. Emiatt a DAC kimenetét a 27. ábrán látható összegző erősítővel megemeljük úgy, hogy az $n=122$ bemenet az analóg számítógép testéhez viszonyítva nulla kimenetet produkáljon, a feszültséget pedig ugyanez az áramkör ötszörösére növeli – ez lesz az analóg számítógép összeadó áramkörén megjelenő, az f/m hányadossal arányos gerjesztés. Az analóg számítógép kimeneteit az ADC bemenetek mintavételezik, szintén a negatív tápfeszültséghez (tehát nem a testhez) mérten. Mivel a kimeneti feszültség akár 24 V is lehet, azt egy, a 28. ábrán látható feszültségosztóval csökkenteni kell. Így az analóg számítógép testéhez viszonyított nulla kimeneti feszültség a feszültségosztón a negatív táphoz (vagyis az ESP32 arra kötött testéhez) viszonyítva 1100 mV -os érték, a jelleggörbe lineáris szakaszán felvett „nulla” pontnak felel meg. Az analóg számítógép gerjesztését az ESP32 nem méri meg, a DVoltage() függvény azt számítással határozza meg.

Az ESP32-n futó példaprogram teljes forráskódja, amelyben egy 1 Hz-es, száz lépésben mintavételezett szinuszos gerjesztés és a beolvasott adatok „Serial Plotter”-ben való megjelenítéséhez szolgáló formátumozása található, a következő:

```

volatile bool TikTak;           // megszakításhoz
hw_timer_t * timer = NULL;     // a megszakításhoz szükséges beállítások
portMUX_TYPE timerMux = portMUX_INITIALIZER_UNLOCKED;
const long nLepes = 100;       // a lépések száma
int Adat[nLepes];             // kimeneti adatok, periodikusan ismételve
const float dT = 10;          // időlépés, ms
const float Null = 122.0;     // a lineáris szakasz közepe
const float Ampl = 114.0;     // a lineáris szakasz hosszának fele
const double pi = 4 * atan(1);
long Aktualis = 0;           // aktuális kimeneti lépés
#define DAC1 25                // DAC kimenet, gerjesztés
#define ADCd 12                // ADC bemenet, elmozdulás
#define ADCv 14                // ADC bemenet, sebesség
#define ADCa 27                // ADC bemenet, gyorsulás
#define LED 0                  // Led kimenet
#define SW 4                   // Kapcsoló bemenet
#define OnBoardLedPin 22
float Dva;                    // elmozdulás
float dVa;                     // sebesség
float dvA;                     // gyorsulás
float t = 0;                   // idő
bool ld;                       // Led állapota
//-----
void IRAM_ATTR onTime() {     // a dT ms-onként történő megszakítás rutinja
    portENTER_CRITICAL_ISR(&timerMux);
    TikTak = true;           // eltelt dT ms
    portEXIT_CRITICAL_ISR(&timerMux);
}

```

```

}
//-----
void setup() {
  Serial.begin(115200);
  pinMode(LED, OUTPUT);
  pinMode(OnBoardLedPin, OUTPUT);
  digitalWrite(OnBoardLedPin, LOW); // bekapcsolva
  if (analogRead(SW) > 2047) {
    ld = true;
    digitalWrite(LED, HIGH);
  }
  else {
    ld = false;
    digitalWrite(LED, LOW);
  }
  timer = timerBegin(0, 80, true); // 1 mikroszekundum
  timerAttachInterrupt(timer, &onTime, true);
  timerAlarmWrite(timer, dT * 1000, true); // dT ms időközönként van megszakítás
  timerAlarmEnable(timer);
  Kimenet();
}
//-----
void loop() {
  int i;
  if (TikTak && (analogRead(SW) < 2047)) { // gomb bekapcsolva és éppen ketttyent
    // a dT ms-onként ketttyenő óra

    if (!ld) {
      digitalWrite(LED, HIGH);
      ld = true;
    }
    portENTER_CRITICAL(&timerMux);
    TikTak = false; // visszaállítjuk a jelzést
    portEXIT_CRITICAL(&timerMux);
    dacWrite(DAC1, Adat[Aktualis]); // gerjesztést kiír
    Dva = 0.0;
    dVa = 0.0;
    dvA = 0.0;
    for (i = 1; i <= 100; i++) {
      Dva += analogRead(ADCd);
      dVa += analogRead(ADCv);
      dvA += analogRead(ADCa);
    }
    Dva *= 0.01;
    dVa *= 0.01;
    dvA *= 0.01;
    //Serial.println(String(t) + ", " + String(Adat[Aktualis]) + ", " + String(Dva) + ", "
    //                + String(dVa) + ", " + String(dvA));
    Serial.println(String(DVoltage(Adat[Aktualis])) + ", " + String(AVoltage(Dva)) + ", "
    + String(AVoltage(dVa)) + ", " + String(AVoltage(dvA)));
    Aktualis++;
    if (Aktualis == nLepes) Aktualis = 0;
    t += dT / 1000;
  }
  if (analogRead(SW) >= 2047) { // gomb kikapcsolva - újratezdés
    dacWrite(DAC1, 122); // nulla gerjesztés
    t = 0;
    Aktualis = 0;
    if (ld) {
      ld = false;
      digitalWrite(LED, LOW);
    }
  }
}
//-----
void Kimenet() {
  // kimeneti adatok előállítás, függvénygenerátor
  long i;
  for (i = 0; i < nLepes; i++) {
    Adat[i] = round(Null - 0.5 * Ampl * sin(2 * pi * i / nLepes));
    if (Adat[i] < 0) Adat[i] = 0;
    if (Adat[i] > 127) Adat[i] += 2;
    if (Adat[i] > 255) Adat[i] = 255;
  }
}
//-----

```

```

float AVoltage(float n) {
    return (200.0 + (n - 115.0) * 0.82382311); // mV
}
//-----
float DVoltage(float n) {
    return (1100.0 + 5.0 * (184.0 + (n - 8) * 12.009 - 1553.026)); // mV
}
//-----

```

Az analóg számítógép kezelése

A számítógép kezelőpaneljét a 37. ábrán láthatjuk. Az előlapon balról jobbra haladva a következő kapcsolókat és nyomógombokat találjuk:

- az ESP32-n futó program elindítására és megállítására szolgáló kapcsoló, ami a „stop” pozícióban a két integrátort lenullázza;

- a k/m hányadost beállító körkapcsoló, amivel a 2. táblázatban levő értékek közül választhatunk egyet;

- a sebességet, illetve az elmozdulást kiszámító integrátorok lenullázására szolgáló gomb. Ezekkel menet közben, tehát az ESP32 megállítása nélkül is nullázhatjuk az integráló áramköröket;

- a c/m hányados körkapcsolója, a 3. táblázatban megjelenő értékek egyikét lehet beállítani vele;

- statikus gerjesztés be- és kikapcsolása, egy fél egységnyi, időben állandó f/m hányadost állít be;

- a gyorsulás, a sebesség és az elmozdulás kimeneti erősítője. A beállított erősítési tényező nagysága 10^n , ahol n a kapcsoló melletti szám (az erősítés ennek megfelelően egységnyi, tízszeres, százszoros, vagy ezerszeres);

- az összeadó és az integráló áramkörök erősítőjének telítődésének jelzését visszaállító nyomógombok (a „+” gomb a pozitív, a „-” pedig a negatív irányú telítést jelző LED-ek kioltására szolgál).

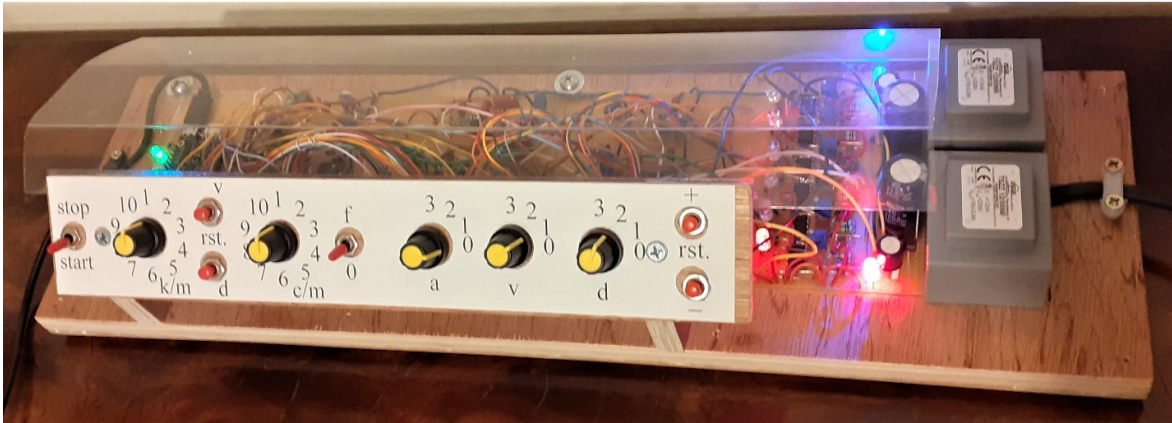
Az áramkörök működéséről néhány LED nyújt információt:

- a jobb oldalon zöld fény jelzi, hogy az ESP32 adatokat küld ki és fogad;

- a mikrokontroller lapkáján (szintén a jobb oldalon) egy kis kék színű LED világít, amikor az számítógéphez van csatlakoztatva (az USB csatlakozón keresztül lehet azt betáplálni);

- a bal szélén egy piros meg egy kék fény jelzi a pozitív és a negatív tápfeszültség meglétét;

- szintén a bal oldalon három, egy piros és egy kék fényű LED-ből álló pár jelzi az összeadó és az integráló műveleti erősítők telítettségének bekövetkezését. Az előlaphoz közelebbi pár az összeadó áramkört figyelmeztet (a képen ennek a piros színű tagja világít éppen), a középső a sebességet adó integráló áramkört, míg a távolabbi az elmozdulást adó integrátort.



37. ábra. Az áramkör a kezelőpanellel

Az üzembe helyezéshez csatlakoztassuk az áramkört egy fali csatlakozóhoz (lehetőség szerint egy földeléses konnektort használjunk, a zajcsökkentéshez szükséges letestelés miatt). Ekkor ki kell gyűljön a jobb oldalon a piros és a kék, a tápfeszültség meglétét jelző fény.

Ha a tápfeszültség megvan, akkor csatlakoztassuk az ESP32 mikrokontrollert egy USB porton keresztül az Arduino IDE-t futtató számítógéphez.

Az Arduino IDE programozói környezetben hozzuk létre a függvénygeneráló-adatgyűjtő programot. A fenti példát a következőképpen módosíthatjuk:

- megváltoztathatjuk az adatok mintavételezési periódusát (ehhez a dT időlépést kell módosítanunk);

- beállíthatjuk a minták n_{Lepes} számát (periodikusan ismétlődő jel esetén annak periódusa az időlépés és a minták számának $T = n_{Lepes} \times dT$ szorzata lesz);

- a kívánt gerjesztés létrehozásához írjuk át a `Kimenet()` függvényt. Amennyiben egy nem-periodikus gerjesztést szeretnénk alkalmazni, az `Adat[]` tömb a kimeneti jel teljes változását magába kell fogadja;

- nem-periodikus kimeneti függvény esetében a `loop()` függvényben az „`if (Aktualis == nLepes) Aktualis = 0;`” sort cseréljük le az „`if (Aktualis == nLepes) Aktualis = 1;`” sorra, ami a kimenetet az `Adat[]` tömbben tartalmazott adatok kiküldése után folyamatosan az utolsó értéknek megfelelő szinten fogja tartani;

- beállíthatjuk az adatok soros porton való kiküldésének a módját, a `Serial.println()` utasítás megfelelő paraméterezésével;

- ha a „Serial Monitor” ablakból numerikus adatokat szeretnénk kinyerni, akkor az adatok kiküldését megelőzően kiírathatunk egy fejléctet is. Ezt az `if (!ld)` feltétel teljesülése esetén végrehajtott pár sorhoz adhatjuk hozzá.

A módosított programot töltsük fel az ESP32-re.

A kezelőpanelen állítsuk be a kívánt k/m és c/m hányadosokat. A billenőkapcsolót állítsuk a „stop” pozícióra. Az esetleg világító telítettséget jelző LED-eket a jobb oldali nyomógombokkal kapcsoljuk le.

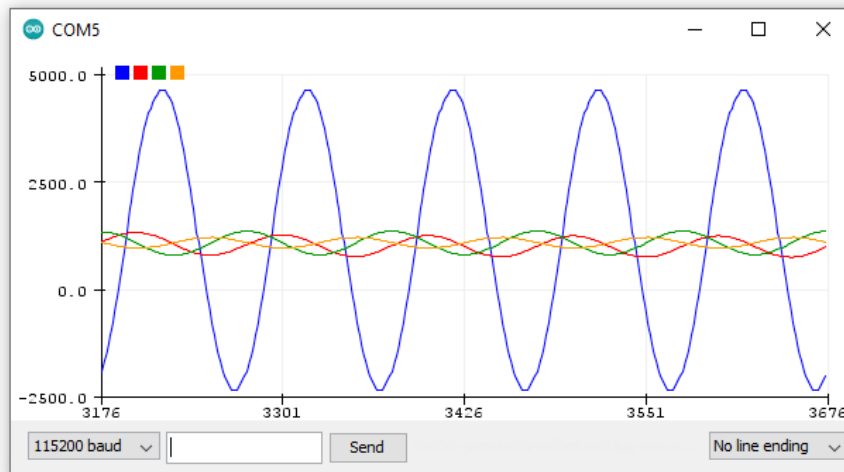
Az Arduino IDE ablakában indítsuk el a „Serial Monitor” vagy a „Serial Plotter” alkalmazások valamelyikét (az elsőben adatsorokat nyerünk, a másodikban pedig grafikusan tudjuk megjeleníteni azokat);

A billenőkapcsolót a „stop” helyzetből a „start”-ra állítva az analóg számítógép működésbe lép. Ha a telítettséget jelző LED-ek valamelyike kigyúl, akkor a gerjesztés intenzitása túl nagy volt: ekkor vissza kell térnünk a `Kimenet()` függvényhez, az amplitúdó csökkentése végett. Megjegyzendő, hogy ha a rendszer gerjesztése annak rezonancia-

frekvenciáján történik, akkor a válasz amplitúdója egy idő után túlságosan megnőhet. Ha valamelyik erősítő telítődik, akkor attól a pillanattól kezdve az analóg számítógép kimeneti adatai használhatatlanok lesznek.

Ha a kimeneti adatok amplitúdója túl kicsi, a jobb oldali gombokkal tudjuk azt felerősíteni. Túl nagy erősítési tényező beállítása esetén a kimenet telítődhet (azt látjuk, hogy a kimenet rövidebb-hosszabb ideig a legmagasabb vagy a legalacsonyabb szinten áll vagy e két határérték között váltakozik). Ennek a bekövetkezése nincs befolyással a számítások pontosságára, csupán a megjelenített eredmények torzulását idézi elő a telítettség fennállásának idején. Ugyanakkor azt is vegyük figyelembe, hogy az erősítők az áramkörök zaját is fel fogják erősíteni.

A 38. ábrán a fenti példaprogrammal nyert adatokat láthatjuk, ahol a kezelőpanelen a kapcsolók a 37. látható állásban vannak. Az áramkör egy csillapítatlan, 1 rad/s saját-körfrekvenciájú rendszert modellez (a sajátfrekvencia kb. 0.16 Hz), a gerjesztés pedig 100 lépésben mintavételezett 1 Hz-es szinuszos jellel történik. A kimeneti adatok mV-ban vannak megadva, a sebesség tízszeres, az elmozdulás százszoros nagyításban. A színek jelentése, sorban: gerjesztés (ami egy átszámított adat), elmozdulás, sebesség, gyorsulás.



38. ábra. Eredmények a „Serial Plotter” ablakban

A 39. ábrán a „Serial Monitor” ablakban megjelenő adatokat látjuk. Ehhez a programban a következő módosításokat végeztük el:

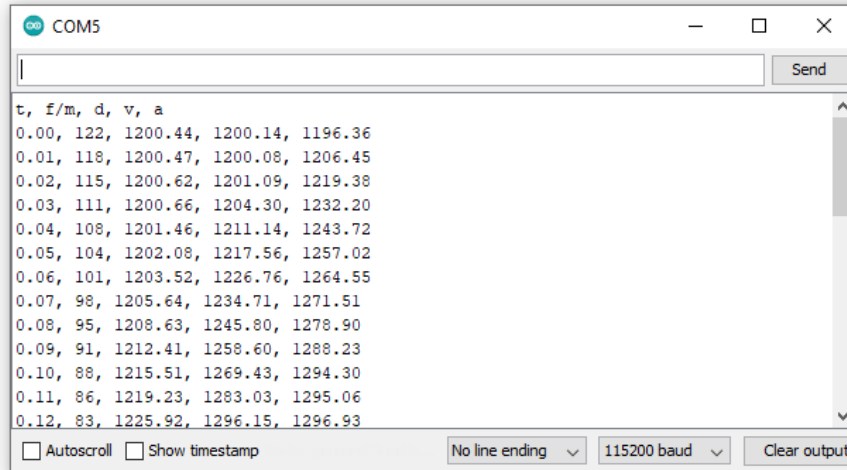
– a billenőkapcsoló átváltását figyelő feltétel struktúrájához hozzáadtunk egy sort, ami kiírja a fejléct (ide akár mértékegységeket is írhattunk volna):

```
if (!ld) {
    digitalWrite(LED, HIGH);
    ld = true;
    Serial.println("t, f/m, d, v, a");
}
```

– az adatok kiírását pedig a következőképpen módosítottuk:

```
Serial.println(String(t) + ", " + String(Adat[Aktualis]) + ", " +
    + String(Dva) + ", " + String(dVa) + ", " + String(dvA));
```

Ez esetben a kiküldött adatok digitálisak, vagyis a DAC bemeneti és a három ADC kimeneti adatait látjuk. A „Serial Monitor” ablakból az adatokat kimásolhatjuk és azokat pl. a Notepad program segítségével egy üres szöveges állományba beilleszthetjük. Ha ezt az állományt „csv” (*comma separated values*, vesszővel elválasztott értékek) kiterjesztéssel mentjük el, akkor azt Excelben közvetlenül megnyithatjuk további feldolgozás céljából.

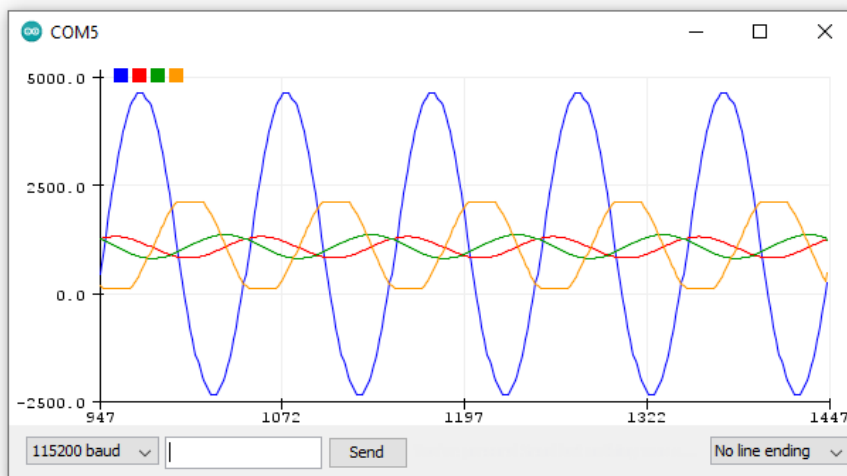


39. ábra. Eredmények a „Serial Monitor” ablakban

Végül, a 40. ábra azt az esetet szemlélteti, amikor az egyik kimenet erősítése (a gyorsulása) túlságosan nagy: a gyorsulás grafikonja az elvárt szinuszgörbe helyett inkább trapéz-szerűen változik, mivel az erősítő kimenetén a görbe csúcsainak közelében kb. a tápfeszültség jelenik meg.

Az eszköz használata során, a hardver és a szoftver beállításával, különböző eseteket szemléltethetünk, amelyeket akár szakirodalomból származó adatokkal is összehasonlíthatunk:

- a harmonikusan gerjesztett rendszerek esetét, beleértve a rezonanciát is;
- az impulzusokkal, lökés-szerűen gerjesztett rendszerek esetét, amikor a gerjesztés megszűnése után a rendszer szabadon leng;
- mindkét terhelésforma esetében kiteríthetünk a csillapítatlan, az alulcsillapított, a kritikus csillapítású és az erősen csillapított rendszerek összehasonlítására is;
- kísérletezhetünk másfajta hullámformákkal vagy pedig nem-periodikus gerjesztéssel is, azonban tartsuk szem előtt azt a tényt, hogy az integrátorok egyszersmind aluláteresztő szűrőként is viselkednek, így a 15 – 20 Hz feletti összetevőket erőteljesen csillapítani fogják.



40. ábra. Az utolsó görbe (a gyorsulás) erősítése túl nagy