L'équation de Tsiolkovski

Contexte

L'un des "pères" de l'aéronautique était un professeur de mathématiques du nom de Constantin Tsiolkovski. Né en Russie pendant la seconde moitié du XIXe siècle, ce grand amateur de Jules Verne est l'un des premiers à théoriser le vol spatial. En 1903, il démontre par le calcul qu'il est possible d'envoyer des fusées dans l'espace, équipées de moteurs à réaction. Si ses recherches sont d'abord passées inaperçues, elles ont néanmoins posé les bases théoriques de toute notre industrie spatiale, en proposant l'utilisation d'ergols liquides et de fusées à étages. L'un des cratères de la "face cachée" de la Lune porte aujourd'hui son nom.

Accélération, vitesse et intégrale

L'équation de Tsiolkolvski a pour objectif de calculer la capacité d'incrément de vitesse Δv d'un satellite, c'est-à-dire la différence de vitesse que connaît celui-ci avant et après une propulsion (en valeur absolue). Pour simplifier les calculs et nous affranchir de la gravité, nous allons considérer un véhicule se situant déjà dans l'espace et souhaitant réaliser une poussée afin de modifier sa vitesse.

1. Relier accélération et vitesse en termes de dérivée.
2. Vitesse et accélération sont des fonctions continues, on utilisera donc une intégration pour réaliser l'opération inverse de la dérivation. Proposer une formule permettant de calculer Δv, variation de vitesse entre les moments t_1 et t_2, à l'aide d'une intégrale.

Conservation de la quantité de mouvement

Lors d'une impulsion, l'engin spatial va éjecter des gaz issus de la combustion des carburants (ergols) à vitesse constante $\vec{v}_e$ dans la direction opposée à la trajectoire suivie par l'engin. On rappelle que la quantité de mouvement d'un système est égale au produit de la masse du système par son vecteur vitesse. Ainsi, pour un vaisseau de masse initiale m et de vecteur vitesse $\vec{v}$, la quantité de mouvement initiale est égale à $\vec{p} = m \times \vec{v}$.

1. Exprimer, dans un premier temps, la quantité de mouvement de l'engin spatial au cours de la poussée. On notera dm la variation de la masse de carburant après un instant dt, avec d$m < 0$, et d$\vec{v}$ la vitesse

gagnée par la fusée pendant cet instant. Exprimer, dans un second temps, la quantité de mouvement relative à la masse d'ergols éjectés.

2. La quantité de mouvement de l'ensemble du système est conservée, c'est-à-dire qu'elle est identique à la quantité de mouvement initiale du vaisseau. Autrement dit :

$$m\,(t)\,\vec{v}\,(t) = m\,(t + \mathrm{d}t)\,\vec{v}\,(t + \mathrm{d}t)$$

Écrire puis réduire l'équation afin d'isoler $\mathrm{d}\vec{v}$.

3. A l'aide de l'intégration, proposer une expression de $\Delta\vec{v}$, variation de vitesse entre les instants t_1 et t_2, telle que :

$$\Delta\vec{v} = \int_{v_1}^{v_2} \mathrm{d}\vec{v} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$$

4. Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v}_e$ étant de sens contraires, on obtient en termes de normes :

$$\Delta v = v_e\ \ln(\frac{m_1}{m_2})$$

On s'intéresse maintenant à la masse m_{man} nécessaire à la réalisation de la manœuvre. Autrement dit, on pose $m_{man} = m_1 - m_2$. Proposez une expression de m_{man}.

Applications

1. On considère un engin spatial doté d'ergols dont la vitesse d'éjection est de 4,4 km/s. Quelle poussée peut espérer gagner cet engin pesant initialement 150 tonnes en brûlant 100 tonnes de ses ergols ?
2. On considère l'engin précédent. Tracer la courbe représentative de la fonction exprimant le Δv en fonction de la masse m_2 restante dans l'engin et proposer une interprétation de cette courbe. Comparer avec un engin dont la vitesse d'éjection des ergols est de 6 km/s.
3. A l'inverse, un engin spatial de 30 tonnes (à vide) se déplaçant à une vitesse de 8 km/s nécessite une poussée lui permettant d'atteindre 14 km/s. On utilise des ergols dont la vitesse d'éjection est de 4,4 km/s. Quelle masse est nécessaire à cette propulsion ?
4. Comme précédemment, on propose de tracer la courbe représentative de m_{man} en fonction de la poussée Δv. Proposer une interprétation de cette courbe.