

SYLVAIN DESCHÊNES

**APPLICATIONS DE LA TRANSFORMÉE EN ONDELETTES AU
TRAITEMENT DE L'INFORMATION OPTIQUE**

Thèse
présentée
à la Faculté des études supérieures
de l'Université Laval
pour l'obtention
du grade de Philosophiæ Doctor (Ph.D.)

Département de physique
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

SEPTEMBRE 2001



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-66311-6

Canada

À Diane, Lucette et Henri,
*pour votre amour et
votre appui indéfectible*

RÉSUMÉ

La thèse présente l'apport d'un outil mathématique récemment découvert, la transformée en ondelettes, au traitement de l'information optique. Les ondelettes continues sont d'abord introduites et leur réalisation optique est présentée. Ensuite, une ondelette répondant aux équations de Maxwell est développée. Cette dernière permet de tisser des liens entre la transformée en ondelettes et le principe de Huygens utilisé pour étudier la diffraction scalaire. La possibilité d'utiliser cette ondelette pour générer des faisceaux non diffractants est également discutée.

Dans un deuxième temps, les ondelettes discrètes sont utilisées dans le but d'extraire des informations pertinentes dans une banque d'images infrarouges. Ces images représentent les vues de véhicules prises à tous les cinq degrés. La transformée en ondelettes génère une analyse multirésolution permettant d'extraire des contours moins bruités. Cette information est alors traitée par de nouveaux algorithmes de reconnaissance de forme dans un espace qui caractérise de façon invariante les objets 3-D.

RÉSUMÉ

La thèse présente l'apport d'un outil mathématique récemment découvert, la transformée en ondelettes, au traitement de l'information optique. Cette transformation décompose les signaux selon une base dont chaque élément est localisé autant dans l'espace où le signal est détecté (spatial ou temporel) que dans l'espace des fréquences. Tout comme la transformée de Fourier, la transformée en ondelettes se retrouve sous forme fonctionnelle continue et sous forme discrète. Dans un premier temps, la genèse mathématique des ondelettes continues est présentée. Ensuite, on retrouve un compte-rendu de la recherche portant sur les ondelettes en optique. La réalisation optique d'une telle transformation est notamment présentée et certaines avenues de recherche à explorer sont mentionnées.

Les résultats obtenus relativement à l'une de ces avenues constituent une part importante de la thèse. En effet, les ondelettes continues sont utilisées afin d'étudier les liens entre cette transformation et la diffraction scalaire. Les liens entre le principe de Huygens et la transformée en ondelettes sont démontrés grâce à une ondelette respectant les équations de Maxwell de l'électromagnétisme. La transformée en ondelettes s'avère être une généralisation polychromatique de ce principe vieux de plus de trois cent cinquante ans. Ensuite, l'ajout de contraintes à cette fonction ondelette est introduit afin de générer des faisceaux optiques non diffractants.

Dans un deuxième temps, les ondelettes discrètes sont utilisées dans le but d'extraire des informations pertinentes dans une banque d'images infrarouges. Ces images représentent les vues de véhicules prises à tous les cinq degrés. L'analyse multirésolution permet d'en extraire des contours moins bruités. Ces derniers sont alors caractérisés par des descripteurs (Fourier, Fourier-Mellin, etc.), ce qui permet d'obtenir une représentation invariante sous certaines transformations affines désirées. La dernière étape du

travail consiste alors à utiliser un nombre minimal de ces descripteurs pour former des courbes continues dans l'espace des caractéristiques. Cette étape mène à l'élaboration de nouveaux algorithmes de reconnaissance de forme, invariants sous transformations affines dans l'espace 3-D par méthodes de distance euclidienne minimale dans l'espace des descripteurs de véhicules.

AVANT-PROPOS

Je me souviens de ce jeune adolescent que j'étais lorsque j'entendis pour la première fois parler du programme de doctorat. Cet aboutissement final et approfondi d'une formation choisie évoquait pour moi un idéal que j'avais bien l'intention de poursuivre. Fasciné par l'aspect intellectuel de ce cheminement, j'étais bien loin de me douter des obstacles, mais aussi de la richesse des contacts humains qui accompagneraient mon parcours.

La fin de ce périple approchant, comme c'est habituellement le cas dans la vie, toutes les difficultés s'effacent de la mémoire pour ne laisser que les beaux moments vécus durant le voyage. C'est alors qu'il sied de ressasser ses souvenirs et d'exprimer sa gratitude aux gens qui nous ont tant donné.

Premièrement, je tiens à remercier ceux qui m'ont toujours appuyé dans mes choix, dans les moments d'angoisse comme dans ceux de grande joie. À mon épouse, Diane, merci d'être ce que tu es et de m'aimer pour ce que je suis. Merci pour tes conseils qui regardaient toujours mes intérêts et non les tiens. Merci pour ta patience et ta compréhension pendant ces quatre années passées loin l'un de l'autre. À mes parents, Lucette et Henri, merci d'avoir respecté et appuyé mes choix et de toujours avoir été disponibles et aimants. Votre exemple de ténacité et votre appui furent indispensables à la réalisation de ce rêve.

Ensuite, je voudrais souligner l'apport colossal que m'ont fourni tous ces gens qui m'ont guidé dans ma démarche scientifique. Notamment, je tiens à remercier de fond du coeur mon directeur, Prof. Yunlong Sheng. Merci d'avoir cru en mes capacités et de m'avoir donné l'opportunité de me développer en tant que chercheur. Nos discussions scientifiques resteront pour moi un parfait exemple de confrontation d'idées dans un

climat de respect mutuel. Merci également à ceux qui m'ont enseigné lors de mes études doctorales, Profs. Henri H. Arsenault et Claude Delisle, ainsi qu'à tous les professeurs membres du Centre d'optique, photonique et laser pour leur grande disponibilité et leur érudition. Enfin, merci à tous les membres du département de physique et du COPL que j'ai côtoyés durant ces années. J'ai une pensée toute particulière pour Josée Pardiac et Marcel Denis, pour l'aide et l'amitié qu'ils m'ont offertes si spontanément et pour Lise Prévèreau, qui a su rendre moins pénible toutes ces étapes bureaucratiques auxquelles les étudiants au doctorat sont soumis !

Enfin, je garderai toujours une place de choix dans mon coeur à tous ces amis et collègues que j'ai côtoyés durant mon séjour à Québec. Vos qualités humaines, votre humour et votre éclectisme sont autant d'aspects qui ont su enrichir mon passage dans la Vieille Capitale. Je ne vous nomme pas, vous êtes trop nombreux.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	iii
RÉSUMÉ	iv
AVANT-PROPOS	vi
TABLE DES MATIÈRES	viii
LISTE DES TABLEAUX	xii
LISTE DES FIGURES	xiii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1: Développement mathématique de la transformée en ondelettes et applications à l'optique	5
1.1 Introduction	5
1.2 Analyse de Fourier de fonctions d'énergie finie	6
1.3 La transformée de Fourier à fenêtre	9
1.4 La transformée en ondelettes	12
1.5 Applications de la transformée en ondelettes en l'optique	17
1.6 Conclusion	20
CHAPITRE 2: Ondelettes électromagnétiques	21
2.1 Introduction	21

2.2	Ondelettes d'Onural pour la diffraction	22
2.3	Champ électromagnétique, transformée de Fourier et signal analytique .	23
2.3.1	Électromagnétisme et analyse de Fourier	24
2.3.2	Signal analytique d'un champ électromagnétique	29
2.4	Ondelette électromagnétique de Kaiser	31
2.4.1	Calcul de l'ondelette électromagnétique en fonction des variables spatio-temporelles	33
2.4.2	Construction et décomposition d'un champ électromagnétique en utilisant une base d'ondelettes	36
2.5	Ondelettes monochromatiques et principe de Huygens	41
2.6	Transformée en ondelettes de faisceaux non diffractants	50
2.7	Conclusion	55
CHAPITRE 3: Application de la transformée en ondelettes à l'extraction de ca- ractéristiques dans les images		56
3.1	Introduction	56
3.2	L'analyse multirésolutionnelle et l'avènement de la transformée en onde- lettes discrète	57
3.2.1	Les pyramides gaussienne et laplacienne	59
3.2.2	Filtres miroirs en quadrature et transformée en ondelettes discrète	60
3.3	Application de la transformée en ondelettes discrète : l'extraction de contours	67

3.3.1	Algorithme de transformée en ondelettes rapide 1-D	68
3.3.2	Généralisation au cas multidimensionnel	69
3.3.3	Ondelettes de Daubechie	71
3.3.4	Ondelettes spline quadratique	72
3.3.5	Extraction de contours et maxima dans la direction du gradient	74
CHAPITRE 4: Extraction de contours par la transformée en ondelettes dans le		
	cadre d'un projet de reconnaissance invariante d'objets 3D	76
4.1	Introduction	76
4.2	Rehaussement des images	80
4.2.1	Égalisation de l'histogramme	81
4.2.2	Filtrage médian	83
4.3	Extraction du contour	85
4.3.1	Filtres de Prewitt, Sobel et Frei-Chen	85
4.3.2	Détecteur de bords optimal	88
4.3.3	Avantages de la transformée en ondelettes en tant qu'extracteur de contours et présentation des résultats avec quelques ondelettes	90
4.4	Génération des maxima d'ondelettes et des contours des véhicules . . .	95
4.4.1	Maxima pour la TO spline quadratique	95
4.4.2	Segmentation et binarisation des maxima	97
4.4.3	Tracé des courbes	97

4.4.4	Problèmes rencontrés	99
CHAPITRE 5: Reconnaissance invariante d'objets 3D en utilisant les contours		
	extraits par la transformée en ondelettes	102
5.1	Descripteurs de courbes	102
5.1.1	Techniques utilisant la courbure	102
5.1.2	Codage en chaîne	104
5.1.3	Descripteurs de Fourier-Mellin	106
5.1.4	Descripteurs de Fourier	106
5.2	Algorithme de trajectoires dans l'espace des caractéristiques	113
5.2.1	Interpolation linéaire	113
5.2.2	Réseaux de neurones	115
5.2.2.1	Théorie des approximations et réseaux de neurones	117
5.2.2.2	Approximation d'une fonction à partir d'échantillons	118
5.2.2.3	Théorie de la régularisation et réseaux de régularisation	121
5.2.3	Interpolation de type spline cubique	124
5.3	Résultats obtenus et discussion des méthodes	126
CONCLUSION		132
APPENDICE A: Notations mathématiques		xvi
BIBLIOGRAPHIE		xvii

LISTE DES TABLEAUX

I	Coefficients de normalisation pour les contours trouvés à diverses résolutions par l'ondelette spline quadratique.	95
II	Nombre de fausses détections et taux d'efficacité de la reconnaissance par interpolation linéaire pour 36 images d'entraînement.	129
III	Nombre de fausses détections et taux d'efficacité de la reconnaissance par interpolation linéaire pour 24 images d'entraînement.	130
IV	Nombre de fausses détections et taux d'efficacité de la reconnaissance par interpolation spline cubique pour 24 images d'entraînement.	130

LISTE DES FIGURES

1	Largeurs de fenêtre pour différentes fréquences dans le signal.	10
2	Fonctions oscillantes à largeur variable et oscillations constantes.	13
3	Réalisation optique de la transformée de Fourier.	17
4	Réalisation optique de la transformée en ondelettes.	19
5	Double cône causal	26
6	Ondelette électromagnétique.	44
7	Forme temporelle de l'ondelette électromagnétique pour une distance radiale fixe.	45
8	Transformée de Fourier de l'ondelette électromagnétique par rapport au temps.	45
9	Algorithme en arbre utilisé dans l'analyse multirésolutionnelle.	67
10	Étape de l'algorithme de transformée en ondelettes 2-D.	70
11	Décomposition multirésolutionnelle en ondelettes d'un signal 2-D (image). 70	70
12	Graphiques de la fonction spline quadratique et de sa fonction d'échelle associée.	73
13	Images des cinq véhicules faisant partie de la banque.	78

14	Image d'un char d'assaut, à un angle de 100 degrés.	80
15	Histogramme du nombre de pixels en fonction de l'intensité lumineuse sur 256 niveaux de gris.	82
16	Histogramme du nombre de pixels en fonction de l'intensité lumineuse sur 256 niveaux de gris après égalisation.	83
17	Image d'un char d'assaut, après égalisation de l'histogramme et filtrage médian.	84
18	Effet des filtrages médian et pseudo-médian cruciforme.	86
19	Identification des intensités des pixels voisins d'un point dans une fenêtre 3x3.	87
20	Types de bords considérés par l'approche de Canny.	88
21	Transformée en ondelettes Daubechie 4.	92
22	Transformée en ondelettes Daubechie 12.	93
23	Transformée en ondelettes spline quadratique.	94
24	Maxima dans la direction du gradient pour la TO spline quadratique.	96
25	Fenêtre 3x3 montrant la discrétisation de l'angle de direction du tracé et les pixels correspondants.	98
26	Contours de quelques vues des cinq véhicules qui ont servi à notre étude.	101
27	Courbe fermée et code utilisé lors du codage en chaîne.	105
28	Courbe fermée d'un char, telle qu'utilisée pour le calcul des descripteurs de Fourier.	112

29 Représentation de l'algorithme TEC de Neiberg et Casasent. 114

30 Représentation graphique d'un réseau de neurones. 116

31 Interpolation en tant que problème mal défini. 119

32 Courbe générée par l'interpolation "spline cubique" pour une série discrète
de points. 125

33 Déviation entre les valeurs interpolées et les véritables valeurs de descripteurs
de Fourier en fonction des angles de vue. 127

INTRODUCTION

Lorsque l'être humain s'est pour la première fois interrogé sur l'univers dans lequel il évolue, un long processus de questionnement et de recherche a vu le jour. À ses origines, ce cheminement se replia sur de vagues explications surnaturelles ou polythéistes. Mais celles-ci furent délaissées dès que le questionnement se donna les outils dont il avait besoin. Ce sont les Grecs de l'Antiquité qui permirent l'émergence du formalisme qui, jusqu'à nos jours, nous aide à mieux comprendre notre monde et les règles le régissant: les mathématiques.

Bien vite, on s'aperçut que la physique pouvait utiliser ces mathématiques comme langage afin d'exprimer les lois qui gouvernent la nature. C'est ainsi que les phénomènes physiques se sont tour à tour expliqués: la trajectoire de planètes autour d'un soleil, celle d'un électron autour du noyau d'un atome, la propagation des ondes sonores et de la lumière sont autant d'exemples de phénomènes modélisés par des fonctions mathématiques. Comme une langue qui s'invente de nouveaux mots pour décrire de nouvelles réalités, les mathématiques se sont également nourries de l'avidité de connaissance des hommes. L'exemple le plus criant de cette interrelation est l'avènement du calcul différentiel, introduit par Newton pour décrire la mécanique des corps. D'ailleurs, encore de nos jours, de nouvelles percées en physique donnent lieu à l'élaboration de nouvelles théories mathématiques. Dans le cadre de cette thèse, les relations existant entre l'un de ces nouveaux outils mathématiques et le monde de l'optique seront étudiées.

L'intérêt porté ici pour l'optique est motivé par l'importance toujours actuelle de la transmission d'information pour l'être humain. En effet, les avantages de l'optique dans ce domaine ne sont plus à établir. Bien avant le postulat relativiste établissant la vitesse de la lumière comme optimale dans notre univers, l'être humain en avait fait un outil majeur de communication. On n'a qu'à penser aux phares servant à guider les navires pour se convaincre de cette réalité. Bien entendu, le transport de signaux empruntant les ondes électromagnétiques comme vecteur, tel qu'introduit par Heinrich Hertz et réalisé par Guglielmo Marconi, fit ressortir toute la force et la portée de ce véhicule privilégié de l'information.

On peut d'ailleurs tracer une analogie entre le processus physique de la transmission d'information utilisant l'optique et les règles du schéma de la communication de Jacobson. Ainsi, trois grandes étapes de la transmission d'un message entrent en jeu. Dans un premier temps, une information est codée par l'émetteur. Par exemple, une simple image comporte toute une série de conventions codées comprenant ses couleurs, ses formes, sa netteté, etc. Ensuite, cette information est transportée par un messager, dans notre cas la lumière. Finalement, le récepteur a la tâche de décoder cette information de façon efficace afin d'en soutirer les connaissances qu'il désire en extirper.

Les deux dernières étapes de ce processus attireront davantage notre attention. Pour ce faire le comportement du véhicule qu'est la lumière sera examiné. Les moyens qu'il est possible d'emprunter afin d'analyser une information nous parvenant par le support d'ondes électromagnétiques seront également étudiés. Comme il fut mentionné précédemment, cette étude se combinera à l'introduction d'un outil mathématique relativement nouveau: la transformée en ondelettes.

La présente thèse abordera donc les liens entre le traitement de l'information optique et les ondelettes en suivant l'approche suivante. Dans un premier temps, le formalisme mathématique qui soutient ce nouvel outil d'analyse sera présenté. Les diverses étapes qui échelonnèrent l'avènement des ondelettes seront décrites. De son ancêtre, l'analyse de Fourier, en passant par les premières tentatives d'analyse simul-

tanée en espace et en fréquence, l'analyse par ondelettes trouvera finalement ses bases rigoureuses. Ses propriétés particulières et fort recherchées seront exposées et nous verrons qu'à l'instar de la transformée de Fourier, sa réalisation par un montage optique est possible.

Le deuxième chapitre s'intéressera à diverses applications de cette analyse à l'optique. Pour ce faire, la transformée en ondelettes continues sera présentée comme une solution des équations de Maxwell. La lumière étant une onde électromagnétique, l'ondelette physique récemment introduite peut alors être vue comme une décomposition en impulsions localisées permettant l'analyse de phénomènes optiques. C'est dans cette perspective que nous montrerons nos travaux qui visèrent à développer cette ondelette afin de l'adapter à l'étude de la lumière en tant que véhicule de l'information. Plus précisément, nous réussirons à finalement tisser les liens entre le principe Huygens, vieux de plus de trois cents ans, et cette transformée qui n'est qu'à l'aube de la vingtaine. De plus, les propriétés de localisation spatiales et fréquentielles des ondelettes nous ont permis d'adapter le formalisme des ondelettes électromagnétiques à l'étude des faisceaux non diffractants.

Dans le troisième chapitre, nous verrons comment les limites de l'analyse en ondelettes peuvent être repoussées. Nous exposerons le passage de l'analyse continue du monde réel vers une étude des signaux numériques fournis par les détecteurs. En effet, l'intérêt se portera sur l'analyse des résultats détectés à la suite d'un transport et d'une modulation de l'information optique. Vu la nature des systèmes de détection actuels, et grâce au théorème de Shannon qui permet d'échantillonner un signal sans perte d'information, les données sont généralement reçues et emmagasinées de façon discrète. De ce fait, plutôt que de recueillir une information continue, les images acquises sont représentées comme des matrices où chaque élément donne l'intensité locale du signal ainsi capté. Pour appliquer notre analyse, nous devons donc présenter la théorie qui génère une transformée en ondelettes discrète. Nous verrons finalement comment ce passage fournit un outil très utile en traitement des images: l'extraction de contours.

Ceci nous mènera aux deux derniers chapitres où nous nous pencherons sur l'application de l'extraction de contours à un projet de reconnaissance de cibles. À partir d'images captées dans la bande spectrale infrarouge, les contours de véhicules militaires devront être obtenus. Une première étape montrera quelques techniques qui furent utilisées afin de rehausser la qualité de ces images avant d'y appliquer l'extraction de contours. Par la suite, la transformée en ondelette se charge de générer les contours en question. Différentes ondelettes seront testées et comparées aux extracteurs de contours classiques.

Afin de représenter les objets ainsi décrits invariants sous rotation et changement d'échelle, certaines techniques de caractérisation des contours seront présentées. Ensuite, nous attaquerons le problème de la reconnaissance des formes dans l'espace 3-D à partir d'image 2-D. Cette étape nous permettra de voir les techniques de tracés dans l'espace des caractéristiques. Nous présenterons également une innovation à ces tracés pour améliorer la précision de la représentation des objets à classifier. Finalement, les résultats de l'étude seront présentés.

CHAPITRE 1

Développement mathématique de la transformée en ondelettes et applications à l'optique

1.1 Introduction

Souvent, l'avancement de la physique est passée par le développement de nouvelles mathématiques. L'existence d'outils d'analyse sachant mettre en évidence les informations pertinentes aux problèmes physiques rencontrés s'avère donc primordiale. L'un de ces outils, introduit en 1822 par Joseph Fourier, eut un effet marquant en physique, notamment dans le domaine de l'optique. À la base, cette application mathématique permet de décomposer une très grande variété de fonctions en une somme de fonctions oscillantes. Malgré un accueil mitigé, cette approche gagna rapidement une grande reconnaissance, allant même jusqu'à être comparée à un grand poème mathématique.

Outre les nombreuses applications directes de l'analyse de Fourier à la physique, on peut également mesurer son apport par les nombreux autres outils analytiques qui naquirent de ces travaux. Deux d'entre eux, la transformée de Fourier à fenêtre et la transformée en ondelettes, ont permis d'importants développements dans plusieurs

domaines scientifiques. Au cours de ce chapitre, nous survolerons donc les étapes qui menèrent au développement de la transformée en ondelettes, de l'analyse de Fourier jusqu'aux travaux de Morlet, Grossmann et Meyer [1] [2] [3]. Nous verrons ensuite comment ces outils d'analyse ont trouvé une place intéressante dans le domaine de l'optique grâce aux liens étroits qu'ils tissent avec la propagation des ondes.

1.2 Analyse de Fourier de fonctions d'énergie finie

Dans l'analyse de signaux physiques modélisés mathématiquement, les fonctions qui décrivent les phénomènes étudiés ont habituellement la propriété d'être d'énergie finie. En définissant le produit scalaire entre deux de ces fonctions comme

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)} g(t) dt, \quad (1.1)$$

où la notation \overline{g} désigne le complexe conjugué de g , alors cette caractéristique énergétique s'exprime comme

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty. \quad (1.2)$$

Le membre de gauche de l'inégalité représente ici la norme au carré de f dans cet espace. Les équations (1.1) et (1.2) définissent l'espace de Hilbert des fonctions f de carré sommable en une dimension ($f(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$).

La méthode d'analyse introduite par Fourier est bien adaptée pour étudier le contenu en fréquences de cette famille de fonctions. En effet, elle permet de décomposer ces dernières sous la forme d'une intégration sur les différentes fréquences d'une base de fonctions sinusoïdales. Ces dernières étant représentées par des exponentielles complexes

$e^{i\omega t}$, la décomposition s'exprime comme suit

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{R}} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (1.3)$$

où ω désigne les fréquences et t est la variable dans le domaine de définition de f . Cette notation est utilisée afin de donner un sens physique à l'équation (1.3). En effet, le temps est souvent considéré comme paramètre de variation d'un signal. Dans ce cas, pour une fréquence ω donnée, chaque exponentielle complexe est solution de l'équation différentielle décrivant l'oscillateur harmonique en une dimension,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0, \quad (1.4)$$

dont les applications en physique ne se comptent plus. Ces solutions sont associées à des ondes oscillant dans le temps à la fréquence ω . En optique, par exemple, chacune de ces exponentielles décrit la dépendance par rapport au temps d'une onde monochromatique.

La fonction multipliant chacune des ondes dans la base, donnée par $F(\omega)$, indique l'importance relative des fréquences présentes dans le signal. Elle est obtenue à partir de la fonction d'origine f en effectuant l'intégrale suivante:

$$F(\omega) = \int_{\mathfrak{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.5)$$

L'opération donnant la valeur de $F(\omega)$ et, par extension, $F(\omega)$ elle-même sont appelées transformée de Fourier (TF) de $f(t)$. Cette opération peut être inversée et la transformée de Fourier inverse (TF⁻¹) est donnée par l'équation (1.3) [5]. Grâce à ces deux transformations, l'analyse permet de passer du domaine temporel au domaine des fréquences directement. Les fonctions $F(\omega)$ et $f(t)$ sont également reliées entre elles par l'identité

de Plancherel, donnée par

$$\int_{\mathfrak{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{R}} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (1.6)$$

Cette relation, un cas particulier de l'identité de Parseval, permet d'exprimer le lien entre l'énergie totale portée par le signal, définie par le membre de gauche de l'équation, et par son spectre de puissance $\|F(\omega)\|^2$. Ainsi, en plus de procurer l'information de fréquence de la fonction f , la TF appartient elle aussi à $\mathcal{L}^2(\mathfrak{R})$ et conserve les renseignements relatifs au contenu énergétique du signal.

Cependant, quoiqu'elle ait apporté une contribution colossale dans plusieurs domaines, l'analyse de Fourier montre certaines lacunes autant au niveau de son interprétation physique que lorsque confrontée à certains problèmes spécifiques. Il est notamment conceptuellement ambigu de remarquer que chaque élément de la base générant les fonctions de carré sommable n'appartient pas lui-même à cette famille. Ceci implique qu'une fonction d'énergie finie est décomposée par une somme de fonctions d'énergie infinie.

Il existe également un problème qui a une importance tangible lors de l'analyse de signaux. En effet, dans le cas où le signal étudié n'est pas stationnaire, l'information de fréquence est présentée de façon globale, sur tout l'intervalle temporel. Ceci est dû au fait que les intégrations dans les équations (1.3) et (1.5) se font sur tout l'axe du temps. Ainsi, l'analyse permet de connaître la nature en fréquence du signal, mais ne procure pas une analyse simultanée en temps et en fréquence, i.e. le contenu en fréquences à un temps donné. De façon à remédier à cette difficulté, une nouvelle représentation devra être proposée. Au contraire de la TF, elle devra posséder un degré de liberté de plus que la fonction d'origine afin de présenter simultanément les informations désirées. Dans les prochaines sections, nous verrons comment la TF fut adaptée pour répondre à ces besoins de l'analyse et comment l'aboutissement de ces travaux permit de produire une base ne présentant pas les mêmes anomalies que les exponentielles complexes.

1.3 La transformée de Fourier à fenêtre

Un façon naturelle d'obtenir l'information de fréquence pour un voisinage entourant un temps τ donné est de multiplier la fonction à analyser par une fonction "fenêtre", i.e. une fonction nulle ou presque nulle sur tout l'espace sauf dans le voisinage de τ . Mathématiquement, une fonction $w(t)$ est éligible pour être une fenêtre si elle répond à la condition

$$t w(t) \in \mathcal{L}^{\infty}(\mathfrak{R}). \quad (1.7)$$

En utilisant l'équation (1.1), on voit qu'une transformation à fenêtre prend la forme suivante

$$(S_w f)(\omega, \tau) = \langle f, w_{\tau, \omega} \rangle = \int_{\mathfrak{R}} f(t) \overline{w(t - \tau)} e^{-i\omega t} dt \quad (1.8)$$

où $w(t)$ est centrée en 0, habituellement réelle et paire, et $w_{\tau, \omega}$ est la multiplication de $w(t)$ par l'exponentielle complexe. L'équation (1.8) peut être interprétée comme la corrélation entre la fonction f et la nouvelle base $w_{\tau, \omega}$. Cette dernière peut donc être vue comme la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas. Pour un τ fixe, la TF à fenêtre donnera l'information en fréquence du signal pour l'intervalle correspondant à la largeur de la fenêtre choisie.

Comme le montre la figure 1, plus les fréquences sont élevées, moins la fenêtre aura à être large. De même, une large fenêtre devra être considérée pour les faibles fréquences. Les largeurs de la fenêtre dans les domaines temporels et fréquentiels sont calculées à partir de l'écart type et sont données par

$$2\Delta_{w(t)} := \frac{2}{\|w\|} \sqrt{\int_{\mathfrak{R}} t^2 |w(t)|^2 dt} \quad (1.9)$$

$$2\Delta_{W(\omega)} := \frac{2}{\|W\|} \sqrt{\int_{\mathfrak{R}} \omega^2 |W(\omega)|^2 d\omega} \quad (1.10)$$

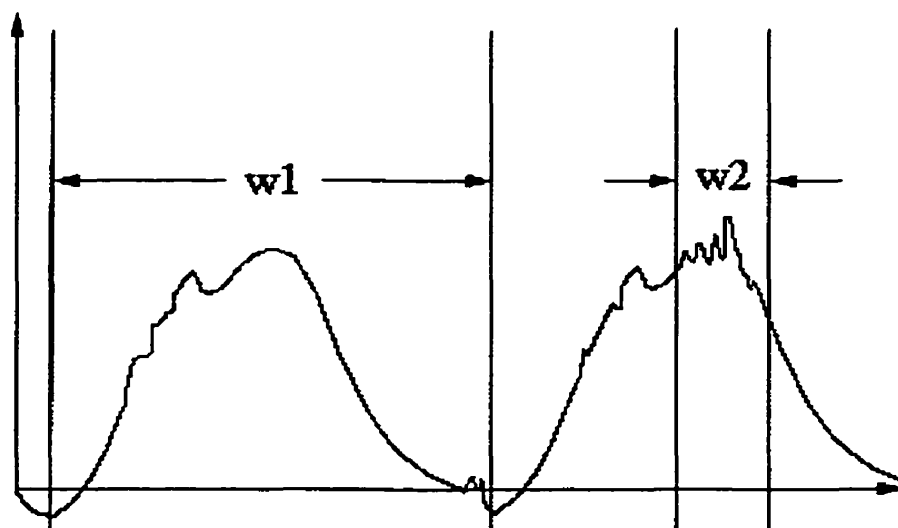


FIGURE 1. Largeurs de fenêtre pour différentes fréquences dans le signal. On note que la fenêtre pour la zone de basses fréquences est plus large (w_1) que la fenêtre analysant les hautes fréquences (w_2).

Le caractère de localisation simultanée en temps et en fréquence est alors décrit par le principe d'incertitude reliant les demi-largeurs, défini comme

$$\Delta_{w(t)}\Delta_{W(\omega)} \geq \frac{1}{2}. \quad (1.11)$$

En considérant un espace de phase où l'un des axes représente le temps et l'autre la fréquence, on peut construire une série de boîtes dites d'Heisenberg [6], de côtés $2\Delta_{w(t)}$ et $2\Delta_{W(\omega)}$ à l'intérieur desquelles une TF à fenêtre est localisée.¹ Il est alors possible d'imaginer un recouvrement de tout l'espace de phase en faisant varier sur \mathfrak{R}^2 les paramètres ω et τ de $(S_w f)$, tel que définie dans l'équation (1.8). Ainsi, il est envisageable de retrouver le signal original à partir d'une série de TF à fenêtre. Des relations reliant le signal et sa TF à fenêtre comme celles retrouvées dans l'analyse de

¹Ce type de représentation a trouvé plusieurs applications en physique, notamment en mécanique quantique. Un ensemble de fonctions fenêtres multipliées par une exponentielle complexe est dans ce cas appelé famille d'états cohérents. Celle-ci permet de définir un espace de phase où l'analyse en fréquence et en espace (si on remplace la variable temps par une variable spatiale) se fait simultanément, à l'intérieur de la fenêtre d'incertitude donnée par (1.11).

Fourier (équations (1.3) et (1.6)) sont données par

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} (S_w f)(\omega, \tau) w(t - \tau) e^{i\omega t} d\omega d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \langle f, w_{\tau, \omega} \rangle w_{\tau, \omega}(t) d\omega d\tau \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} |(S_w f)(\omega, \tau)|^2 d\omega d\tau. \quad (1.13)$$

L'équation (1.12) semble supposer qu'une telle décomposition est orthogonale, mais le recouvrement de l'espace de phase ainsi effectué est grandement redondant dans $\mathcal{L}^2(\mathfrak{R})$. Si la représentation était orthogonale, toute fonction $\phi \in \mathcal{L}^\epsilon(\mathfrak{R}^\epsilon)$ serait la TF à fenêtre d'une fonction de carré sommable. La redondance à la base de la non-orthogonalité de la TF à fenêtre oblige la condition supplémentaire suivante

$$\phi(\omega_o, \tau_o) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \phi(\omega, \tau) K(\omega_o, \omega, \tau_o, \tau) d\omega d\tau, \quad (1.14)$$

où la fonction K est appelée "reproducing kernel" et est donnée par

$$K(\omega_o, \omega, \tau_o, \tau) = \int_{\mathfrak{R}} w(t - \tau) w(t - \tau_o) e^{-i(\omega_o - \omega)t} dt. \quad (1.15)$$

Il peut être intéressant de rechercher la TF à fenêtre offrant la localisation temps-fréquence optimale. Elle est obtenue en choisissant une fonction pour laquelle l'égalité est atteinte dans l'inéquation (1.11). Il peut être montré que c'est le cas uniquement lorsque

$$w(t) = ce^{iat} g_\alpha(t - \tau) \quad (1.16)$$

où g est une fonction gaussienne de largeur $2\sqrt{\alpha}$ donnée par

$$g_\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}, \quad (1.17)$$

avec $c \neq 0$, $\alpha > 0$ et $a, \tau \in \mathfrak{R}$. Le paramètre τ correspond toujours au temps auquel on analyse le signal. La TF d'une telle gaussienne donnera une autre gaussienne, cette fois de largeur $1/\sqrt{\alpha}$, donnant les dimensions de la boîte d'Heisenberg d'aire minimale. Cette transformée de Fourier à fenêtre particulière est également connue sous le nom de transformée de Gabor, Dennis Gabor l'ayant introduite pour l'analyse de signaux sonores en 1946, deux ans avant qu'il publiât les premiers travaux sur l'holographie.

1.4 La transformée en ondelettes

On pourrait croire que cette la version locale de la TF à fenêtre est suffisante pour répondre aux besoins de l'analyse locale temps-fréquence. Il serait cependant intéressant d'avoir accès à un outil mathématique décomposant les signaux de façon plus complète. En effet, la précédente analyse, en fixant les dimensions de la fenêtre, limite sa portée. Pour des fréquences très élevées, la largeur de la fenêtre dans le domaine de définition peut être très étroite, mais alors, l'information pour les basses fréquences est perdue. D'un autre côté, si la fenêtre est plus large, l'information de fréquence est complète, mais la précision temporelle est perdue. C'est le problème auquel faisait face le géophysicien Jean Morlet [4] alors qu'il tentait, au début des années 80, d'analyser les échos de vibrations envoyées dans le sol afin de déduire l'épaisseur et la constitution des couches traversées par le signal incident.

La solution proposée fut alors de substituer à la fenêtre fixe, dans laquelle les fréquences variaient, une fenêtre de largeur variable contenant toujours le même nombre de périodes d'oscillation. La figure 2 montre trois fonctions oscillantes dont la largeur varie tout en gardant le même nombre d'oscillations. Ainsi, une plus petite fenêtre compresse les oscillations et représente les hautes fréquences avec une grande précision dans le temps alors qu'en dilatant la fenêtre, l'information de basse fréquence apparaît. Cette approche de Morlet rencontra, comme l'analyse de Fourier, un accueil mitigé. L'opinion du milieu voulait que, si un tel outil était efficace, il aurait déjà été découvert. Cependant, grâce à la rencontre de plusieurs visions différentes du problème, comme en

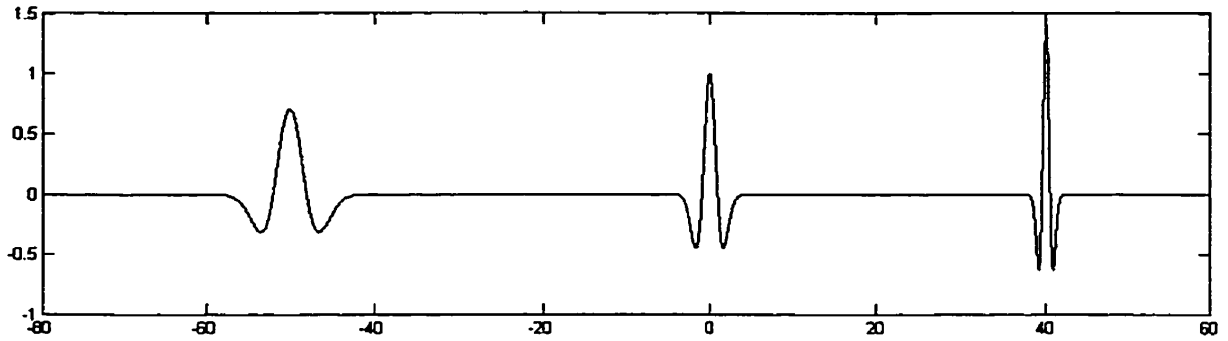


FIGURE 2. Fonctions oscillantes à largeur variable et oscillations constantes.

font foi les apports d'Alex Grossmann, physicien spécialiste de la mécanique quantique [2], et du mathématicien Yves Meyer [3], cette idée passa le test de la formalisation mathématique, tel que nous le verrons maintenant.

Considérons une fonction $\psi \in \mathcal{L}^2(\mathfrak{R})$ satisfaisant la relation

$$C_\psi := \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty. \quad (1.18)$$

Si cette condition est respectée, alors la fonction ψ est appelée ondelette et l'équation (1.18) est connue comme la condition d'admissibilité. Cette ondelette permet d'écrire une opération appelée transformée en ondelettes (TO) et exprimée comme

$$(W_\psi f)(s, \tau) := \int_{\mathfrak{R}} f(t) \overline{\psi_s(t - \tau)} dt, \quad (1.19)$$

où

$$\psi_s(t) = |s|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t}{s}\right). \quad (1.20)$$

Ici, on suppose que $f \in \mathcal{L}^2(\mathfrak{R})$ et $s \neq 0$. La variable τ paramétrise les translations de cette fonction et s représente le facteur d'échelle qui compresse (si $|s| < 1$) ou dilate (si $|s| > 1$) l'ondelette ψ . Les ondelettes variant selon ces deux paramètres sont appelées

ondelettes-filles et forment une base pour les fonctions appartenant à $\mathcal{L}^2(\mathfrak{R})$. De façon naturelle, la fonction originale qui génère cette base est alors nommée ondelette-mère. La TO donne donc l'information en fréquence du signal, donnée par le facteur d'échelle, alors que le paramètre de translation indique sa localisation temporelle. En définissant la fonction

$$\tilde{\psi}_s(t) = |s|^{-\frac{1}{2}} \overline{\psi\left(\frac{-t}{s}\right)}, \quad (1.21)$$

on peut réécrire la TO comme le produit de convolution suivant

$$(W_\psi f)(s, \tau) := f \star \tilde{\psi}_s(\tau). \quad (1.22)$$

Grâce à cette dernière expression, et en regardant de plus près la condition (1.18), certaines propriétés des ondelettes peuvent être déduites. En comparant les équations (1.7) et (1.18), on voit que l'ondelette ainsi définie est une fenêtre de largeur finie et donc, a un support compact. Une boîte d'Heisenberg pourra donc être associée à chaque ondelette-fille. De plus, pour une ondelette continue, l'équation (1.18) sera respectée seulement si $|\widehat{\psi}(0)| = 0$, ou, en d'autres mots, si la TF de l'ondelette est nulle en $\omega = 0$ et suffisamment petite aux alentours de l'origine. Ces considérations permettent d'interpréter l'ondelette comme la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bande. Cette propriété se traduit, dans le domaine temporel, comme suit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (1.23)$$

Ceci assure que ψ est une fonction "fenêtre" possédant un certain nombre d'oscillations le long de l'axe temporel, d'où le nom d'ondelette.

Comme c'était le cas avec la TF à fenêtre, la TO est une représentation redondante dans $\mathcal{L}^2(\mathfrak{R})$ et on peut ainsi recouvrir l'espace de phase grâce aux boîtes d'Heisenberg

sur lesquelles sont appliquées les diverses translations et dilatations dans \mathfrak{R}^2 . Comme ce fut le cas pour la TF et la TF à fenêtre, on peut alors exprimer les relations entre le signal et sa TO sous la forme d'une TO inverse et d'une identité de Plancherel

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \int_{\mathfrak{R}} (W_\psi f)(s, \tau) \psi_{\tau, s}(t) d\tau \quad (1.24)$$

$$\|f\|^2 = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \int_{\mathfrak{R}} |(W_\psi f)(s, \tau)|^2 d\tau. \quad (1.25)$$

Comme pour la TF à fenêtre, cette représentation n'est pas orthogonale et le "reproducing kernel" est défini comme suit

$$K(s_o, s, \tau_o, \tau) = \int_{\mathfrak{R}} \psi_s(t - \tau) \overline{\psi_{s_o}(t - \tau_o)} dt \quad (1.26)$$

permettant ainsi de caractériser les fonctions pouvant être la TO d'une autre fonction de $\mathcal{L}^2(\mathfrak{R})$.

Une caractéristique intéressante de la TO est la possibilité de décomposer le signal en deux parties: l'une décrivant sa TO pour des facteurs d'échelle inférieurs à un s_o fixé et l'autre étant une version de plus faible résolution du signal original. Ces faibles facteurs d'échelles décrivent en effet les variations de haute fréquence de la fonction analysée. Les soustraire du signal original revient donc à effectuer une opération de lissage réduisant la résolution. Cette scission du signal en deux parties permet d'introduire une nouvelle fonction d'analyse: la fonction d'échelle Φ , qui représente ce lissage. Elle peut être vue comme un agrégat d'ondelettes-filles d'échelle supérieure à l'unité. On peut alors définir la norme de la TF d'une telle fonction de la façon suivante

$$|\widehat{\Phi}(\omega)|^2 = \int_1^\infty |\widehat{\psi}(s\omega)|^2 \frac{ds}{s} \quad (1.27)$$

$$= \int_\omega^\infty |\widehat{\psi}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{\xi}. \quad (1.28)$$

La phase complexe peut alors être choisie arbitrairement. L'équation (1.18) permet alors d'énoncer une condition d'admissibilité pour cette fonction d'échelle sous la forme

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |\hat{\Phi}(\omega)|^2 = C_\psi. \quad (1.29)$$

Il est possible de vérifier que la fonction d'échelle peut être interprétée comme la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas. De plus, en définissant l'approximation à basses fréquences de f à une échelle s comme le produit de convolution suivant

$$(Lf)(\tau, s) = \left\langle f(t), \frac{1}{\sqrt{s}} \Phi_s(t - \tau) \right\rangle \quad (1.30)$$

$$= f \star \tilde{\Phi}_s(\tau) \quad (1.31)$$

où on a utilisé la notation suivante

$$\Phi_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Phi\left(\frac{t}{s}\right) \quad \text{et} \quad \tilde{\Phi}_s(t) = \Phi_s^*(-t).$$

Grâce à cette fonction d'échelle, il est maintenant possible de donner la formule exprimant cette décomposition du signal, soit

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{s_0} ((W_\psi f) \star \psi)(s, t) \frac{ds}{s^2} + \frac{1}{C_\psi s_0} ((Lf) \star \Phi)(s_0, t). \quad (1.32)$$

On voit donc que les équations (1.19) et (1.24) nous fournissent une paire de transformations qui permettent de passer d'un espace à une dimension temporelle à un espace d'ondelettes à deux dimensions donnant l'information de fréquence de façon locale le long de l'axe du temps. La TO inverse offre une décomposition du signal grâce à une base de $\mathcal{L}^2(\mathfrak{R})$ et chaque ondelette de cette base appartient elle aussi à l'ensemble des fonctions de carré sommable. Elle est de plus localisée en temps et en fréquence, formant un fenêtrage admissible pour l'analyse. Il est également possible de scinder en

deux le signal, une partie représentant les détails extraits par la TO pour de basses échelles et l'autre donnant une version lissée du dit signal. Ainsi, l'intuition de Morlet et ses travaux avec Grossman et Meyer [1] ont su mener à un outil d'analyse bien défini mathématiquement qui répond à certaines questions laissées sans réponse par l'analyse de Fourier.

1.5 Applications de la transformée en ondelettes en l'optique

L'analyse de Fourier s'est trouvée une place de choix dans l'étude des phénomènes optiques. Notamment, comme nous l'avons déjà mentionné, la base utilisée par la TF est composée de fonction représentant la dépendance par rapport au temps d'une onde monochromatique. De plus, comme nous le verrons au début du prochain chapitre, une TF relative aux quatre paramètres d'une onde lumineuse, soit le temps et les trois dimensions spatiales, prend pour base une série d'ondes planes monochromatiques.

Une autre application majeure de la TF à l'optique réside dans sa réalisation en laboratoire. En effet, la propagation d'une onde selon un axe perpendiculaire à une figure d'amplitude donné fournira sa TF si l'on se place à l'infini dans le cas de libre propagation. Pratiquement, il est alors possible d'observer ce phénomène en se plaçant au foyer d'une lentille convergente, tel que montré à la figure 3. Ainsi, en plus d'être un outil d'analyse applicable à l'optique, la TF est une opération pouvant être réalisée optiquement. Ce double lien a conduit à une approche différente du domaine

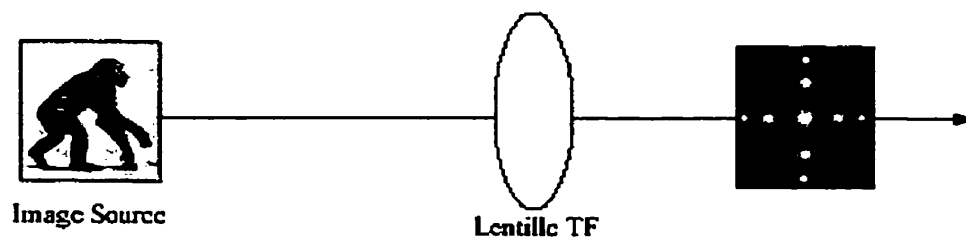


FIGURE 3. Réalisation optique de la transformée de Fourier grâce à une lentille convergente.

et l'on parle aujourd'hui de l'optique de Fourier comme d'un formalisme ayant permis de grands développements, notamment en holographie, en optique diffractive et en traitement optique de l'information.

Il est alors tout naturel de s'interroger sur l'intérêt que la TO peut avoir en optique. Comme nous l'avons vu, des liens étroits existent entre la TF et la TO. Ceci nous permet d'entrevoir certaines applications directes de la TO dans le domaine de l'optique. La présente section vise justement à survoler certains liens entre les ondelettes et l'optique.

On peut d'ores et déjà diviser les applications de la TO en optique en deux grandes catégories. Elle joue en effet le rôle principal pour lequel elle fut développée: l'analyse du signal. D'autre part, l'optique peut servir à réaliser la transformation, comme ce fut le cas pour la TF. Nous verrons donc brièvement dans cette section comment la réalisation optique de la TO peut être effectuée. L'analyse de phénomènes physiques par la TO étant au coeur de la présente thèse, elle sera traitée plus en profondeur dans le prochain chapitre où nos travaux sur les relations entre TO et diffraction de la lumière seront détaillés.

Lors des recherches visant à réaliser la TO optique, les cas impliquant la lumière cohérente et la lumière incohérente furent étudiés. Puisqu'une grande partie des applications actuelles utilisent le laser comme source lumineuse, l'approche cohérente retient davantage notre attention.

Comme nous l'avons vu lorsque la théorie des ondelettes fut présentée, deux opérations majeures génèrent la transformation : la dilatation du signal et sa convolution avec la base d'ondelettes. (Notons que, dans la littérature reliée aux ondelettes, le terme dilatation sert indifféremment à décrire une contraction ou une dilatation.) Il est bien connu que la convolution peut facilement être obtenue optiquement à l'aide de corrélateurs. La dilatation, pour sa part, s'avère plus difficile puisqu'elle introduit un degré de liberté supplémentaire, soit le paramètre d'échelle. De ce fait, il fut naturel d'aborder, dans un premier temps, la réalisation de la TO en une dimension donnant un résultat bi-dimensionnel dans le plan de sortie. Cette approche fut réalisée en 1992

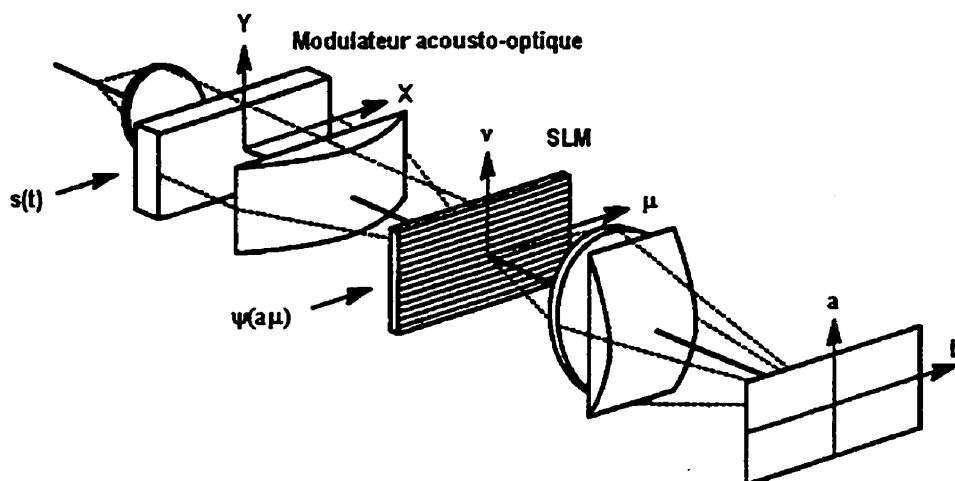


FIGURE 4. Réalisation optique de la transformée en ondelettes.

[7] par la convolution d'un signal 1-D procurant un résultat 2-D à la sortie du système optique. Le montage qui fut alors utilisé est montré à la figure 4.

Le signal d'entrée, $s(t)$, est affiché sur un modulateur acousto-optique illuminé par une source cohérente (laser). Une lentille cylindrique effectue la TF 1-D de $s(t)$ le long de l'axe des t . L'information spectrale 1-D, contenue le long de l'axe μ , est alors convoluée avec les filtres $\psi(a\mu)$. Cette opération produit des bandes horizontales modulant le spectre différemment, le paramètre a variant le long de l'axe vertical. La TF inverse en 1-D est alors effectuée par une lentille cylindrique, produisant, dans le plan de sortie, une TO exprimée comme une décomposition espace-fréquence, l'axe vertical donnant l'information d'échelle a (fréquence) et l'axe horizontal donnant le paramètre de translation b (position dans l'espace de la fréquence étudiée).

Une autre approche visant à réaliser la TO optiquement utilise le "Joint Transform Optical Correlator". Dans ce cas précis, les fonctions d'ondelettes sont affichées dans le plan d'entrée, juxtaposées au signal à transformer. La corrélation entre les deux parties de la scène d'entrée est alors effectuée en utilisant l'expression spatiale de l'ondelette plutôt qu'un filtre représentant son comportement spectral. Les résultats obtenus par

cette deuxième méthode sont similaires à ceux présentés dans la première approche. Cependant, vu la duplication des données dans le plan d'entrée, le produit espace-bande est plus élevé que celui de la méthode utilisant les filtres.

1.6 Conclusion

Nous avons présenté, au cours de ce chapitre, la transformée en ondelettes continue comme un outil d'analyse qui permet une étude spatiale (ou temporelle) et fréquentielle simultanément. Nous avons revu les grandes lignes de son développement à partir de la transformée de Fourier. De plus, nous avons exposé la réalisation optique de ces deux concepts mathématiques. Les applications de cet outil en optique ne furent toutefois pas traités exhaustivement. Notamment, plusieurs travaux, effectués au Laboratoire de traitement optique de l'information à l'Université Laval, ne furent pas abordés ici [8], [9].

Dans le prochain chapitre, nous présenterons nos travaux qui tissèrent les liens entre la transformée en ondelettes continue et les lois de l'électromagnétisme. Nous en déduirons des équivalences entre cette analyse espace-fréquences et certains concepts de base de l'optique. Plus précisément, notre étude se penchera sur la diffraction scalaire et les faisceaux non diffractants, nous menant vers une généralisation polychromatique de ces deux phénomènes.

CHAPITRE 2

Ondelettes électromagnétiques

2.1 Introduction

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre précédent, la théorie des ondelettes semble pouvoir établir d'étroits liens avec l'optique. L'une des avenues parmi les plus prometteuses consiste en une expression du principe de la diffraction sous forme de transformée en ondelettes. Déjà, quelques approches ont tenté de construire le pont reliant les deux concepts. Toutefois, elles se sont toutes avérées infructueuses. Cette thèse vise à remédier à cette situation en présentant les travaux qui démontrent l'équivalence entre le principe de Huygens pour la diffraction et la version scalaire d'une ondelette développée par Gerald Kaiser [10]. De plus, nous aborderons un autre aspect de l'optique en modifiant cette même ondelette afin de fournir un outil d'analyse pour les faisceaux non diffractants.

Dans ce chapitre, nous verrons d'abord la plus sérieuse tentative d'unir les concepts d'ondelettes et de diffraction qui ait précédé nos travaux. Nous montrerons sa logique et exposerons ses failles majeures. Ensuite, nous introduirons l'ondelette électromagné-

tique de Kaiser. Cette entrée en matière mènera à nos travaux visant à exprimer la diffraction en terme d'ondelettes. L'étude des faisceaux non diffractants en optique, qui utilise une version modifiée de cette ondelette, est finalement présentée.

2.2 Ondelettes d'Onural pour la diffraction

Une première approche visant à démontrer le lien direct unissant ondelettes et diffraction fut introduite par Levent Onural [11]. Dans ces travaux, le point de départ est l'approximation de Huygens-Fresnel pour la diffraction d'un champ monochromatique, donnée par

$$U_z(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \int_{\mathbb{R}^2} U_0(\xi, \eta) \exp \left\{ i \frac{k}{2z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right\} d\xi d\eta, \quad (2.1)$$

où $k = 2\pi/\lambda$, λ est la longueur d'onde et U_0 est une distribution bidimensionnelle connue. En examinant cette approximation, on remarque qu'elle peut s'écrire sous la forme d'un système linéaire invariant sous translation ayant la forme suivante

$$U_z(x, y) = U_0(x, y) \star \star h_z(x, y), \quad (2.2)$$

où la double étoile correspond à une convolution en deux dimensions et la réponse impulsionnelle est donnée par

$$h_z(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp \left[i \frac{k}{2z} (x^2 + y^2) \right]. \quad (2.3)$$

On peut alors voir un lien direct entre l'expression de la TO sous forme de convolution, telle que définie à l'équation (1.22) et l'approximation de Huygens-Fresnel.

En effet, en choisissant l'ondelette-mère comme

$$\psi(x, y) = \exp \left[i \frac{(x^2 + y^2)}{s_0^2} \right] \quad (2.4)$$

où s_0 est le facteur d'échelle unité, introduit pour tenir compte de la dimensionalité. Les ondelettes-filles sont définies par un facteur d'échelle dépendant de la distance de diffraction ($s = \sqrt{2z/k}$) ainsi que des translations données par ξ et η , on retrouve bien une TO redonnant l'expression (2.1).

Cependant, le problème principal de cette approche est que l'ondelette définie à l'équation (2.4) ne répond pas à la condition d'admissibilité donnée à l'équation (1.18). Bien qu'Onural ait redéfini une nouvelle condition d'admissibilité, celle-ci ne peut que définir une nouvelle transformation d'échelle qui ne possède pas les principales propriétés de la TO, notamment la localisation spatiale.

Toutefois, cette approche visant à réunir TO et diffraction a suscité un intérêt certain dans la communauté optique [7] et nous incita à examiner une nouvelle ondelette, ayant la propriété d'être solution des équations de Maxwell, afin de l'appliquer au problème de la diffraction. Dans les prochaines sections, nous introduirons les notions de base ayant mené à l'élaboration de cette ondelette et expliciterons nos travaux qui menèrent à l'expression du principe de Huygens-Fresnel sous la forme d'une TO.

2.3 Champ électromagnétique, transformée de Fourier et signal analytique

Dans un premier temps, il importe de s'attarder à la nature du champ électromagnétique, que nous voulons analyser. Ainsi, les contraintes physiques régissant un tel champ doivent être retrouvées dans la formulation mathématique désirée. Pour ce faire, étudions tout d'abord les contraintes inhérentes à la nature d'un champ lumineux.

Ces dernières sont exprimées par les lois de l'électromagnétisme. Elles sont donc

régies par les équations de Maxwell. Ceci implique une invariance du champ sous le groupe des transformations conformes, i.e. les transformations qui respectent les invariances de l'électromagnétisme. Celles-ci comprennent, entre autres, les translations dans l'espace-temps et le changement d'échelle uniforme. On note immédiatement une similitude avec les invariances intrinsèques de la TO. Cependant, l'espace de Hilbert formé des solutions aux équations de Maxwell est plus restreint que $\mathcal{L}^2(\mathfrak{R})$. Il faudra donc ajouter certaines contraintes à l'analyse par ondelettes précédemment présentée. En plus des invariances similaires à celles retrouvées avec la TO, le groupe des transformations conformes contient d'autres symétries dont l'invariance sous rotations et transformations de Lorentz.

L'approche qui nous mènera à une ondelette électromagnétique suivra un certain nombre d'étapes. Premièrement, il importe de noter que le nombre de paramètres définissant une transformation est relié directement au nombre de symétries de la transformée qu'elle définit. Ainsi, la TF ayant un seul paramètre, soit la fréquence, elle introduira une seule symétrie de translation. La TO, avec ses deux paramètres, renfermera la même symétrie de translation tout en y ajoutant une dépendance relative à l'échelle. Puisque la TO est une extension de la TF, au niveau des symétries, nous débuterons cette étude en exprimant les solutions aux équations de Maxwell grâce à l'analyse de Fourier.

2.3.1 Électromagnétisme et analyse de Fourier

Une onde électromagnétique dans le vide est décrite par une paire de vecteurs: le champ électrique $\vec{E}(t, \vec{r})$ et l'induction magnétique $\vec{B}(t, \vec{r})$. On note que ces vecteurs dépendent de quatre variables, nommément le temps et les trois dimensions spatiales. Ils sont régis par les quatre équations de Maxwell dans le vide

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= 0 & \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} &= 0 & \nabla \cdot \vec{B} &= 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

où ∇ est l'opérateur différentiel et ∂_t est la dérivée par rapport au temps [12]. Pour plus de concision, nous avons posé la vitesse de la lumière $c = 1$ puisqu'il est aisé de réintroduire ce paramètre en cours de calcul grâce à une analyse dimensionnelle.

De ces équations, on prouve facilement que les champs électrique et magnétique sont perpendiculaires. Ainsi, une représentation sous forme de structure complexe n'amène aucune perte de généralité. Ainsi, en exprimant $\vec{F} \equiv \vec{B} + i\vec{E}$, nous pouvons réécrire l'équation (2.5) sous une forme plus concise, soit

$$\begin{aligned}\partial_t \vec{F} &= i\nabla \times \vec{F} \\ \nabla \cdot \vec{F} &= 0.\end{aligned}\tag{2.6}$$

En prenant le rotationnel de la première de ces équations et en utilisant la contrainte donnée par la deuxième, on peut développer comme suit

$$\begin{aligned}\nabla \times (\partial_t \vec{F}) &= \nabla \times (i\nabla \times \vec{F}), \\ \partial_t (\nabla \times \vec{F}) &= i\nabla (\nabla \cdot \vec{F}) - i\nabla^2 \vec{F}, \\ -i\partial_t^2 \vec{F} &= -i\nabla^2 \vec{F}, \\ \partial_t^2 \vec{F} &= \nabla^2 \vec{F}.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Cette dernière expression montre que chaque composante de \vec{F} peut être découplée et chacune répond à l'équation d'onde. Afin de résoudre les équations (2.6), le champ \vec{F} est exprimé comme une TF dans l'espace-temps

$$\vec{F}(t, \vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^4} d\omega d^3\vec{k} e^{i\omega t} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \widehat{\vec{F}}(\omega, \vec{k})\tag{2.8}$$

où ω est encore ici la fréquence temporelle de l'onde et \vec{k} le vecteur de propagation dont la norme est donnée par $2\pi/\lambda$. En remplaçant le champ électromagnétique retrouvé à

l'équation (2.7) par sa TF définie par l'équation (2.8), alors une contrainte des équations de Maxwell est donnée par

$$\omega^2 - k^2 = 0 \quad (2.9)$$

où on a défini $k = |\vec{k}|$. Ceci implique que les solutions \hat{F} doivent être supportées sur le cône causal, aussi appelé cône de lumière, puisqu'un photon (vitesse = c) passant par l'origine ne peut être situé en dehors de la surface des deux hyper-cônes (quatre dimensions) représentés schématiquement en trois dimensions à la figure 5.

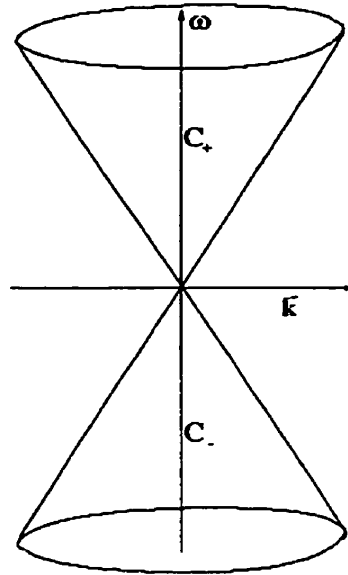


FIGURE 5. Double cône causal sur lequel doivent être définies les solutions des équations de Maxwell par rapport à leurs dépendances fréquentielles

Mathématiquement, cette contrainte s'exprime en introduisant une fonctionnelle delta de Dirac. Ainsi, la TF du champs s'exprimera comme

$$\hat{F}(\omega, \vec{k}) = 2\pi\delta(\omega^2 - k^2)\vec{f}(\omega, \vec{k}). \quad (2.10)$$

En utilisant la formule pour exprimer le delta d'une fonction quelconque ($\delta(f(x))$) par

rapport à une forme ne faisant intervenir que la forme primitive de delta ($\delta(x - x_0)$) [13], on trouve que

$$\delta(\omega^2 - k^2) = \delta((\omega - k)(\omega + k)) = \frac{\delta(\omega - k) + \delta(\omega + k)}{2k} \quad (2.11)$$

et on peut alors réécrire l'équation (2.8) comme suit

$$\begin{aligned} \vec{F}(t, \vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{k}}{2k} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \left(e^{ikt} \vec{f}(\vec{k}, +k) + e^{-ikt} \vec{f}(\vec{k}, -k) \right) \\ &= \int_C d\vec{k} e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \vec{f}(\omega, \vec{k}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

où on a défini le domaine d'intégration C , qui correspond à la surface du cône causal, i.e. $k = \pm\omega$, et la mesure invariante de Lorentz sur ce domaine, donnée par

$$d\vec{k} = (2\pi)^{-3} \frac{d^3\vec{k}}{2k}. \quad (2.13)$$

Pour que le champ \vec{F} soit une solution des équations de Maxwell, nous devons inclure une condition supplémentaire afin de tenir compte de la nature vectorielle de tels champs. En effet, cette représentation doit exprimer le fait que le vecteur de propagation \vec{k} ainsi que les vecteurs champs \vec{E} et \vec{B} forment un trièdre orthogonal. Cette exigence peut être rencontrée en définissant l'opérateur matriciel suivant

$$\Pi(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{2\omega^2} \begin{pmatrix} \omega^2 - k_x^2 & -k_x k_y + i\omega k_z & -k_x k_z - i\omega k_y \\ -k_x k_y - i\omega k_z & \omega^2 - k_y^2 & -k_y k_z + i\omega k_x \\ -k_x k_z + i\omega k_y & -k_y k_z - i\omega k_x & \omega^2 - k_z^2 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

le développement menant à la définition de cet opérateur pouvant être trouvé dans la

référence [10]. Grâce à cet opérateur, on peut modifier l'équation (2.12) comme suit

$$\vec{F}(t, \vec{r}) = \int_C d\vec{k} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \mathbf{\Pi}(\omega, \vec{k}) \vec{f}'(\omega, \vec{k}). \quad (2.15)$$

Ainsi, la fonction vectorielle \vec{f}' n'est soumise à aucune contrainte due à la nature électromagnétique du champ.

L'opérateur $\mathbf{\Pi}$ s'avère être un opérateur de projection sur les différentes polarisations du champ. Il peut alors être montré que $\vec{f}' \mapsto \vec{F}$ n'est pas une correspondance bijective. Ceci se traduit par un concept majeur de l'électromagnétisme: l'invariance de jauge. Les champs définis précédemment, bien que mieux adaptés aux mesures physiques directes, ne constituent pas les concepts les plus fondamentaux de l'électromagnétisme. Pour obtenir l'information de base reliée à l'interaction électromagnétique, le quadrivecteur potentiel doit être introduit. Ce dernier, formé du potentiel scalaire A_0 et du potentiel vecteur \vec{A} , permet d'exprimer les champs précédemment définis par les relations

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\partial_t \vec{A} - \nabla A_0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

On peut montrer que ces potentiels répondent chacun à l'équation d'onde. Ainsi, il est possible de les exprimer comme une transformation de Fourier, i.e.

$$\begin{aligned} \vec{A}(t, \vec{r}) &= \int_C d\vec{k} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \vec{a}(\omega, \vec{k}) \\ A_0(t, \vec{r}) &= \int_C d\vec{k} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} a_0(\omega, \vec{k}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

En introduisant l'équation (2.17) dans l'équation (2.16) et en effectuant le même type d'analyse ayant mené à la formulation du champ \vec{F} retrouvée à l'équation (2.15), on trouve que

$$\vec{f}(\omega, \vec{k}) = 2\omega \mathbf{\Pi}(\omega, \vec{k}) \vec{a}(\omega, \vec{k}) \quad (2.18)$$

ou, sous une autre forme

$$\vec{f}'(\omega, \vec{k}) = 2\omega\vec{a}(\omega, \vec{k}) + \mathcal{G} \quad (2.19)$$

où \mathcal{G} est un terme qui est annulé par l'application de l'opérateur Π . Ce terme, qui montre la multiplicité des solutions \vec{f}' , est directement associé à l'invariance de jauge dans la représentation $\vec{B} + i\vec{E}$ vue dans l'espace de Fourier.

2.3.2 Signal analytique d'un champ électromagnétique

Afin d'exprimer le champ \vec{F} sous la forme d'une TO, nous devons faire appel à la notion de signal analytique (SA), introduite par Gabor en 1946 [14] et généralisée par Kaiser [10]. Gabor présenta le SA pour les fonctions possédant un spectre de fréquences positif puisque de telles fonctions supportent une généralisation analytique au plan complexe. Ainsi, un temps complexe est introduit et les nouvelles fonctions, générées par cette transformation en signal analytique, sont définies analytiquement sur tout le demi-plan supérieur de l'espace bidimensionnel. Ceci est obtenu grâce à l'introduction de la nouvelle variable "temps complexe", notée s . Mathématiquement, le SA est défini comme suit

$$\tilde{f}(t + is) = \frac{1}{i\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau}{\tau - i} f(t + s\tau) \quad (2.20)$$

et la généralisation en quatre dimensions est directe. Elle est donnée par

$$\vec{\tilde{F}}(t + is, \vec{r} + i\vec{y}) = \frac{1}{i\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau}{\tau - i} \vec{F}(t + s\tau, \vec{r} + \tau\vec{y}). \quad (2.21)$$

Remplacer (2.8) dans (2.21) permet de développer ce SA dans le domaine de Fourier.

Ainsi, on trouve

$$\begin{aligned} \vec{\tilde{F}}(t + is, \vec{r} + i\vec{y}) &= \frac{1}{i\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau}{\tau - i} \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^4} d\omega d^3\vec{k} \vec{\tilde{F}}(\omega, \vec{k}) e^{i\omega(t+s\tau)} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}+\tau\vec{y})} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^4} d\omega d^3\vec{k} \vec{\tilde{F}}(\omega, \vec{k}) e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{i\pi} \frac{d\tau}{\tau - i} e^{i\tau(\omega s - \vec{k}\cdot\vec{y})} \end{aligned} \quad (2.22)$$

et en effectuant l'intégrale de contour par rapport à τ , on trouve finalement l'expression du SA dans le domaine de Fourier,

$$\vec{F}(t + is, \vec{r} + i\vec{y}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^4} d\omega d^3\vec{k} 2\theta(\omega s - \vec{k} \cdot \vec{y}) e^{i\omega(t+is)} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r} + i\vec{y})} \vec{F}(\omega, \vec{k}), \quad (2.23)$$

où on introduit la fonction suivante

$$\theta(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi > 0 \\ \frac{1}{2} & \xi = 0 \\ 0 & \xi < 0 \end{cases} . \quad (2.24)$$

De plus, si nous voulons exprimer le SA d'un champ électromagnétique, il suffit d'inclure les contraintes vues précédemment en exprimant la TF de \vec{F} comme le produit donné par $\delta(\omega^2 - k^2)\Pi(\omega, \vec{k})\vec{f}'(\omega, \vec{k})$. Ainsi, le SA d'un tel champ s'exprime sous la forme

$$\vec{F}(t + is, \vec{r} + i\vec{y}) = \int_C d\vec{k} 2\theta(\omega s - \vec{k} \cdot \vec{y}) e^{i\omega(t+is)} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r} + i\vec{y})} \Pi(\omega, \vec{k}) \vec{f}'(\omega, \vec{k}). \quad (2.25)$$

Sans entrer dans les détails, notons que la nature analytique de l'expression ici trouvée est régie par des contraintes similaires au champ électromagnétique transformé. Ainsi, les paramètres s et \vec{y} sont soumis à un domaine de définition sur lequel l'analyticité est conservée, comme les variables t et \vec{r} qui doivent être supportées sur le cône causal. Ici, le domaine de définition est appelé cône causal dual et est donné par

$$V' \equiv \{y \in \mathbb{R}^4 : p \cdot y > 0 \quad \forall p \in \partial C\}, \quad (2.26)$$

où ∂C correspond à la surface délimitant le cône causal. Lors de l'extension analytique, on définit le tube causal suivant

$$\mathcal{T} \equiv \{z = x + iy \in C^4 : y \in V'\}. \quad (2.27)$$

En revenant sur l'expression (2.25), on peut voir que le SA a la structure nécessaire pour devenir une transformée en ondelettes. En plus du caractère analytique de cette représentation, démontré à la référence [10], on note qu'elle est représentée comme une TF multipliée par une fenêtre ayant la forme $2\theta(\omega s - \vec{k} \cdot \vec{y})e^{-(\omega s - \vec{k} \cdot \vec{y})}$, la fonction θ assurant une décroissance exponentielle et, par le fait même, la localisation du SA. Il faudra cependant définir la forme qu'elle prendra et son respect de la condition d'admissibilité. Ces considérations seront traitées dans la prochaine section.

2.4 Ondelette électromagnétique de Kaiser

Dans cette section, nous survolerons les développements qui menèrent à l'introduction des ondelettes de Kaiser, telles que présentées à la référence [10], en y posant un regard orienté sur leur nature physique dans le cadre d'une future étude de la diffraction optique. Grâce à l'expression donnée pour le champ électromagnétique à l'équation (2.15), on peut définir un espace de Hilbert \mathcal{H} pour les solutions de Maxwell en définissant un produit scalaire entre deux champs \vec{F} et \vec{G} :

$$\langle \vec{F}, \vec{G} \rangle = \int_C \frac{d\vec{k}}{k^2} \vec{f}(\omega, \vec{k})^* \mathbf{\Pi}(\omega, \vec{k}) \vec{g}(\omega, \vec{k}). \quad (2.28)$$

Dans cette expression, les fonctions \vec{f} et \vec{g} n'ont d'autre contrainte que d'être de carré sommable et l'opérateur de projection $\mathbf{\Pi}$ n'est pas élevé au carré puisque l'application répétée d'un opérateur de projection ne modifie pas le résultat obtenu par une application unique ($\mathbf{\Pi}^n = \mathbf{\Pi}$).

On peut alors remarquer que le SA, tel qu'exprimé à l'équation (2.25), peut être l'expression d'un produit scalaire entre le champ électromagnétique et la fonction suivante, exprimée sous forme de matrice:

$$\psi_z(p) = 2k^2 \theta(p \cdot y) e^{ip \cdot x} e^{-p \cdot y} \mathbf{\Pi}(p). \quad (2.29)$$

On a ici posé $z = x + iy$, où x est le quadrivecteur formé par (t, \vec{r}) et où y est formé par (s, \vec{y}) . On a également défini p comme étant le quadrivecteur fréquentiel (ω, \vec{k}) . Le produit scalaire entre ces quadrivecteurs est régi par les lois de la relativité restreinte et utilise ainsi la métrique de Minkowski donnée par la matrice:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

La décroissance exponentielle de la partie scalaire de ψ nous permet de constater qu'elle est de carré sommable. Afin d'en faire une solution aux équations de Maxwell, nous avons multiplié cette partie scalaire par l'opérateur $\mathbf{\Pi}$. En regardant de plus près les colonnes de cette matrice, telle que définie à l'équation (2.14), on remarque qu'elles correspondent à trois vecteurs orthogonaux. Ainsi, chaque colonne de la matrice d'ondelette obtenue à l'équation (2.29) définira un vecteur répondant aux équations de Maxwell. En considérant alors une solution matricielle de ces équations, le SA peut être redéfini comme suit

$$\vec{\tilde{F}}(z) = \langle \psi_z^* | \vec{F} \rangle. \quad (2.31)$$

La fonction matricielle ψ_z est l'expression spectrale d'un triède vectoriel d'ondelettes électromagnétiques, les trois colonnes de la matrice formant les vecteurs du triède ici introduit. Il aurait également été possible de choisir arbitrairement quelque base orthonormale de vecteurs qui, multipliés par l'opérateur $\mathbf{\Pi}$, auraient donné trois nouvelles solutions d'ondelettes des équations de Maxwell.

2.4.1 Calcul de l'ondelette électromagnétique en fonction des variables spatio-temporelles

L'expression de l'ondelette en fonction des variables d'espace-temps se déduit en considérant sa TF inverse telle que définie à l'équation (2.29).

$$\Psi_z(x') = \int_C d\tilde{k} 2k^2 \theta(p \cdot y) e^{ip \cdot (x' - \bar{z})} \Pi(p). \quad (2.32)$$

Afin de calculer explicitement cette intégrale, il est nécessaire de suivre un cheminement en plusieurs étapes. Nous les énumérerons maintenant.

Tout d'abord, en décomposant l'exposant de l'exponentielle, on obtient

$$\begin{aligned} ip \cdot (x' - \bar{z}) &= i[p \cdot (x' - x + iy)] \\ &= i[p \cdot (x' - x)] + i[p \cdot iy] \\ &= i[p \cdot (x' - x)] + i[p \cdot (-i\bar{y})]. \end{aligned}$$

Sans perdre de généralité, on peut donc poser l'égalité suivante

$$\Psi_z(x') = \Psi_{iy}(x' - x). \quad (2.33)$$

Par ce raisonnement, on voit qu'il est possible d'exprimer toutes les ondelettes comme les translations spatio-temporelles de

$$\Psi_{iy}(x) = \int_C d\tilde{k} 2k^2 \theta(p \cdot y) e^{-p \cdot (y - ix)} \Pi(p). \quad (2.34)$$

On peut alors montrer que, par la définition même du signal analytique duquel découle cette fonction d'ondelette, l'expression (2.34) est analytique pour $w = y + ix$, et ce pour tout iw appartenant au tube causal \mathcal{T} défini plus tôt. Par extension analytique, il est alors possible de déduire $\Psi_{iy}(x) \forall x$ à partir de $\Psi_{iy}(0)$, en remplaçant y par $y - ix$.

Avant d'aborder la résolution de l'intégrale retrouvée à l'équation (2.32), observons quelques propriétés de $\Psi_{iy}(0)$ qui sauront être utile pour la suite des calculs. Soient les deux intégrales suivantes

$$\begin{aligned}\Psi_{iy}(0) &= \int_C d\tilde{k} 2 k^2 \theta(p \cdot y) e^{-p \cdot y} \Pi(p) \\ \Psi_{-iy}(0) &= \int_C d\tilde{k} 2 k^2 \theta(-p \cdot y) e^{p \cdot y} \Pi(p).\end{aligned}\quad (2.35)$$

Notons premièrement que le domaine d'intégration, le cône causal, est symétrique par rapport à l'origine du 4-espace des fréquences. Ainsi, dans la deuxième intégrale, on peut effectuer la substitution $p \rightarrow -p$ sans en changer le résultat. On obtient alors

$$\Psi_{-iy}(0) = \int_C d\tilde{k} 2 k^2 \theta(p \cdot y) e^{-p \cdot y} \Pi(-p).\quad (2.36)$$

Or, l'équation (2.14) nous montre que

$$\Pi(p) = \Pi(-p).\quad (2.37)$$

En combinant les équations (2.36) et (2.37), on déduit l'égalité suivante

$$\Psi_{iy}(0) = \Psi_{-iy}(0).\quad (2.38)$$

Ainsi, sans perdre de généralité, on peut calculer l'intégrale en considérant y défini sur le demi-cône dual où $p \cdot y \geq 0$ (ceci est rendu possible grâce à la fonction de Heaviside qui restreint l'intégration à un seul demi-cône). On peut alors montrer la correspondance entre le demi-cône dual V' positif et le demi-cône C positif [10]. On obtient alors l'intégrale à évaluer, soit

$$\Psi_{iy}(0) = \int_{C^+} d\tilde{k} 2 k^2 e^{-p \cdot y} \Pi(p), \quad y \in V'_+.\quad (2.39)$$

Considérons l'intégrale génératrice suivante

$$S(\mathbf{y}) \equiv \int_{C^+} d\tilde{k} e^{-p \cdot \mathbf{y}}, \quad \mathbf{y} \in V'_+. \quad (2.40)$$

En observant de près les équations (2.39) et (2.14), on voit que chaque entrée de la matrice $\Psi_{iy}(0)$ sera composée d'une somme de fonctions scalaires ayant la forme intégrale suivante

$$\int_{C^+} d\tilde{k} p_m p_n e^{-p \cdot \mathbf{y}} = \frac{\partial \partial S(\mathbf{y})}{\partial y_m \partial y_n} = S_{m n}(\mathbf{y}), \quad m, n \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad p_0 \equiv \omega. \quad (2.41)$$

Ainsi, on obtiendra les entrées de la matrice recherchée en dérivant la fonction génératrice par les variables désirées du quadrivecteur \mathbf{y} . Il ne reste donc qu'à calculer explicitement la fonction génératrice en fonction des variables spatio-temporelles.

On remarque que la fonction $S(\mathbf{y})$ est invariante sous transformation de Lorentz puisque le produit des quadrivecteurs p et \mathbf{y} et la mesure invariante $d\tilde{k}$ le sont sur le demi-cône d'intégration. On peut donc trouver une transformation de Lorentz Λ ayant la propriété suivante

$$\Lambda(y_0, \vec{y}) = (\sqrt{y_0^2 - |\vec{y}|^2}, \vec{0}) = (\lambda, \vec{0}). \quad (2.42)$$

L'invariance de S sous ce groupe de symétrie implique alors que

$$S(y_0, \vec{y}) = S(\lambda, \vec{0}) \quad (2.43)$$

et donc que

$$\begin{aligned} S(\mathbf{y}) &= \int_{C^+} d\tilde{k} e^{-p \cdot \mathbf{y}} \\ &= \int_{C^+} d\tilde{k} e^{-k \sqrt{y_0^2 - |\vec{y}|^2}} \\ &= \int_{C^+} d\tilde{k} e^{-k \lambda}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

On réintroduit alors la forme explicite de la mesure invariante en coordonnées sphériques et on exprime la contrainte de causalité en remplaçant ω par k afin de trouver

$$\begin{aligned}
S(y) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} e^{-k\lambda} \\
&= \int_0^{2\pi} d\psi_k \int_0^\pi d\theta_k \int_0^\infty \frac{dk}{16\pi^3 k} k^2 e^{-k\lambda} \\
&= \frac{4\pi}{16\pi^3} \int_0^\infty k e^{-k\lambda} dk \\
&= \frac{1}{4\pi^2 \lambda^2} = \frac{1}{4\pi^2 y^2} = \frac{1}{4\pi^2 (s^2 - |\vec{y}|^2)}.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

On peut alors calculer la forme générale des dérivées de $S(y)$

$$S_{m\ n} = \frac{4 y_m y_n - \mathbf{M}_{m\ n} y^2}{2 \pi^2 (y^2)^3}. \tag{2.46}$$

Nous avons donc obtenu la forme explicite des fonctions génératrices qui permettent de calculer la nature spatio-temporelle de la matrice d'ondelettes. Ces expressions nous seront très utiles dans la prochaine section alors que nous étudierons la diffraction scalaire vue comme une transformée en ondelettes. Mais avant d'y arriver, d'autres propriétés doivent être définies afin de pouvoir utiliser une telle transformation. C'est ce que nous verrons maintenant.

2.4.2 Construction et décomposition d'un champ électromagnétique en utilisant une base d'ondelettes

Afin que l'ondelette ici introduite forme une base pour les champs électromagnétiques, il importe de fournir l'expression qui mènera à la construction et à la décomposition de nouveaux champs. Ceci se fait en construisant une résolution de l'identité pour ces ondelettes en passant par l'expression d'un produit scalaire de l'espace de Hilbert des signaux analytiques en terme des variables spatio-temporelles. Ce nouvel

espace de Hilbert sera donné par

$$\tilde{\mathcal{H}} \equiv \left\{ \vec{\tilde{F}} : \vec{F} \in \mathcal{H} \right\}. \quad (2.47)$$

Le signal analytique doit être vu comme une extension au plan complexe d'un champ réel, n'altérant pas sa nature intrinsèque. Ainsi, la conservation d'énergie du signal impose l'existence d'une forme équivalente de la formule de Plancherel pour le signal analytique. Afin d'obtenir une telle relation, il suffit de considérer les signaux analytiques sur la région euclidienne, définie comme

$$E \equiv \left\{ z = (is, \vec{r}) : \vec{r} \in \mathfrak{R}^3, s \in \mathfrak{R} \setminus 0 \right\}. \quad (2.48)$$

Cette région, utilisée en théorie quantique des champs, doit son nom au fait que la norme invariante lorentzienne au carré, définie sur cet ensemble, se ramène à la négative de la norme euclidienne. Avec ce choix, nous posons donc $\vec{y} \equiv \vec{0}$ et $t \equiv 0$. La première égalité est facilement acceptable puisque le choix du quadrivecteur y , en tant que paramètre du signal analytique, est arbitraire. Nous expliquerons plus tard les motivations menant à la deuxième égalité. Mentionnons toutefois que notre motivation est due à la contrainte unissant les trois variables spatiales à t .

Fort de ces considérations, nous introduisons le produit scalaire dans l'espace $\tilde{\mathcal{H}}$:

$$\left\langle \vec{\tilde{F}}^* \mid \vec{\tilde{G}} \right\rangle = \int_E d^3\vec{r} ds \vec{\tilde{F}}(z)^* \vec{\tilde{G}}(z). \quad (2.49)$$

On peut alors démontrer que ce produit possède la propriété suivante

$$\left\langle \vec{\tilde{F}}^* \mid \vec{\tilde{G}} \right\rangle = \left\langle \vec{F}^* \mid \vec{G} \right\rangle \quad (2.50)$$

et ainsi, on peut directement retrouver la formule de Plancherel

$$\|\vec{\tilde{F}}\|^2 = \|\vec{F}\|^2. \quad (2.51)$$

L'équation (2.50) permet également de fournir la résolution de l'identité qui permet de démontrer que l'ondelette électromagnétique est une base dans l'espace des solutions de Maxwell. En effet, en se plaçant dans l'espace \mathcal{H} , l'équation (2.31) nous permet d'écrire

$$\vec{\tilde{F}}(z)^* = (\langle \psi_z^* | \vec{F} \rangle)^* = \langle \vec{F}^* | \psi_z \rangle. \quad (2.52)$$

Ainsi, dans l'espace des signaux analytiques, l'équation (2.50) devient

$$\int_E d^3\vec{r} ds \langle \vec{F}^* | \psi_z \rangle \langle \psi_z^* | \vec{G} \rangle = \langle \vec{F}^* | \vec{G} \rangle \quad (2.53)$$

d'où l'on tire la résolution de l'identité **I** suivante

$$\int_E d^3\vec{r} ds |\psi_z\rangle \langle \psi_z^*| = \mathbf{I} \quad (2.54)$$

et de cette relation, on tire la construction d'un champ par la base d'ondelettes comme

$$\vec{F} = \int_E d^3\vec{r} ds |\psi_z\rangle \langle \psi_z^* | \vec{F} \rangle$$

ce qui revient, sous forme explicite, à

$$\vec{F}(x') = \int_E d^3\vec{r} ds \psi_z(x') \vec{\tilde{F}}(z). \quad (2.55)$$

Étant donné la résolution de l'identité introduite en (2.54), la nature électromagnétique de l'ondelette nous permet de généraliser la construction d'un champ électromagnétique montrée en (2.55) en remplaçant le signal analytique par n'importe quelle fonction vectorielle de carré sommable sur l'espace euclidien, donnant ainsi la formule de construction suivante

$$\vec{F}(x') = \int_E d^3\vec{r} ds \psi_z(x') \vec{W}_F(z). \quad (2.56)$$

On peut également exprimer la décomposition d'un champ quelconque comme son signal analytique ou comme une intégration sur l'espace euclidien.

$$\vec{W}_F(is, \vec{r}) = \vec{F}(is, \vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r}' \psi_z^*(\mathbf{0}, \vec{r}') \vec{F}(\mathbf{0}, \vec{r}'). \quad (2.57)$$

On remarque que dans l'expression de la transformée, on a posé le temps $t' = 0$. Ceci est dû au choix de l'espace euclidien et peut être expliqué comme suit: le champ est décomposé en une somme de versions translatées et dilatées de l'ondelette ψ . La nature électromagnétique de la décomposition implique la dépendance entre la variable temporelle et les trois variables spatiales, telle que donnée par $t'^2 = |\vec{r}'|^2$. On note encore une fois ici qu'on a posé la vitesse de la lumière égale à 1 pour alléger la notation. Dans cette optique, nous pouvons considérer deux types de décomposition. L'une implique une observation à un point fixe de l'espace des différentes ondelettes-filles pour des temps différents. Or, dans la présente thèse, notre intérêt réside dans l'expression, à un temps donné, du champ diffractant en tant que somme d'ondelettes à divers endroits de l'espace. Ainsi, nous ne désirons pas étudier les diverses translations temporelles et choisissons plutôt l'expression donnant la décomposition de type spatiale du champ à un temps donné.

Fort des formules de construction et de décomposition de champ, il reste une ultime étape avant de pouvoir considérer l'équation (2.56) comme une TO inverse: vérifier que la fonction de base répond bien à la condition d'admissibilité énoncée à l'équation (1.18).

Pour ce faire, vérifions que chaque terme $S_{m,n}$ composant la matrice $\psi_{\mathbf{z}}(\mathbf{p})$ mène à une expression finie lorsque l'on vérifie l'admissibilité par rapport au temps en utilisant la fréquence temporelle comme variable d'intégration. Trois situations se présentent: $m = 0$ et $n = 0$, $m = 0$ ou $n = 0$, $m \neq 0$ et $n \neq 0$. Dans le premier cas, on trouve

$$\int_0^{\infty} \frac{|2\omega^2\theta(\omega)e^{-\omega}|^2}{\omega} d\omega < \infty. \quad (2.58)$$

Dans cette expression, la partie complexe de l'exponentielle disparaît lors du calcul de la norme au carré. De plus, puisque l'intégrale de la formule d'admissibilité couvre uniquement les fréquences positives, la fonction de Heaviside disparaît. Ainsi, on obtient l'intégrale à résoudre

$$C_{\psi} = \int_0^{\infty} 4\omega^3 e^{-\omega} d\omega. \quad (2.59)$$

Deux intégrations par partie nous permettent de trouver que

$$C_{\psi} = 24 < \infty. \quad (2.60)$$

Les deux autres cas s'obtiennent de la même façon, en utilisant toujours moins d'intégrations par partie et sont de normes finies ($C_{\psi} = 8$ dans le deuxième cas et $C_{\psi} = 4$ dans le dernier cas). On prouve ainsi que $\psi_{\mathbf{z}}$ est bien une ondelette par rapport au temps dans l'espace euclidien. Cependant, ce choix d'espace nous amène à voir rapidement que la condition d'admissibilité est violée pour les trois dimensions spatiales puisque la décroissance exponentielle n'y est pas présente. Un choix différent du quadrivecteur y aurait pu changer ce comportement, mais la suite de nos travaux sur la diffraction nous amènera à utiliser la représentation utilisant les paramètres tels que fixés ci-haut.

Nous avons donc obtenu, dans cette section, l'expression d'une ondelette répondant aux équations de l'électromagnétisme et pouvant construire un champ à partir d'une

fonction vectorielle n'ayant pour unique contrainte que celle d'être de carré sommable dans l'espace euclidien.

Dans la prochaine section seront exposés nos travaux ayant mené à une expression de la diffraction scalaire sous forme d'une transformée en ondelettes admissible, utilisant comme base les translatées et dilatées de la fonction introduite ci-haut. Ensuite, une application de l'ondelette comme génératrice de champs non diffractants sera proposée.

2.5 Ondelettes monochromatiques et principe de Huygens

Comme nous l'avons vu précédemment, la recherche d'un lien entre transformée en ondelettes et diffraction a fait l'objet de plusieurs études qui se montrèrent infructueuses. Toutefois, les travaux présentés dans cette thèse, qui furent publiés dans la revue *Applied Optics* [16], réussissent finalement à établir une telle correspondance. En effet, l'expression de la diffraction scalaire en tant que somme de petites "ondelettes" sphériques émanant d'un front d'onde, introduite par Christian Huygens en 1678, est exprimée sous forme de transformée en ondelettes, outil mathématique développé il y a à peine une vingtaine d'années.

Comme le montrent les travaux d'Onural [11], brièvement présentés précédemment, le noyau de décomposition utilisé dans la formule de Huygens-Fresnel n'est clairement pas une ondelette. Intuitivement, l'une des raisons à la base de cette violation de l'admissibilité est le caractère monochromatique du noyau. En effet, cette propriété implique un comportement oscillant du champ par rapport au temps sur tout l'intervalle de définition, ce qui va à l'encontre des propriétés de localisation des ondelettes.

Or, nous sommes désormais pourvus d'une fonction générant une base respectant la condition d'admissibilité et les lois physiques régissant tout champ lumineux. Elle a une nature polychromatique, comme en fait foi sa décroissance exponentielle par rapport à la fréquence temporelle. Puisque nous voulons étudier la diffraction scalaire, il nous faut cependant éliminer la nature vectorielle de la décomposition.

On se rappelle que la matrice $\mathbf{\Pi}(p)$ fut introduite afin d'inclure la nature vectorielle des solutions de Maxwell. Elle fut présentée comme un opérateur de projection sur les différentes polarisations du champ. Or, dans le cas scalaire, cette nature est inhibée. On obtient alors l'ondelette scalaire en remplaçant $\mathbf{\Pi}(p)$ par sa trace qui est égale à 1.

Ainsi, l'ondelette scalaire répond maintenant uniquement à l'équation d'onde [15], et prend la forme suivante

$$\psi_z(x') \equiv \int_C d\tilde{k} 2\omega^2 \theta(\omega s) e^{i p \cdot (x' - \tilde{z})}. \quad (2.61)$$

On utilise alors l'expression trouvée en (2.46) afin de calculer la dépendance spatio-temporelle de l'ondelette scalaire. En effet, on voit que

$$\psi_{iy}(0) = 2 S_{00} = 2 \frac{4 y_0^2 - \mathbf{M}_0 \cdot y^2}{2 \pi^2 (y^2)^3}. \quad (2.62)$$

En utilisant le choix de paramètre y de l'espace euclidien et la continuité analytique, on effectue la substitution

$$\begin{aligned} y_0 &\mapsto s - it \\ \vec{y} &\mapsto -i\vec{r} \end{aligned} \quad (2.63)$$

et l'expression spatio-temporelle de l'ondelette-mère scalaire est donnée, en fixant le paramètre d'échelle $s \equiv 1$ et en n'introduisant pas de translation, par

$$\begin{aligned} \psi(x) &= 2 \frac{4(1-it)^2 - (1-it)^2 + (i|\vec{r}|)^2}{2\pi^2 ((1-it)^2 - (i|\vec{r}|)^2)^3} \\ \psi(x) &= \frac{3(1-it)^2 - |\vec{r}|^2}{\pi^2 ((1-it)^2 + |\vec{r}|^2)^3}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

En réintroduisant explicitement le facteur d'échelle et la vitesse de la lumière, on

exprime les ondelettes-filles par les versions translatées et dilatées de l'ondelette-mère

$$\psi_z(x') = \frac{1}{\pi^2 c^4} \frac{3(s - it')^2 - |\vec{r}'/c - \vec{r}/c|^2}{((s - it')^2 + |\vec{r}'/c - \vec{r}/c|^2)^3}. \quad (2.65)$$

Nul n'est besoin de remonter l'admissibilité de cette ondelette, la démonstration faite en (2.60) étant suffisante. On remarque que l'ondelette a ainsi une symétrie radiale où la nature vectorielle est inhibée. Ce comportement est montré à la figure 6.

Pour bien voir les propriétés d'ondelette par rapport au temps de la base générée, il importe d'observer son comportement pour une direction radiale fixe. Ainsi, on obtient les courbes des parties réelle et imaginaire de ψ par rapport au temps, telles que montrées à la figure 7. On y remarque les oscillations de l'ondelette et sa localisation le long de l'axe du temps. Ce comportement est retrouvé autant au niveau de son amplitude dans l'espace réel que dans les imaginaires. De plus, à la figure 8, on peut observer l'amplitude de la TF de l'ondelette par rapport au temps. Elle possède la localisation inhérente à la nature des ondelettes et les caractéristiques d'un filtre passe-bande. La bande de fréquence que laisse passer ce filtrage varie en fonction du paramètre d'échelle donné à l'ondelette.

Une particularité intéressante de l'ondelette réside dans sa décomposition possible en une somme de deux fonctions

$$\psi(x) = \psi^-(x) + \psi^+(x) \quad (2.66)$$

où

$$\psi^-(x) = \frac{1}{2\pi^2 c^4 |\vec{r}/c|} \frac{1}{[|\vec{r}/c| + t + i]^3} \quad (2.67)$$

$$\psi^+(x) = \frac{1}{2\pi^2 c^4 |\vec{r}/c|} \frac{1}{[|\vec{r}/c| - t - i]^3}. \quad (2.68)$$

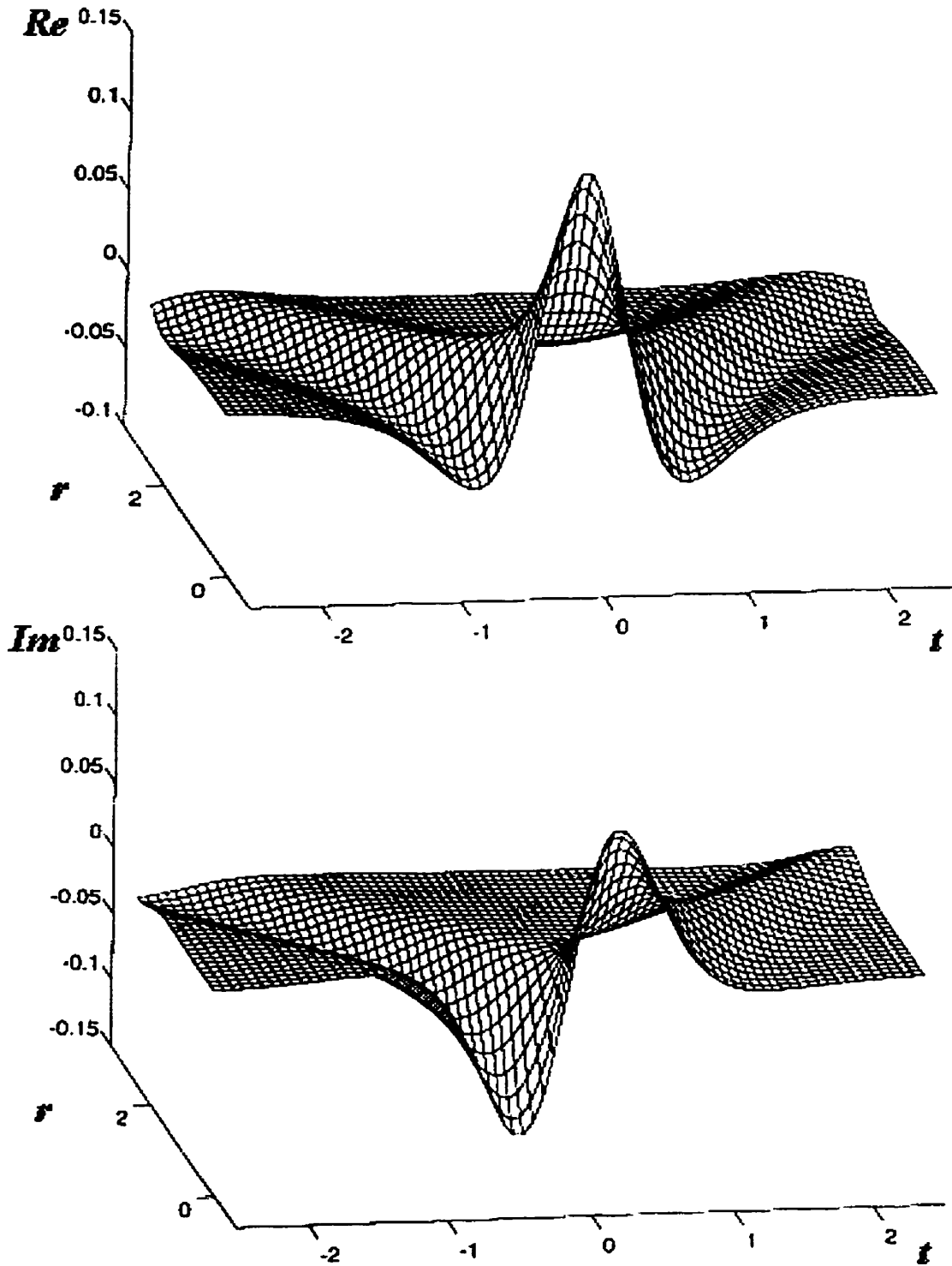


FIGURE 6. Parties réelle et imaginaire de l'ondelette électromagnétique en fonction du temps et de sa position radiale.

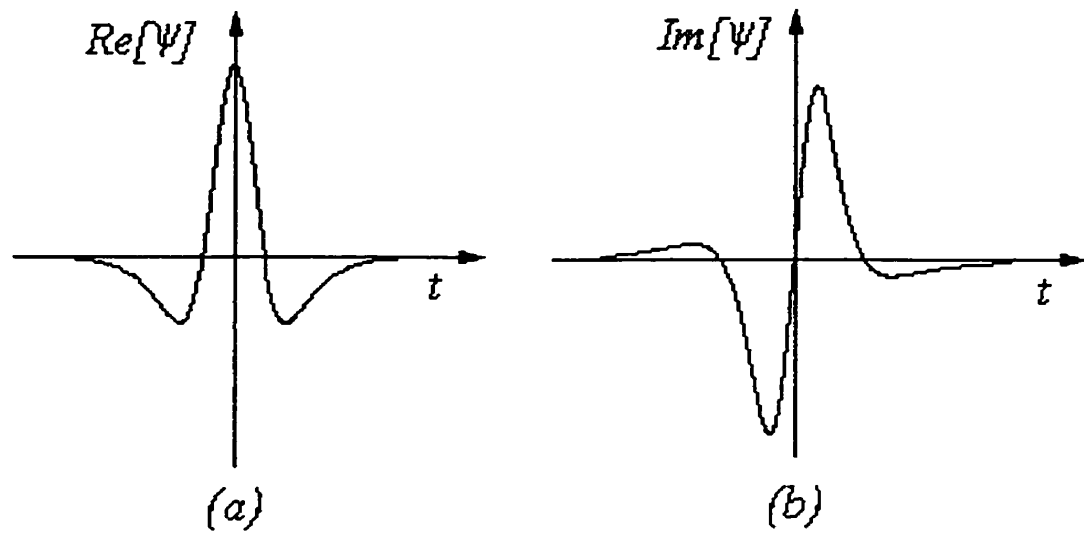


FIGURE 7. Forme temporelle de l'ondelette électromagnétique pour une distance radiale fixe.

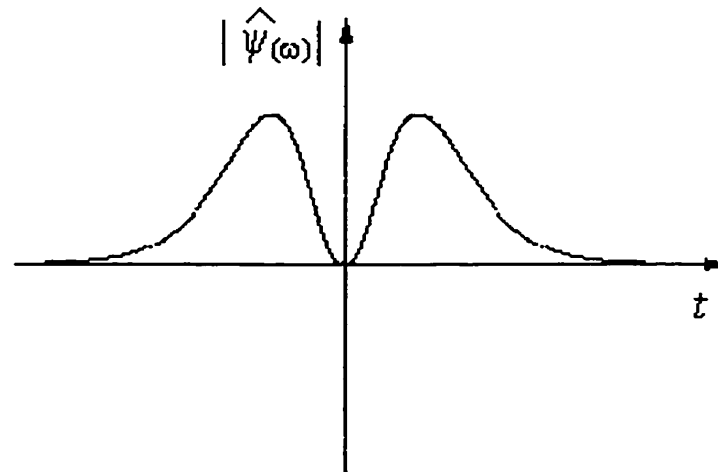


FIGURE 8. Transformée de Fourier de l'ondelette électromagnétique par rapport au temps.

Ces deux fonctions conservent le caractère sphérique de la solution initiale et peuvent être interprétées comme une ondelette convergeant vers l'origine (ψ^-) pour des temps $t < 0$ et une autre ondelette émise à l'origine et divergeant pour des temps $t > 0$. Ainsi, le point du front d'onde étudié à un temps et une position donnée (l'origine correspond ici à la position définie par le quadrivecteur de translation étudié) sera le fruit de la convergence en un point des ondelettes ψ^- et divergera, comme c'est le cas dans le modèle de Huygens, comme une ondelette sphérique.

Toutefois, on note que les deux fonctions divergent à l'origine. De ce fait, elles ne sont pas des solutions globales de l'équation d'onde. En fait, on trouve que

$$\begin{aligned} -\partial_t^2 \psi^-(x) + \nabla^2 \psi^-(x) &= -\frac{2\delta(\vec{r})}{i\pi(1-it)^2} \\ -\partial_t^2 \psi^+(x) + \nabla^2 \psi^+(x) &= \frac{2\delta(\vec{r})}{i\pi(1-it)^2}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Les termes de droite de chaque équation peuvent être vus comme la génération à l'origine de courants élémentaires par les ondelettes convergentes et divergentes. Les courants sont égaux et de signes contraires ce qui explique leur annulation lorsque sommés.

Nous avons ainsi vu les liens existant entre le modèle de Huygens et la transformée utilisant l'ondelette électromagnétique sous sa forme scalaire. Cependant, afin d'observer l'équivalence existant entre cette transformation et le principe de Huygens-Fresnel, nous devons montrer que cette TO est, en fait, la généralisation polychromatique de ce principe [16].

Pour ce faire, nous avons procédé à la décomposition d'un champ monochromatique en utilisant les ondelettes électromagnétiques comme base. Le champ est alors donné par

$$F(t, \vec{r}) = E(\vec{r}) e^{i\omega_0 t} \quad (2.70)$$

où $\omega_0 > 0$. Comme le montre l'équation (2.57), le signal analytique de ce champ correspond à sa transformée en ondelettes. En utilisant l'équation (2.21), tout en considérant $y = (s, \vec{0})$, on obtient l'expression suivante

$$\begin{aligned} W_F(t + is, \vec{r}) &= \frac{1}{i\pi} \int_{\mathfrak{R}} \frac{d\tau}{\tau - i} F(t + s\tau, \vec{r}) \\ &= \frac{1}{i\pi} \int_{\mathfrak{R}} \frac{d\tau}{\tau - i} E(\vec{r}) e^{i\omega_0 t} e^{i\omega_0 s \tau}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

En utilisant le même type d'intégrale de contour que lors du calcul du signal analytique dans l'espace des fréquences et en passant à l'espace euclidien, on obtient la forme explicite suivante pour la TO du champ :

$$W_F(is, \vec{r}) = E(\vec{r}) \theta(\omega_0 s) e^{-\omega_0 s}. \quad (2.72)$$

Nous voulons maintenant exprimer la dépendance spatiale du champ monochromatique sous forme de décomposition sur une base d'ondelettes. Pour ce faire, utilisons la formule retrouvée en (2.56).

$$E(\vec{r}) e^{i\omega_0 t} = \int_E d^3 \vec{r}' ds \psi_{is, \vec{r}'}(x) W_f(is, \vec{r}') \quad (2.73)$$

Ensuite, il importe d'exprimer le comportement fréquentiel de l'ondelette $\psi_{is, \vec{r}'}(x)$ par rapport au temps. Pour ce faire, considérons l'expression de l'ondelette comme la somme de fonctions convergente et divergente. Ainsi, on doit résoudre

$$\begin{aligned} \psi_{is, \vec{r}'}^-(\omega, \vec{r}) &= \int_{\mathfrak{R}} \psi_{is, \vec{r}'}^-(x) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi^2 c^4 |(\vec{r} - \vec{r}')/c|} \int_{\mathfrak{R}} \frac{e^{-i\omega t} dt}{\left[|(\vec{r} - \vec{r}')/c| + t + is \right]^3} \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} \psi_{is, \vec{r}'}^+(\omega, \vec{r}) &= \int_{\mathfrak{R}} \psi_{is, \vec{r}'}^+(x) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi^2 c^4 |(\vec{r} - \vec{r}')/c|} \int_{\mathfrak{R}} \frac{e^{-i\omega t} dt}{\left[|(\vec{r} - \vec{r}')/c| - t - is \right]^3}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

On remarque que ces deux intégrales de fonctions complexes possèdent des pôles d'ordre 3 pour les temps complexes $\tau_0 = -|(\vec{r} - \vec{r}')/c| - is$ pour les ondelettes convergentes et $\tau_0 = |(\vec{r} - \vec{r}')/c| - is$ pour les ondelettes divergentes. De plus, leur comportement allant en t^{-3} , les fonctions ne divergent pas quand t tend vers l'infini. On peut alors étendre l'intégration au plan complexe et, en utilisant la valeur principale de Cauchy, on redéfinit nos intégrales sur tous les réels comme les intégrales sur le contour défini par la courbe fermée \mathcal{L} :

$$\begin{aligned}\psi_{is, \vec{r}, \vec{r}'}^-(\omega, \vec{r}) &= \frac{1}{2\pi^2 c^4 |(\vec{r} - \vec{r}')/c|} \oint_{\mathcal{L}} \frac{e^{-i\omega\tau} d\tau}{\left[|(\vec{r} - \vec{r}')/c| + \tau + is\right]^3} \\ \psi_{is, \vec{r}, \vec{r}'}^+(\omega, \vec{r}) &= \frac{-1}{2\pi^2 c^4 |(\vec{r} - \vec{r}')/c|} \oint_{\mathcal{L}} \frac{e^{-i\omega\tau} d\tau}{\left[-|(\vec{r} - \vec{r}')/c| + \tau + is\right]^3}.\end{aligned}\quad (2.76)$$

Introduisons maintenant la formule de Cauchy pour les dérivées de fonctions complexes

$$\frac{d^n f(z)}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{f(\tau)}{(\tau - z)^{n+1}} d\tau \quad (2.77)$$

En remaniant les termes, on trouve, pour $n \equiv 2$,

$$\oint_{\mathcal{L}} \frac{f(\tau)}{(\tau - z)^3} d\tau = i\pi \frac{d^2 f(z)}{dz^2}. \quad (2.78)$$

Dans le cas qui nous intéresse, $f(z) = e^{-i\omega z}$, ce qui implique que $f''(z) = -\omega^2 f(z)$, ce qui donne

$$\oint_{\mathcal{L}} \frac{e^{-i\omega\tau}}{(\tau - z)^3} d\tau = -i\pi \omega^2 e^{-i\omega z}. \quad (2.79)$$

En insérant ce résultat dans les équations retrouvées en (2.76), on obtient

$$\begin{aligned}\psi_{is,\vec{r}}^-(\omega, \vec{r}) &= \frac{\omega^2 e^{i\omega |(\vec{r}-\vec{r}')/c|} e^{-\omega s}}{2\pi i c^4 |(\vec{r}-\vec{r}')/c|} \\ \psi_{is,\vec{r}}^+(\omega, \vec{r}) &= \frac{-\omega^2 e^{-i\omega |(\vec{r}-\vec{r}')/c|} e^{-\omega s}}{2\pi i c^4 |(\vec{r}-\vec{r}')/c|}.\end{aligned}\quad (2.80)$$

Et donc, la décomposition harmonique de l'ondelette nous donne

$$\psi_{is,\vec{r}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \frac{\omega^2 e^{-\omega s}}{2\pi i c^4} \frac{e^{i\omega |(\vec{r}-\vec{r}')/c|} - e^{-i\omega |(\vec{r}-\vec{r}')/c|}}{|(\vec{r}-\vec{r}')/c|}.\quad (2.81)$$

À ce moment-ci du calcul, il convient d'introduire une simplification découlant de considérations physiques. La TO du champ électromagnétique ne dépend pas du temps et possède une dépendance fréquentielle temporelle constante et égale à ω_0 . Puisque la reconstruction est égale à l'expression du champ défini en (2.70), seules les composantes harmoniques des ondelettes qui sont associées à la fréquence ω_0 ne s'annuleront pas. Ainsi, on peut ne conserver que les termes ayant la même fréquence que le champ d'origine dans notre décomposition. L'équation (2.73) devient alors

$$\begin{aligned}E(\vec{r}) e^{i\omega_0 t} &= \int_E d^3\vec{r}' ds \psi_{is,\vec{r}'}(x) W_f(is, \vec{r}') \\ &= \int_E d^3\vec{r}' ds \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \psi_{is,\vec{r}'}(\omega, \vec{r}') W_f(is, \vec{r}') \\ &= \int_E d^3\vec{r}' ds e^{i\omega_0 t} \psi_{is,\vec{r}'}(\omega_0, \vec{r}') W_f(is, \vec{r}') \\ &= \frac{1}{2\pi i c^4} \int_E E(\vec{r}') e^{i\omega_0 t} \omega_0^2 e^{-2\omega_0 s} (\theta(\omega_0 s))^2 \\ &\quad \frac{e^{i\omega_0 |(\vec{r}-\vec{r}')/c|} - e^{-i\omega_0 |(\vec{r}-\vec{r}')/c|}}{|(\vec{r}-\vec{r}')/c|} d^3\vec{r}' ds\end{aligned}\quad (2.82)$$

On peut ensuite effectuer l'intégrale par rapport au facteur d'échelle s . Afin

d'obtenir ce résultat, il importe cependant de constater la propriété suivante:

$$\theta(\xi)^2 = \begin{cases} 1 & \xi > 0 \\ \frac{1}{4} & \xi = 0 \\ 0 & \xi < 0 \end{cases} . \quad (2.83)$$

On trouve alors le résultat suivant:

$$I(\omega_0) = \int_{\mathfrak{R} \setminus \{0\}} e^{-2\omega_0 s} (\theta(\omega_0 s))^2 ds \quad (2.84)$$

$$= \int_{0^+}^{\infty} e^{-2\omega_0 s} ds \quad (2.85)$$

$$= \frac{1}{2\omega_0} . \quad (2.86)$$

Et l'équation (2.83) mène alors à l'égalité suivante

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{1}{i \lambda_0} \int_{\mathfrak{R}^3} d^3 \vec{r}' E(\vec{r}') \frac{e^{2\pi i |\vec{r}-\vec{r}'|/\lambda_0} - e^{-2\pi i |\vec{r}-\vec{r}'|/\lambda_0}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (2.87)$$

où $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$ est la longueur d'onde du champ.

On voit donc que l'amplitude complexe du champ monochromatique $E(\vec{r})$ est reconstruite à partir d'une superposition d'ondes sphériques. Ces dernières sont une composante monochromatique de l'ondelette électromagnétique dont le centre est situé en $\vec{r} = \vec{r}'$. Ceci correspond à l'expression du principe de Huygens. L'équation (2.87) décrit les ondes convergeant vers le point \vec{r}' et celles divergeant à partir de \vec{r}' . Dans le principe de diffraction, seule la partie émise par le point \vec{r}' est conservée.

2.6 Transformée en ondelettes de faisceaux non diffractants

Comme nous l'avons vu, l'ondelette électromagnétique a été construite en imposant toutes les contraintes propres aux transformations conformes à la base recherchée. Ainsi, chaque ondelette-fille est une solution des équations de Maxwell ou, dans le

cas scalaire, de l'équation d'onde. Nous avons vu que la décomposition d'un champ monochromatique par cette base nous a amenés, dans un premier temps, à imposer la contrainte d'une fréquence temporelle unique à l'ondelette. Ainsi, nous avons montré que la décomposition polychromatique était une généralisation du principe de Huygens.

Il nous est permis de reprendre ce type d'analyse en appliquant une nouvelle contrainte à cette ondelette [18]. Cette approche permettra de définir une nouvelle décomposition pour les champs électromagnétiques non diffractants. Théoriquement, un faisceau non diffractant est spatialement localisé. Ceci implique que le faisceau se propage selon un axe dans l'espace libre sans subir de dispersion transversale. Ainsi, en bougeant un écran à divers endroits le long de l'axe de propagation, la même distribution lumineuse se retrouve. Mathématiquement, ce comportement est décrit par l'équation suivante:

$$F(x, y, z, t) = A(x, y)e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (2.88)$$

où z est l'axe de propagation. On remarque alors que l'intensité lumineuse détectée, donnée par la norme au carré du champ lumineux $|A(x, y)|^2$, ne varie ni le long de l'axe de propagation, ni dans le temps. Dans la pratique, un tel champ est difficile à construire à cause des nombreux effets reliés à la diffraction. Tout particulièrement, ces effets sont dus à l'ouverture finie de la source, rencontrés dans les limites de l'expérience. Ainsi, on considère qu'un faisceau est non diffractant si sa distribution transversale est conservée pour une grande profondeur de champ.

Nous voulons donc transposer les contraintes intrinsèques à ce type de faisceaux à l'ondelette électromagnétique. Dans un premier temps, rappelons une équation importante de cette ondelette, soit la forme spectrale de l'ondelette vue à l'équation (2.61):

$$\psi_{\vec{x}', s}(x) = \int_{C^+} d\vec{k} 2(\omega/c)^2 \theta(\omega s/c) e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} e^{-\omega s/c} e^{i\omega t}, \quad (2.89)$$

où on a ajouté explicitement la vitesse de la lumière c .

On applique alors la nouvelle contrainte à l'ondelette; son vecteur d'onde doit être dirigé selon un angle ζ , où $\zeta \in [0, \pi/2]$ par rapport à l'axe des z . Dans un premier temps, on utilise la propriété d'analyticité de l'ondelette et on se place à $\vec{x}' = \vec{0}$. On traduit ensuite les variables fréquentielles en coordonnées cylindriques. Cette étape se traduit par un changement de système de coordonnées:

$$(k_x, k_y, k_z) \longrightarrow (\sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \phi, k_z). \quad (2.90)$$

De plus, nous effectuons le changement de variable suivant:

$$k_z = \frac{\omega}{c} \cos \zeta. \quad (2.91)$$

Pour observer les contraintes introduites avant, on doit alors exprimer les autres variables spectrales comme

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{\omega}{c} \sin \zeta \cos \phi \\ k_y &= \frac{\omega}{c} \sin \zeta \sin \phi \end{aligned} \quad (2.92)$$

Grâce à ces transformations, on peut alors écrire le produit scalaire entre les vecteurs \vec{p} et \vec{x} comme

$$\vec{p} \cdot \vec{x} = \frac{\omega}{c} [\sin \zeta (x \cos \phi + y \sin \phi) + z \cos \zeta]. \quad (2.93)$$

La nouvelle contrainte ramène l'intégrale tridimensionnelle sur le vecteur impulsion à une intégrale de surface sur une conique dont l'axe générateur est à un angle ζ de l'axe des z . L'invariant de Lorentz de surface infinitésimale sur cette conique est donné par

$$dS = \frac{1}{16\pi^3} \sin \zeta d(\omega/c) d\phi. \quad (2.94)$$

En posant $\omega' = \omega/c$, on obtient alors la relation suivante

$$\psi_s^{ND}(x) = \frac{\sin \zeta}{8\pi^3 c^3} \int_0^{2\pi} d\phi e^{i\omega' \sin \zeta [x \cos \phi + y \sin \phi]} \int_0^\infty \omega^2 \theta(\omega s) e^{-i\omega' z \cos \zeta} e^{-\omega' s} e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.95)$$

Introduisons maintenant la fonction de Bessel d'ordre zéro, définie par l'intégrale suivante:

$$J_0(\alpha r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\alpha(x \cos \phi + y \sin \phi)} d\phi, \quad (2.96)$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. On peut résoudre l'intégrale angulaire et obtenir

$$\psi_s^{ND}(x) = \frac{\sin \zeta}{4\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\omega \omega^2 \theta(\omega s) e^{-\omega' s} J_0(\omega' r \sin \zeta) e^{-i\omega' z \cos \zeta} e^{i\omega t}. \quad (2.97)$$

Cette nouvelle forme de l'ondelette est ainsi contrainte à être non diffractante. La formulation de $\psi_s^{ND}(x)$ permet alors de tisser les liens avec une généralisation du faisceau de Bessel non diffractant, introduit par Durnin [17]. Ce faisceau, défini par l'équation

$$J_0(\omega' r \sin \zeta) e^{i(\omega t - \beta z)}, \quad (2.98)$$

peut voyager à une distance infinie en conservant son profil transversal en autant que sa source possède une ouverture infinie. La vitesse de propagation est donnée par ω/β . Pour l'ondelette non diffractante, cette vitesse est donnée par $c/(\cos \zeta)$ le long de l'axe des z et est donc indépendante de ω . L'intégrale sur les différentes fréquences propose donc une généralisation polychromatique du faisceau de Bessel. On observe que cette dernière est modulée par une fenêtre $2(\omega/c)^2 e^{-s\omega/c}$, ce qui lui confère une meilleure localisation spectrale.

Pour trouver la forme spatio-temporelle de la solution présentée en (2.97), nous nous référons à l'article de Lu et Greenleaf [15] qui ont appliqué l'ondelette électromagnétique aux ondes acoustiques. En voulant générer un faisceau non diffractant à l'aide d'un transducteur ultrasonique, ils ont adapté l'approche de Kaiser et modélisé une ondelette acoustique spatio-temporelle. Ils ont ensuite trouvé le spectre en fréquences temporelles de l'ondelette et ont obtenu une forme très voisine de l'expression que nous recherchions. En effectuant quelques changements de variables et en fixant certaines constantes présentes dans l'approche ultrasonique, nous obtenons

$$\psi_s^{ND}(x) = \frac{2(1 - i(z \cos \zeta - ct))^2 - (r \sin \zeta)^2}{[(1 - i(z \cos \zeta - ct))^2 + (r \sin \zeta)^2]^{5/2}}. \quad (2.99)$$

Les auteurs ont utilisé cette ondelette en ayant recours à plusieurs puissances de ω afin de générer plusieurs types d'ondes non diffractantes dont l'amplitude prend la forme d'un X . Dans notre cas, nous devons conserver uniquement le facteur ω à la puissance 2, tel que requis par la définition du produit scalaire dans l'espace de Hilbert des solutions électromagnétiques. Ceci permet de conserver les invariances qui tissent les liens entre la forme scalaire présentée ici et les lois physiques impliquées.

Puisque nous avons réussi à appliquer la contrainte du champ non diffractant à l'ondelette de Kaiser, nous pouvons donc reconstruire un champ non diffractant en combinant les nouvelles ondelettes-filles comme suit

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi_z ds W_f(s) \psi_{\xi_z, s}^{ND}(x), \quad (2.100)$$

où $W_f(s)$ est une fonction d'énergie finie, et donc de carré sommable. La base $\psi_{\xi_z, s}^{ND}(x)$ est une combinaison polychromatique de fonctions de Bessel translatées, se propageant à vitesse constante ($c/\cos \zeta$) et modulée par une fenêtre.

2.7 Conclusion

Nous avons donc appliqué le formalisme de la transformée en ondelettes à une solution des équations de Maxwell. Notre intérêt se portant davantage sur l'optique, nous avons démontré l'équivalence entre cette décomposition et le principe de Huygens, mais placée dans une perspective polychromatique. Chaque ondelette sphérique émise localement par un champ est également localisée en fréquences. De plus, à l'aide de contraintes appliquées à notre solution, nous avons généré une nouvelle base non diffractante.

Dans le prochain chapitre, nous aborderons la discrétisation de la transformée en ondelette. Des nombreux détecteurs qui permettent d'acquérir les informations optiques, beaucoup emmagasinent les données sous forme discrète. Il importe donc de développer le formalisme qui nous permettra d'utiliser les nombreux avantages de la TO dans ces conditions.

CHAPITRE 3

Application de la transformée en ondelettes à l'extraction de caractéristiques dans les images

3.1 Introduction

Nous avons vu, lors des chapitres précédents, que la transformée en ondelettes continue permet d'analyser le contenu en fréquence d'un signal de façon locale. Cette caractéristique nous amène à explorer d'autres possibilités que permet cet outil mathématique dans le domaine de l'optique. Plus précisément, nous allons maintenant nous pencher sur sa contribution à l'analyse du signal optique après que ce dernier soit détecté.

La notion de fréquence dans une image, plutôt que de représenter différentes longueurs d'onde, est ici reliée aux différences en intensité présentes dans la scène captée. La transformée en ondelettes analyse localement ces variations et permet ainsi d'extraire certaines caractéristiques représentant, par exemple, les contours d'objets présents dans l'image à une certaine échelle donnée. Ainsi, la transformée en ondelettes agit comme un filtre passe-bande sur l'image.

Avant d'appliquer notre transformée aux images, il importe de connaître certaines propriétés du signal reçu par les caméras utilisées. Nous constatons, dans un premier temps, que les détecteurs employés dans de multiples applications actuelles de l'optique recueillent l'information de façon discrète. Ceci est effectué par un échantillonnage du signal grâce à une série de détecteurs produisant une matrice bidimensionnelle de pixels d'intensités variables. Les valeurs données à chaque pixel varient par rapport aux différentes plages de longueurs d'onde auxquelles le détecteur est sensible. Par exemple, il est possible d'acquérir des images dans la plage visible (fréquences auxquelles l'oeil humain est sensible) ou dans l'infrarouge (fréquences donnant une information de température émise).

Cette caractéristique des images à analyser est l'une des raisons qui fait en sorte que la transformée en ondelettes, telle que définie précédemment, gagnerait à être adaptée au cas discret. Nous allons donc, dans ce chapitre, voir comment se fait ce passage. Ensuite, nous examinerons plus en profondeur le type d'information que procure la transformée en ondelettes lorsqu'appliquée à des images numériques représentées par des matrices de pixels. Finalement, nous montrerons comment cette information permet d'extraire les contours d'objets dans les images à de multiples résolutions. Cette dernière étape sera illustrée par un problème concret de reconnaissance de cibles.

3.2 L'analyse multirésolutionnelle et l'avènement de la transformée en ondelettes discrète

La popularité qui accompagna la réalisation de l'algorithme de TF rapide (FFT ou Fast Fourier Transform) et les débouchés multiples qu'apporta l'analyse spectrale dans les problèmes d'analyse numérique conduisirent rapidement à la recherche d'une forme discrète de la TO sous forme d'algorithme rapide. Les premières tentatives menèrent à des succès mitigés. Ainsi, vers 1985, la TO discrète était réalisable mais les éléments de la base utilisée n'étaient pas orthogonaux entre eux [1]. Ceci rendait le calcul des coefficients d'ondelettes lent et ardu; on était aux antipodes des propriétés ayant rendu

la FFT si attrayante. Par exemple, lorsque le signal était décomposé à des échelles dyadiques ($s = 2^n$), sa reconstruction nécessitait, en plus des échelles ainsi décomposées, toutes les résolutions intermédiaires. Le choix d'un nombre fini de ces résolutions menait invariablement à des erreurs de reconstruction pouvant être parfois catastrophiques. En fait, la seule reconstruction parfaite passait par la TO continue.

La chasse aux ondelettes discrètes orthogonales était alors lancée. Les propriétés recherchées étaient alors les suivantes :

- Orthogonalité des éléments de la base.
- Représentation complète, contrairement au cas sur-échantillonné ou sous-échantillonné.
- Décomposition du signal en diverses octaves représentant l'amplitude locale des composantes de fréquence appartenant à l'octave analysée.

Ces propriétés semblaient rendre la réussite de l'entreprise vouée à l'échec. Dans un premier temps, le physicien Roger Balian avait démontré, en 1981, que l'ancêtre des ondelettes, la TF à fenêtre, ne possède pas de représentation orthogonale [19]. C'est en se basant sur ces travaux que Meyer tenta de démontrer que cette affirmation s'appliquait aussi aux ondelettes. Sa tentative se solda, fort heureusement, par un échec puisqu'il arriva à construire le type d'ondelettes recherché.

Malgré cette découverte, la partie était loin d'être jouée. Certes, les développements de Meyer représentèrent une percée majeure en ce qui a trait à l'aspect mathématique du domaine [3]. Toutefois, le lien reliant cette transformation aux applications d'analyse de signaux restait encore à faire. Une rencontre entre Yves Meyer et Stéphane Mallat, sollicitée par ce dernier, permit de donner un sens pratique aux mathématiques alors développées. La théorie mathématique soutenant le concept d'ondelettes discrètes résulta de cette collaboration entre les deux chercheurs.

Au départ, Mallat eut l'intuition que le concept d'ondelettes numériques existait déjà, sans toutefois posséder de cadre théorique solide à proprement parler. Un des exemples se retrouvait dans l'analyse multirésolutionnelle des images (AMR). Ce type d'analyse vise à fournir une représentation des images qui soit invariante sous changement d'échelle. Dans ce cas précis, l'échelle est proportionnelle à la distance entre l'objet représenté sur l'image et le centre de lentille de la caméra captant l'image. Une AMR parfaite donnerait la même information, quelle que soit cette distance, en autant que toutes les parties de l'objet d'intérêt soient dans le champ de la caméra.

Lors du passage d'une analyse continue à une analyse discrète, cette invariance devient plus difficile à obtenir. Une quasi invariance est envisageable pour des sauts d'échelle exponentiels. Par exemple, considérons une suite d'espaces de différentes résolutions $(R_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ ayant un saut α . Chaque R_j correspond à une position de la caméra par rapport à l'objet étudié. Lorsque l'observateur réduit sa distance à l'objet d'un facteur α , l'objet est projeté sur une surface α^2 plus grande dans le plan focal de la caméra. Lors d'une analyse numérique, le cas le plus simple est obtenu en par le choix du paramètre $\alpha = 2$. Dans ce cas, on parle de sauts dyadiques.

3.2.1 Les pyramides gaussienne et laplacienne

Les premiers à utiliser une AMR dyadique furent Burt, Crowley et Adelson avec la décomposition en pyramide laplacienne [20]. En premier lieu, il est important de noter que les détecteurs de signaux optiques sont de résolution finie. Nous noterons l'image captée à la résolution de la caméra utilisée par I_0 . La première étape de la décomposition en pyramide laplacienne s'effectue par la convolution de l'image d'origine par un filtre gaussien donnant, comme résultat, une version lissée de I_0 que nous notons I_1 . Il est alors possible d'extraire les détails perdus par cette opération, pixel par pixel:

$$L_1(i, j) = I_0(i, j) - I_1(i, j). \quad (3.1)$$

Ainsi, l'encodage de l'image originale est donné par la décomposition I_1 et L_1 . On construit alors une pyramide en appliquant le noyau gaussien à l'image I_1 , générant la décomposition I_2 et $L_2 = I_1 - I_2$. Dans la limite où cette décomposition est poussée jusqu'à ce que l'image lissée soit constante, on obtient la décomposition symbolisée par la suite $\{L_n\}$.

Cette idée obtint un franc succès dans le monde du traitement de l'information optique. Certaines hypothèses très intéressantes sur la nature physiologique de la vision humaine impliquent une analyse en différentes bandes de fréquences spatiales de l'information captée par la rétine. Les pyramides gaussienne et laplacienne pouvaient alors être vues comme une modélisation de ce comportement.

Toutefois, ces pyramides possèdent un grand désavantage au niveau de leur formalisme mathématique. En effet, les détails à diverses résolutions sont fortement corrélés. Ainsi, les similarités de détails à deux résolutions différentes ne peuvent être associées à coup sûr à une invariance d'échelle. De plus, cette corrélation amène une redondance des informations obtenues qui réduit le caractère optimal de la méthode. Il importait donc de trouver une AMR dont la base de décomposition est orthogonale. Il est intéressant de remarquer que ces écueils à contourner dans le cadre de l'AMR sont exactement les propriétés mêmes recherchées afin d'obtenir une ondelette discrète. Or, l'avènement des filtres miroirs en quadrature apporta la solution aux problèmes rencontrés par les pyramides gaussienne et laplacienne. C'est sur cette base que Mallat et Meyer développèrent la TO discrète à partir de ces filtres miroirs en quadrature [21].

3.2.2 Filtres miroirs en quadrature et transformée en ondelettes discrète

La recherche de filtres miroirs en quadrature (FMQ) passe par la recherche d'un nouvel opérateur qui remplacera efficacement le noyau gaussien dans la recherche des diverses résolutions de l'image. Pour simplifier la notation, nous considérerons une fonction en une seule dimension, la généralisation à deux dimensions se faisant facilement,

comme nous le verrons plus tard. Notons A_{2^j} l'opérateur qui, appliqué à un signal $s(x)$, donne l'approximation de ce signal à la résolution 2^j . De façon intuitive, cet opérateur doit alors répondre aux six propriétés suivantes:

1. A_{2^j} est un opérateur de projection de notre signal sur un espace vectoriel V_{2^j} , qui peut être vu comme l'ensemble des approximations de résolution 2^j de toutes les fonctions d'énergie finie.
2. L'approximation d'un signal $s(x)$ par l'opérateur A_{2^j} est la meilleure représentation du signal d'origine parmi toutes les fonctions de V_{2^j} , i.e.

$$\forall f(x) \in V_{2^j}, \|f(x) - s(x)\| \geq \|(A_{2^j}s(x)) - s(x)\|. \quad (3.2)$$

Il en découle que l'opérateur A_{2^j} est une projection orthogonale sur l'espace vectoriel V_{2^j} .

3. L'approximation d'un signal à une résolution donnée doit contenir toute l'information nécessaire pour générer les approximations de plus faible résolution, i.e.

$$\forall j, V_{2^j} \subset V_{2^{j+1}}. \quad (3.3)$$

4. On peut générer une approximation de faible résolution à partir d'une approximation plus fine en appliquant directement à cette dernière un changement d'échelle correspondant au ratio de la faible résolution sur la plus fine.
5. L'approximation $A_{2^j}s(x)$ peut être décrite entièrement par 2^j échantillons.
6. L'application de l'opérateur A_{2^j} apporte une perte d'information. Toutefois, lorsque la résolution tend vers l'infini, l'approximation doit converger vers le signal original. De même, lorsque la résolution tend vers 0, le signal contient de moins en moins d'information et converge éventuellement vers 0.

L'espace vectoriel répondant aux six propriétés mentionnées précédemment est une approximation multirésolutionnelle de $\mathcal{L}^2(\mathfrak{R})$ et l'ensemble d'opérateurs A_{2^j} construit les approximations associées à cet espace. Puisque ces opérateurs génèrent des projections orthogonales, il est possible de les caractériser numériquement à l'aide d'une base orthonormée de V_{2^j} . C'est ce que démontre le théorème cité maintenant.

Théorème 1:

Soit V_{2^j} , une approximation multirésolutionnelle de $\mathcal{L}^2(\mathfrak{R})$. Il existe une fonction unique $\Phi(x) \in \mathcal{L}^2(\mathfrak{R})$ telle que, si

$$\Phi_{2^j}(x) = 2^j \Phi(2^j x) \quad (3.4)$$

alors,

$$\left(\sqrt{2^{-j}} \Phi_{2^j}(x - 2^{-j}n) \right) \quad (3.5)$$

est une base orthonormale de V_{2^j} . Ici, n et j sont des entiers et Φ est appelée fonction d'échelle.

Ainsi, pour un signal $s(x) \in \mathcal{L}^2(\mathfrak{R})$ et une résolution j donnée, on peut écrire l'approximation du signal à cette résolution comme

$$A_{2^j} s(x) = 2^{-j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Ls(n, 2^{-j}) \Phi_{2^j}(x - 2^{-j}n) \quad (3.6)$$

où on a défini

$$Ls(n, 2^{-j}) = \langle s(u), \Phi_{2^j}(u, n) \rangle \quad (3.7)$$

avec

$$\Phi_{2^j}(x, n) = \Phi_{2^j} \left(x - \frac{n}{2^j} \right) \quad (3.8)$$

Le théorème 1 tisse déjà les liens entre AMR et ondelettes discrètes, la base utilisée étant formée des translations discrètes, par saut de 2^{-j} , et dilatations, également

discrètes par un facteur 2^{-j} , d'une fonction "mère". Cependant, les ondelettes encodent les détails appartenant à une bande de fréquence plutôt que d'agir comme une approximation du signal. Toutefois, un retour en arrière à l'équation (1.32), donnée par

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{s_0} ((W_\psi f) \star \psi)(s, t) \frac{ds}{s^2} + \frac{1}{C_\psi s_0} ((Lf) \star \Phi)(s_0, t).$$

nous montre que la décomposition du signal à une certaine résolution correspond à sa convolution par une fonction d'échelle. La différence entre cette approximation et le signal original est donnée par la transformée en ondelettes.

Avant de rechercher les fonctions discrètes qui représenteront les ondelettes numériques, il importe de mieux définir la discrétisation de la fonction d'échelle. Puisque les détecteurs physiques sont de résolution finie, considérons un signal formé de 2^J échantillons. De la propriété 3 d'une AMR, nous savons que toutes les approximations de résolution 2^j où $j < J$, peuvent être obtenues à partir de toute résolution \tilde{j} pour laquelle $j < \tilde{j} \leq J$. Par exemple, grâce à la base générée par la fonction d'échelle et en fixant $\tilde{j} = j + 1$, on peut écrire

$$\Phi_{2^j}(x, n) = \frac{1}{2^{j+1}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \Phi_{2^j}(u, n), \Phi_{2^{j+1}}(u, k) \rangle \cdot \Phi_{2^{j+1}}(x - k). \quad (3.9)$$

Grâce aux équations (3.4) et (3.5), et par un changement de variable, on peut déduire l'égalité suivante:

$$\frac{1}{2^{j+1}} \langle \Phi_{2^j}(u, n), \Phi_{2^{j+1}}(u, k) \rangle = \langle \Phi_{2^{-1}}(u), \Phi(u - (k - 2n)) \rangle. \quad (3.10)$$

Le produit interne d'un signal $s(x)$ de chaque côté de l'équation (3.9) donne alors

$$\langle s(u), \Phi_{2^j}(u, n) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \Phi_{2^{-1}}(u), \Phi(u - (k - 2n)) \rangle \cdot \langle s(u), \Phi_{2^{j+1}}(u, k) \rangle. \quad (3.11)$$

Introduisons maintenant le filtre discret H ayant une réponse impulsionnelle donnée par

$$h(n) = \langle \Phi_{2^{-1}}(u), \Phi(u - n) \rangle \quad (3.12)$$

et \tilde{H} , son filtre miroir, ayant une réponse impulsionnelle de la forme $\tilde{h}(n) = h(-n)$. L'équation (3.11) devient alors

$$\langle s(u), \Phi_{2^j}(u, n) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{h}(2n - k) \langle s(u), \Phi_{2^{j+1}}(u, k) \rangle. \quad (3.13)$$

Cette dernière équation nous montre que l'approximation est calculable sous la forme d'une convolution du signal avec le filtre \tilde{H} en ne gardant qu'un échantillon sur deux. Le résultat contient alors moitié moins de données que le signal d'origine et peut être à nouveau convolué par le même filtre pour passer à une résolution plus faible. Ce procédé est nommé transformée pyramidale.

Si le théorème 1 nous assure de l'existence d'une fonction d'échelle caractérisant complètement l'espace vectoriel des approximations, il omet de caractériser pratiquement cette fonction d'échelle. C'est ce que le prochain théorème réalise.

Théorème 2:

Soit $\Phi(x)$ une fonction d'échelle et H , le filtre discret ayant la réponse impulsionnelle définie à l'équation (3.12). Soit $H(\omega)$, la série de Fourier donnée par

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-in\omega}. \quad (3.14)$$

Alors, $H(\omega)$ satisfait les propriétés suivantes

$$|H(0)| = 1, \quad (3.15)$$

$$h(n) = \mathcal{O}(n^{-2}) \quad \text{à l'infini}, \quad (3.16)$$

$$|H(\omega)|^2 = 1 - |H(\omega + \pi)|^2. \quad (3.17)$$

De plus, si $H(\omega)$ est une série de Fourier satisfaisant les propriétés citées plus haut et telle que

$$|H(\omega)| \neq 0 \quad \forall \omega \in [0, \pi/2] \quad (3.18)$$

alors, la fonction

$$\hat{\Phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{\infty} H(2^{-p}\omega) \quad (3.19)$$

est la transformée de Fourier d'une fonction d'échelle.

Ainsi, les fonctions d'échelle sont caractérisées à partir de filtres aux propriétés bien définies. De tels filtres, appelés filtres conjugués, sont bien connus dans le domaine du traitement du signal numérique. À ce point, il s'avère intéressant de noter qu'on retrouve de tels filtres pouvant posséder une des caractéristiques prédominantes des ondelettes: une très bonne localisation, autant fréquentielle que spatiale.

La transformée en ondelette numérique peut maintenant être déduite de la même façon que l'a été la pyramide laplacienne. Cette dernière était calculée à partir des différences entre deux approximations gaussiennes à des échelles consécutives de la pyramide; la TO numérique encodera les différences entre un signal à la résolution 2^{j+1} et ce même signal à la résolution 2^j .

On se rappellera que l'élaboration d'une représentation à diverses résolutions d'un signal nous a menés à construire l'espace vectoriel V_{2^j} des approximations dyadiques. Pour bien définir les détails extraits par le passage d'une résolution plus fine à la suivante, plus lissée, nous devons également construire un deuxième espace vectoriel, noté V'_{2^j} , qui se définira le complément orthogonal de V_{2^j} . Ainsi,

$$V_{2^j} \oplus V'_{2^j} = V_{2^{j+1}}. \quad (3.20)$$

De la même façon que lors de la réalisation numérique des approximations multi-résolutionnelles, nous devons fournir à l'espace complémentaire une base orthonormale pouvant calculer cette projection orthogonale pour un signal $s(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Un troisième théorème, similaire au premier, montre qu'une telle base peut être construite.

Théorème 3:

Soit l'espace vectoriel des approximations dyadiques V_{2^j} , $\Phi(x)$, sa fonction d'échelle et H , son filtre conjugué correspondant. Soit $\Psi(x)$ une fonction dont la transformée de Fourier est donnée par

$$\hat{\Psi}(\omega) = G\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (3.21)$$

où

$$G(\omega) = e^{-i\omega} \overline{H(\omega + \pi)}. \quad (3.22)$$

Si la dilatation de la fonction Ψ par un facteur d'échelle dyadique est donné par $\Psi_{2^j}(x) = 2^j \Psi(2^j x)$, alors l'ensemble des translations entières $(\sqrt{2^{-j}} \Psi_{2^j}(x - 2^{-j}n))$ est une base orthonormale de V'_{2^j} et l'ensemble de ces éléments de base pour tous les facteurs dyadiques j entiers forme une base de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Dans ce cas, $\Psi(x)$ est nommée ondelette orthogonale.

Or, les paires de filtres liés par la relation (3.22) répondent à la définition des filtres miroirs en quadrature. C'est ainsi que l'équivalence entre les ondelettes et ces filtres fut démontrée mathématiquement par Mallat [21][22]. Bien connus en traitement du signal, H est le filtre passe-bas associé à l'approximation et G est le filtre passe-haut appliqué au signal préalablement lissé par l'opérateur d'approximation $A_{2^{j+1}}$.

À l'aide de ces deux filtres, il est possible de construire une analyse multirésolution grâce à un algorithme en forme d'arbre tel que montré à la figure 9.

Comme on peut le voir, le signal échantillonné initial, noté S , est filtré par le filtre d'échelle h et le filtre ondelette g . Les deux résultats sont notés L_1 pour la première

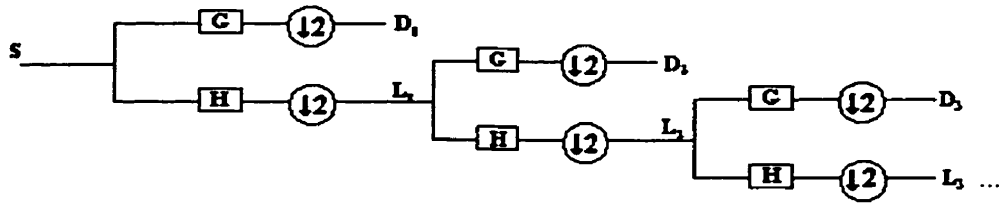


FIGURE 9. Algorithme en arbre utilisé dans l'analyse multirésolutionnelle.

échelle de signal lissé, et D_1 pour la première résolution de détail d'ondelettes. La représentation étant complète, donc sans redondance, la dimension de L_1 et D_1 est deux fois moindre que la dimension du signal original. L'arbre se construit alors en répétant les deux filtrages sur le signal lissé L_1 qui correspond à une version de plus faible résolution du signal original. Le processus peut se répéter jusqu'à ce que le signal filtré possède moins d'information que la dimension des filtres utilisés.

3.3 Application de la transformée en ondelettes discrète : l'extraction de contours

Munis du formalisme des FMQ, plusieurs paires de filtres d'ondelettes furent introduites. Chacun possède des caractéristiques propres qui lui permettent de réaliser les tâches qui leur incombent. Certaines servent à compresser l'information lorsque celle-ci doit être emmagasinée. C'est notamment le cas pour les images d'empreintes digitales conservées par le FBI aux États-Unis. Une TO remplace également la transformée en cosinus pour le nouveau standard de compression d'image JPEG 2000.

Une autre application où l'on retrouve la TO discrète est le débruitage de signaux. Le principe de base de cette technique est la décomposition en ondelettes d'un signal bruité et, suite à une analyse statistique, une reconstruction du signal original en éliminant certaines parties des octaves où le bruit est davantage présent.

Finalement, l'utilisation de la TO permet également d'extraire les contours d'une image à toutes les résolutions dyadiques sans l'introduction d'aucune redondance. C'est cette dernière application qui a retenu notre attention relativement à un projet de reconnaissance de forme que nous décrirons au prochain chapitre. Pour l'instant, nous introduirons l'algorithme qui permet de calculer la TO discrète rapide d'une image. Ensuite, nous présenterons les étapes qui permettent d'utiliser l'information fournie par la TO discrète pour extraire les contours dans une image.

3.3.1 Algorithme de transformée en ondelettes rapide 1-D

Les propriétés de localisation des ondelettes font que leurs filtres associés sont de support fini, i.e. ils sont définis par un nombre fini de coefficients dans leur développement en série de Fourier, tel que défini dans l'équation (3.14). Pour des fins de simplicité, nous considérerons, dans cette section, des filtres des quatre coefficients, allant de la composant $n = -1$ à la composante $n = 2$.

Le filtrage se déroule en deux étapes: la corrélation du filtre avec le signal et la réduction de moitié de la dimension des signaux filtrés [23]. Ces dernières peuvent être combinées dans une seule multiplication matrice-vecteur,

$$\begin{pmatrix} h_{-1} & h_0 & h_1 & h_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{-1} & g_0 & g_1 & g_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{-1} & h_0 & h_1 & h_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{-1} & g_0 & g_1 & g_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_{-1} & h_0 & h_1 & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_{-1} & g_0 & g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & h_{-1} & h_0 \\ g_1 & g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & g_{-1} & g_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ \vdots \\ S_{N-3} \\ S_{N-2} \\ S_{N-1} \\ S_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ D_1 \\ L_2 \\ D_2 \\ \vdots \\ L_{\frac{N}{2}-1} \\ D_{\frac{N}{2}-1} \\ L_{\frac{N}{2}} \\ D_{\frac{N}{2}} \end{pmatrix}$$

On note que les dernières lignes de la matrice des filtres possèdent un caractère cyclique. Ce phénomène est dû à la représentation fréquentielle d'un signal échantillonné. En effet, lors de l'analyse fréquentielle d'un signal, la convention veut que les effets de bords soient traités comme si le signal se répétait à l'infini. Par exemple, lorsque la transformée de Fourier rapide d'une image est calculée, le spectre résultant peut être interprété comme suit: l'image analysée est considérée comme le centre d'un carrelage infini où chaque "tuile" est identique à l'autre. La TF est appliquée à l'ensemble et seule la partie centrale du spectre, de même dimension que l'image d'origine, est conservée. Cette approche permettant de gérer les effets de bords lors du calcul de la TF est ainsi également retrouvée dans la TO.

On remarque que le résultat obtenu à l'équation (3.23) doit encore être trié par une série de permutations pour obtenir le signal lissé $L = \{L_1, L_2, \dots, L_{\frac{N}{2}}\}$ et la transformée en ondelettes $D = \{D_1, D_2, \dots, D_{\frac{N}{2}}\}$. La multirésolution se bâtit alors en prenant L comme nouveau signal d'origine et en lui multipliant la matrice des filtres.

3.3.2 Généralisation au cas multidimensionnel

Comme c'est le cas pour l'analyse de Fourier, le passage au cas multidimensionnel pour la TO s'exécute facilement. Les variables sont découplées et la TO est effectuée sur chacune d'elles tour à tour. Par exemple, dans le cas d'une image numérique, la TO s'applique d'abord sur chaque ligne de l'image. Ensuite, chaque colonne de l'image ainsi transformée est soumise à la même transformation. On obtient alors la transformée complète de l'image. Ces étapes sont montrées graphiquement à la figure 10.

L'application de l'algorithme en arbre donne alors la représentation montrée à la figure 11.

On parle ici de représentation complète car aucune redondance n'est introduite. En effet, les dimensions de l'image de départ et de sa décomposition multirésolutionnelle sont identiques, sans qu'une partie de l'information soit perdue. Ceci est obtenu grâce

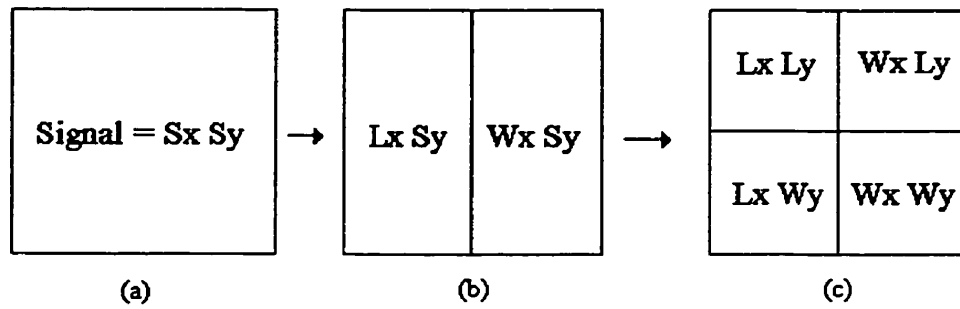


FIGURE 10. Étape de l'algorithme de transformée en ondelettes 2-D.

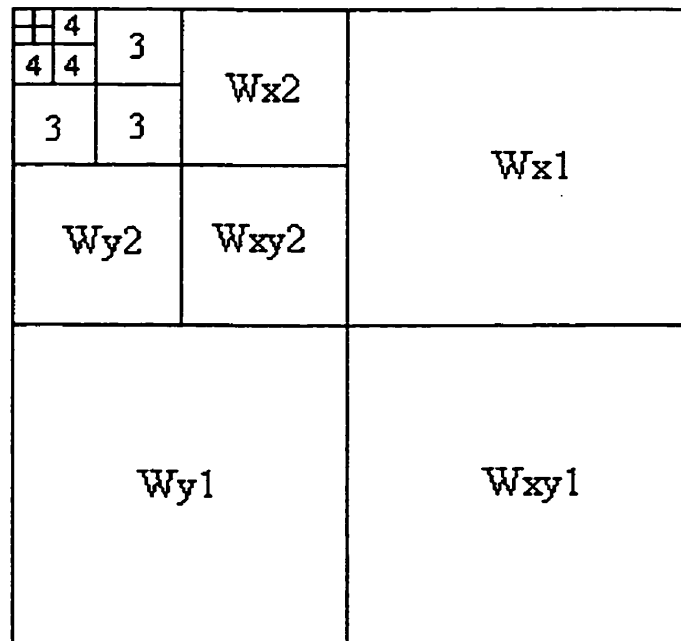


FIGURE 11. Décomposition multirésolutionnelle en ondelettes d'un signal 2-D.

à la réduction de dimension par un facteur 2 pour chaque variable lorsqu'on passe d'une octave à une autre.

3.3.3 Ondelettes de Daubechie

Plusieurs filtres d'ondelettes ont été développés pour diverses applications. Une classe d'ondelettes très connue regroupe les ondelettes de Daubechie, où le nombre de coefficients peut varier [23]. L'ondelette de Daubechie la plus simple [24], ne possédant qu'un moment nul (passage de la fonction par zéro), possède un nombre minimal de quatre coefficients. Elle est définie par les filtres suivants :

$$h = \{h_{-1}, h_0, h_1, h_2\} = \left\{ \frac{1 + \sqrt{3}}{4}, \frac{3 + \sqrt{3}}{4}, \frac{3 - \sqrt{3}}{4}, \frac{1 - \sqrt{3}}{4} \right\}, \quad (3.23)$$

$$g = \{g_{-1}, g_0, g_1, g_2\} = \left\{ \frac{1 - \sqrt{3}}{4}, \frac{-3 + \sqrt{3}}{4}, \frac{3 + \sqrt{3}}{4}, \frac{-1 - \sqrt{3}}{4} \right\}. \quad (3.24)$$

On note que les relations suivantes sont observées:

$$h_{-1}^2 + h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 = 1 \quad (3.25)$$

$$g_{-1} + g_0 + g_1 + g_2 = 0. \quad (3.26)$$

On a donc un filtre d'échelle normalisé et un filtre ondelette de moyenne nulle. De plus, en construisant la matrice des filtres, on note l'orthogonalité entre les lignes et les colonnes. La matrice de Daubechie est donc orthogonale et son inverse est égale à sa transposée. Cette propriété simplifie le calcul effectué lors de la reconstruction du signal à partir de sa décomposition.

Le même comportement se retrouve dans l'utilisation d'une version plus lisse de cette ondelette contenant plus d'oscillations. Ceci se fait grâce à de plus longs filtres. Par exemple, l'ondelette de Daubechie à douze coefficients est donnée par

$$h = \{0.111541, 0.494624, 0.751134, 0.315250, -0.226265, -0.129767, \\ 0.097502, 0.027523, -0.031582, 0.000554, 0.004777, -0.001077\} \quad (3.27)$$

$$g = \{-0.001077, -0.004777, 0.000554, 0.031582, 0.027523, -0.097502, \\ -0.129767, 0.226265, 0.315250, -0.751134, 0.494624, -0.111541\} \quad (3.28)$$

3.3.4 Ondelettes spline quadratique

Une autre ondelette, utilisée par Stéphane Mallat [22] pour l'extraction de contours, est nommée spline quadratique. Dans le but d'obtenir un détecteur de bords optimal, l'ondelette introduite se doit d'être dyadique, facilement réalisable par l'algorithme en arbre. De plus elle doit être une fidèle approximation de la première dérivée d'une gaussienne, qui est considérée comme le détecteur de bords optimal dans le cas continu.

Dans un premier temps, une fonction spline cubique est introduite comme fonction d'échelle. Pour bien comprendre ce que ce type de fonction représente, disons qu'une B-spline d'ordre $2n+1$ est générée par les convolutions répétées $2n+1$ fois de la B-spline d'ordre 1, qui n'est autre qu'une fonction rectangle. Les convolutions produisent une fonction lissée en forme de cloche lorsque $n > 0$. Évidemment, ce lissage produit une fonction ayant un support moins compact. La B-spline d'ordre $2n+1$ a des dérivées continues jusqu'à l'ordre $2n-1$.

Sachant que la TF d'une fonction rectangle est donnée par la fonction *sinus cardinal* et que la convolution entre deux fonctions se transpose en produit de leurs spectres dans l'espace de Fourier, on déduit la TF de la B-spline d'ordre $2n+1$

$$\hat{\Phi}(\omega) = \left(\frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)} \right)^{2n+1}. \quad (3.29)$$

La ressemblance existant entre la spline cubique et une gaussienne amena Mallat à la considérer comme fonction de lissage. De ce fait, il a réussi à générer les fonctions d'échelle et d'ondelette données par les spectres suivant

$$\hat{\Theta}(\omega) = \left(\frac{\sin(\omega/4)}{\omega/4} \right)^4, \quad (3.30)$$

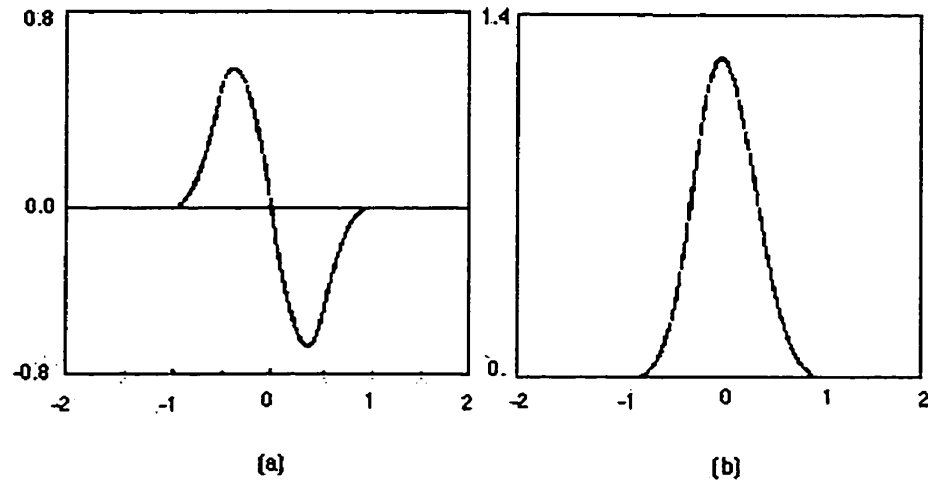


FIGURE 12. (a) Graphiques de la fonction spline quadratique. (b) Graphique de la fonction d'échelle associée.

$$\hat{\Psi}(\omega) = i\omega \left(\frac{\sin(\omega/4)}{\omega/4} \right)^4. \quad (3.31)$$

Les filtres associés à ces fonctions sont donnés par les coefficients suivant

$$h = \{h_{-1}, h_0, h_1, h_2\} = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8} \right\}, \quad (3.32)$$

$$g = \{g_0, g_1\} = \{-2, 2\}. \quad (3.33)$$

On peut voir, à la figure 12 les graphes des deux fonctions. À gauche, on voit l'ondelette spline quadratique alors que sa fonction d'échelle est représentée à droite.

Une particularité de cette ondelette est qu'elle ne fournit pas une matrice de filtres orthogonale. Bien que nous n'effectuons ultérieurement pas les étapes de reconstruction, mentionnons tout de même que deux filtres différents sont développés à partir des propriétés de h et g .

3.3.5 Extraction de contours et maxima dans la direction du gradient

Puisque nous voulons utiliser la TO discrète pour extraire les contours d'une image, nous devons utiliser efficacement l'information ainsi recueillie. Dans le cas d'une image bidimensionnelle, les discontinuités ne sont habituellement pas isolées puisqu'elles appartiennent à certains contours de l'image. Le long de ces contours, l'intensité de l'image est discontinue dans une direction, mais varie de façon continue dans la direction perpendiculaire. Ces comportements constituent une information importante de la structure de l'image. À partir de l'information recueillie par la TO, il est donc possible de déterminer les maxima des coefficients de TO, et ensuite d'organiser les maxima dans les voisinages locaux pour découvrir les courbes de contours.

Pour ce faire, nous avons utilisé deux composantes de la transformée en ondelettes, soit celle donnant les détails verticaux et celle donnant les détails horizontaux. Grâce à ces informations, il nous est possible, par une simple transformation mathématique, de définir un vecteur de gradient. En effet, pour chaque point, ce vecteur sera défini par les deux fonctions discrétisées suivantes:

$$M_{ij} = \sqrt{L_x D_y(i, j)^2 + L_y D_x(i, j)^2}, \quad (3.34)$$

$$A_{ij} = \arctan(L_x D_y(i, j) / L_y D_x(i, j)). \quad (3.35)$$

Ici, $M(i, j)$ correspond à la norme du vecteur gradient et $A(i, j)$ donne son angle. $L_y D_x(i, j)$ correspond à la valeur de la TO horizontale du pixel à la position (i, j) alors que $L_x D_y(i, j)$ donne la valeur de la TO selon y .

Munis de ces deux "matrices" d'information, nous pouvons procéder à l'extraction des maxima locaux dans la direction du gradient. Dans un premier temps, il importe de mentionner que nous ne poussons pas l'analyse jusqu'à une précision sous-pixel. Par conséquent, nous nous limitons à une étude locale des maxima par rapport à leurs huit voisins immédiats. D'abord, nous discrétisons les valeurs de l'angle de gradient en

quatre orientations de base: horizontale, verticale et le long des diagonales de pentes +1 et -1. Suite à cette opération, une valeur M_{ij} n'est conservée que dans le cas où elle est maximale par rapport à ses deux valeurs voisines se trouvant sur l'axe associé à la valeur de A_{ij} . Ce traitement effectué, le résultat obtenu est une image de contours d'au plus un pixel d'épaisseur.

Nous avons donc maintenant les outils qu'il nous faut pour utiliser la transformée en ondelettes discrète en tant qu'extracteur de contours. De plus, comme nous le verrons plus loin, des contours d'un seul pixel d'épaisseur sont généralement essentiels lors du traitement des courbes dans l'espace lors de processus de reconnaissance de forme. En effet, le prochain chapitre sera consacré à la présentation de travaux effectués dans le cadre d'un projet de reconnaissance de cibles. La TO discrète y fut utilisée et les techniques de reconnaissances de forme employées y seront exposées.

CHAPITRE 4

Extraction de contours par la transformée en ondelettes dans le cadre d'un projet de reconnaissance invariante d'objets 3D

4.1 Introduction

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, l'extraction de l'information fréquentielle locale fait par la TO discrète trouva plus d'une application en traitement du signal. Ce chapitre en fera foi puisqu'un projet de reconnaissance de forme dans l'espace, utilisant la TO discrète, y sera présenté. Le problème que nous abordons ici vise à étudier une technique de reconnaissance automatique de cible (RAC) dans l'espace 3-D. Les objets à reconnaître peuvent alors apparaître avec une grande variation de dimensions et d'orientations, autant dans le plan de l'image qu'en dehors de celui-ci. Plus précisément, il s'agit de véhicules militaires pouvant se trouver dans toutes les orientations rencontrées lors d'une rotation de 360 degrés en dehors du plan de l'image. Notre approche a constitué l'une des parties d'un rapport qui fut réalisé conjointement avec des étudiants du professeur Henri Arsenault [25].

Ce type de problème se jumelle habituellement à un environnement naturel où il

y a une très grande variété d'objets parasites en fond de scène. La cible peut aussi être partiellement cachée derrière des objets parasites, la fumée en émanant de même que les reliefs accidentés du terrain. L'image de la cible peut avoir un faible contraste et être de faible résolution. De plus, dans le cas d'images infrarouges, la luminosité varie avec la condition climatique de l'environnement et avec le fonctionnement des différents appareils du véhicule. Par exemple, la température du moteur ou du canon augmente lorsque ces derniers sont en fonction; ces parties deviennent alors plus brillantes dans les images infrarouges. Tous les problèmes ici mentionnés sont parfois très complexes et peuvent représenter, à eux seuls, un des sujets de recherche bien cernés dans le domaine de la RAC.

Les aspects considérés dans ce projet sont très différents de ceux rencontrés dans les applications commerciales de la reconnaissance des formes, comme la reconnaissance de la parole et la vision robotique. Remplir cette tâche requiert généralement l'utilisation de plusieurs capteurs de différents types, comme les signaux radar et sonar, les images optoélectroniques multispectrales et les images stéréo. Une fusion temporelle de ces données peut améliorer grandement le résultat de la classification.

Toutefois, notre projet est défini de telle sorte que nous devons procéder à la reconnaissance des véhicules à partir d'une banque d'images bidimensionnelles, captées uniquement par une caméra infrarouge. Nous ne possédons aucune information sur la profondeur de l'objet. Par conséquent, il est pratiquement impossible d'assurer un taux de détection et de classification parfait dans tous les cas. Et même si la reconnaissance était réalisée à la perfection dans certaines démonstrations expérimentales, il est entendu que ce taux de réussite serait probablement inférieur en étudiant des exemples dont l'environnement a été changé.

Le champ d'analyse a donc été délimité à un environnement contrôlé. Notre banque d'images est composée d'images de cinq véhicules militaires, soixante-douze images pour chacun. Un échantillon de la banque d'images peut être vu à la figure 13. Les images de véhicules sont captées alors qu'ils sont stationnés sur un plateau rotatif. Elles

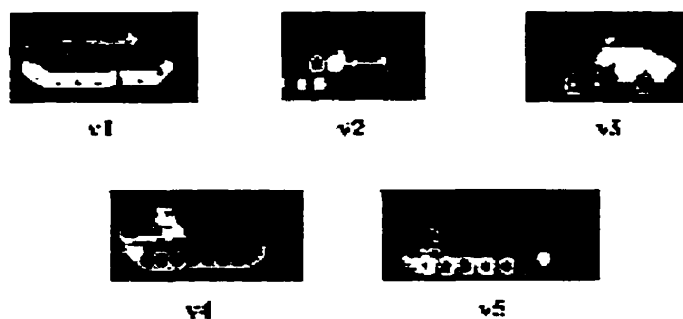


FIGURE 13. Images des cinq véhicules faisant partie de la banque.

représentent les vues des cibles prises à tous les cinq degrés. Aucun objet parasite n'est détecté en fond d'image. De ce fait, l'emphase du projet est alors mise sur le processus de reconnaissance d'objet tridimensionnel. Cependant, ces images, parce qu'elles sont prises dans l'infrarouge, ont de faibles contrastes. Cette caractéristique va parfois même jusqu'à la limite où un observateur humain est incapable de discerner les bords de l'objet du fond de la scène. De plus, l'intensité lumineuse est non-uniforme sur l'objet. La partie représentant le moteur de l'appareil est extrêmement brillante à cause de la température élevée dégagée durant son fonctionnement. Ces aspects correspondent évidemment à des problèmes propres à la RAC. Dans ce cas, la segmentation de l'image d'une scène, le rehaussement du contraste de l'image, la réduction du bruit et l'extraction du contour de l'objet sont des étapes clefs de la réussite. Après la réalisation de ces dernières, il ne reste qu'à effectuer la reconnaissance de l'objet 3-D, qui est constituée par la description des contours des images et la classification grâce à des algorithmes tels les réseaux de neurones.

L'approche ici étudiée se compose de la séquence d'opérations suivante. Dans un premier temps, les images de la banque de données subissent un pré-traitement visant à rehausser leur qualité et à réduire le bruit présent. Ensuite, l'extraction des contours de l'image est effectuée par la transformée en ondelettes (TO). Dans un troisième temps, le contour des images est caractérisé par différents descripteurs. Finalement,

la reconnaissance et la classification des cibles sont accomplies par des algorithmes se comparant aux réseaux de neurones.

Cette méthode est basée sur les contours de l'image plutôt que sur l'image elle-même. Elle a l'avantage de préserver l'information sur la structure générale de l'objet tout en réduisant la quantité de données nécessaires à l'analyse. Dans ce projet, l'utilisation des contours vise aussi à éviter le problème du changement de distribution d'intensité propre à l'analyse d'images infrarouges et causé par la mise en fonction de mécanismes du véhicule. Cette approche en quatre étapes est considérée classique dans le domaine de la RAC. Au cours de ce chapitre, nous procédons à une brève revue des principales techniques pour chacune des étapes et appliquons ensuite une méthode appropriée au problème posé. La nouveauté de la démarche proposée réside dans l'utilisation de la transformée en ondelettes (TO) pour extraire le contour de l'objet et des descripteurs de courbes pour une description du contour possédant diverses invariances affines permettant l'automatisation. Pour la classification, nous utiliserons des algorithmes basés sur la trajectoire dans l'espace des caractéristiques (TEC), ce qui est mieux adapté à la reconnaissance d'objets 3-D à partir de ses images 2-D.

Comme cela a été vu au premier chapitre, la transformée en ondelettes (TO) pourrait être réalisée optiquement. Par contre, d'autres parties, comme la description mathématique des contours, sont difficiles à réaliser optiquement et ainsi ne profitent pas des véritables avantages de l'optique, soit la rapidité et le parallélisme.

Dans la première section, une méthode d'égalisation de l'histogramme pour balancer la distribution de l'intensité de l'image infrarouge est introduite. Pour éliminer les variations de gradient importantes au niveau du bruit de fond, nous procédons aussi à une série de filtrages médians. Ces pré-traitements sont effectués dans le but de faciliter l'extraction des contours, qui seront trouvés grâce à la TO. Ensuite, nous étudions différents descripteurs de contours, les comparons entre eux et retenons les plus prometteurs. Finalement, nous présentons les algorithmes pour la reconnaissance d'objets 3-D. À chaque étape, les résultats des techniques retenues sont montrés.

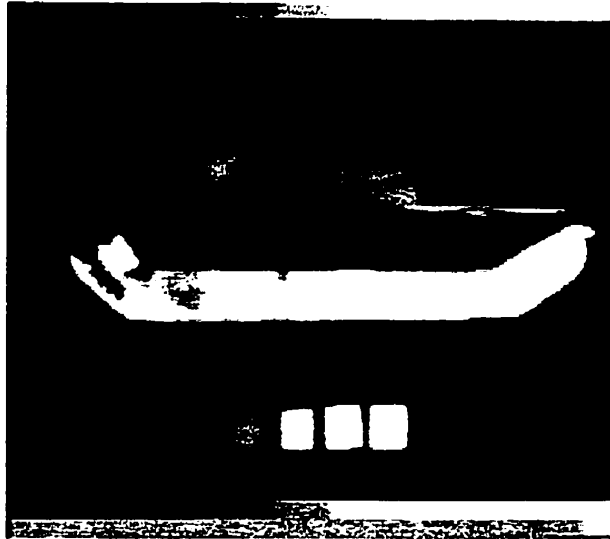


FIGURE 14. Image d'un char d'assaut, à un angle de 100 degrés.

4.2 Rehaussement des images

Pour des images avec un bon contraste et dépourvues de bruit, l'extraction de contour se réalise très facilement. Ce ne sont toutefois pas ce genre de conditions qui sont rencontrées dans le cadre de ce projet. Bien sûr, l'environnement de nos images est partiellement contrôlé, les véhicules étant stationnés sur un plateau tournant contrairement à une image prise sur le terrain. On ne retrouve pas non plus d'objets parasites dans le fond. Cependant, les images infrarouges ont typiquement de faibles contrastes et d'importants bruits qui sont principalement dus à la nature non-uniforme du gradient thermique à l'arrière-plan de l'image. Pour tester la méthode proposée, nous commençons par une image de notre banque de données qui est de meilleure qualité, avec moins de bruit, comme montrée à la figure 14.

Dans l'image originale, la silhouette de l'objet consiste en lignes régulières: lignes droites et un petit nombre de lignes courbes. L'image du véhicule est composée de plusieurs régions de différentes intensités, correspondant à différentes températures, plus ou moins uniformes à l'intérieur de la dite région. Certaines parties de l'image du

véhicule ont un contraste si faible que leurs bords sont très difficiles à déterminer, même pour un observateur humain. Ce faible contraste est une conséquence directe du fait que ces parties de véhicule sont à la même température que l'atmosphère ambiante. On remarque qu'une partie de la base du véhicule est très brillante à cause de la température élevée du moteur et des roues. Le pré-traitement que nous ferons sur les images visera à en rehausser la qualité et ainsi éliminer partiellement les problèmes qu'apportent ces caractéristiques nuisibles à l'étape d'extraction des contours.

4.2.1 Égalisation de l'histogramme

Un problème particulier inhérent aux images infrarouges étudiées est la très grande différence entre les intensités de différentes parties du véhicule. Ceci devient encore plus problématique dans le cas fréquent où ces variations se produisent durant le fonctionnement du véhicule. La figure 15 montre l'histogramme de l'intensité lumineuse de l'image originale. Si on fait exception du grand nombre de pixels blancs (intensité à 255) correspondant aux parties chaudes du véhicule, la majorité des pixels de l'image possède une faible luminance, inférieure à 128 niveaux de gris. Les parties sombres et des faibles contrastes de l'image sont donc difficilement perceptibles, même à l'oeil. Dans ces conditions, l'extraction de contours devient très difficile.

Pour faire ressortir ces parties sombres de l'objet, nous avons utilisé la procédure d'égalisation de l'histogramme [26]. Le principe de cette procédure est bien connu: il redistribue les pixels de l'image sur les différents niveaux de gris de telle sorte que l'image ainsi traitée possède un histogramme plus uniforme. Le comportement désiré est donc d'obtenir une répartition pour l'histogramme final qui aurait une allure se rapprochant de la distribution de probabilité uniforme:

$$P_{final}(j) = \frac{1}{f_{max} - f_{min}}, \quad (4.1)$$

où j serait compris entre f_{min} et f_{max} . Pour ce faire, une distribution de probabilité est

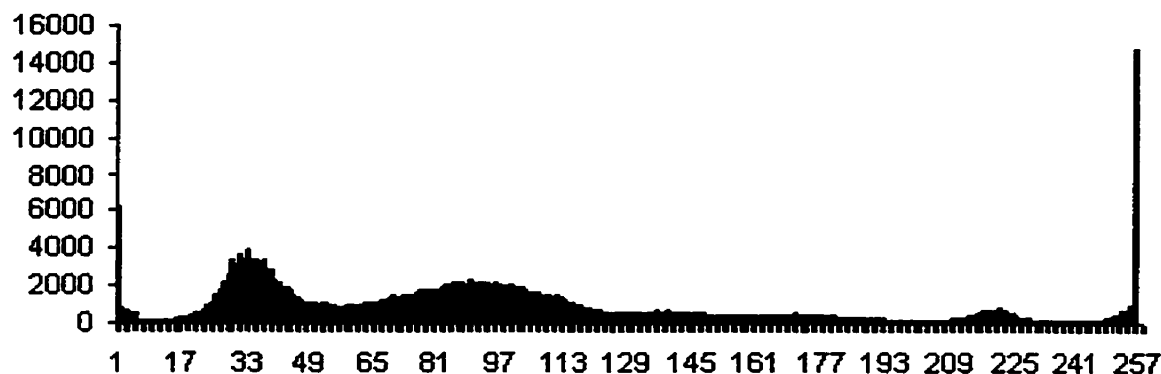


FIGURE 15. Histogramme du nombre de pixels en fonction de l'intensité lumineuse sur 256 niveaux de gris.

construite à partir de l'histogramme initial H_i de la manière suivante:

$$P_{init}(j) = \sum_{m=0}^j H_i(m). \quad (4.2)$$

On égalise alors la valeur d'un pixel v_i de l'image initiale vers une valeur v_f en lui appliquant la fonction de transfert suivante

$$v_f = (f_{max} - f_{min})P_{init}(v_i) + f_{min}. \quad (4.3)$$

La figure 16 montre l'histogramme égalisé. On voit que les variations d'intensité trop importantes dans l'image originale sont minimisées et les parties sombres de l'objet sont mises en évidence par ce simple procédé. Il serait possible d'encore raffiner, au besoin, la procédure d'égalisation en recherchant des distributions de probabilité autres qu'uniforme. On retrouve notamment plusieurs distributions non linéaires comme l'exponentielle, l'hyperbolique logarithmique ainsi que la distribution de Rayleigh. Toutefois, dans notre cas, la distribution uniforme donne les meilleurs résultats.

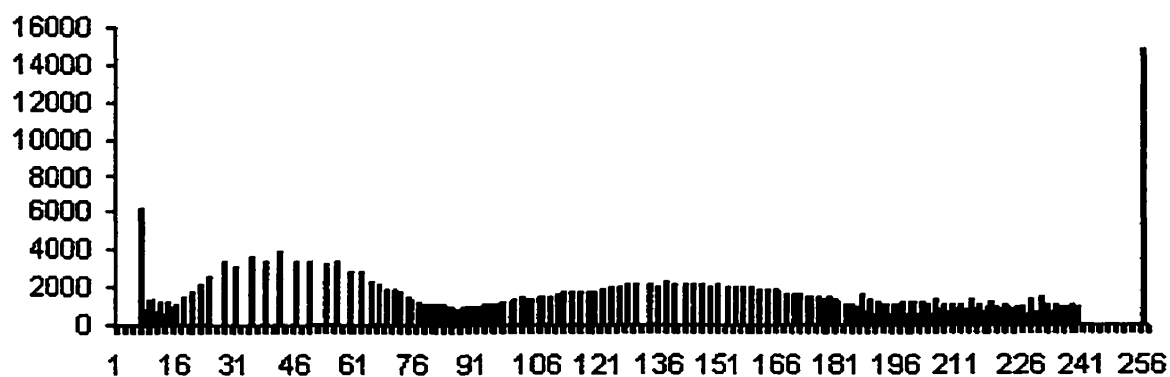


FIGURE 16. Histogramme du nombre de pixels en fonction de l'intensité lumineuse sur 256 niveaux de gris après égalisation.

4.2.2 Filtrage médian

Un autre problème qui fut rencontré avec l'image de départ fut la présence abondante du bruit thermique aux alentours du véhicule. Ce bruit est causé par le détecteur infrarouge. De plus, les variations de gradient sont assez importantes, comme nous l'avons constaté lors de l'étape d'extraction de contours. Bien que nous prévoyions une bonne capacité d'élimination du bruit en utilisant les propriétés de la transformée en ondelettes, il s'est avéré plus sage d'effectuer un pré-traitement par l'utilisation d'une méthode non linéaire proposée par Tukey: le filtrage médian [26].

Cette technique consiste à remplacer la valeur en intensité de chaque pixel par la valeur médiane des pixels compris dans une fenêtre carrée centrée sur ce point d'intérêt. La fenêtre peut être de dimensions variables. Les valeurs des intensités ainsi examinées sont classées par ordre croissant. Si N valeurs sont ordonnées, pour N impair, on fixera l'intensité du pixel égale à la valeur qui a $(N-1)/2$ voisins d'intensité inférieure ou égale et $(N-1)/2$ autres d'intensité supérieure ou égale. Dans le cas où N est pair, on prendra la moyenne des deux valeurs médianes. Il est intéressant de noter que ce filtrage peut être appliqué en cascade. Il peut être appliqué à l'image déjà filtrée pour éliminer

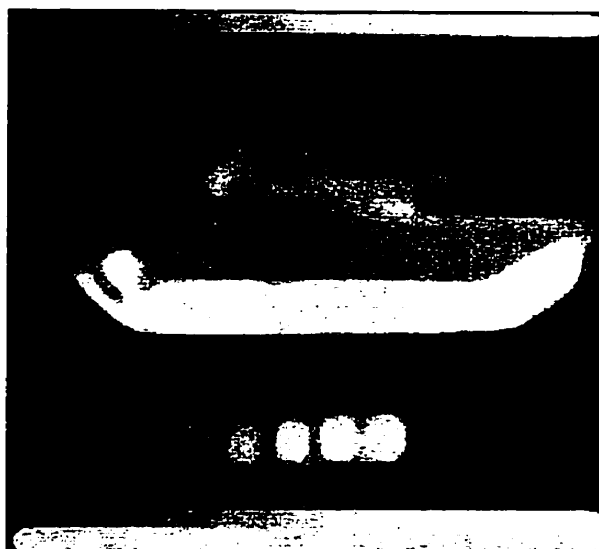


FIGURE 17. Image d'un char d'assaut vu à un angle de 100 degrés, préalablement traitée par une égalisation de l'histogramme, après un traitement par un filtre médian de fenêtre 10 x 10.

un maximum de bruit. La figure 17 montre l'image sur laquelle on a déjà opéré une égalisation de l'histogramme et ensuite convolué par un filtre médian de fenêtre 10x10.

Le filtrage médian peut cependant devenir une arme à deux tranchants: autant la technique peut éliminer le bruit indésirable, autant elle peut nous faire perdre certains signaux valides. Afin de ne pas obtenir de résultats contraires à nos attentes de départ, l'utilisation de ce filtre doit se faire avec beaucoup de circonspection. Les dimensions de la fenêtre et le nombre de filtrages sont les deux principaux paramètres nous permettant de contrôler expérimentalement le rehaussement. Nous avons pu constater, dans notre expérience, qu'une application unique d'un filtre avec une fenêtre de 10x10 nous fournit une bonne élimination du bruit sans une trop grande perte de signal.

Nous avons également testé une généralisation de ce filtre, introduite par Pratt et al.: le filtrage pseudo-médian [26]. Dans ce cas, la fenêtre carrée de départ est remplacée par les pixels situés sur une croix ayant toujours le pixel d'intérêt pour centre. Le principal avantage de ce nouveau traitement réside dans la conservation de signaux de bords du véhicule. L'expérience montre en effet que le filtre pseudo-médian n'affecte pas

l'image binaire d'un carré comme il est montré dans la figure 18. Cependant, les tests effectués n'ont pas montré de grande amélioration apportée par le pseudo-médian et pour le reste de notre projet, nous traiterons les images avec une cascade de trois filtres médians 10x10, ce qui s'est avéré être le plus efficace pour les traitements ultérieurs que nous appliquerons aux images.

4.3 Extraction du contour

Comme nous l'avons mentionné, le cadre de ce projet nous a amenés à utiliser la TO numérique pour extraire les contours des véhicules. Il s'agit là d'une étape cruciale pour réussir la reconnaissance des formes puisque ces contours fournissent des caractéristiques parmi les plus importantes de l'objet. Ils contiennent une information beaucoup plus précise que l'intensité du spectre de Fourier de l'objet, par exemple.

Dans le cas du traitement de l'image infrarouge, le contour ne varie que très peu avec un changement de la température de l'objet ou de certaines de ses parties. Or, les différentes composantes (moteur, canon, etc.) d'un véhicule militaire changent de température en cours de fonctionnement. Ces changements ne sont généralement pas considérés comme des caractéristiques discriminatoires du véhicule. C'est là que réside le principal avantage de la reconnaissance basée sur le contour.

Avant de fournir les résultats que nous avons obtenus à l'aide des ondelettes présentées au chapitre précédent, nous présentons ici diverses techniques conventionnelles d'extraction de contours. Nous justifierons ensuite l'utilisation de la transformée en ondelettes dans le cas étudié.

4.3.1 Filtres de Prewitt, Sobel et Frei-Chen

Plusieurs filtres numériques existent pour la détection des bords [26]. Les opérateurs de première dérivée calculent les gradients dans les deux directions orthogonales.

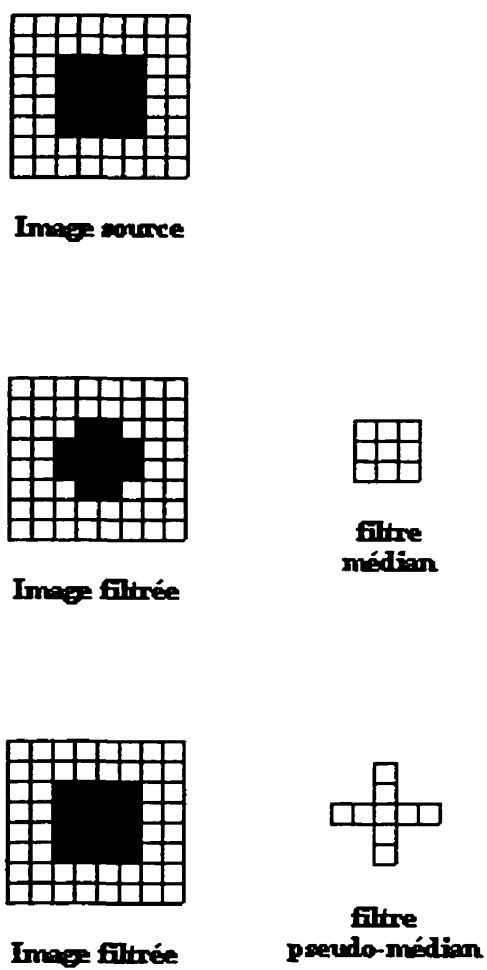


FIGURE 18. Effet des filtrages médian et pseudo-médian cruciforme appliqués sur un carré de 4 pixels de côté.

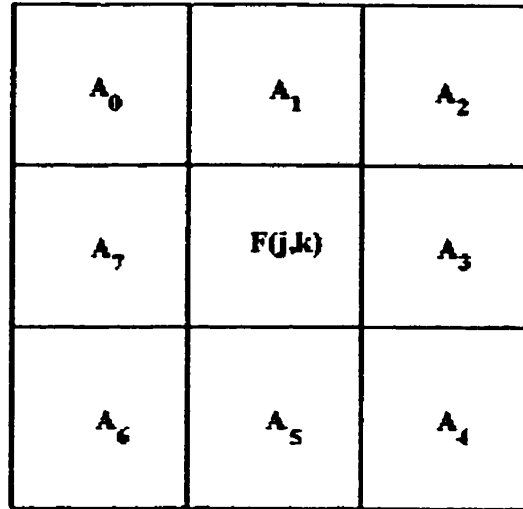


FIGURE 19. Notation utilisée pour identifier les intensités des pixels voisins d'un point d'intérêt défini par $F(j,k)$ dans une fenêtre 3×3 .

Dans le cas typique des filtres 3×3 , on calcule les gradients dans les directions x et y de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
 G_x(j, k) &= \frac{1}{K+2} [(A_2 + K A_3 + A_4) - (A_0 + K A_7 + A_6)] \\
 G_y(j, k) &= \frac{1}{K+2} [(A_0 + K A_1 + A_2) - (A_6 + K A_5 + A_4)]
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

où les A_i sont les intensités de l'image aux pixels voisins définis à la figure 19. Un vecteur gradient est alors défini par la norme donnée par

$$G(j, k) = \sqrt{G_x^2(j, k) + G_y^2(j, k)} \tag{4.5}$$

et l'angle calculé par l'arctangente suivante:

$$A(j, k) = \tan^{-1} \frac{G_y(j, k)}{G_x(j, k)}. \tag{4.6}$$

Le détecteur de bord est de type Prewitt quand $K = 1$, de type Sobel quand $K = 2$ et de type Frei-Chen quand $K = \sqrt{2}$. Les filtres de dimension 3×3 sont rapides



FIGURE 20. Types de bords considérés par l'approche de Canny lors de l'optimisation de sa méthode [27].

à calculer mais ils sont aussi plus sensibles au bruit. Les filtres de dimension plus large offrent une plus grande robustesse. Mathématiquement, chacun de ces filtrages est obtenu par deux convolutions de l'image dont les noyaux sont de dimension 3×3 . L'une donne les détails verticaux et l'autre, les détails horizontaux présents dans l'image. Les valeurs des éléments des noyaux sont entièrement définies par les équations retrouvées en (4.4) et la constante K .

4.3.2 Détecteur de bords optimal

Les filtres proposés par Canny [27] sont obtenus à partir d'une optimisation numérique. Elle prend en considération les différents types de bords montrés dans la figure 20: marche, faîte et faîte aplati. Plusieurs critères sont utilisés lors de l'optimisation. Parmi eux, il y a le rapport signal sur bruit, quand l'image est dégradée par un bruit aléatoire additif. D'autres aspects tiennent compte de la localisation du bord et de l'élimination des pics multiples aux alentours du bord. Canny a découvert qu'un filtre de large dimension donne un meilleur rapport signal sur bruit tandis qu'un filtre étroit donne une meilleure localisation. Il y a donc un principe d'incertitude qui s'applique à ces deux variables. Puisque c'est le produit de la localisation et du rapport signal sur bruit qui est indépendant de l'échelle du filtre, il y a alors un compromis à faire entre ces deux critères. Le type de performance désiré dépend donc de l'échelle du filtre.

Canny proposa une approche heuristique pour la détection de bords avec les filtres à échelles multiples. On prend tous les bords détectés par le filtre de plus petite échelle. Ensuite, on fait la convolution des bords avec une fonction gaussienne de la prochaine échelle supérieure dans la direction normale aux bords. Les nouveaux bords sont alors retenus. Le processus se poursuit aux échelles plus grandes. Pour les bords de marche, l'optimisation de Canny donne une série de filtres optimaux qui dépendent des paramètres déterminés par le compromis fait dans le choix des critères désirés. Un des filtres optimaux, donnant la capacité maximale contre le bruit formé par les multiples pics près des bords, peut être approché par un filtre de première dérivée d'une gaussienne avec une réduction de performance de 10 à 20 pour cent. Le filtre de première dérivée d'une gaussienne est la forme approximative optimale pour la détection de bords. À partir du principe d'associativité, la convolution entre le filtre G_n et l'image I est égale au gradient de la convolution entre la gaussienne G et l'image I , donné par:

$$|G_n \star I| = |\nabla(G \star I)|, \quad (4.7)$$

où

$$G_n = \frac{\partial G}{\partial n} = n \cdot \nabla G. \quad (4.8)$$

La convolution $G \star I$ correspond à l'image lissée par la gaussienne. Cette opération est nécessaire pour réduire le bruit de l'image avant de calculer la dérivée. Les opérateurs de détection de bords utilisant les filtres numériques décrits auparavant sont les filtres locaux de dimension limitée qui correspondent aux filtres tronqués par une fenêtre. Quand la fenêtre est un simple carré 3×3 , le phénomène de Gibbs dans le domaine de la transformée de Fourier va apparaître. Comme conséquence, le bord va se déplacer et deviendra discontinu. L'opération montrée dans l'équation précédente correspond au calcul du gradient avec un filtre infiniment large d'une image restreinte spatialement par une fenêtre définie par la gaussienne. Cette dernière est une fenêtre idéale, qui a un maximum de régularité. Le produit entre la largeur spatiale et la bande passante en

fréquence de la gaussienne est égal au minimum défini par le principe d'incertitude.

Le détecteur de bord de première dérivée d'une gaussienne cherche les maxima de la valeur absolue des premières dérivées de l'image lissée. La dérivée seconde de la gaussienne a été proposée par Marr [28] comme détecteur de bords. Ce filtre est l'opérateur laplacien, et donne un passage par zéro ("zero-crossing") à la position d'un bord. Ces deux filtres sont presque identiques pour réaliser la détection des bords, mais la méthode de passage par zéro indique seulement leur position, tandis que le filtre de première dérivée contient encore l'information d'amplitude de fluctuation des bords. Les minima de la valeur absolue des premières dérivées sont également les points d'inflexion. Le filtre de dérivée seconde donne aussi un passage par zéro pour ces minima qui correspondent aux variations lentes de la fonction, mais pas nécessairement aux bords de l'images.

4.3.3 Avantages de la transformée en ondelettes en tant qu'extracteur de contours et présentation des résultats avec quelques ondelettes

Nous avons finalement adopté la TO discrète pour effectuer la détection des bords de l'objet. Plusieurs raisons ont motivé ce choix. Tout d'abord, les filtres classiques comme celui de Sobel n'offrent pas de flexibilité au niveau des différentes échelles étudiées. Pour leur part, les détecteurs de bords optimaux de Canny sont difficiles à calculer. Mentionnons toutefois que leurs approximations, fondées sur les dérivées de premier et deuxième ordre d'une gaussienne, satisfont aux conditions d'admissibilité de l'ondelette. En fait, ces opérations sont équivalentes à la TO continue.

Nous aurions pu avoir recours à la technique du codage sous-bande (subband coding)[29]. Cette méthode utilise les filtres numériques sur de multiples bandes de fréquence. Ce codage est d'ailleurs très utile dans la compression de signaux numériques. Cependant, la TO nous offre en plus une condition de régularité. Cette propriété nous assure de la bonne localisation de l'opération, autant dans le plan spatial que dans

le plan des fréquences. Ainsi, cette nouvelle théorie mathématique nous permet de procéder à une analyse des fonctions mathématiques, autant dans le cas continu que dans le cas discret [30]. Mallat a démontré qu'on quantifie la singularité d'une fonction par sa mesure de régularité de Lipschitz α , où α est l'ordre exponentiel qui borne supérieurement la déviation de la fonction [22]. Lorsque $0 < \alpha < 1$, la singularité décrit une fonction de bords tandis que le bruit aléatoire a une mesure de Lipschitz $\alpha < -1$. Comme conséquence, les coefficients de la TO restent approximativement constants pour un grand nombre d'échelles de l'ondelette à proximité des bords tandis que les coefficients de la TO du bruit vont diminuer avec l'échelle de l'ondelette. Le contour de l'image et le bruit occupent différentes bandes de fréquence. La TO multirésolutionnelle est capable de les séparer soit par une sélection de bandes de fréquence, soit par une fusion d'informations provenant de plusieurs échelles de la TO.

Une autre raison nous mène à utiliser la TO discrète: elle est calculée avec un algorithme d'arbre qui est beaucoup plus rapide numériquement que la TO continue ou que le filtre optimal de Canny. De plus, l'analyse se fait sur différentes bandes de fréquences, ce qui peut améliorer la robustesse face au bruit qui se retrouve souvent en grande partie dans un intervalle de fréquences précis. Finalement, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, Stéphane Mallat a montré, dans le cas de l'ondelette spline quadratique, une équivalence entre la détection de bords grâce à cette TO et le détecteur de Canny.

Nous avons donc effectué la TO discrète en utilisant les trois ondelettes présentées au chapitre précédent: les ondelettes de Daubechie à quatre et douze coefficients et la spline quadratique. Les figures 21, 22 et 23 montrent les décompositions obtenues. Dans chacune, l'algorithme en arbre est pratiqué pour sept niveaux de résolution.



FIGURE 21. Transformée en ondelettes Daubechie 4 effectuée sur l'image du char à un angle de 100 degrés.



FIGURE 22. Transformée en ondelettes Daubechie 12 effectuée sur l'image du char à un angle de 100 degrés.

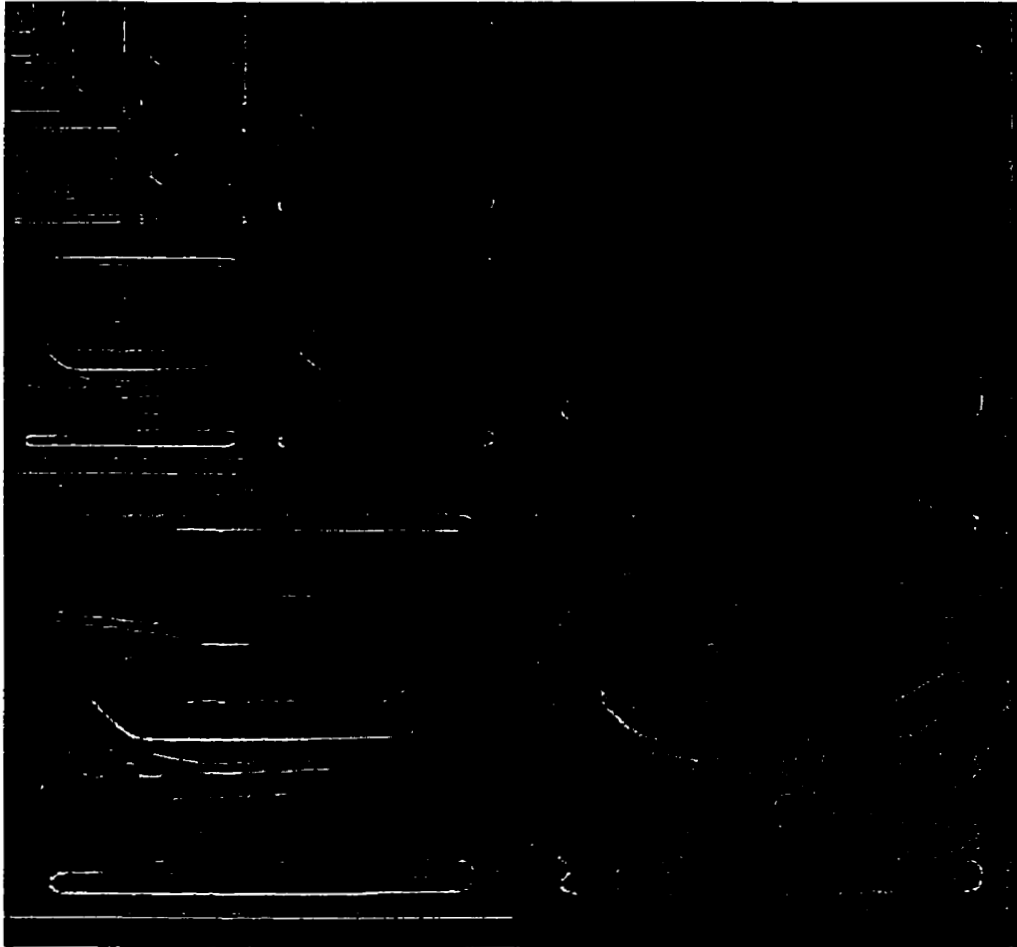


FIGURE 23. Transformée en ondelettes spline quadratique effectuée sur l'image du char à un angle de 100 degrés.

4.4 Génération des maxima d'ondelettes et des contours des véhicules

On voit clairement que l'ondelette spline quadratique produit des bords plus continus que les ondelettes de Daubechie. Ceci est une démonstration claire que les ondelettes sont autant d'outils permettant diverses opérations et qu'il faut savoir choisir la bonne pour effectuer la tâche qui nous intéresse. Ainsi, nous avons fixé notre choix d'extracteur sur la spline quadratique.

4.4.1 Maxima pour la TO spline quadratique

En appliquant le calcul des maxima dans la direction du gradient tel que vu au chapitre précédent, nous avons obtenu les résultats montrés à la figure 24 pour sept niveaux de décomposition.

Mentionnons que l'absence d'orthogonalité des lignes de la matrice de filtres vue au chapitre 3 nous contraint à effectuer une correction globale au niveaux des intensités de chaque résolution. En effet, afin que les mêmes contours soient d'intensité correspondante, chaque étape doit être normalisée par les coefficients donnés au tableau I

niveaux de résolution	1	2	3	4	> 4
facteur de normalisation	1.50	1.12	1.03	1.01	1.00

TABLEAU I. Coefficients de normalisation pour les contours trouvés à diverses résolutions par l'ondelette spline quadratique.

Afin de réduire au maximum la quantité d'information conservée par image tout en conservant suffisamment de qualité discriminante, nous avons décidé de travailler exclusivement avec les maxima de la deuxième résolution. Ainsi, de l'image d'entrée qui possède 512x512 pixels, nous ne conservons, pour l'instant, qu'une image de dimension 128x128. Or, toute réduction de la quantité d'information à traiter accélère d'autant plus les calculs numériques des prochaines étapes de la reconnaissance.

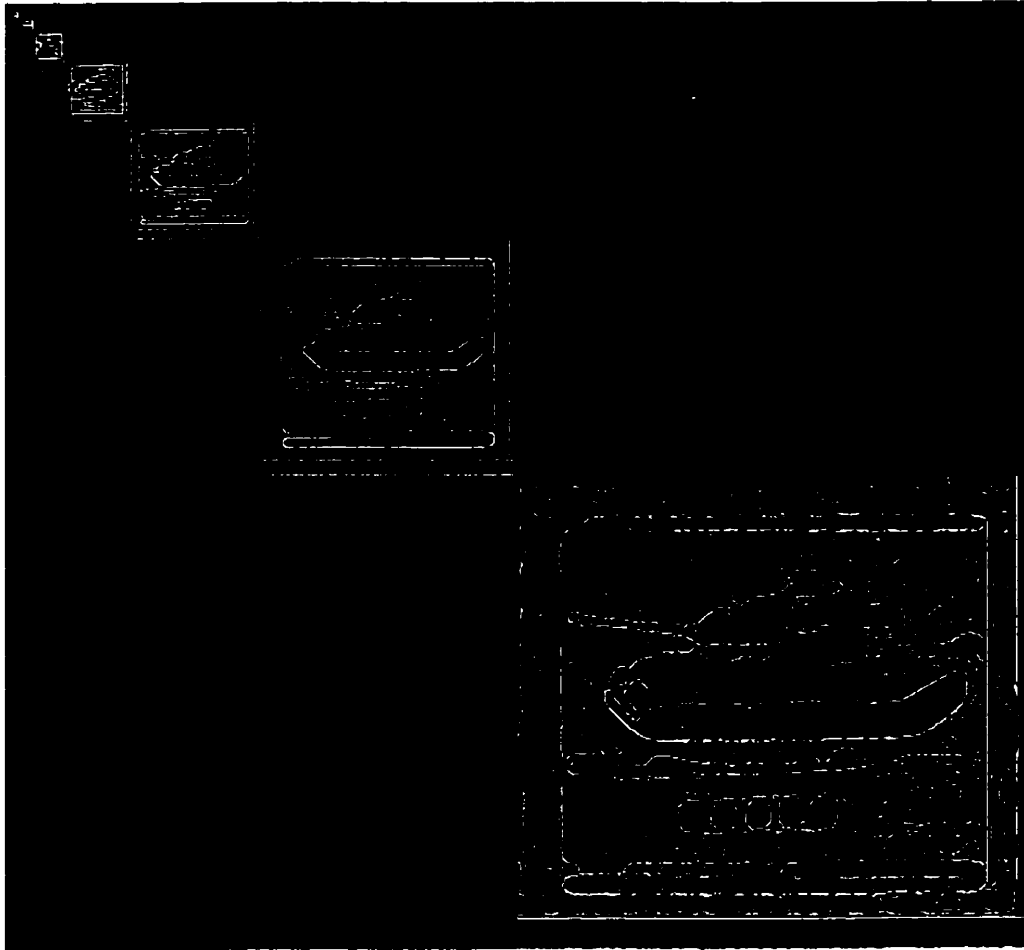


FIGURE 24. Maxima dans la direction du gradient pour la TO spline quadratique effectuée à sept niveaux de résolution sur l'image du char à un angle de 100 degrés.

4.4.2 Segmentation et binarisation des maxima

À l'intérieur de cette résolution, nous avons également procédé à une segmentation nous permettant d'isoler les véhicules du plateau rotatif sur lequel ils étaient stationnés ainsi que les tables d'échelle thermique. Cette segmentation ne s'est pas fait sans heurt car le plateau était en forme de soucoupe, nous obligeant ainsi à conserver des détails nuisibles lors de l'extraction d'une partie rectangulaire de l'image de départ. Toutefois, les efforts étant portés sur la reconnaissance des véhicules dans un environnement sans occlusions ou objets parasites, nous n'avons donc pas mis l'accent sur cet aspect du projet.

L'étape suivante nous permettant d'extraire le contour des véhicules, une binarisation doit être appliquée à l'image des maxima. De ce fait, la recherche d'un seuil se veut importante. Il permet de se débarrasser des maxima de faible intensité et ajoute à la compression des données. En effet, des 512x512 pixels à 256 niveaux de gris, il ne restera que 128x128 pixels à valeur binaire. Afin de rendre notre seuil indépendant de l'intensité moyenne de l'image, nous avons choisi de le fixer à la moyenne des intensités retrouvées dans l'image des maxima. Cependant, ce choix nous apporta des problèmes au niveau des variations locales de contrastes dans l'image, rendant difficile l'automatisation de la méthode. Dans un même souffle, nous localisons le pixel ayant le maximum de plus haute intensité et nous supposons qu'il appartient au contour du véhicule recherché. Dans les limites du projet, cette hypothèse est fondée.

4.4.3 Tracé des courbes

Après ce prétraitement, nous avons obtenu les images segmentées contenant les pixels de contour d'intensité supérieure à un certain seuil. On définit le pixel maximum parmi les maxima comme étant le point de départ d'un tracé du contour par exploration de voisinage. Dans les techniques de tracé de courbe, il existe deux outils pouvant nous servir: les normes et les angles du vecteur gradient. Nous utiliserons donc la

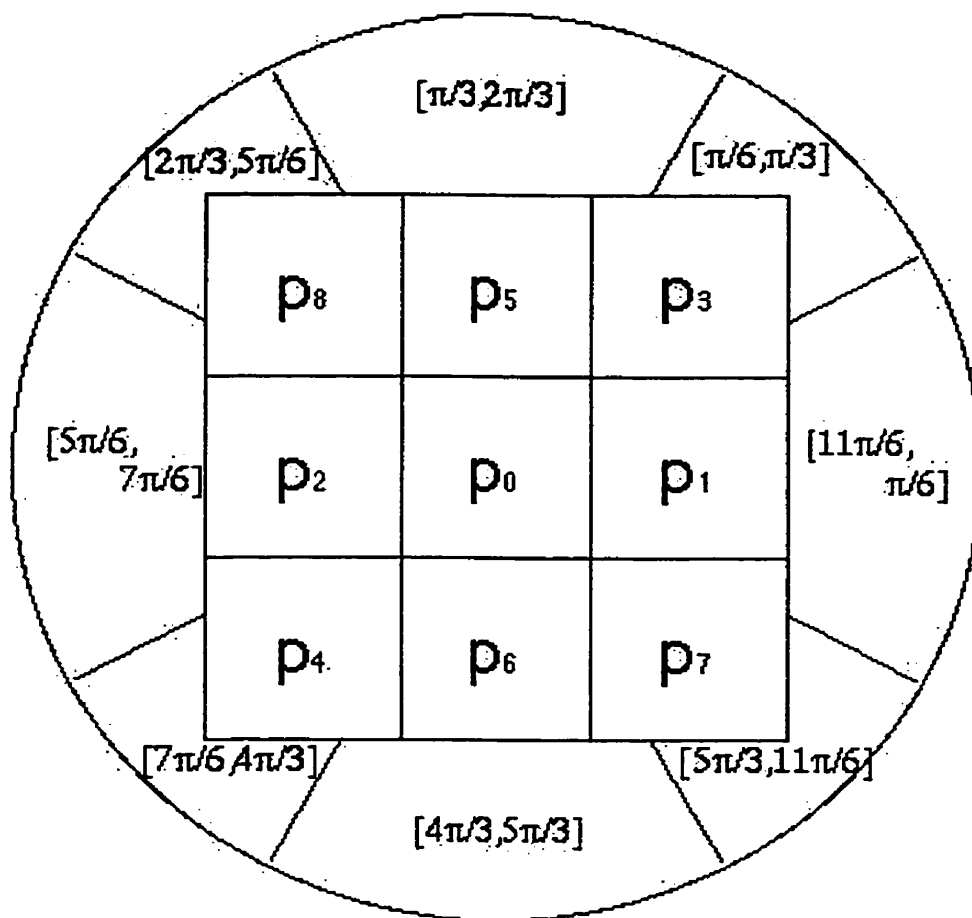


FIGURE 25. Fenêtre 3x3 montrant la discrétisation de l'angle de direction du tracé et les pixels correspondants.

matrice d'angles vue au chapitre 3 ainsi que l'image des maxima locaux que nous avons conservés.

L'algorithme que nous avons développé suit le contour de la façon suivante. Partant du pixel de départ préalablement trouvé, nous avons tout d'abord examiné la direction α qui est perpendiculaire à l'angle de gradient à ce point. Puisque le point suivant ne peut être qu'un des pixels adjacents, nous avons divisé l'intervalle entre 0 et 2π en huit sous-intervalles. Nos images renfermant un grand nombre de lignes horizontales et verticales, les intervalles associées aux directions gauche, droite, haut et bas seront plus grands que ceux alloués aux directions diagonales, tel que montré dans la figure 25.

Nous regardons ensuite le pixel voisin qui se trouve dans la direction α . Si ce pixel est supérieur au seuil fixé, alors il est considéré comme faisant partie du contour et devient notre nouveau point d'intérêt. Toutefois, si la condition de seuillage n'est pas rencontrée, nous examinons les 2 pixels dans les directions adjacentes au sous-intervalle comprenant α . Ainsi, celui des deux pixels ayant la plus grande intensité deviendra notre point de contour. À titre d'exemple, si nous considérons un α compris dans l'intervalle $[11\pi/6, \pi/6]$ et que le pixel p_1 est inférieur au seuil, nous chercherons la suite du contours parmi les points p_3 et p_7 . Si ces deux autres pixels ne répondent pas à notre condition, alors on continue à examiner les intervalles suivants deux par deux, en excluant cependant la possibilité que le pixel soit situé dans la plage située à 180 degrés de la valeur de la direction donnée par la matrice d'angle. Dans notre exemple, cela signifie que si p_3 et p_7 sont inférieurs au seuil, nous examinons p_5 et p_6 , et ainsi de suite, en excluant la possibilité que p_2 soit conservé. De plus, un pixel déjà répertorié ne peut être choisi comme point de contour, la raison étant qu'un des traitements de courbes que nous avons retenu, les descripteurs de Fourier, demande une courbe simple et fermée. Le procédé se poursuit jusqu'à ce que la courbe rejoigne le pixel de départ ou qu'aucun pixel ne satisfasse aux conditions imposées. Dans ce dernier cas, nous avons inséré une sous-routine qui permet de rechercher le voisinage du pixel de bout pour trouver un raccordement convenable. La recherche se fait successivement à l'intérieur de fenêtres 5x5, 7x7 et 9x9 en arrêtant dès qu'une réponse positive est donnée.

4.4.4 Problèmes rencontrés

Malgré tous les ajustements faits à cet algorithme, nous n'avons malheureusement pas réussi à obtenir, de façon régulière, des contours simples fermés. Souvent le tracé prenait une direction erronée. Ce phénomène est dû en grande partie au fait que les images ont des contrastes locaux très difficiles à percevoir, même par un observateur humain. Des effets de discrétisation au niveau des pixels de contour peuvent également fausser la poursuite des contours. Souvent, les mauvais chemins empruntaient les contours du plateau rotatif qu'il ne nous fut pas possible d'éliminer complètement.

De plus, le très faible contraste de certaines caractéristiques importantes du véhicule nous a privés d'importantes informations qui furent éliminées lors de l'application du seuil. C'est notamment le cas pour le canon qui a une faible intensité dans l'image infrarouge puisqu'il est à la température ambiante.

Nous avons donc dû effectuer certaines manipulations altérant l'aspect automatique de la méthode. Nos interventions sont de deux types. D'abord, nous avons quelquefois modifié la technique de seuil pour ne pas perdre d'information. Une étude locale des valeurs de maxima avant seuil nous a permis de récupérer certains pixels qui permettaient de suivre efficacement le contour voulu. Une étude plus approfondie de l'histogramme des valeurs de maxima se serait assurément avérée insuffisante puisque nous faisons face à des structures locales alors que le seuil se doit d'être une valeur globale. Nous avons également éliminé certains pixels décrivant le plateau ou autre information n'ayant pas pu échapper à la segmentation. Ces interventions sont justifiées par les limites que nous avons fixées au projet. Après ce travail, nous avons compilé les contours simples fermés pour cinq appareils. La figure 26 montre quelques contours que nous avons obtenus pour les cinq véhicules.

Nous avons ainsi réussi à réduire encore plus la quantité de données nécessaires pour décrire correctement les véhicules. L'image originale, qui était composée de plus de deux cent cinquante mille pixels, est caractérisée par à peine quelques cent cinquante à deux cents pixels.

L'information ainsi obtenue se doit cependant d'être exprimée de façon moins restrictive. Un bon processus de reconnaissance implique une méthode possédant une représentation pourvue de plusieurs invariances. Ainsi, des transformations affines, telles que les rotations, translations et changements d'échelle, ne doivent pas empêcher de distinguer un même véhicule perçu par différents détecteurs. Dans notre cas, les caméras infrarouges peuvent être disposées à des orientations différentes l'une par rapport à l'autre. Et même s'il n'y a qu'une caméra fixe, les véhicules sont généralement en mouvement. Il faut donc trouver une formulation mathématique qui permette de

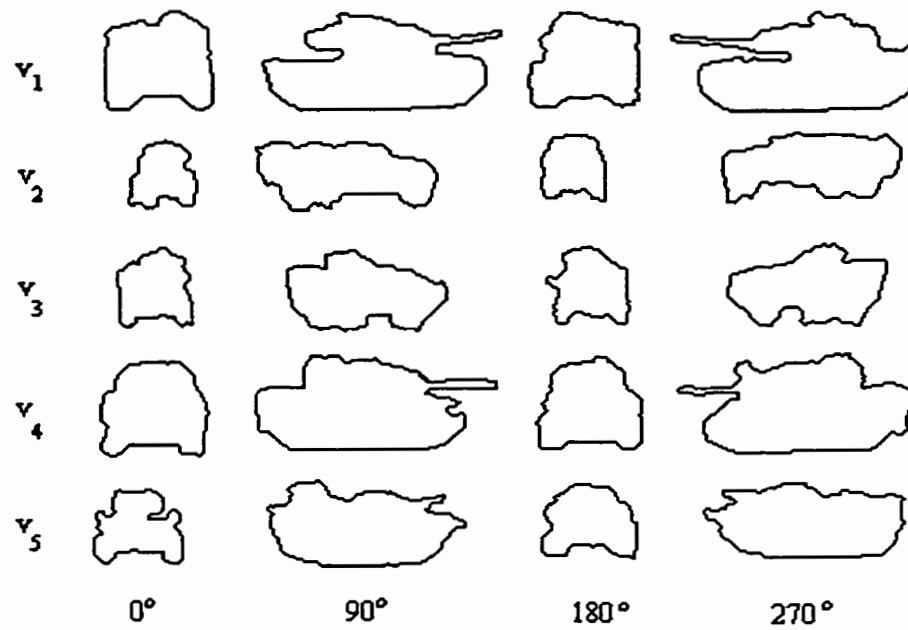


FIGURE 26. Contours de quelques vues des cinq véhicules qui ont servi à notre étude.

décrire les pixels de contours sous une seule et même forme, quel que soit l'angle de perspective auquel la cible est représentée dans l'image.

CHAPITRE 5

Reconnaissance invariante d'objets 3D en utilisant les contours extraits par la transformée en ondelettes

5.1 Descripteurs de courbes

Le dernier chapitre nous a fourni une banque de contours des cinq véhicules militaires à tous les cinq degrés de rotation hors du plan des images. Afin d'obtenir les invariances sous transformations affines recherchées, plusieurs types de caractérisation de courbes existent. Avant de présenter celle que nous avons choisie pour notre analyse, la caractérisation par les descripteurs de Fourier, nous ferons un survol des autres principales techniques qui sont utilisées pour ce type de problèmes et nous présenterons les raisons ayant motivé notre choix.

5.1.1 Techniques utilisant la courbure

Plusieurs techniques de caractérisation de contours font intervenir la courbure. Cette mesure de base de la géométrie différentielle correspond à une évaluation locale du taux de variation de la tangente à la courbe par rapport à sa longueur. Voici

comment la courbure est définie mathématiquement. Considérons une courbe dans l'espace. On peut alors la considérer comme une fonction vectorielle entièrement définie par un paramètre: sa longueur d'arc s . Cette expression mathématique d'une courbe est appelée paramétrisation naturelle. On écrit alors que toute position sur la courbe peut être exprimée par le vecteur

$$\vec{x}(s) = (x(s), y(s), z(s)). \quad (5.1)$$

Le vecteur tangent est alors calculé en prenant la dérivée de la courbe par rapport au paramètre naturel:

$$\vec{t}(s) = \frac{d\vec{x}(s)}{ds} = (\dot{x}(s), \dot{y}(s), \dot{z}(s)). \quad (5.2)$$

Le vecteur de courbure étant le taux de variation de la tangente, il s'exprime alors comme la dérivée de cette tangente par rapport au paramètre naturel:

$$\vec{k}(s) = \frac{d\vec{t}(s)}{ds} = (\ddot{x}(s), \ddot{y}(s), \ddot{z}(s)). \quad (5.3)$$

De façon générale, la norme de ce vecteur de courbure pour un s donné est appelée courbure et est notée $\kappa(s)$. On peut alors définir une nouvelle quantité appelée rayon de courbure et donnée par

$$R(s) = \frac{1}{\kappa(s)}. \quad (5.4)$$

Ainsi, une courbe parfaitement circulaire de rayon ρ aura un rayon de courbure constant et égal à ρ . Pour une droite, la courbure sera nulle et le rayon de courbure sera donc infini. Pour une courbe suivant une trajectoire elliptique, le rayon de courbure suivra une oscillation variant entre les normes des demi-axes mineur et majeur.

Ces informations permettent de caractériser les courbes obtenues par l'extraction de contours. Par exemple, il est possible de segmenter ces courbes en portions de cercles, d'ellipses et de droites. Cette segmentation permet alors de réduire le lot d'informations apportées par la courbe en son entier à quelques points d'intérêt qui, par leurs positions relatives, décrivent la courbe en son entier. Une autre façon d'obtenir des points d'intérêts s'effectue en multipliant la courbure par différents facteurs constants supérieurs à 1. La courbure augmentant, la courbe s'interceptera éventuellement elle-même en certains points. Ces points pourront alors servir à la description de la courbe.

Le principal désavantage des techniques utilisant la courbure réside dans la grande sensibilité de ce calcul dans le cas d'images bruitées. Dans ces cas, les contours sont souvent mal définis et la nature très locale du calcul de la courbure rend difficile la segmentation. Comme nous étudions des images infrarouges où le bruit thermique est très présent, nous avons préféré nous tourner vers une autre technique moins sensible au bruit.

5.1.2 Codage en chaîne

Une autre technique employée pour décrire les contours se nomme codage en chaîne [31]. La figure 27 montre le principe de ce codage. À gauche, une courbe fermée est représentée en noir avec un point de départ gris. À droite, on voit les valeurs discrètes des codes. Ceux-ci représentent les pentes intrinsèques de la courbe. Il y a seulement huit pentes possibles pour une paire de points puisque nous étudions des images numériques. Ainsi, une courbe peut être représentée comme une chaîne de codes. Dans la figure, la courbe, considérée dans le sens des aiguilles d'une montre, donne le code suivant:

1 - 0 - 0 - 0 - 6 - 5 - 5 - 6 - 0 - 0 - 6 - 6 - 4 - 4 - 4 - 3 - 2 - 2 - 2 - 2

L'avantage du codage en chaîne est la simplicité de la méthode. Un contour 2D est

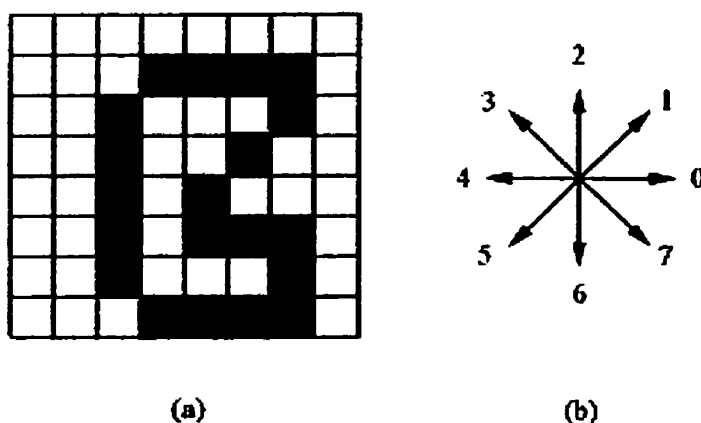


FIGURE 27. Courbe fermée, à gauche, et code utilisé lors du codage en chaîne, à droite.

décrit par une série de nombres entiers, un par pixel. Cette compression de données favorise les traitements ultérieurs car celles-ci prennent seulement 3 bits de mémoire informatique. Les performances algorithmiques sont donc accrues dans le cas de la reconnaissance d'objet 3D.

Les codes en chaîne sont invariants sous translation, mais ne le sont pas sous rotation et changement d'échelle. Pour remédier à cet état de fait, Sadjadi [31] a proposé l'utilisation de l'histogramme des codes en chaîne. Un changement d'échelle se traduit alors par une translation dans le sens vertical de l'histogramme et une rotation se traduit par une translation cyclique horizontale dans l'histogramme. Avec cette technique, la reconnaissance de cibles tactiques dans des images réelles fut réalisée. La classification est robuste pour les cibles ayant jusqu'à 10 pour cent de sa superficie camouflée par des obstacles. Toutefois, cette approche a un désavantage: la description d'une courbe par l'histogramme des codes de chaîne est moins précise que celle par les codes de chaîne eux-mêmes. On perd une partie de la capacité de discrimination en passant de l'une à l'autre.

5.1.3 Descripteurs de Fourier-Mellin

Les descripteurs de Fourier-Mellin (DFM), quand à eux, sont une représentation de forme basée sur toute la région décrivant l'objet (contour avec intérieur rempli) [32] [33]. Ils utilisent les moments de l'image définis dans un système de coordonnées polaires. Les DFM sont formés de paramètres numériques invariants sous rotation dans le plan de l'image et changement d'échelle. Ils sont moins sensibles au bruit de fond que les invariants de moments proposés par Hu [34]. Les DFM orthogonaux permettent de choisir les ordres des moments dans un polynôme radial pour une meilleure représentation de l'image avec moins de paramètres.

Les DFM sont appliqués à une image segmentée. Dans le cas de notre projet, les images infrarouges de véhicules doivent être binarisées. Cette étape doit être effectuée pour avoir la même intensité à l'intérieur de l'image, car des changements de température pour différentes parties du véhicule peuvent changer la luminance de l'image et donc changer son DFM.

La méthode des moments est couramment utilisée dans la description d'images et la reconnaissance des formes. Elle pourra être utilisée pour décrire les images après la segmentation, le rehaussement du contraste et la binarisation. Pour une image de basse résolution, le contour de l'image peut être très accidenté. Les DFM conviendront alors mieux que les descripteurs du contour, comme les descripteurs de Fourier.

5.1.4 Descripteurs de Fourier

La technique de description de courbe que nous avons retenue est celle proposée par Roskies et Zhan[35]. Elle utilise l'angle tangent à la courbe afin de calculer les descripteurs de Fourier. De ce fait, cette description ne s'applique qu'à un contour simple, c'est-à-dire un contour ayant une épaisseur minimale d'un seul pixel. De plus, afin de simplifier le calcul de la tangente en chaque point discret de la courbe, nous avons lissé cette dernière de telle sorte que toute fenêtre 3x3 comprise dans notre image

contienne exactement trois pixels. Une étude systématique des différents cas où il y a plus que trois pixels dans une fenêtre 3x3 permet l'élimination des points superflus en utilisant la valeur des pixels entourant la dite fenêtre.

Ce processus de lissage nous assure que chaque point échantillonné de la courbe n'a que deux voisins. Ce sont ces derniers qui nous permettent de trouver l'angle de la tangente à notre contour. Une caractéristique de cette technique pouvant être perçue comme un désavantage est qu'elle réduit la précision de cette mesure, ne permettant que huit valeurs discrètes d'angle sur un intervalle de 2π . Toutefois, nous considérons que cette approximation est suffisante pour décrire schématiquement la courbe en autant que le contour soit suffisamment long, ce qui est le cas pour le problème ici traité.

Voyons maintenant le détail de cette technique. Une courbe plane fermée peut être représentée par la fonction complexe périodique

$$z(\gamma) = x(\gamma) + iy(\gamma), \quad (5.5)$$

où le paramètre continu est la longueur d'arc γ de la courbe.

Elle peut également être décrite par un angle cumulatif $\phi(\gamma)$, donné par

$$\phi(\gamma) = \theta(\gamma) - \theta(0) \quad (5.6)$$

qui est la mesure nette de l'angle tangent à la courbe entre le point de départ ($\gamma = 0$) et un point dont la longueur d'arc est égale à γ . Ici, la fonction $\theta(\gamma_1)$ représente évidemment l'angle à un point situé à une longueur d'arc γ_1 de la courbe. Le point de départ de cette paramétrisation est arbitrairement choisi. En posant L comme étant la longueur d'arc totale du contour, on voit facilement que $\phi(0) = 0$ et $\phi(L) = -2\pi$. Il devient alors évident que la fonction $\phi(\gamma)$ est périodique sur un intervalle L .

On définit ensuite un paramètre t qui varie de 0 à 2π et on introduit la fonction suivante:

$$\phi^*(t) = \phi\left(\frac{L}{2\pi}t\right) + t. \quad (5.7)$$

On peut observer que $\phi^*(0) = \phi^*(2\pi) = 0$. Ainsi, toutes les courbes ayant une forme identique et le même point de départ auront la même fonction $\phi^*(t)$ qui leur sera associée. Étant donné l'utilisation des angles tangents à la courbe, on remarque que la fonction $\phi^*(t)$ est invariante sous translation. Elle est également invariante sous changement d'échelle, i.e. sous changement de L , car la courbe est une fonction périodique de γ_1 avec une période L . On la reparamétrise ensuite sur l'intervalle de 0 à 2π .

Le seul paramètre qui conserve une influence pouvant mener au phénomène où nous aurions deux fonctions $\phi^*(t)$ distinctes pour décrire la même courbe se produit lorsque l'angle d'origine est différent dans les deux cas. Pour enlever cet effet du choix de point de départ, on utilise la série de Fourier de $\phi^*(t)$:

$$\begin{aligned} \phi^*(t) &= \mu_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \\ \phi^*(t) &= \mu_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos (nt - \alpha_n)). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Les descripteurs de Fourier d'ordre n sont alors définis par les vecteurs formés par les n premières amplitudes des coefficients de Fourier (A_n) et les n premières phases (α_n).

Si l'image tourne mais le point départ ne la suit pas, la fonction $\Phi^*(t)$ va être changée par une constante. Ses coefficients de Fourier vont être changés par une phase constante, mais les amplitudes A_n seront invariantes sous rotation, translation, changement d'échelle et choix du point de départ. La méthode d'angle cumulatif proposée par Zahn et Roskies a pour avantage d'être moins sensible aux variations des hautes fréquences de l'angle tangent à la courbe.

Celles-ci correspondent aux détails de petite dimension de la courbe et ne changent pas l'allure du contour. Ceci est très intéressant pour notre projet car les petits détails des contours sont associés au bruit de détection thermique qui n'apportent pas d'information utile pour la classification des véhicules. Le principal désavantage de la méthode d'angle cumulatif est qu'elle demande le calcul des dérivées de la courbe.

Le DF représente une compression de données importante. Il contient un nombre restreint de paramètres très condensés qui décrivent l'objet. La dimension du vecteur de DF est très petite par rapport à la dimension de l'image 512x512. Les DFs sont fondés sur le contour de l'image, qui porte l'information essentielle de l'objet. D'après notre expérience, le DF est beaucoup moins sensible que d'autres méthodes, comme le filtre d'harmonique circulaire et le descripteur de Fourier-Mellin, aux déformations de l'image causées par une rotation hors du plan de l'objet. On pourra donc décrire un objet tourné hors du plan initial par ses images dans un intervalle de 5 à 15 degrés de rotation. Les DFs permettent non seulement de diminuer la dimension mais aussi le nombre de vecteurs qui vont être stockés dans le réseau de neurones qui servira à la reconnaissance des formes d'un objet tridimensionnel.

Le calcul des DFs requiert que l'image soit représentée par son contour externe. Ce contour doit être une courbe simple fermée d'un pixel d'épaisseur. Nous avons donc dû procéder à un traitement de notre courbe visant à réduire le nombre de pixels de contours à trois dans chaque fenêtre 3x3 de l'image. Grâce à ce traitement, nous pouvons calculer les tangentes en prenant l'angle formé par le segment passant par les deux points voisins du pixel étudié. En examinant chaque point faisant partie du contour, nous avons éliminé tout pixel n'ayant qu'un seul voisin dans la fenêtre l'entourant. En effet, il correspond alors à une portion de contour inutile décrivant une déviation temporaire de notre parcours fermé en dehors de notre courbe d'intérêt. Un pixel n'ayant qu'un seul voisin pourrait être considéré comme un bout de courbe ouverte et nous devons avoir une courbe fermée pour procéder avec la méthode.

Ensuite, nous avons analysé le cas très fréquent où il y a plus de trois pixels dans la fenêtre entourant le pixel étudié. Ce cas rend problématique l'évaluation de la tangente en un point. Pour réussir à connaître les deux pixels adjacents à conserver, nous avons élargi notre étude à la fenêtre 5x5 entourant notre cellule traitée. L'algorithme que nous avons construit donne la préséance aux pixels disposés sur les directions diagonales. Cette décision résulte d'une étude systématique des différents cas où il y a plus de 3 pixels dans la fenêtre 3x3.

Munis de tous les contours des soixante-douze vues des cinq véhicules étudiés, il nous est possible d'évaluer les descripteurs de Fourier. La fonction d'angle tangent est calculée à chaque pixel, cette valeur étant trouvée grâce à la position des deux pixels voisins. Lors de l'évaluation de la fonction à un pixel donné, la longueur relative de la courbe fut augmentée de 1 si le pixel précédant se trouvait dans une direction verticale ou horizontale alors qu'un accroissement de $\sqrt{2}$ fut apporté lorsqu'il se trouvait dans une direction diagonale.

La fonction ϕ^* est ainsi échantillonnée sur des intervalles de longueur d'arc non-uniformes. L'utilisation de la transformée de Fourier rapide (FFT) n'est donc pas possible. Nous avons alors tout simplement utilisé la forme trouvée précédemment pour la TF de la fonction d'angle $\phi^*(t)$. Les coefficients a_n et b_n sont alors donnés par les relations:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi^*(t) \cos kt \, dt, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi^*(t) \sin kt \, dt. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Si nous exprimons ces intégrales en fonction de l'angle cumulatif Φ , nous avons la relation:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \left(\phi(\lambda) + \frac{2\pi\lambda}{L} \right) \cos \frac{2\pi n\lambda}{L} \, d\lambda, \\ b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \left(\phi(\lambda) + \frac{2\pi\lambda}{L} \right) \sin \frac{2\pi n\lambda}{L} \, d\lambda, \end{aligned} \quad (5.10)$$

où on a utilisé l'équation (5.7) et posé $\lambda = Lt/2\pi$. Finalement, on se rappelle que la

fonction d'angle cumulatif est une fonction discrète à échelons et donc que $\Phi = \Phi_k$, où Φ_k est constant sur l'intervalle $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ et où λ_k donne la longueur cumulative de la courbe entre le point de départ et le point k . En effectuant le changement de variable $\xi = 2\pi n\lambda/L$, on peut écrire:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \frac{L}{2\pi n} \left[\sum_{k=1}^m \int_{\xi_{n-1}}^{\xi_n} \phi_{n-1} \cos \xi \, d\xi + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi n} \xi \cos \xi \, d\xi \right] \\ b_n &= \frac{2}{L} \frac{L}{2\pi n} \left[\sum_{k=1}^m \int_{\xi_{n-1}}^{\xi_n} \phi_{n-1} \sin \xi \, d\xi + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi n} \xi \sin \xi \, d\xi \right] \end{aligned} \quad (5.11)$$

où on a défini $\xi_n = 2\pi n\lambda_k/L$. L'intégrale de $\xi \cos \xi$ est nulle et celle de $\xi \sin \xi$ est égale à -2π et peut, suite à quelques développements mathématiques, être additionnée au terme constant μ_0 de l'expansion de Fourier donnée en (5.8). En sortant les Φ_{n-1} des premières parties des deux équations, on intègre et, en remaniant les termes, on trouve la forme discrète pour les coefficients:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{-1}{n\pi} \sum_{k=1}^m \Delta\phi_k \sin \frac{2\pi n\lambda_k}{L} \\ b_n &= \frac{1}{n\pi} \sum_{k=1}^m \Delta\phi_k \cos \frac{2\pi n\lambda_k}{L}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

où $\Delta\phi_k$ est le changement d'angle tangent entre le pixel étudié et le précédent sur la courbe. On calcule les amplitudes facilement en calculant

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}. \quad (5.13)$$

Nous n'avons conservé que les amplitudes de la transformée de Fourier car ce sont elles qui sont invariantes sous choix du point de départ, translation, échelle et rotation de la courbe dans le plan. Les phases, pour avoir de telles caractéristiques, doivent être remaniées sous la forme de différences entre chaque composantes retenues dans la



FIGURE 28. Courbe fermée d'un char, telle qu'utilisée pour le calcul des descripteurs de Fourier.

décomposition de Fourier comme suit:

$$F_{kj}[\gamma] = j^* \alpha_k - k^* \alpha_j \quad (5.14)$$

où j^* et k^* sont les divisions de j et k par le plus grand commun diviseur de j et k . On voit donc que pour avoir les mêmes invariances que le vecteur d'amplitudes, on doit définir une matrice F_{kj} , élevant au carré le nombre d'éléments nécessaires pour décrire notre contour. Par exemple, pour un vecteur de 25 amplitudes, on obtient une matrice de phases de $25 \times 25 = 625$ éléments. Une autre raison qui nous a incités à ne pas considérer cette information d'angle est qu'elle sert principalement à reconnaître deux images miroirs l'une de l'autre, ce qui n'est pas pertinent pour les objectifs visés par notre projet. La figure 28 montre un contour de char pour lequel on a obtenu l'échantillon de DFs présenté ici.

$$A_1 = 0,177750 \quad A_{40} = 0,006994$$

$$A_{10} = 0,093733 \quad A_{50} = 0,029285$$

$$A_{20} = 0,063944 \quad A_{60} = 0,020080$$

$$A_{30} = 0,033189 \quad A_{70} = 0,014053$$

5.2 Algorithme de trajectoires dans l'espace des caractéristiques

5.2.1 Interpolation linéaire

La première approche que nous avons suivie fut introduite par Neiberg et Casasent [36]. Ce modèle, basé sur le principe de distance minimale et sur l'interpolation linéaire entre les images de projection, est capable de contourner le problème de définition des surfaces de décision non linéaires dans l'espace des caractéristiques pour la classification entre les groupes de points qui se sont superposés.

Voici les grandes lignes de la méthode. Les vecteurs de descripteurs de Fourier fournis par notre banque d'images décrivent une image de projection dans un espace de caractéristiques de dimension n , où n est le nombre de coefficients composant le DF. À chaque image correspond donc un point dans l'espace des caractéristiques. Les vecteurs de DF étant déjà invariants sous rotation dans le plan de l'image, sous translation et sous changement d'échelle, il ne nous reste plus qu'à solutionner le problème de rotation hors du plan de l'image.

Considérons le cas extrême où les images de projection sont prises à de très petits intervalles d'angle de projection. Les points caractéristiques des vues consécutives de l'objet semblent alors se déplacer de façon continue, formant ainsi une courbe dans l'espace des caractéristiques. Si M est le nombre d'objets 3-D à classifier nous aurons M courbes dans l'espace des caractéristiques. Un objet 3-D pourra être classifié avec une de ces images de projection par le principe du plus proche voisin puisque le point caractéristique de cette image se confondrait alors avec l'une des M courbes. Le défi qui nous attend est donc de représenter le plus précisément possible ces M courbes en utilisant un nombre restreint d'échantillons dans l'espace des caractéristiques.

Dans notre approche, les images composant notre bassin d'échantillons pourront être, par exemple, les projections des objets à tous les 10 ou 15 degrés. L'hypothèse de base est alors la régularité de la nature. Ainsi, la variation de l'image de projection doit

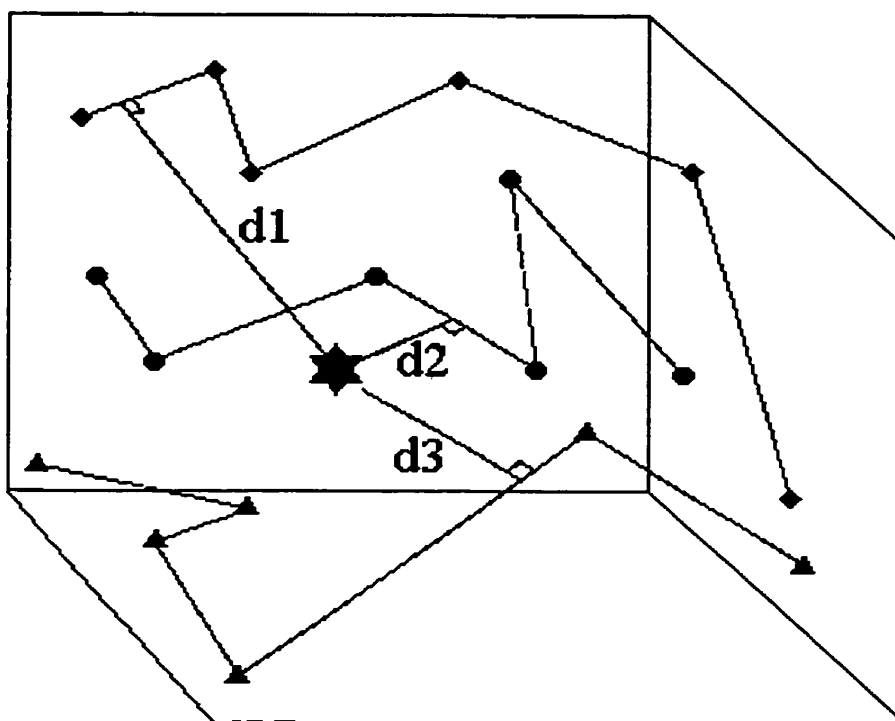


FIGURE 29. Représentation de l'algorithme TEC de Neiberg et Casasent dans un espace à 3 dimensions.

être continue et graduelle avec une rotation hors du plan de l'objet 3-D. Dans le modèle de Casasent, cette propriété est utilisée de façon explicite: on relie simplement les points représentant deux vues consécutives du même objet par une ligne droite dans l'espace des caractéristiques. De plus, sachant que les projections représentent une rotation hors plan de 360 degrés, nous pourrions relier les deux points extrêmes. Un objet 3-D est donc représenté par une courbe continue, fermée, formée de segments de droite et avec des inflexions aux points choisis pour l'apprentissage. Dans la classification, on calcule les distances entre un point de l'image d'entrée inconnue et tous les segments linéaires des courbes qui représentent les M objets 3-D. La classification est réalisée par le principe de distance minimale, tel qu'illustré à la figure 29. De cette façon, l'espace des caractéristiques est divisé pour la classification en zones qui suivent le trajet de chacune des courbes représentant les objets.

Les auteurs [36] décrivent cette approche comme un réseau de neurones de trajectoires dans l'espace des caractéristiques (TEC). La première couche est la couche pour entrer les données. Le nombre de neurones est égal à n , la dimension de l'espace des caractéristiques. La deuxième couche, une couche cachée, représente les paramètres géométriques des segments de droite qui relient les points caractéristiques des vues consécutives du même objet. Le nombre de neurones dans la couche cachée est égal au nombre de segments de droite composant les courbes. Les sorties de la couche cachée sont les distances calculées entre le point d'entrée et tous les segments de droite. La troisième couche est un réseau qui cherche la distance minimale et désigne la courbe répondant à ce critère comme unique solution du problème de classification (winner-take-all). L'apprentissage du réseau consiste simplement à emmagasiner les données d'apprentissage provenant de la série d'entraînement des images de projection dans la couche cachée. Dans ce sens on peut dire que, si cette approche correspond à un réseau de neurones, il s'agit de la forme minimale que cette notion peut prendre. En fait, il serait plus juste de parler d'un algorithme de distance minimale avec interpolation linéaire entre les points d'apprentissage.

5.2.2 Réseaux de neurones

Comme nous le verrons plus tard, l'expérience montre que l'interpolation linéaire introduite à la section précédente est une approximation fort valable dans un processus de reconnaissance 3D. Cependant, il est facile de croire qu'une meilleure approximation soit envisageable. Dans le but d'arriver à des résultats optimaux, les recherches faisant intervenir des traitements numériques tâchent souvent d'imiter certains comportements du cerveau humain. Les problèmes faisant intervenir des étapes d'apprentissage et de reconnaissance automatiques basent leur approche sur l'exemple le plus efficace existant dans la nature: le système neuronal biologique. Pour ce faire, plusieurs modèles imitant certains mécanismes propres aux neurones interconnectés furent développés; ils sont aujourd'hui regroupés sous l'appellation "réseaux de neurones".

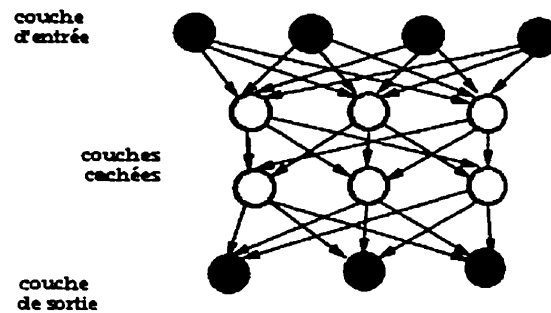


FIGURE 30. Représentation graphique d'un réseau de neurones.

Les réseaux de neurones peuvent être vus comme une notation graphique décrivant un grand nombre d'algorithmes. Leur architecture est composée de plusieurs couches ayant préalablement été définies grâce à une règle d'apprentissage. Ils traitent alors les données reçues (couche de cellules d'entrée) par des applications non linéaires effectuées sur une ou plusieurs cellules (couche(s) cachée(s)) et fournissent finalement un résultat voulu (couche de sortie). Un exemple d'une telle architecture est donné à la Figure 30. Le réseau est alors défini par le nombre de couches qu'il possède, les applications qu'il effectue et le type d'interconnexions qu'il fait intervenir.

Cette technique est largement utilisée dans la reconnaissance de formes. En particulier, lors du processus de reconnaissance d'objets dans l'espace ici traité, le but ultime des algorithmes est d'identifier une cible, quelle que soit son orientation, tout en ayant un pouvoir de discrimination face aux objets ne faisant pas partie de la banque des données apprises. On désire également que l'algorithme ait une capacité de généralisation, i.e. qu'un objet similaire, quoiqu'un peu différent de la donnée apprise, puisse être reconnu.

Dans un premier temps, nous allons étudier les propriétés d'un réseau de neurones pouvant servir à la reconnaissance d'objets 3D. Il fut introduit par Tomaso Poggio en tant que technique pour effectuer un travail d'approximation ou, plus précisément, de régularisation d'une fonction à déterminer (données de sortie du réseau) à partir d'un

certain nombre de valeurs de cette fonction (données d'entrée du réseau)[37] [38] [39] [40] [41] [42]. La tâche accomplie par le réseau se résumera à représenter la fonction désirée comme une combinaison de plusieurs fonctions de base qui seront toutes pondérées par rapport à certains critères. Nous verrons comment cette approche nous permet de faire le lien entre les réseaux de régularisation et les fonctions de base radiales. À la fin de la section, nous traiterons du réseau en relation avec notre principale préoccupation, la reconnaissance d'objets 3D [43][44].

5.2.2.1 Théorie des approximations et réseaux de neurones

L'idée de base utilisée par l'approche de Poggio est d'établir la meilleure approximation d'une fonction à partir d'un nombre fini de valeurs discrètes de celle-ci. Pour ce faire, on doit définir un critère de qualité de l'approximation. Si on note $f(x)$ la fonction continue dont on connaît N valeurs et $F(\omega, x)$ une approximation dépendant d'une variable d'optimisation ω , ce critère de qualité se résume à la recherche de ω^* tel que, pour tout ω :

$$\rho[F(\omega^*, x), f(x)] \leq \rho[F(\omega, x), f(x)] \quad (5.15)$$

où ρ est la norme dans l'espace $\mathcal{L}^2(\mathfrak{R})$. Cela revient donc à minimiser la distance entre les deux fonctions dans le sens des moindres carrés. Si un tel ω^* est trouvé, alors $F(\omega^*, x)$ est nommée meilleure approximation de $f(x)$. Sans entrer dans les détails, mentionnons que les techniques de recuit simulé et de décroissance du gradient peuvent permettre d'optimiser ce problème [23].

On peut voir que l'existence de cette solution dépend du type de classe de fonctions F choisie. C'est d'ailleurs cette classe qui déterminera le type de réseau qui décrira notre approximation. À titre d'exemple, une fonction peut être approchée par une somme de N fonctions de base $\Phi_i(x)$ multipliées par des coefficients donnés par les

paramètres ω_i :

$$F(\vec{\omega}, \vec{x}) = \sum_{i=1}^N \omega_i \Phi_i(\vec{x}). \quad (5.16)$$

On remarque que, mathématiquement parlant, cette approximation décrit un réseau de neurones pour lequel la couche d'entrée est donnée par les valeurs du vecteur \vec{x} , lesquelles sont traitées par les N cellules cachées effectuant une opération Φ_i pondérée par le poids ω_i . La couche de sortie de ce réseau à une couche cachée est donnée par la fonction $F(\vec{\omega}, \vec{x})$.

On peut noter que l'utilisation de classe de fonction correspondant à des réseaux sans couche cachée (simple produit scalaire entre $\vec{\omega}$ et \vec{x}) ainsi qu'avec une ou plusieurs couches cachées peuvent également décrire une approximation. Dans les deux derniers cas, l'utilisation de fonctions sigmoïdes imbriquées permet de retrouver une relation qui correspond essentiellement à un réseau de rétropropagation classique. Mais, pour ce travail, nous n'aurons qu'à considérer le cas à une couche cachée qui est décrit par l'équation (5.16).

5.2.2.2 Approximation d'une fonction à partir d'échantillons

Après avoir vu le lien général entre la théorie des approximations et les réseaux de neurones, voyons comment ils s'appliquent à notre problème particulier. En pratique, nous connaissons les valeurs de la fonction dans N points \vec{x}_i , soit $d_i = f(\vec{x}_i)$. Cette connaissance des données correspond partiellement à l'étape d'apprentissage du réseau puisque c'est alors que les informations d'entrée sont compilées. Ensuite, on procède à une généralisation des N valeurs d_i en une fonction continue. Ceci nous permet de reconnaître des données intermédiaires qui, tout en décrivant la même fonction, ne font pas partie des valeurs connues a priori. Cette généralisation se fait par approximation ou, dans le cas où les données ne sont pas bruitées, par interpolation. Le cas de l'interpolation linéaire fut d'ailleurs utilisé dans la première approche présentée dans ce chapitre.

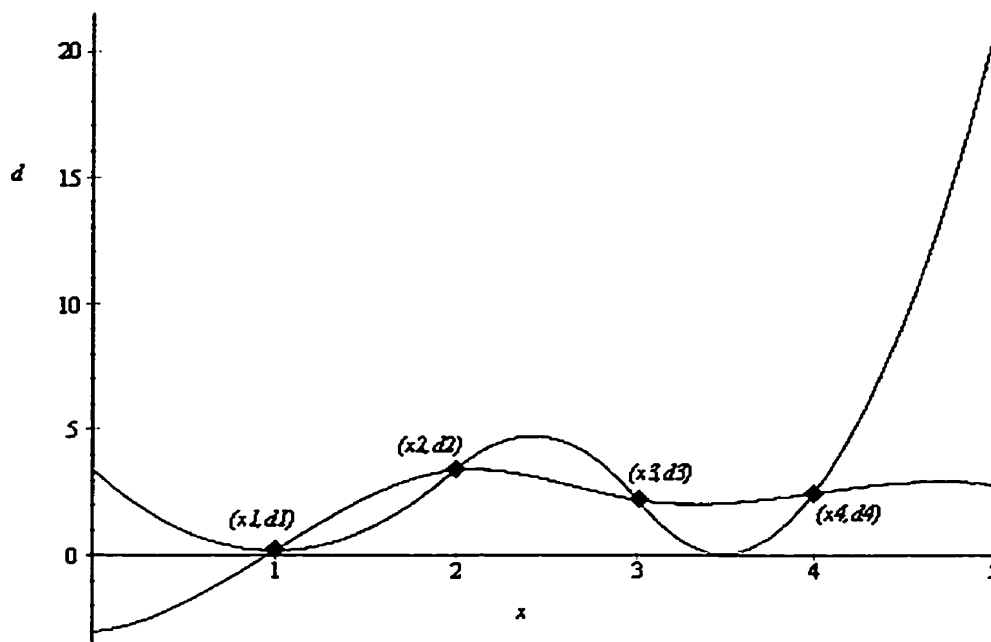


FIGURE 31. Interpolation en tant que problème mal défini. On note que plusieurs courbes peuvent passer par quatre points donnés.

Un problème important émane lors de cette étape de généralisation. En effet, le simple fait de vouloir reconstruire une hypersurface à partir d'un nombre restreint de points est un problème mal défini. En terme simple, cela signifie qu'il est impossible de trouver une solution unique à ce problème en se basant seulement sur les informations accumulées. Un exemple de ce comportement est vu dans la figure 31. Pour quatre points connus, on voit que deux courbes distinctes peuvent être des solutions du problème.

Certaines considérations peuvent cependant permettre de contourner cette difficulté. Dans un premier temps, on remarque que les observables présentes dans notre univers sont jusqu'à un certain point redondantes. La fonction décrivant cette observable varie alors très doucement si on change un peu la valeur de ses variables. Mathématiquement, ce comportement s'exprime comme:

$$\forall i, \Delta x_i \ll 1 \longrightarrow \Delta f \ll 1. \quad (5.17)$$

Ceci suppose que le comportement voulu de la fonction montre une bonne régularité, sans grande variation locale. Cette supposition utilisée lors d'une approximation porte le nom de régularisation standard. Les réseaux de neurones qui décrivent cette application sont de ce fait appelés réseaux de régularisation.

De plus, plusieurs autres connaissances a priori de la solution désirée permettent de caractériser davantage le problème afin qu'il devienne bien défini. Entre autres, les invariances sous certaines transformations, fréquentes dans les problèmes de reconnaissance d'objets, et la limitation du domaine de définition de la fonction peuvent servir à réduire le cardinal de l'ensemble de solutions à un seul élément. Voyons donc comment ces contraintes sont intégrées dans le problème d'approximation.

D'une façon similaire à ce qui a été montré précédemment, on introduit un critère d'approximation nommé fonction de coût. Toutefois, cette dernière contient maintenant deux termes:

$$H[f] = \sum_{i=1}^N (f(\vec{x}_i) - d_i)^2 + \lambda \|P[f]\|^2. \quad (5.18)$$

Le premier terme est en tous points similaire à celui retrouvé dans l'équation (5.15) et correspond ainsi à la distance entre les valeurs données et la solution désirée. Le deuxième terme tient compte, pour sa part, des autres connaissances a priori caractérisant la solution. P est habituellement un opérateur différentiel, aussi appelé stabilisateur. Il est défini de telle sorte que son application à la fonction f est minimale lorsque cette dernière répond aux critères de régularité escomptés. Le paramètre λ est nommé paramètre de régularisation et contrôle l'importance relative que l'on veut donner aux contraintes de régularité de la fonction par rapport à sa proximité aux données connues du problème. Ainsi, il constitue un degré de liberté très important pour réussir à bien définir la généralisation qu'on aimerait obtenir de notre réseau sans pour autant introduire de fausses reconnaissances.

5.2.2.3 Théorie de la régularisation et réseaux de régularisation

En se basant sur la fonction de coût introduite à l'équation (5.18), il est possible de décrire sa minimisation comme étant un réseau de neurones à trois couches. En effet, en utilisant les équations d'Euler-Lagrange, on dérive par rapport à la fonction recherchée $f(\vec{x})$ et on pose le résultat égal à 0. On obtient alors l'équation:

$$\hat{P} P [f(x)] = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^N (d_i - f(\vec{x}_i)) \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \quad (5.19)$$

où \hat{P} est l'adjoint de l'opérateur différentiel P .

Afin de pouvoir résoudre cette équation, nous devons introduire une fonction de Green, notée $G(\vec{x}; \vec{y})$, qui répond à la relation:

$$\hat{P} P [G(\vec{x}; \vec{y})] = \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (5.20)$$

En substituant l'équation (5.20) dans la relation donnée par l'équation (5.19), après quelques étapes de calcul, on arrive à isoler la fonction $f(\vec{x})$ et cette dernière est alors donnée par:

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^N (d_i - f(\vec{x}_i)) G(\vec{x}; \vec{x}_i). \quad (5.21)$$

On voit donc que notre fonction $f(\vec{x})$ peut être décrite comme une décomposition en N fonctions de base correspondant aux fonctions de Green $G(\vec{x}; \vec{x}_i)$. On appelle les \vec{x}_i des centres et les $G(\vec{x}; \vec{x}_i)$ sont les fonctions de Green centrées en \vec{x}_i . En appliquant la transformation

$$c_i = \frac{1}{\lambda} (d_i - f(\vec{x}_i)), \quad (5.22)$$

on peut réécrire l'équation (5.21) comme:

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N c_i G(\vec{x}; \vec{x}_i). \quad (5.23)$$

Cette équation a exactement la même forme que l'équation (5.16) et correspond donc à un réseau de régularisation à une couche cachée. L'activation est donnée par les N fonctions de Green qui correspondent aux N cellules de la couche cachée de notre réseau de neurones.

Afin que cette égalité tienne, il faut trouver les conditions que doivent satisfaire les c_i , en fonction des données de base du problème. Pour ce faire, définissons $G_{i,j} = G(\vec{x}_i; \vec{x}_j)$. On voit alors, grâce aux équations (5.21) et (5.22), que

$$\sum_{i=1}^N G_{i,j} \lambda^{-1} (d_i - f(\vec{x}_i)) + (d_i - f(\vec{x}_i)) = d_j, \quad (5.24)$$

ou, sous forme matricielle,

$$(\mathbf{G} + \lambda \mathbf{I}) \vec{c} = \vec{d}. \quad (5.25)$$

Cette équation nous donne exactement ce que nous recherchions, soit la représentation de la minimisation d'une fonction de coût en tant que réseau de neurone à une couche cachée.

Il faut noter que ce développement est basé entièrement sur la définition de la fonction de Green vue à l'équation (5.20). Il faut donc tenir compte du fait que cette solution n'est en rien générale et qu'elle est définie modulo un terme qui, lorsque soumis à l'action de l'opérateur P , donne un résultat identiquement nul. On dit alors que ce terme est dans l'espace nul de P .

À partir de cette étape, il est possible de considérer certaines propriétés des fonctions de Green introduites. Puisque l'opérateur défini à l'équation (5.19) est clairement son propre adjoint, on peut conclure que $G(x; y) = G(y; x)$. Ceci assure la symétrie de la matrice de Green, retrouvée dans l'équation (5.25). De ce fait, ses

valeurs propres sont réelles. Ainsi, à la seule exception où l'une des valeurs propres de \mathbf{G} est égale à $-\lambda$, la matrice $(\mathbf{G} + \lambda\mathbf{I})$ est de rang N et l'équation (5.25) a toujours une solution.

Il existe quelques cas particuliers que nous pouvons considérer. Le premier survient lorsque λ est identiquement nul. Dans ce cas, nous faisons face à un problème de pure interpolation (seul le premier terme de l'équation (5.18) reste) et l'existence d'une solution dépend entièrement des propriétés de \mathbf{G} . Un autre cas se produit lorsque la fonction de Green est définie positive. Dans ce cas d'intérêt, la solution existe toujours et certaines caractéristiques imposées par le stabilisateur P peuvent simplifier le problème. Dans un premier temps, une invariance sous translations permet de restreindre nos fonctions de Green à une forme $G(x; y) = G(x - y)$. De plus, si on ajoute à cela une invariance sous rotation, on se retrouve simplement avec une fonction de Green radiale, i.e. $G(x, y) = G(|x - y|)$. Dans cette éventualité, nous pourrions réécrire l'équation (5.23) comme:

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N c_i G(|\vec{x} - \vec{x}_i|) \quad (5.26)$$

ce qui correspond à la méthode des fonctions de base radiales.

L'utilisation des fonctions de base radiales peut donc servir notre but de reconnaissance d'objet dans l'espace. Pour donner une idée du type de fonctions dont il est question, en voici quelques exemples. Elles furent présentées par Michelli et sont particulièrement utiles dans le problème d'interpolation à partir de données échantillonnées [45].

$$G(r) = e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad (5.27)$$

$$G(r) = \frac{1}{(c^2 + r^2)^\alpha}, \quad \alpha > 0 \quad (5.28)$$

$$G(r) = (c^2 + r^2)^\beta, \quad 0 < \beta < 1 \quad (5.29)$$

$$G(r) = r. \quad (5.30)$$

5.2.3 Interpolation de type spline cubique

Les deux méthodes d'interpolation vues précédemment constituent probablement les deux extrêmes d'un problème où des compromis doivent être faits. Lors de l'interpolation linéaire, nous avons utilisé l'interpolation la plus simple et, par le fait même, la plus rapide au niveau du temps de calcul. Nous avons également introduit une méthode de très grande précision, utilisant un réseau de neurones. Elle est cependant très coûteuse en temps de calcul. Dans cette section, nous tâcherons d'obtenir une méthode intermédiaire, plus précise que l'interpolation linéaire et plus rapide qu'un réseau de neurone.

L'interpolation que nous utiliserons afin d'atteindre ce but est une approximation du comportement de la courbe entre ses points connus en faisant passer par ceux-ci une fonction polynomiale cubique dite "spline cubique". Voyons le détail d'une telle approximation.

Dans un premier temps, il importe de spécifier ce que l'on entend par spline cubique. Il s'agit d'une fonction $f(x)$, définie sur une partition $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1}$ et dont les valeurs pour chaque x_k , sont connues, i.e $f(x_k) = y_k$. Cette fonction est polynomiale par morceaux et est formée de $n - 1$ polynômes du troisième degré, notés f_k , définis sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$. La forme mathématique de telles fonctions est donnée par

$$f_k(x) = A_0 + A_1(x - x_k) + A_2(x - x_k)^2 + A_3(x - x_k)^3. \quad (5.31)$$

De plus, chaque paire de f_k est reliée en x_k de telle sorte que les dérivées première et seconde des deux polynômes en ce point soient continues. Un exemple de splines cubiques passant par une série de points est montré à la figure 32.

Les coefficients A_i sont calculés en utilisant les contraintes amenées par le passage de la courbe par les points connus ainsi que par les conditions de continuité. Ainsi, pour

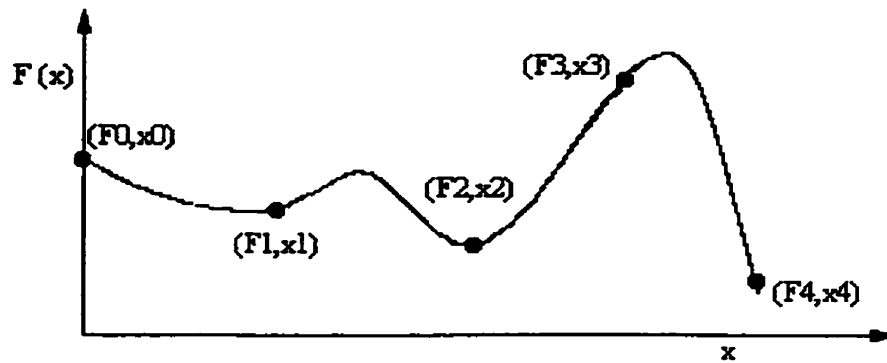


FIGURE 32. Courbe générée par l'interpolation "spline cubique" pour une série discrète de points en 2 dimensions.

une série de points donnés, notés (x_k, y_k) , on peut dériver six équations contraignant chaque courbe f_k .

$$\begin{aligned}
 y_k &= f_k(x_k) = A_0 \\
 y_{k+1} &= f_k(x_{k+1}) = A_0 + A_1 \Delta_{x_k} + A_2 \Delta_{x_k}^2 + A_3 \Delta_{x_k}^3 \\
 y_k &= f_k(x_k) = A_1 \\
 y_{k+1} &= f_k(x_{k+1}) = A_1 + 2A_2 \Delta_{x_k} + 3A_3 \Delta_{x_k}^2 \\
 y_k &= f_k(x_k) = 2A_2 \\
 y_{k+1} &= f_k(x_{k+1}) = 2A_2 + 6A_3 \Delta_{x_k}
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

où $\Delta_{x_k} = x_{k+1} - x_k$. Si chaque point connu représente la valeur de la courbe à intervalle régulier, on peut redéfinir le pas de notre variable x et obtenir une paramétrisation où $\Delta_{x_k} = 1$. De ce fait, les équations (5.32) deviennent

$$\begin{aligned}
 y_k &= f_k(x_k) = A_0 \\
 y_{k+1} &= f_k(x_{k+1}) = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 \\
 y_k &= f_k(x_k) = A_1 \\
 y_{k+1} &= f_k(x_{k+1}) = A_1 + 2A_2 + 3A_3 \\
 y_k &= f_k(x_k) = 2A_2 \\
 y_{k+1} &= f_k(x_{k+1}) = 2A_2 + 6A_3
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

L'utilisation des quatre premières équations de (5.33) permet alors de déduire les coefficients A_i .

$$\begin{aligned}
 A_0 &= y_k \\
 A_1 &= y'_k \\
 A_2 &= 3 - 2y'_k - y_{k+1} \\
 A_3 &= -2 + y'_k + y_{k+1}
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Nous pouvons alors utiliser les deux dernières équations de (5.33) comme contraintes afin de déterminer les valeurs de y'_k puisque nous ne possédons pas cette information. Sans entrer dans les détails de ce calcul, nous pouvons mentionner que seules les valeurs de la première dérivée des points situés aux extrémités de la courbe doivent être connues afin d'obtenir une bonne approximation polynomiale lisse de nos valeurs en terme de fonction continue.

5.3 Résultats obtenus et discussion des méthodes

Pour l'apprentissage nous avons considéré les images des projections d'un objet à tous les 15 (ou 10) degrés de rotation hors du plan de l'image. Nous avons obtenu les 24 (ou 36) vecteurs de DFs représentant l'un des véhicules. La dimension n du vecteur de DF varie de 10 à 100. Dans un premier temps, nous relierons les points caractéristiques des images de rotation consécutives par des segments de droite pour le cas linéaire et par leur interpolation de type spline. Nous comparons ces interpolations pour évaluer leur capacité à décrire le comportement des vues intermédiaires de l'appareil. Nous avons testé ceci en calculant le pourcentage de déviation des vues intermédiaires pour un véhicule v par rapport à la valeur donnée par les courbes. Pour ce faire, nous avons calculé la distance euclidienne minimale entre le DF des images de ce véhicule v et les

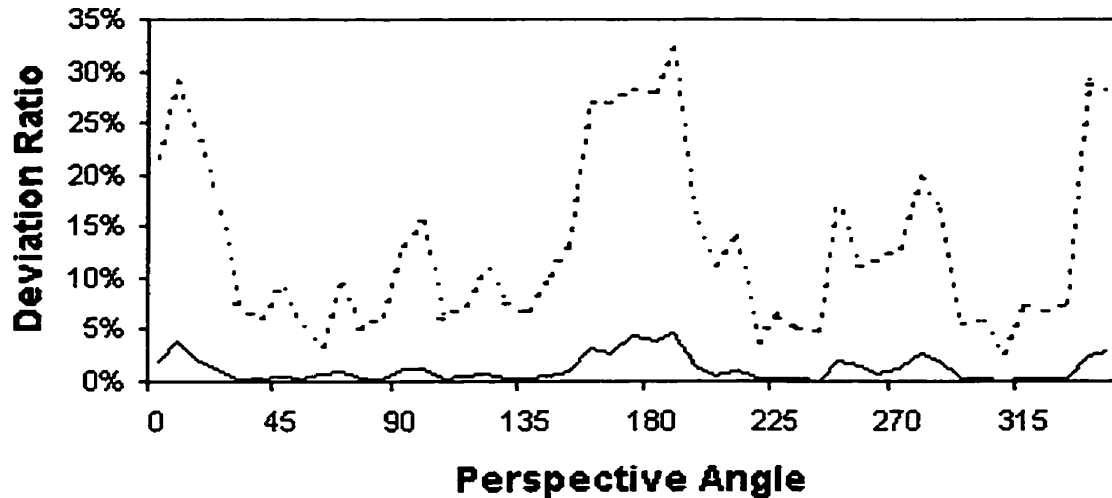


FIGURE 33. Déviation entre les valeurs interpolées et les véritables valeurs de descripteurs de Fourier en fonction des angles de vue. La ligne pointillée montre le ratio pour l'interpolation linéaire et la ligne pleine donne le ratio pour l'interpolation spline cubique.

courbes générées, ici notées ρ_v . Nous faisons alors le rapport suivant:

$$D_k = \frac{\|DF(v_k) - \rho_v\|}{\|DF(v_k)\|} \cdot 100\% \quad (5.35)$$

où k donne la projection que l'on étudie. Nous avons alors deux courbes montrant les taux de variation pour les deux méthodes nous donnant une appréciation des approximations obtenues. Les résultats sont donnés à la figure 33 pour un apprentissage à tous les 15 degrés avec des DFs de dimension 75. On voit que l'interpolation spline cubique est beaucoup plus précise que l'interpolation linéaire. Cependant, cette dernière possède l'avantage d'être numériquement beaucoup plus rapide. Nous testerons donc les deux méthodes.

Nous avons ainsi obtenu deux courbes dans l'espace des caractéristiques: une pour chaque interpolation. Elles ont été calculées à partir de 24 (ou 36) images d'un véhicule. Dans la pratique, nous travaillons avec des images de cinq véhicules. Ces véhicules sont répertoriés en deux classes: les chars d'assaut, identifiés v_1 et v_4 à la figure 26, et

les véhicules de transport de troupes, v_2 , v_3 et v_5 . Nous remarquons que le v_5 est le seul véhicule de transport qui possède un canon. Dans une étape intermédiaire de l'algorithme, nous utilisons $24 \times 5 = 120$, (ou $36 \times 5 = 180$) données.

La série d'images servant pour les tests est formée de 72 projections pour un véhicule en rotation hors du plan de l'image pour tous les cinq degrés, et nous avons 5 véhicules. Au total, 360 points sont classifiés dans l'espace des caractéristiques. Parmi ces 360 points, il y en a 120 (ou 180) qui appartiennent à la série d'apprentissage. Ils constituent les points d'inflexion des cinq courbes.

Le reste des points correspond aux images de projection intermédiaires n'ayant pas été apprises par l'algorithme. Soit une image de projection inconnue décrite par le point ν , qui est son descripteur de Fourier. Nous ne connaissons pas l'appartenance de l'image, ni son angle de vue. Nous calculons les distances du point à toutes les courbes de véhicules générées par l'interpolation étudiée. La distance la plus courte donne la classe de l'image. Pour calculer cette distance dans le cas de l'interpolation linéaire, on calcule les distances perpendiculaires à chaque segment de droite. Pour l'interpolation spline, nous avons échantillonné le paramètre de la fonction spline cubique à un taux suffisamment grand pour obtenir la plus courte distance.

Soit d_k , la distance minimale du point à la courbe k , où $k = 1, 2, \dots, 5$. On trouve d'abord la valeur $d \leq d_k, \forall k$. Nous concluons alors que le point représente une image de projection du véhicule associé à la courbe la moins distante. Cette décision est prise lors de l'étape finale, du type "winner take all", de l'algorithme. Pour le cas où l'on procède à l'apprentissage à l'aide de 36 images de projection uniformément espacées (10 degrés), les résultats de la classification sont présentés au tableau II. Les résultats, récoltés à partir de 180 images, varient selon la dimension des descripteurs de Fourier utilisés. Lors de ces tests, nous n'avons utilisé que l'interpolation linéaire puisque la précision de cette interpolation est très bonne. En fait, avec autant d'images d'apprentissage, l'interpolation spline n'apporte que très peu d'avantages. Seuls les nombres de fausses détections et les taux de classification réussie sont donnés. Les

	10 DFs		50 DFs		100 DFs	
	# Erreurs	Efficacité	# Erreurs	Efficacité	# Erreurs	Efficacité
v_1	4	94%	3	96%	1	99%
v_2	10	86%	5	93%	4	94%
v_3	8	89%	6	92%	4	94%
v_4	1	99%	1	99%	1	99%
v_5	10	86%	11	85%	8	89%
total	33	91%	26	93%	18	95%

TABLEAU II. Nombre de fausses détections et taux d'efficacité de la reconnaissance par interpolation linéaire pour 36 images d'entraînement et selon la dimension des descripteurs de Fourier utilisés.

tableaux III et IV donnent les résultats pour un apprentissage à l'aide de 24 images de projection également espacées de 15 degrés pour les deux types d'interpolations.

On voit que la reconnaissance utilisant un plus grand nombre d'images d'entraînement offre les meilleurs résultats avec un pourcentage de fiabilité s'élevant à 95. Cependant, dès que l'espace entre les vues consécutives des véhicules augmente à quinze degrés d'intervalle, les résultats deviennent beaucoup moins concluants, que ce soit dans l'approche linéaire ou dans l'interpolation spline cubique. En évaluant ces résultats et en regardant de plus près les contours obtenus, on s'aperçoit de plusieurs facteurs menant à cet état de fait.

Premièrement, les vues de face et de dos des véhicules sont très difficilement discernables. En effet, il y a davantage de similitudes entre deux chars différents vus de face que deux vues à différents angles du même char. Cette similitude rend les interpolations utilisées d'autant plus inefficaces que le nombre d'image d'entraînement diminue. Même une interpolation plus raffinée comme la spline cubique produit de moins bons résultats que l'approximation linéaire. Graphiquement, on peut associer cet état de fait à une trop grande proximité des courbes dans l'espace des caractéristiques

	10 DFs		50 DFs		100 DFs	
	# Erreurs	Efficacité	# Erreurs	Efficacité	# Erreurs	Efficacité
v_1	3	96%	4	94%	1	99%
v_2	14	81%	11	85%	9	88%
v_3	11	85%	7	90%	5	93%
v_4	3	96%	9	88%	6	92%
v_5	16	78%	15	79%	15	79%
total	47	87%	46	87%	36	90%

TABLEAU III. Nombre de fausses détections et taux d'efficacité de la reconnaissance par interpolation linéaire pour 24 images d'entraînement et selon la dimension des descripteurs de Fourier utilisés.

	10 DFs		50 DFs		100 DFs	
	# Erreurs	Efficacité	# Erreurs	Efficacité	# Erreurs	Efficacité
v_1	5	93%	7	90%	4	94%
v_2	16	78%	15	79%	14	81%
v_3	9	88%	7	90%	6	92%
v_4	1	99%	8	89%	5	93%
v_5	20	72%	20	72%	17	76%
total	51	86%	57	84%	46	87%

TABLEAU IV. Nombre de fausses détections et taux d'efficacité de la reconnaissance par interpolation spline cubique pour 24 images d'entraînement et selon la dimension des descripteurs de Fourier utilisés.

pour les vues de face et de dos des appareils.

Ensuite, comme il fallait s'y attendre, les résultats des deux chars v_1 et v_4 offrent les meilleurs résultats grâce à l'aspect discriminant du canon dans bon nombre de vues de ces véhicules. Le véhicule v_5 offrent les moins bons résultats étant un hybride entre les chars, à cause de son canon, et les véhicules de transport de troupes, à cause de sa silhouette générale.

Toutefois, dans l'ensemble, nous sommes parvenus à obtenir des résultats fort encourageants en utilisant 36 images d'entraînement et l'interpolation linéaire. Un plus grand nombre de descripteurs de Fourier nous a permis également d'augmenter notre efficacité. Ceci est dû au plus grand nombre d'information sur certaines structures fines des véhicules qui portent un caractère discriminant.

CONCLUSION

Dans cette thèse, nous avons présenté la transformée en ondelettes, autant sous sa forme continue que sous sa forme discrétisée. Nous avons montré les liens intrinsèques qui existent entre cette opération mathématique et le monde de l'information optique.

Dans un premier temps, la transformation continue a retenu notre attention. On y a vu que l'analyse simultanée par rapport au comportement spatial et fréquentiel d'un signal peut être d'une grande utilité pour plusieurs applications. Après avoir exposé les grandes lignes du formalisme, nous avons cité des travaux montrant que la réalisation optique de la transformée en ondelettes est possible.

Ensuite, nous avons exploré les applications de cette analyse à certains concepts retrouvés en optique. Ce faisant, nous avons été les premiers à montrer l'équivalence entre le principe de Huygens et la transformée en ondelettes. En fait, notre étude développe la transformée utilisant une ondelette électromagnétique et montre que la transformation qui en découle est une décomposition de champs en ondelettes sphériques polychromatiques. L'analyse d'un champ monochromatique nous amène à observer l'équivalence entre cette transformée en ondelette et le principe de Huygens. Elle fournit donc une base polychromatique d'ondes sphériques dont chaque élément est localisé à son origine.

Nous avons poursuivi nos travaux en imposant de nouvelles contraintes à cette ondelette. Celles-ci visaient à limiter son étalement dans le plan perpendiculairement

à un axe de propagation. Grâce à ces modifications, nous avons montré que la nouvelle ondelette développée est une composition de fonctions de Bessel, localisées à l'aide d'une fenêtre exponentielle. Les liens entre cette ondelette non diffractée et les faisceaux de Bessel de Durnin montrent qu'une nouvelle reconstruction de faisceaux non diffractés peut être générée par la nouvelle base.

La suite de notre étude des applications de la transformée en ondelettes au traitement de l'information optique nous a conduits vers l'analyse de signaux optiques emmagasinés par des détecteurs physiques. Ces derniers captant l'information de façon discrète, nous avons dû montrer comment les ondelettes s'adaptent au monde de l'analyse numérique. Parmi les avantages de cette approche, on note la capacité de débruitage, la compression de l'information et l'extraction des contours dans les images. C'est ce dernier aspect qui a retenu notre attention.

Dans le cadre d'un projet de reconnaissance de cibles, nous avons donc utilisé la transformée en ondelettes comme extracteur de contours. Ce projet nous a amenés à travailler également sur plusieurs autres aspects reliés au traitement de l'information optique. Notamment, nous avons étudié certains prétraitements (filtrage, analyse de distributions, etc.) qui ont servi à améliorer la qualité des images infrarouges qui nous furent confiées. Malgré nos efforts, nous n'avons pas réussi à obtenir des images pour lesquelles l'extraction de contours peut s'effectuer de façon optimale.

Ainsi, nous avons extrait les contours de véhicules militaires. Cependant, pour les raisons invoquées plus haut, cette opération ne fut pas entièrement automatisée. Toutefois, à l'aide d'un minimum de manipulations extérieures, nous sommes parvenus à générer une banque complète de contours simples et fermés de véhicules militaires.

Nous avons ensuite réalisé la reconnaissance de ces véhicules grâce à des algorithmes de tracés de courbes dans l'espace des caractéristiques. Ces techniques sont apparentées aux réseaux de neurones. Un ensemble de vues des véhicules fut construit en prenant des images infrarouges à tous les cinq degrés de rotation. Ceci fut réalisé à l'aide d'un plateau rotatif sur lequel les véhicules furent tour à tour stationnés. L'approche utilisée

visé à ne conserver qu'un sous-ensemble minimal de cette banque d'images pour décrire entièrement les véhicules quel que soit l'angle de vue de l'observateur.

Après avoir testé une méthode existante, introduite par Casasent, nous l'avons perfectionnée grâce à l'introduction d'une interpolation plus régulière dans les espaces de caractéristiques. Les résultats se sont avérés encourageant pour les deux approches, mais le peu d'avantages apportés par la nouvelle interpolation nous montre à quel point le peu d'information fournie par les images et leur piètre qualité rend l'analyse difficile. Ceci résulte d'une proximité des courbes dans l'espace des caractéristiques, rendant la reconnaissance très difficile pour les vues de face et de dos des chars d'assaut. À notre avis, la solution la plus prometteuse pour éviter de tels problèmes réside dans une analyse multi-capteurs où les images dans le spectre visible se grefferaient aux images infrarouges dont nous disposons et permettraient une analyse plus complète et précise des contours des véhicules.

Nous avons donc étudié plusieurs applications de la transformée en ondelettes au traitement optique de l'information. Les propriétés de ce nouvel outil mathématique permettent d'en espérer plusieurs autres. Parmi les applications possibles dont nous n'avons pas parlé, on note que chaque fonction d'ondelette peut représenter une impulsion localisée en fréquence et en temps. Ceci pourrait permettre une introduction de ces ondelettes dans le domaine des lasers pulsés. De plus, nous n'avons qu'effleuré sa capacité à débruiter les signaux et à compresser l'information avec une perte minimale. L'avenir du mariage entre les ondelettes et le monde de l'optique s'annonce donc très prometteur et enrichissant pour les deux domaines d'étude.

APPENDICE A

Notations mathématiques

$:=$	Définition mathématiques.
\equiv	Identité mathématique.
\ll	Beaucoup plus petit que.
$*$	Convolution 1-D.
$**$	Convolution 2-D.
$\bar{\Phi}, \Phi^*$	Complexe conjugué de Φ .
\hat{f}	Transformée de Fourier de f .
$\partial_t f$	Dérivée de f par rapport à t .
$\dot{f}(t)$	Dérivée première de f par rapport à t .
$\ddot{f}(t)$	Dérivée seconde de f par rapport à t .
$\mathcal{O}(n^{-2})$	Comportement polynômial d'un terme (ici, $\frac{1}{n^2}$).
$\oint_{\mathcal{L}}$	Intégrale sur la courbe fermée \mathcal{L} .
\mathfrak{R}	Ensemble des nombres réels.
$\mathfrak{R} \setminus 0$	Ensemble des nombres réels moins le nombre zéro.
\mathfrak{R}^n	Espace en n dimensions de nombres réels.
\forall	Pour tout.
\in	Élément de.
$:$	Tel que (utilisé pour la définition d'un domaine).
\oplus	Addition des éléments de deux ensembles.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] HUBBARD, B., "Ondes et Ondelettes, La saga d'un outil mathématique", Pour la Science, diffusion Berlin, Paris, 1995, 236p.
- [2] GROSSMAN, A., MORLET, J., "Decomposition of Hardy functions into square-integrable wavelets of constant shape", SIAM J. Math. Anal. 15, 1984, pp. 723-736.
- [3] MEYER, Y., ROQUES, S., "Progress in Wavelet Analysis and Application", Editions Frontières, Paris, 1993.
- [4] MORLET, J. "Sampling Theory and wave propagation", in NATO ASI Series, Vol. 1, Issues in Acoustic Signal/Image Processing and Recognition, Chen CH, ed. Springer Verlag, Berlin, 1983.
- [5] CHUI, C.K., "An Introduction to Wavelets", Wavelet Analysis and its Application, Volume 1, Academic Press, San Diego, 1992, 264 p.
- [6] MALLAT, S., "A Wavelet Tour of Signal Processing", Academic Press, San Diego, 1998, 577p.
- [7] LI, Y., SZU, H.H., SHENG, Y., CAUFIELD, H.J., "Wavelet Processing and Optics", Processing of the IEEE, Vol. 84, No 5, Mai 1996, pp. 720-732.
- [8] SHENG, Y., ROBERGE, D., SZU, H., "Optical wavelet transform", in "Optical pattern recognition" F. T. S. Yu and S. Yin Ed., SPIE, Milestone Series, 1999.
- [9] SHENG, Y., ROBERGE, D., SZU, H., LU, T., "Optical wavelet matched filters for shift-invariant pattern recognition", Optics Letters, Vol. 18, 1993, pp.299-301.
- [10] KAISER, G., "A Friendly Guide to Wavelets", Birkhäuser, Boston, 1994, 300p.

- [11] ONURAL, L., "Diffraction from a wavelet point of view", *Optics Letters*, Vol. 18, No. 11, juin 1993, p. 846-848.
- [12] JACKSON, J.D., "Classical electrodynamics", 3rd Edition, John Wiley and Sons, New York, 1999.
- [13] COHEN-TANNOUDJI, C., DIU, B. et LALOË, F., "Mécanique quantique", éd. Hermann, Collection "Enseignement des sciences", Paris, 1977, 1518p.
- [14] GABOR, D., "Theory of Communication", *Journal of Inst. Electr. Eng.*, 93, 1946, p. 429-457.
- [15] LU, J. Y., GREENLEAF, F., "Nondiffracting X-waves-exact solution to free-space scalar wave equation and their finite aperture realization", *IEEE Trans. Ultra. Ferro. Freq. Control*, vol.39, no.1, 1992, pp. 19-31.
- [16] SHENG, Y., DESCHÊNES, S., CAUFIELD, H.J., "Monochromatic Electromagnetic Wavelets and Huygens Principle", *Applied Optics*, Vol. 37, No 5, février 1998, pp. 828-833.
- [17] DURNIN, J. "Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory", *Journal of Optical Society of America*, vol.4, No.4, 1987, pp. 651-654.
- [18] SHENG, Y., DESCHÊNES, S., "Spatially localized electromagnetic wavelets", *Proc. SPIE* vol. 3723, 1999, pp. 272-276.
- [19] BALIAN, R., "Un principe d'incertitude fort en théorie du signal ou en mécanique quantique", *C.R. Acad. Sci.*, Paris, 292, Serie 2, 1981.
- [20] BURT, P., ADELSON, E., "The Laplacian Pyramid as a Compact Image Code", *IEEE Trans. Comm.*, vol 31, avril 1983, pp. 482-540.
- [21] MALLAT, S., "A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation", *IEEE Trans. Pattern Anl. Machine Intell. PAMI-31*, 1989, pp. 674-693.

- [22] MALLAT, S., HWANG, W. L., "Singularity detection and processing with wavelet", IEEE Tran. on Inf. Theory, 38, 1992, pp. 617-641.
- [23] PRESS, W., TEUKOLSKI, S., VETTERLING, W., FLANNERY, B. , "Numerical Recipes in C", Cambridge University Press, 1992, 995 p.
- [24] DAUBECHIE, I., "Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets", Comm. Pure Appl. Math., 41, 1988, pp. 909-996.
- [25] ARSENAULT, H., SHENG, Y., PARENT, S. and DESCHENES, S., "Les neurones optiques appliqués à la reconnaissance des cibles", Rapport interimaire remis à l'Institut National d'Optique, Québec, 1995.
- [26] PRATT, W. K., "Digital image processing", 2ème édition, John Wiley, New York, 1991.
- [27] CANNY, J., "A computational approach to edge detection", IEEE Trans. on Pattern analysis and Machine Intelligence, PAMI-8, 1986, pp. 679-698.
- [28] MARR, D., HILDRETH, E., "Theory of edge detection", Proc. Royal Society, vol. 207, pp. 187-217, 1980.
- [29] VETTERLI, M., KOVACEVIC, J., "Wavelets and Subband Coding", Prentice-Hall, 1995, 483 pp.
- [30] SHENG, Y., "Wavelet transform", in "The Transforms and Applications Handbook", A.D. Poularikas Ed. Chap. 10, CRC Press, Boca Raton, 1995.
- [31] SADJADI, F., "Object recognition using coding schemes", Opt. Eng. 32, 1992, pp. 2580-2583.
- [32] SHENG Y., ARSENAULT, H. H., "Experiments on the pattern recognition using invariant Fourier-Mellin descriptors", J. Opt. Soc. Am. A, 3, 6, 1986, pp. 771-776.
- [33] SHENG, Y., SHEN L., "Orthogonal Fourier-Mellin moments for invariant pattern recognition", J. Opt. Soc. Am. A, 6, 1994, pp. 1748-1757.

- [34] HU, M. "Visual pattern recognition by moment invariants". IRE Trans. Information Theory, Vol. IT-8, Num. 2, 1962.
- [35] ZAHN, C. T., ROSKIES, R. Z., "Fourier descriptors for plane curves" IEEE Trans. on Computers, Vol. c-21, No 3, 1972, pp 269-277.
- [36] NEINBERG, N., CASASENT, D., "Feature Space Trajectory (FST) Classifier Neural Network", Proceeding SPIE, Vol. 2353, 1994, pp. 276-292.
- [37] POGGIO, T., GIROSI, F., "Networks for Approximation and Learning", Proceedings of the IEEE, Vol. 78, No. 9, 1990, pp. 1481-1497.
- [38] POGGIO, T., EDELMAN, S., "A Network that learns to recognize three-dimensional objects", Nature, Vol. 343, 1990, pp. 263-266.
- [39] POGGIO, T., TORRE, V., KOCH, C., "Computational vision and regularization theory", Nature, Vol. 317, 1985, pp. 314-319.
- [40] POGGIO, T., GIROSI, F., JONES, M., "From regularization to radial, tensor and additive splines", Proceedings of 1993 International Joint Conference on Neural Networks.
- [41] MARROQUIN, J., MITTER, S., POGGIO, T., "Probabilistic Solution of Ill-Posed Problems in Computational Vision", Journal of the American Statistical Association, Vol. 82, No. 397, 1987, pp. 76-89.
- [42] POGGIO, T., GAMBLE, E. B., LITTLE, J. J., "Parallel Integration of Vision Modules", Science, Vol. 242, 1988, pp. 436-440.
- [43] KHOTANZAD, A., LIOU, J., "Recognition and Pose Estimation of Unoccluded Three-Dimensional Objects from a Two-Dimensional Perspective View by Banks of Neural Networks", IEEE Transactions on Neural Networks, Vol. 7, No. 4, 1996, pp. 897-905.
- [44] TSENG, Y. H., HWANG, J. N., SHEEHAN, F., "Three-Dimensional Object Representation and Invariant Recognition Using Continuous Distance Transform

Neural Networks”, IEEE Transactions on Neural Networks, Vol. 8, No. 1, 1997, pp. 141-147.

- [45] MICHELLI, C.A., “Interpolation of scattered data: distance matrices and conditionally positive definite functions”, Constructive Approximation, 2, 1986, pp. 11-22.