

1 Ebene Wellen in Röhren

In diesem Kapitel wollen wir die Eigenschaften von ebenen Wellen in verschiedenen Röhren betrachten. Dafür beginnen wir zunächst mit dem einfachsten Fall eines Rohres mit konstanter Querschnittsfläche und erweitern diesen Fall dann so nach und nach immer weiter, bis am Ende die Querschnittsfläche variabel ist. Noch zu beachten ist, dass wenn wir von einer Welle reden, immer eine akustische Welle gemeint ist.

1.1 Gerade Röhre mit konstanter Querschnittsfläche

Wir betrachten eine gerade Röhre mit konstanter Querschnittsfläche, in der sich ein flacher Kolben wie in der Abbildung oben zu sehen ist bewegt. Die Geschwindigkeit dieses Kolbens ist relativ klein bezüglich der Schallgeschwindigkeit und generiert Schallwellen mit einer kleinen Amplitude. Das Ziel in diesem Kapitel ist, die erzeugte Welle mithilfe der Wellengleichung beschreiben. Dazu stellen wir zunächst zwei Randbedingungen auf.

Die Normalengeschwindigkeit an der Oberfläche des Kolbens ist kontinuierlich, daraus ergibt sich direkt die erste Randbedingung

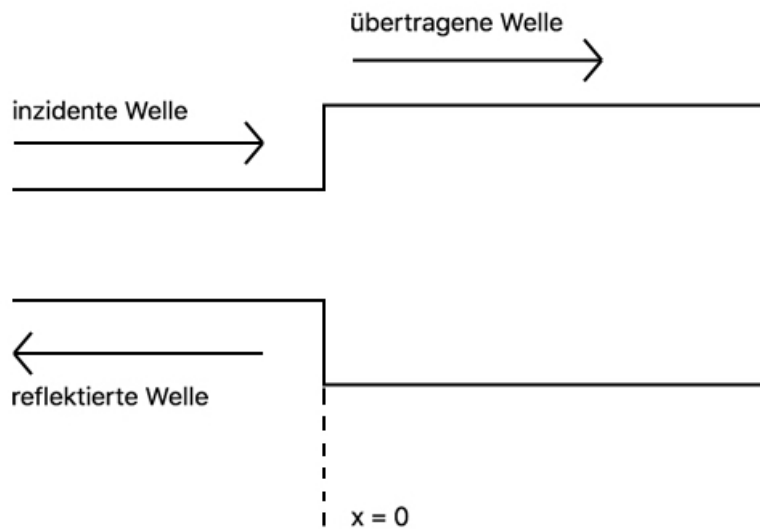
$$\tilde{u}_x = \frac{d\phi}{dx} = \frac{dx_0}{dt}, \text{ an der Stelle } x = x_0(t).$$

Nehmen wir nun an, dass die Seitenfläche des Kolbens immer nahe bei $x = 0$ bleibt und sich einer Bewegung mit einer kleinen Amplitude unterzieht. Dann können wir die Randbedingung linearisieren zu

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{dx_0}{dt}, \text{ bei } x = 0. \quad (1)$$

An den Wänden ist die Normalengeschwindigkeit ebenfalls kontinuierlich, somit erhalten wir die zweite Randbedingung

$$\frac{d\phi}{dn} = 0. \quad (2)$$



Da die Welle sich ohne räumliche Variation senkrecht zu den Wänden des Rohrs nach rechts ausbreitet und (2) erfüllt, suchen wir nach einer Lösung für ebene Wellen der Form $\phi = f(x - ct)$. Mit der Erkenntnis über die Form von ϕ und (1) kommen wir direkt auf

$$\phi = -cx_0 \left(t - \frac{x}{c} \right).$$

Der Kolben erzeugt also eine ebene akustische Welle, die sich durch die Röhre ohne Formänderung ausbreitet.

Betrachten wir nun Eigenschaften einer solchen Welle:

Der Volumenfluss des Gases ist an jedem Punkt in der Welle $Q = A\tilde{u}$ mit A als die konstante Querschnittsfläche. Aus dem vorigen Vortrag ist bekannt, dass $\tilde{p} = \rho_0 c \tilde{u}$. Durch Einsetzen können wir den Volumenfluss mithilfe der charakteristischen Admittanz $Y = \frac{A}{\rho_0 c}$ ausdrücken und erhalten

$$Q = Y\tilde{p}.$$

Den Energiefluss durch das Rohr können wir nun beschreiben mit

$$IA = \tilde{p}\tilde{u}A = \tilde{p}Q = Y\tilde{p}^2,$$

wobei I die akustische Intensität ist.

1.2 Zwei verbundene Rohre

Betrachten wir nun was passiert, wenn wir zwei solcher Rohre miteinander verbinden. Wir wählen als Verbindungsstelle $x = 0$, die Welle breitet sich wieder in die positive x -Richtung aus und ist inzident zur Verbindungsstelle. Es gibt dann eine ebene Welle, die in das zweite Rohr übertragen

wird und eine, die zurück in das erste Rohr reflektiert wird und sich dann in die negative x -Richtung ausbreitet, wie in der Abbildung oben dargestellt. Diese drei ebenen Wellen können wir ausdrücken als eine Summe der Form

$$\tilde{p} = \left\{ \begin{array}{ll} f_I(x - c_1t) + f_R(x + c_1t), & \text{für } x < 0, \\ f_T(x - c_2t), & \text{für } x > 0. \end{array} \right\}$$

Wir wollen nun die Amplitude der reflektierten und übertragenen Welle bezüglich der inzidenten Welle bestimmen. Da wir eine Situation betrachten, bei der der Druck an der Verbindungsstelle $x = 0$ kontinuierlich ist, gilt

$$f_I(-c_1t) + f_R(c_1t) = f_T(-c_2t). \quad (3)$$

Der Gasfluss ist ebenfalls kontinuierlich bei $x = 0$, sodass

$$Y_1 f_I(-c_1t) - Y_1 f_R(c_1t) = Y_2 f_T(-c_2t). \quad (4)$$

Der Gasfluss der reflektierten Welle hat ein negatives Vorzeichen, da die reflektierte Welle das Gas in die negative x -Richtung transportiert. Mithilfe von (4) und (3) können wir durch Einsetzen $f_R(c_1t)$ bestimmen:

$$\begin{aligned} Y_1 f_I(-c_1t) - Y_1 f_R(c_1t) &= Y_2 f_T(-c_2t) \\ \Leftrightarrow -Y_1 f_R(c_1t) &= Y_2 (f_I(-c_1t) + f_R(c_1t)) - Y_1 f_I(-c_1t) \\ \Leftrightarrow Y_1 f_R(c_1t) &= -Y_2 f_I(-c_1t) - Y_2 f_R(c_1t) + Y_1 f_I(-c_1t) \\ \Leftrightarrow (Y_1 + Y_2) f_R(c_1t) &= (Y_1 - Y_2) f_I(-c_1t) \\ \Leftrightarrow f_R(c_1t) &= \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2} f_I(-c_1t) \end{aligned}$$

Die Berechnung für $f_T(-c_2t)$ erfolgt analog, nur dass wir statt den Druck der transponierten Welle nun den Druck der reflektierten Welle mithilfe von (3) ersetzen. So erhalten wir

$$f_T(-c_2t) = \frac{2Y_1}{Y_1 + Y_2} f_I(-c_1t).$$

Bezüglich der tatsächlich reflektierten und übertragenen Welle ergibt sich somit

$$f_R(x + c_1t) = \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2} f_I(-x - c_1t), \quad (5)$$

$$f_T(x - c_2t) = \frac{2Y_1}{Y_1 + Y_2} f_I\left(\frac{c_1}{c_2}(x - c_2t)\right). \quad (6)$$

Die reflektierte und die übertragene Welle haben also die selbe Form wie die inzidente Welle, jedoch mit modifizierten Amplituden. Aus den Gleichungen (5) und (6) lässt sich nun Folgendes erkennen:



- (i) Für $Y_1 = Y_2$, d.h. wenn beide Rohre gleich groß sind, gibt es wie auch intuitiv zu erwarten ist keine reflektierte Welle, da dann $f_R(x + c_1 t) = 0$.
- (ii) Für $Y_2 \gg Y_1$, d.h. das zweite Rohr viel größer ist als das erste, ist die übertragene Welle sehr klein.
- (iii) Für $Y_1 \gg Y_2$ ist die Amplitude der übertragenen Welle fast doppelt so groß wie die der reflektierten Welle. Das ist ziemlich überraschend, da doch das zweite Rohr im Verhältnis zum ersten einen sehr kleinen Durchmesser hat. Aber natürlich transportiert die übertragene Welle dann nur eine kleine Menge an Energie.

Auch der Energiefluss $Y\tilde{p}^2$ teilt sich auf die inzidente und reflektierte Welle auf:

$$\begin{aligned}
 Y_1 f_R^2 + Y_2 f_T^2 &= Y_1 \frac{(Y_1 - Y_2)^2}{(Y_1 + Y_2)^2} f_I^2 + Y_2 \frac{(2Y_1)^2}{(Y_1 + Y_2)^2} f_I^2 \\
 &= Y_1 \frac{Y_1^2 - 2Y_1 Y_2 + Y_2^2 + 4Y_1 Y_2}{(Y_1 + Y_2)^2} f_I^2 \\
 &= Y_1 f_I^2
 \end{aligned}$$

1.3 Ebene, stehende Welle in einem Rohr mit endlicher Länge

Bisher haben wir immer nur unendlich lange Rohre betrachtet. Da dies sehr wirklichkeitsfern ist wollen wir nun sehen was passiert wenn sie endlich lang sind. Solche ebenen, stehenden Wellen können zum Beispiel in Orgelpfeifen und Flöten entstehen.

Sei die Länge L und das Rohr habe ein offenes Ende und einem geschlossenes, wie in der Abbildung oben dargestellt. Am geschlossenem Ende ist die axiale Gasgeschwindigkeit Null und am zur Atmosphäre offenem Ende ist die Druckschwankung Null. Wir können uns die offene Seite auch als ein unendlich großes Rohr vorstellen, dann gilt $\frac{Y_2}{Y_1} \rightarrow \infty$ und daraus folgt direkt $f_T \rightarrow 0$ und $f_R \rightarrow -f_I$. Somit gilt für $x = 0$, dass $\tilde{p} \rightarrow 0$.

Wir wollen nun eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung suchen mit den Randbedingungen

$$\tilde{u} = \frac{d\phi}{dx} = 0, \text{ bei } x = 0$$

und

$$\tilde{p} = 0 \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = 0, \text{ bei } x = L.$$

Wenn wir nach getrennten Lösungen suchen erhalten wir

$$\phi = \phi_n = A \cos\left(\frac{\omega x}{c}\right) \cos \omega_n t,$$

mit der Eigenfrequenz

$$\omega_n = \frac{c}{L} \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

Wir können diese Lösung als Summe von Fourierkomponenten ausdrücken, die die Grundwelle und die Oberwelle repräsentiert. Dies ist analog zu einem der vorigen Vorträgen über eine endliche vibrierende Schnur, daher hier nicht weiter ausgeführt. Auch alle anderen Eigenschaften von ebenen Wellen in Röhren, die wir bisher betrachtet haben waren sehr ähnlich zu den einer endlichen vibrierenden Schnur. Daher lässt sich zusammenfassend sagen, dass sich das Verhalten von ebene Wellen in Röhren mit konstanter Querschnittsfläche sich dem von aufgespannten Schnüren ähnelt.

1.4 Rohr mit sich verändernder Querschnittsfläche

Wir betrachten ein Rohr, bei dem die Querschnittsfläche $A(x)$ nicht mehr konstant ist und daher von x abhängt. Dabei beschränken wir uns auf den Fall, bei dem die Wellenlänge der Störung im Rohr viel länger ist als der typische Radius des Rohrs und $A(x)$ variiert auf einer Längenskala sehr viel mehr als die Wellenlänge. In solch einem schmalen, nur langsam breiter werdendem Rohr können wir annehmen, dass die lokale Störung eine ebene Welle ist.

Wir betrachten einen kleinen Ausschnitt des Rohrs mit der Länge Δx , der Ein- und Ausfluss entspricht dann der Änderungsrate der Masse

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A \Delta x) = (\rho A u)_x - (\rho A u)_{x+\Delta x}$$

für $\Delta x \rightarrow 0$ gilt also

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(A\rho) &= -\frac{\partial}{\partial x}(A\rho u) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}(A(\rho_0 + \tilde{\rho})) &= -\frac{\partial}{\partial x}(A(\rho_0 + \tilde{\rho})\tilde{u}) \\ \Leftrightarrow A \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} &= -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x}(A\tilde{u}) - \frac{\partial}{\partial x}(A\tilde{\rho}\tilde{u}). \end{aligned}$$

Da kleine Quantitäten vernachlässigbar sind linearisieren wir dies zu

$$A \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x}(A\tilde{u}).$$

Die Berechnung linearisierte Gleichung der Impulserhaltung erfolgt komplett analog zu einer Berechnung aus dem vorigen Vortrag. So erhalten wir

$$\rho_0 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}.$$

Zusätzlich ist aus dem vorigen Vortrag bereits bekannt, dass $\tilde{\rho} = \frac{d\rho}{dp}(p_0)\tilde{p}$ gilt. Somit ist

$$\begin{aligned}
 A \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} &= -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x}(A\tilde{u}) \\
 \Leftrightarrow A \frac{\partial}{\partial t} \frac{d\rho}{dp}(p_0)\tilde{p} &= -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x}(A\tilde{u}) \\
 \Leftrightarrow A \frac{d\rho}{dp}(p_0) \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} &= -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x}(A\tilde{u}) \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dp}(p_0) \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} &= -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u} \\
 \Leftrightarrow \frac{d\rho}{dp}(p_0) \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \right).
 \end{aligned}$$

Wir erhalten also die modifizierte Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \right)$$

mit

$$c = \left(\frac{d\rho}{dp}(p_0) \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

1.5 Beispiel: Exponentielles Horn

Das exponentielle Horn hat die Querschnittsfläche $A(x) = A_0 \exp(\alpha x)$, welche wir in die modifizierte Wellengleichung einsetzen:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} &= \frac{1}{A_0 \exp(\alpha x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(A_0 \exp(\alpha x) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \right) \\
 &= \frac{A_0 \exp(\alpha x)}{A_0 \exp(\alpha x)} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} + \frac{A_0 \alpha \exp(\alpha x)}{A_0 \exp(\alpha x)} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \\
 &= \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}
 \end{aligned}$$

Gesucht ist eine Lösung für eine ebenen, harmonischen Welle in der Form

$$\tilde{p} = a(x) \exp(i\omega t).$$

Dafür müssen wir $a(x)$ bestimmen. Dies tun wir, indem wir \tilde{p} in die modifizierte Wellengleichung

einsetzen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} a(x) \exp(i\omega t) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} a(x) \exp(i\omega t) + \alpha \frac{\partial}{\partial x} a(x) \exp(i\omega t) \\
\Leftrightarrow \frac{1}{c^2} a(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \exp(i\omega t) &= \exp(i\omega t) \frac{d^2}{dx^2} a(x) + \alpha \exp(i\omega t) \frac{d}{dx} a(x) \\
\Leftrightarrow \frac{1}{c^2} a(x) (-1)\omega^2 \exp(i\omega t) &= \exp(i\omega t) \frac{d^2}{dx^2} a(x) + \alpha \exp(i\omega t) \frac{d}{dx} a(x) \\
\Leftrightarrow -\frac{\omega^2}{c^2} a(x) &= \frac{d^2}{dx^2} a(x) + \alpha \frac{d}{dx} a(x) \\
\Leftrightarrow 0 &= \frac{d^2}{dx^2} a(x) + \alpha \frac{d}{dx} a(x) + \frac{\omega^2}{c^2} a(x)
\end{aligned}$$

Somit ist

$$a(x) \propto \exp\left(-i\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{4}\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}} x - \frac{1}{2}\alpha x\right)$$

für Wellen, die sich in die positive x -Richtung ausbreiten.

Für $\omega > \frac{1}{2}\alpha c$ breitet sich die Welle mit der Geschwindigkeit

$$c_0(\omega) = \omega \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{4}\alpha^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

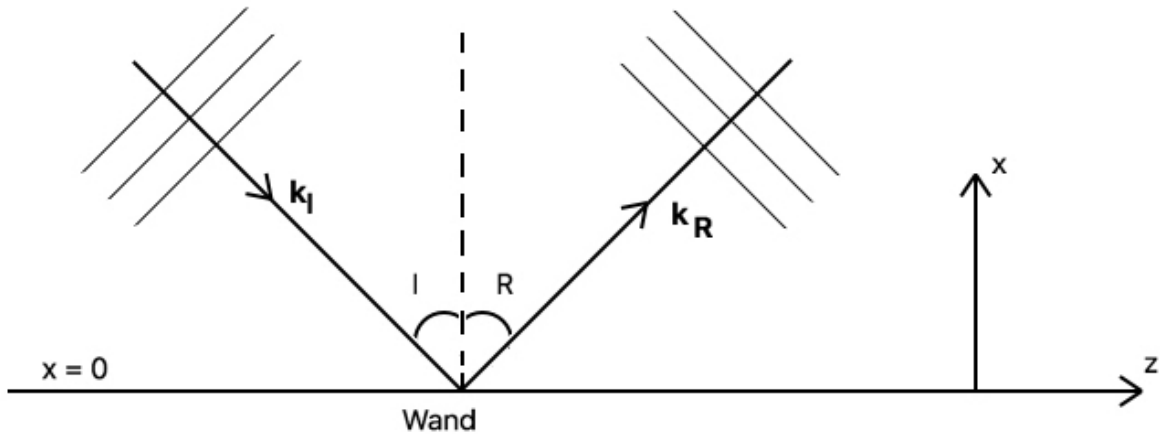
und die Amplitude proportional zu $\exp(-\frac{1}{2}\alpha x) = A^{-\frac{1}{2}}$ aus. Anders gesagt die Amplitude wird kleiner (wir sagen die Welle attenuiert), wenn x wächst. Wenn $\omega < \frac{1}{2}\alpha c$ gibt es keine Ausbreitung, nur Attenuierung, da

$$a(x) \propto \exp\left(-\left(\frac{1}{2}\alpha + \left(\frac{1}{4}\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) x\right).$$

Dies wird eine evaneszente Welle genannt. Die Abschneidefrequenz $\omega = \frac{1}{2}\alpha c$ ist die kritische Frequenz unter der keine ebene Wellenausbreitung möglich ist. Im nächsten Kapitel betrachten wir ein ähnliches Phänomen, jedoch in einem anderen Kontext.

2 Akustische Wellenleiter

Bisher haben wir gesehen, wie sich ebene akustische Wellen entlang von Röhren ausbreiten. Nun wollen wir versuchen die Frage zu beantworten, ob es andere Typen von akustischen Wellen gibt, die sich entlang von Röhren ausbreiten. Dafür betrachten wir zunächst den Effekt einer flachen, festen Wand auf eine inzidente ebene Welle.



2.1 Reflektion einer ebenen akustischen Welle an einer festen Wand

Wir betrachten eine ebene Welle mit der Amplitude A_I und der Frequenz ω_I , die an der Stelle $x = 0$ auf eine ebene feste Wand trifft, wie in der Abbildung oben zu sehen ist. Die y -Achse ist nicht sichtbar, da wir sie so wählen, dass sie orthogonal zur Ausbreitungsrichtung der Welle liegt. Den Wellenzahlvektor zeigt in die Ausbreitungsrichtung der Welle ist daher

$$\mathbf{k}_I = \left(-\frac{\omega_I}{c} \cos \theta_I, 0, \frac{\omega_I}{c} \sin \theta_I \right).$$

Mithilfe des Wellenzahlvektors \mathbf{k}_I lässt sich das Potential ϕ_I der inzidenten Welle wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \phi_I &= A_I \exp(i(\omega_I t - \mathbf{k}_I \cdot \mathbf{x})) \\ &= A_I \exp\left(i\left(\omega_I t - \left(-\frac{\omega_I}{c} \cos \theta_I, 0, \frac{\omega_I}{c} \sin \theta_I\right) \cdot \mathbf{x}\right)\right) \\ &= A_I \exp\left(i\omega_I \left(t - \frac{z}{c} \sin \theta_I + \frac{x}{c} \cos \theta_I\right)\right), \end{aligned}$$

wobei θ_I dem Inzidenzwinkel entspricht.

Wir erwarten, dass eine weitere ebene akustische Welle existiert, die von der Wand reflektierte Welle. Sie erfüllt die Randbedingung

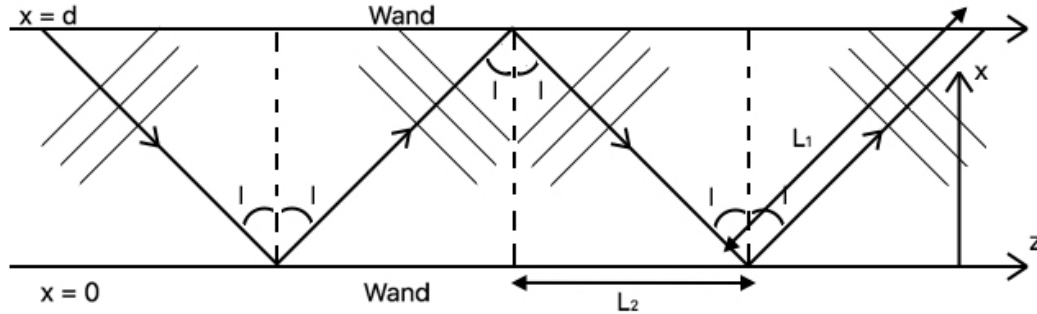
$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \text{ bei } x = 0.$$

Wir suchen eine Lösung der Form

$$\phi = \phi_I + \phi_R,$$

wobei

$$\phi_R = A_R \exp\left(i\omega_R \left(t - \frac{z}{c} \sin \theta_R - \frac{x}{c} \cos \theta_R\right)\right)$$



das Potential der reflektierten Welle ist und θ_R der Reflektionswinkel ist. Somit wird die Randbedingung zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} & \left(A_I \exp \left(i\omega_I \left(t - \frac{z}{c} \sin \theta_I + \frac{x}{c} \cos \theta_I \right) \right) + A_R \exp \left(i\omega_R \left(t - \frac{z}{c} \sin \theta_R - \frac{x}{c} \cos \theta_R \right) \right) \right) \\ & = A_I i\omega_I \frac{1}{c} \cos \theta_I \exp \left(i\omega_I \left(t - \frac{z}{c} \sin \theta_I + \frac{x}{c} \cos \theta_I \right) \right) \\ & \quad + A_R i\omega_R \frac{1}{c} \cos \theta_R \exp \left(i\omega_R \left(t - \frac{z}{c} \sin \theta_R - \frac{x}{c} \cos \theta_R \right) \right) \end{aligned}$$

Aufgrund der Randbedingung gilt

$$\begin{aligned} 0 & = A_I i\omega_I \frac{1}{c} \cos \theta_I \exp \left(i\omega_I \left(t - \frac{z}{c} \sin \theta_I \right) \right) - A_R i\omega_R \frac{1}{c} \cos \theta_R \exp \left(i\omega_R \left(t - \frac{z}{c} \sin \theta_R \right) \right) \\ \Leftrightarrow 0 & = A_I \omega_I \cos \theta_I \exp \left(i\omega_I \left(t - \frac{z}{c} \sin \theta_I \right) \right) - A_R \omega_R \cos \theta_R \exp \left(i\omega_R \left(t - \frac{z}{c} \sin \theta_R \right) \right) \end{aligned}$$

Dies kann nur erfüllt werden, wenn alle funktionale Formen der inzidenten und reflektierten Welle identisch sind, also $\omega_I = \omega_R$, $A_I = A_R$ und $\theta_I = \theta_R$. Anders ausgedrückt, die Welle wird reflektiert ohne die Frequenz oder die Amplitude zu ändern und auch der Inzidenz- und Reflektionswinkel sind gleich.

2.2 Ein ebener Wellenleiter

Wir betrachten eine Region, die begrenzt ist durch zwei feste, parallele, ebene Wände an den Stellen $x = 0$ und $x = d$. Wir wollen uns nun mit der Frage auseinandersetzen, was für Typen von akustischen Wellen sich in so einem ebenem Wellenleiter ausbreiten können. Dabei nehmen wir an, dass es keine Variation in y -Richtung gibt.

Um dies zu beantworten werden wir unsere Erkenntnis über die Reflektion von ebenen Wellen nutzen. Für den einfachsten Typ, eine ebene Welle, die sich entlang des Wellenleiters mit einem Wellenzahlvektor in z -Richtung ausbreitet, benötigen wir diese Erkenntnis noch nicht. Sie verhält

sich wie die ebene Welle in einem Rohr, die wir bereits betrachtet haben. Deshalb werden wir nicht noch einmal näher darauf eingehen.

Wir können uns auch eine ebene Welle vorstellen, die sich in einer andere Richtung ausbreitet. Sie wird dann regelmäßig an den Wänden reflektiert und springt hin und her entlang des Leiters mit dem Inzidenz- und Reflektionswinkel θ_I , wie in der Abbildung oben zu sehen. Dass die Winkel immer die selben sind wissen wir aus Kapitel 2.1. Diese Welle kann nach wie vor als Summe von zwei ebenen Wellen dargestellt werden:

$$\phi = A \exp\left(i\omega\left(t - \sin\theta_I \frac{z}{c} + \cos\theta_I \frac{x}{c}\right)\right) + A \exp\left(i\omega\left(t - \sin\theta_I \frac{z}{c} - \cos\theta_I \frac{x}{c}\right)\right).$$

Dabei muss ϕ folgende Bedingung erfüllen

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, \text{ bei } x = d.$$

Damit wollen wir nun das akustische Potential bestimmen. Dafür müssen wir zunächst $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x} &= Ai\omega \cos\theta_I \frac{x}{c} \exp\left(i\omega\left(t - \sin\theta_I \frac{z}{c} + \cos\theta_I \frac{x}{c}\right)\right) \\ &\quad - Ai\omega \cos\theta_I \frac{x}{c} \exp\left(i\omega\left(t - \sin\theta_I \frac{z}{c} - \cos\theta_I \frac{x}{c}\right)\right). \end{aligned}$$

Nun können wir die Bedingung anwenden

$$\begin{aligned} \cos\theta_I \frac{d}{c} \exp\left(i\omega\left(t - \sin\theta_I \frac{z}{c} + \cos\theta_I \frac{d}{c}\right)\right) &= \cos\theta_I \frac{d}{c} \exp\left(i\omega\left(t - \sin\theta_I \frac{z}{c} - \cos\theta_I \frac{d}{c}\right)\right) \\ \Leftrightarrow \exp\left(i \cos\theta_I \frac{\omega d}{c}\right) &= \exp\left(i\left(-\cos\theta_I \frac{\omega d}{c}\right)\right). \end{aligned}$$

Daraus können wir folgern, dass

$$\cos\theta_I \frac{\omega d}{c} = -\cos\theta_I \frac{\omega d}{c} + 2n\pi,$$

für $n = 0, 1, 2, \dots$ gilt und somit auch

$$\cos\theta_I = \frac{n\pi c}{\omega d}.$$

Da $\cos\theta_I \leq 1$ gilt gibt es eine diskrete Menge von n_{max} Winkeln θ_I an denen die zick-zackige ebene Welle sich entlang des Wellenleiters ausbreiten kann. Mit n_{max} als die größte positive ganze Zahl, sodass $n_{max} \leq \frac{\omega d}{\pi c}$ gilt. Jeder von ihnen wird Wellentyp des Wellenleiters genannt.

Das akustische Potential für den n ten Wellentyp kann also geschrieben werden als

$$\phi_n = 2A \cos \frac{n\pi x}{d} \exp(i(\omega t - k_n z)), \text{ für } n = 0, 1, 2, \dots,$$

mit

$$k_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{d^2}},$$

der Wellenzahl in z -Richtung.

Je nachdem welchen Wert n annimmt ist diese Lösung unterschiedlich zu interpretieren.

Für $n = 0$ repräsentiert diese Lösung eine ebene Welle, die sich in die z -Richtung mit der Geschwindigkeit c ausbreitet.

Für $0 < n < n_{max}$ hat die Welle den Charakter einer stehenden Welle in x -Richtung, während sie sich in die z -Richtung ausbreitet mit der Wellenzahl $k_n < \frac{\omega}{c}$.

Für $n > n_{max}$ kann die Lösung zwar nicht physikalisch in einem Term als Summe von zwei ebenen Wellen beschrieben werden, trotzdem bleibt aber das akustische Potential ϕ_n zulässig mit einem völlig imaginärem k_n . Die Lösung wird dann exponentiell kleiner für $z \rightarrow \infty$, es sind also evaneszente Wellentypen.