# Leñitas Geométricas*

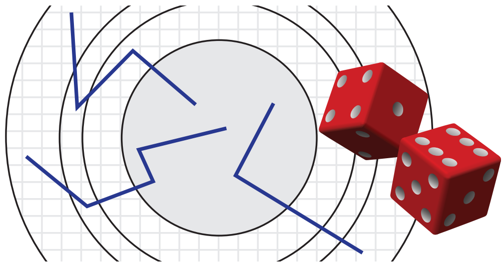
para el Fogón Matemático de los Festivales

De OMA para Profesores y Maestros en actividad

5ª época ✈ Nº 7
1 de junio de 2023

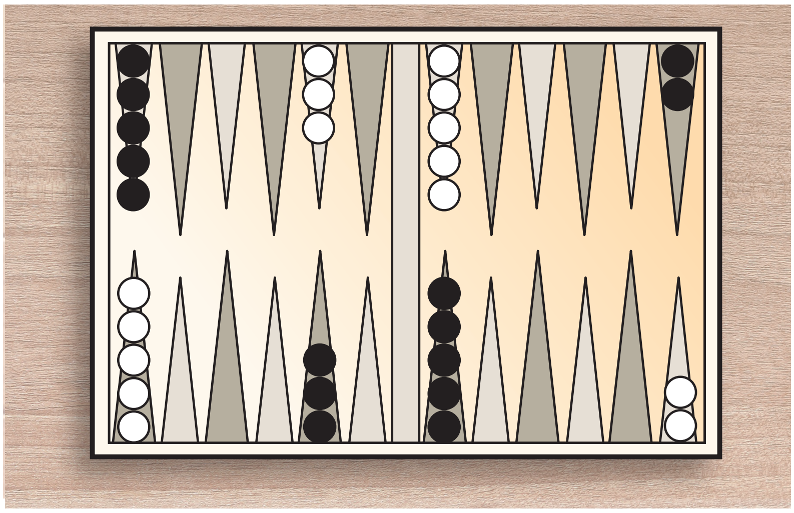

"[...] más valioso que acumular información es interiorizarse de métodos para saber qué propósitos tienen, es decir, de dónde parten y adónde llevan. Los métodos tienen una orientación y una dinámica de las cuales los resultados y teoremas aislados carecen". *Dr. Alberto Calderón*

## El Método Montecarlo



### Azar y estrategia. El *backgammon*

El *backgammon* es un juego de dos jugadores de movimiento contrario en el que cada jugador tiene quince piezas conocidas tradicionalmente como "hombres" (equivalente a *tablemen*), aunque en las últimas décadas, en los Estados Unidos, se las llame cada vez más "damas", de forma análoga al otro juego de mesa de damas. Las piezas de la mesa de *backgammon* se mueven a lo largo de veinticuatro "puntos" según la tirada de dos dados. El objetivo de cada jugador consiste en mover las quince piezas por el tablero de manera de ser el primero en sacarlas, es decir, sacarlas del tablero. Lograr esto mientras el oponente todavía está muy por detrás resulta en una ganancia triple conocida como *backgammon*, que le da su nombre al juego.



Tablero del *backgammon* con las piezas en su posición inicial

**El *backgammon* implica una combinación de estrategia y suerte** (de tirar los dados). Si bien los dados pueden determinar el resultado de un solo juego, el mejor jugador acumulará el mejor registro en una serie de muchos juegos. Con cada tirada de dados, los jugadores deben elegir entre numerosas opciones para mover sus piezas y anticipar posibles contraataques del oponente. El uso opcional de un cubo de duplicación permite que los jugadores aumenten las apuestas durante el juego.

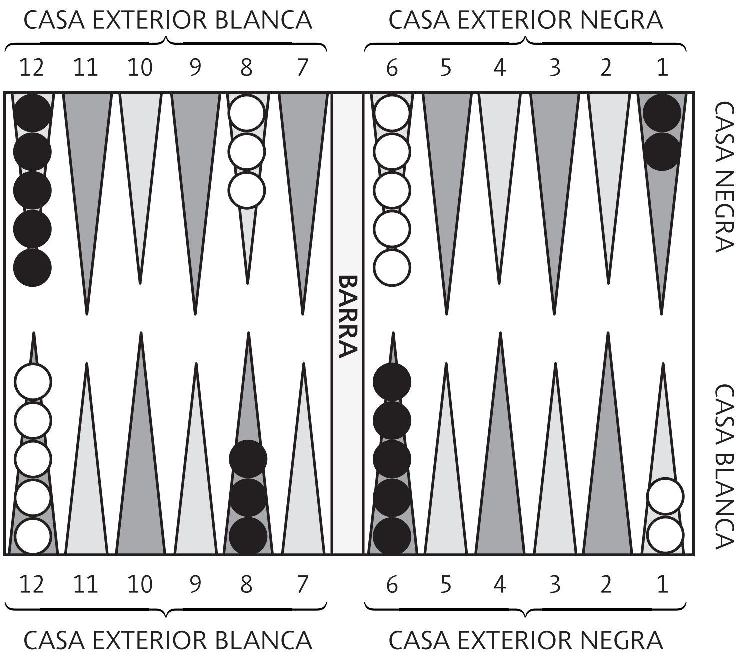
* Recordamos a los lectores que los temas editados en *Leñitas Geométricas* son material preparado y en gran parte desarrollado y sugerido por el doctor Miguel de Guzmán.

## *Backgammon* simplificado

Se consiguen en el mercado muchos y muy buenos libros que tratan sobre las reglas y la estrategia del *backgammon* (sirva como muestra el de Oswald Jacoby y John R. Crawford, *The Back–gammon Book*, Penguin Books, 1976), no intentaremos aquí emularlos. Supondremos que el lector ya está familiarizado con las reglas básicas; en caso contrario, lo mejor es que abandone aquí la lectura y acuda a un amigo o un familiar que le enseñe los fundamentos de este juego. Las reglas del *backgammon* son bastante sencillas, pero la variedad de estrategias y tácticas que generan hacen de esta deliciosa combinación de azar y habilidad un juego fascinante.

En esta sección nos dedicaremos principalmente al estudio de aquellos aspectos fundamentales del juego que son susceptibles de ser analizados por medio de las técnicas del cálculo de probabilidades y esperanzas desarrolladas anteriormente (véase en particular *Leñitas Geométricas* 2, 3 y 4, 5ª temporada). Concretamente, estudiaremos las probabilidades de capturar peones aislados (*blots*) y de reintegrar un peón desde la barra, y la probabilidad de sacar todos los peones del tablero para dar por terminada la partida, así como los aspectos matemáticos del dado múltiplo. Además, pretendemos aplicar esta aritmética para mejorar ciertos aspectos globales de nuestro juego.

El tablero de juego, así como la denominación de las distintas zonas en las que se divide y la posición de partida de las piezas pueden verse en la figura siguiente.




En todo lo que sigue supondremos que el jugador que juega con blancas ocupa la parte inferior del diagrama y que sus peones se mueven en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Antes de considerar algunas situaciones específicas que pueden presentarse durante una partida, haremos un breve comentario sobre cada una de las fases en las que se divide una partida típica de *backgammon* (apertura, medio juego y final), con la intención de convencernos de que el *backgammon* es mucho más que mover los peones tan rápidamente como se pueda alrededor del tablero. El estudio del dado múltiplo lo dejaremos para una sección posterior.

Los movimientos de apertura de cada jugador han recibido un tratamiento exhaustivo en la literatura especializada, basado esencialmente en la experiencia y el sentido común pues, de hecho, es virtualmente imposible analizar matemáticamente las distintas elecciones posibles para un determinado lanzamiento de los dados. De este modo, lo más que se puede hacer es adoptar alguna de las aperturas o respuestas estándar (aunque incluso estas no estén libres de críticas por parte de algunos jugadores). La tabla siguiente muestra algunas aperturas preferidas; su elección depende del humor con el que nos enfrentemos a la partida.

**Movimientos de apertura razonable**

DOBLES – Se supone que el contrario mueve primero y que no hay bloqueos.

| Tirada | Movimiento recomendado |
|---|---|
| 6-6 | Hacer los dos puntos barra |
| 5-5 | Mover dos peones desde el punto 12 del contrario a tu punto 3 |
| 4-4 | Hacer el punto 9 propio y el 5 del oponente |
| 3-3 | Hacer el punto barra propio |
| 2-2 | Hacer el punto 5 del contrario |
| 1-1 | Hacer el punto 5 y barra propios |

SIN DOBLES – Se supone que no hay bloqueos

| Tirada | Movimiento recomendado |
|---|---|
| 6-5 o 6-4 | Mover un peón situado en el punto 1 contrario la cuenta entera |
| 6-3 o 6-2 | Mover un peón situado en el punto 7 contrario al punto barra del oponente y avanzar cualquier peón del punto 12 |
| 6-1 | Hacer el punto barra propio |
| 5-4 o 5-2 | Avanzar dos de los peones del punto 12 contrario |
| 5-3 | Hacer el punto 3 propio |
| 5-1 | Avanzar uno de los peones situados en el punto 1 contrario al punto barra del adversario |
| 4-3 | Avansar dos de los peones del punto 12 contrario |
| 4-2 | Hacer el punto 4 propio |
| 4-1 | Situar peones en los puntos 9 y 5 propios |
| 3-2 | Avanzar dos de los peones del punto 12 contrario |
| 3-1 | Hacer el punto 5 propio |
| 2-1 | Situar peones en los puntos 11 y 5 propios |

Cuando la partida avanza y nos adentramos en el medio juego, cada uno de los jugadores se atiene, en mayor o menor grado, a alguna de las siguientes estrategias:

(a) Mover los peones rápidamente, y sin correr riesgos, hacia su casa interior (juego de carrera).

(b) Bloquear con pares de peones los movimientos de las fichas enemigas (juego de bloqueo).

(c) Mantener dos o, preferiblemente, más peones en campo enemigo, con la esperanza de capturar una pieza enemiga en el momento apropiado (*back-game* o juego de retaguardia).

La estrategia (a) es la más sencilla de llevar a cabo y, jugada al límite, convierte la partida en una mera sucesión de lanzamientos de dados. Seguir con éxito la estrategia (b) requiere previsión, asumir algún riesgo, una correcta evaluación de la posición del contrario, un uso juicioso de las posibilidades que ofrece la partida y unos dados cómplices. El juego de retaguardia, o *back-game*, suele utilizarse como último recurso, cuando la posición del contrario es claramente ventajosa [conseguida frecuentemente mediante alguna de las estrategias (a) o (b)].

Un buen jugador debe saber cuándo y cómo cambiar de estrategia, lo que implica un claro discernimiento de las posibilidades que, en una determinada situación, existen de capturar alguna ficha aislada, reintegrar un peón al tablero desde la barra o alcanzar un punto establecido con alguno de los peones. Por último, la mayoría de las partidas que no se terminan con el dado múltiplo requieren procedimientos para sacar todos los peones del tablero de manera eficaz, y para esto hace falta cierta capacidad para pensar y contar de modo rápido e inteligente.

En lo que sigue probaremos matemáticamente algunos de los típicos movimientos que realizan los jugadores expertos de *backgammon* (la mayoría de los cuales suplen su falta de pericia matemática con un buen sentido del juego).

Es importante señalar que las situaciones que estudiaremos son, posiblemente, demasiado simples como para reflejar situaciones reales. Sin embargo, nos gustaría hacer hincapié en que los argumentos que emplearemos para analizar estas situaciones sencillas pueden ser extrapolados a otras mucho más complejas. Como ocurre con el ajedrez, el *backgammon* se resiste a un estudio matemático exhaustivo; esto se debe principalmente al enorme número de elecciones y de sus ramificaciones que convierten estos juegos en inabordables, tanto para el hombre como para la más potente computadora.

➔ **Avanzando y capturando.** Los números 2 y 3 de *Leñitas Geométrica* de este año (5ª temporada) sobre probabilidades con dados nos serán de utilidad ahora, aunque deben ser completados para tener en cuenta la especial naturaleza de las tiradas dobles en el *backgammon*. Así, si estamos interesados en avanzar un peón ocho puntos, recordando que hay cinco posibles tiradas de los dados con total ocho y que un doble dos también nos permite mover nuestro peón ocho puntos, concluimos que la probabilidad de mover el peón al lugar deseado es 6/36 o 1/6 (suponiendo que los puntos intermedios no estén bloqueados). Análogamente, si queremos colocar un peón seis posiciones más allá, contabilizamos:

5 posibilidades para conseguir un total de seis en la tirada,

1 única posibilidad para obtener un doble 2,

11 posibles tiradas con un seis en al menos uno de los dos dados.

Puesto que estos sucesos son disjuntos, tenemos:

$$p(\text{avanzar un peón seis puntos}) = \frac{17}{36}.$$

El procedimiento aplicado en los ejemplos anteriores es de vital importancia cuando tenemos que decidir entre dejar una ficha aislada –y en tal caso, dónde–, o preparar una captura para el siguiente turno.

La tabla siguiente muestra las probabilidades de capturar un peón aislado con una ficha situada a diversas distancias del peón objetivo (se supone, nuevamente, que los puntos intermedios no están bloqueados). Para construir la tabla se procede como en los casos anteriores para distancias de ocho y seis puntos ($p = \frac{1}{6}$ y $p' = \frac{17}{36}$, respectivamente).

**Probabilidades para capturar un único peón aislado con una única ficha**

| Distancia en puntos | Nº de maneras de capturarlo | Probabilidad de capturado |
|---|---|---|
| 1 | 11 | 11/36 |
| 2 | 12 | 12/36 |
| 3 | 14 | 14/36 |
| 4 | 15 | 15/36 |
| 5 | 15 | 15/36 |
| 6 | 17 | 17/36 |
| 7 | 6 | 6/36 |
| 8 | 6 | 6/36 |
| 9 | 5 | 5/36 |
| 10 | 3 | 3/36 |
| 11 | 2 | 2/36 |
| 12 | 3 | 3/36 |
| 15, 16, 18, 20 o 24 | 1 para cada distancia | 1/36 para cada distancia |

Entre los jugadores avezados de *backgammon* existe una regla que raramente se pasa por alto y que la tabla anterior justifica plenamente: "**Si tienes que dejar un peón aislado y no quieres que sea capturado, colócalo al menos a 7 puntos de distancia de cualquier peón amenazante y, si es posible, cuanto más lejos mejor (con una única excepción, 11 *versus* 12). Si no tienes más remedio que dejar el peón aislado a una distancia inferior a 6 puntos, muévelo tan cerca como sea posible del posible cazador**".

Esta regla, como ocurre con la mayoría de ellas, tiene algunas excepciones. Por ejemplo, cuando tenemos que dejar un peón aislado, es conveniente colocarlo, si no es capturado por ningún peón contrario, allí donde nos ofrezca las mejores posibilidades en el turno siguiente.

También se puede usar la tabla anterior para calcular las probabilidades que tienen uno o dos peones aislados de ser capturados por uno o dos peones adversarios, etc. Por ejemplo, si el adversario deja dos peones aislados a distancias de dos y siete puntos de un peón nuestro, hay 12 posibilidades entre 36 de capturar el peón más cercano, y 6 entre 36 para el peón más alejado. Puesto que 2 de estas 18 posibilidades se han contado dos veces (2-5 y 5-2), disponemos de 16 posibles vías para capturar al menos uno de estos peones aislados.

Obsérvese que no podemos sumar las probabilidades originales $\frac{12}{36}$ y $\frac{6}{36}$, ya que estas están asociadas a sucesos no disjuntos; por lo tanto, lo primero que tenemos que hacer es eliminar los solapamientos para, solamente después, sumar. Procediendo de esta manera, obtenemos una probabilidad de $\frac{16}{36}$ para capturar al menos uno de los peones objetivo. Veamos el Ejercicio 3.1 para más detalles, pero recordemos que en la práctica es mejor efectuar los cálculos precisos durante el desarrollo del juego y no confiar excesivamente en la memoria.

- **Entrada y salida de peones.** Una parte importante de la decisión acerca de dejar, o no, peones descubiertos y cómo dejarlos, gira en torno a la estimación de las dificultades de reintegrarlos desde la barra. Por ejemplo, la captura de un peón propio en los movimientos de apertura no representa, en general, un problema demasiado grave pues, aunque el intento de reintegrarlo paralizará durante algún tiempo al resto de nuestros peones, la posición del adversario nos permitirá una entrada rápida desde la barra. En cambio, cuantos más peones tenga el adversario en su casa interior, más deberemos meditar la idea de dejar aislado un peón.

**Entrada desde la barra con un lanzamiento dado**

| Nº de puntos del adversario en su casa interior | Probabilidad de reingreso en la siguiente tirada |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 35/36 |
| 2 | 32/36 = 8/9 |
| 3 | 27/36 = 3/4 |
| 4 | 20/36 = 5/9 |
| 5 | 11/36 |
| 6 | 0 |

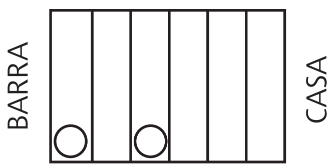
La comprobación de los resultados expuestos en la tabla anterior no debería ya representar ningún problema. Por ejemplo, si cuatro de los puntos de la casa interior del adversario se encuentran ocupados, cada dado proporciona una probabilidad de $\frac{4}{6}$ de fracaso en la reentrada. Puesto que los lanzamientos sucesivos de dos dados representan experimentos independientes, tenemos (véase la regla 5 de la tabla "Reglas probabilísticas, explicaciones y ejemplos" en *Leñitas Geométricas* 3, 5ª temporada, p. 7),

$$p(\text{no reingreso}) = \frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6} = \frac{16}{36},\ \text{y consecuentemente, } p(\text{reingreso}) = 1 - \frac{16}{36} = \frac{20}{16}.$$

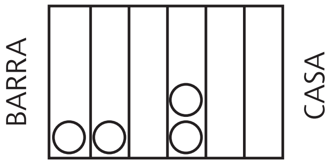
De nuevo, podemos encontrar situaciones tales como intentar reingresar dos peones desde la barra o capturar alguno en una casa interior enemiga parcialmente llena, en las que sea factible extrapolar los razonamientos anteriores. Dejaremos estas cuestiones para los ejercicios, para ocuparnos ahora de otro de los temas fundamentales en el *backgammon*: la salida de los peones del tablero.

La salida de los peones se convierte casi siempre en una simple carrera (siempre que el oponente no tenga fichas en la barra, etc.) por cruzar la meta que supone el punto uno de la casa interior. En la mayoría de los casos, llevar a cabo esta tarea es un asunto relativamente sencillo. Los peones deben ser conducidos primero a la casa interior tan rápidamente como sea posible, un procedimiento que con frecuencia suele dejar el punto seis de la casa interior repleto de fichas.

Una vez que todos los peones se encuentran en la casa interior, se sacan tantos peones como se pueda en cada tirada. La emoción comienza cuando quedan solamente algunos peones que se acercan al punto uno, pero sin traspasarlo. Ilustraremos esto último con dos ejemplos, en los que supondremos que jugamos con blancas y queremos maximizar las posibilidades de victoria en la siguiente tirada.



***Backgammon*, ejemplo 1.** El diagrama anterior muestra nuestra casa interior. Supongamos que es nuestro turno y que el resultado de la tirada ha sido 3 y 2. ¿Deberíamos mover los peones a los puntos 4 y 1, o a los puntos 3 y 2? Si colocamos los peones en los puntos 4 y 1, solamente 7 posibles lanzamientos de los dados nos impedirán sacar todas las fichas en la siguiente jugada (3-1, 1-3, 2-3, 2-1, 1-2, 1-1). En cambio, si los situamos en los puntos 3 y 2, habrá 11 posibles tiradas que nos perjudicarán (cualquiera que incluya un "1"). Así pues, lo aconsejable es mover los peones a los puntos 4 y 1.




***Backgammon*, ejemplo 2.** ¿Qué hacer si nuestra casa interior es la indicada en el diagrama de arriba y hemos obtenido una tirada 2-1? La mejor jugada es mover los peones situados en los puntos 6 y 5 al punto 4. De esta manera, en el siguiente turno, con una tirada de 4-4, 5-5 o 6-6, podremos sacar todas las fichas. Con cualquier otra jugada, necesitaríamos al menos un doble 5 para terminar. Obsérvese que este ejemplo representa una excepción al principio de sacar siempre la mayor cantidad de fichas posibles en cada turno.

En los ejemplos anteriores no había peones negros situados en la casa interior blanca, lo que simplifica significativamente los cálculos. Más arduo resulta el análisis de posiciones similares en *back-game*, o cuando algún peón del contrario se encuentra en la barra, pero en cualquier caso no hay ninguna alternativa a la enumeración meticulosa de los casos posibles (véase el Ejercicios 3.4 de los problemas siguientes).

3.1 a) Supongamos que has dejado dos peones aislados, que se encuentran a una distancia de 4 y 6 puntos respectivamente de un peón adversario (se supone además que no hay otros peones en el tablero). ¿Cuál es la probabilidad que tiene tu rival de capturar al menos uno de tus peones en la siguiente tirada?

b) En las condiciones anteriores, supóngase que un nuevo peón aislado se encuentra situado a 3 puntos del peón contrario. En este caso, ¿cuál es la probabilidad de que el contrario capture al menos un peón?

3.2 a) Supongamos que tienes dos peones en la barra y que dos peones contrarios están situados en su casa interior. Muestra que la probabilidad de reingresar ambos peones es de 4/9, mientras que la probabilidad de reintegrar al tablero al menos uno de tus peones es de 8/9. Utilícense estas probabilidades para calcular la probabilidad de reingreso de exactamente un peón.

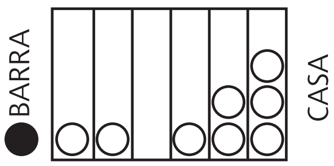
b) Construye una tabla análoga a la Tabla 6 pero suponiendo que tienes dos peones en la barra. Etiqueta las columnas con:

Número de bloques del oponente en su casa interior

*p*(reingresar ambos peones en la siguiente tirada)

*p*(reingresar al menos uno de los peones)

3.3 Tienes un peón en la barra, el contrario controla sus puntos 2, 4 y 6 y tiene un peón aislado en su punto 5. Supongamos que te toca jugar, ¿cuál es la probabilidad que tienes de capturar el peón aislado en la siguiente tirada?, ¿cuál es la probabilidad que tienes de reintegrar el peón de la barra sin capturar a su vez el peón contrario?




3.4 a) El diagrama anterior muestra tu casa interior junto con todos los peones que te quedan por sacar. El adversario tiene un peón en la barra y al menos otros 8 peones en su casa interior. Si es tu turno y has obtenido una tirada 6-3, ¿cuál será tu mejor jugada?

b) En una posición idéntica a la anterior, excepto que el único peón del contrario es el que se encuentra en la barra, ¿cuál será tu mejor jugada?

3.5 Imagina un juego de *backgammon* en el que las caras del dado múltiplo estén numeradas según la progresión de las potencias de 3 (3, 9, 27, 81, 243, 729). Siguiendo los razonamientos para el dado múltiplo normal, calcula la probabilidad de ganar por encima de la cual se debería triplicar.

**El dado múltiplo.** La incorporación del dado múltiplo (junto con una pequeña apuesta) a una partida de *backgammon* convierte lo que de otro modo sería simplemente un pasatiempo agradable en una emocionante contienda llena de acción, emoción y rapidez, y que, por si fuera poco, resulta muy apropiada para el análisis matemático de sus estrategias y apuestas. No es una coincidencia que en el estudio del dado múltiplo utilicemos las técnicas matemáticas más elegantes y prácticas entre las que veremos a lo largo de esta sección.

Primero, resumiremos el mecanismo del dado múltiplo. Al comienzo de la partida, y antes de lanzar los dados, cada uno de los jugadores tiene la posibilidad de doblar la apuesta presentando el dado múltiplo a su adversario. Este puede rehusar y pagar la apuesta base, o aceptar, pasando a controlar el dado para, posteriormente, redoblar si lo estima oportuno. Los sucesivos redobles se van alternando, pero el jugador que "tiene" el dado múltiplo es el único que puede doblar.

Es importante no olvidar que el control del dado múltiplo proporciona una doble ventaja. Por una parte, se tiene la opción de redoblar, si se desea; y por otra, se impide al oponente un redoble que forzaría al abandono en situaciones de clara desventaja. Estas ventajas no deberían justificar la aceptación de cualquier redoble, convirtiendo el control del dado múltiplo en un fin en sí mismo, pero sí deberían persuadirnos de no doblar, perdiendo el control del dado cuando solo tengamos una pequeña ventaja.

Pasemos ahora a considerar en qué casos se debe doblar o aceptar un redoble. Supongamos que la apuesta acumulada es de $s$ unidades (como veremos más adelante, el valor de $s$ es irrelevante). Supongamos también que, en el momento de tener que tomar la decisión (bien de aceptación, bien de ofrecer un redoble), tenemos:

$$p = \text{probabilidad estimada de ganar la partida.}$$

$$1 - p = \text{probabilidad estimada de perder la partida.}$$

La exacta determinación de $p$ está más allá de lo posible, excepto quizás en los finales y en posiciones muy sencillas. De todas formas, hay algunas reglas de gran utilidad para estimar $p$. Supongamos, de todos modos, que todo jugador experimentado es capaz de valorar con la suficiente precisión la probabilidad que tiene de ganar una determinada posición.

Supongamos que, en las condiciones anteriores, el adversario dobla la apuesta; entonces,

$$X(\text{rehusar}) = -s (\text{se pierden } s \text{ unidades})$$

$$X(\text{aceptar}) = p(2s) + (1 - p)(-2s) = s(4p - 2) \text{ (la apuesta se dobla).}$$

Se debería aceptar el dado múltiplo siempre que $X(\text{aceptar}) > X(\text{rehusar})$, es decir, cuando $s(4p - 2) > -s$. Dividiendo cada término de la desigualdad por el factor positivo común a ambos, obtenemos que, cuando $4p - 2 > -1$, es mejor aceptar. Así pues, aceptamos un redoble cuando $p > \frac{1}{4}$. Razonando análogamente podemos concluir que se debe rehusar cuando $p < \frac{1}{4}$. Si $p = \frac{1}{4}$ sigamos nuestro instinto.

En lo anterior no hemos contabilizado la ventaja que supone el control del dado; si no hubiésemos despreciado esta contribución, la aceptación del redoble se justificaría matemáticamente incluso cuando $p$ fuese algo menor que $\frac{1}{4}$. Por el contrario, si existe la posibilidad de ser "*gammon*" o "*backgammon*", entonces $p$ debería ser algo mayor que $\frac{1}{4}$ para aceptar.

Analicemos ahora en qué condiciones se debe doblar la apuesta. ¿Bajo qué circunstancias desearíamos que nuestro oponente aceptara el envite? Razonando como antes,

$$X(\text{oponente acepta}) = p(2s) + (1 - p)(-2s) = s(4p - 2);$$

$$X(\text{oponente rehúsa}) = s.$$

Igualando estas esperanzas y despejando $p$, obtenemos $p$ igual a $\frac{3}{4}$ como la probabilidad para la que debería sernos indiferente que el adversario acepte o no el envite; si $p < \frac{3}{4}$ deberíamos esperar que nuestro oponente rehúse; y si $p > \frac{3}{4}$ deberíamos desear que aceptase el reto. Consideremos la esperanza de no doblar la apuesta,

$$X(\text{no doblar})\ p(s) + (1 - p)(-s) = s(2p - 1).$$

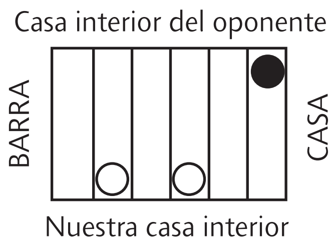
Puesto que $X$(no doblar) = $X$(oponente acepta) precisamente cuando $p = \frac{1}{2}$ (compruebe esta afirmación), llegamos a las siguientes conclusiones:

**siempre que $p > \frac{1}{2}$, doblar parece ser una buena idea y si, además, $p > \frac{3}{4}$, desearemos que el invite fuese aceptado.**

Una probabilidad $p < \frac{1}{2}$ no debería incitar a proponer un redoble [$X$(no doblar) > $X$(oponente rehúsa)], a menos que el contrario sea lo suficientemente tímido como para rechazar el dado múltiplo en condiciones tan favorables [$X$(oponente rehúsa) > $X$(no doblar)]. En todo este exhaustivo análisis no hemos considerado que el hecho de doblar, en caso de aceptación, puede llevarnos a perder el control del dado múltiplo, una circunstancia difícilmente cuantificable en términos matemáticos.

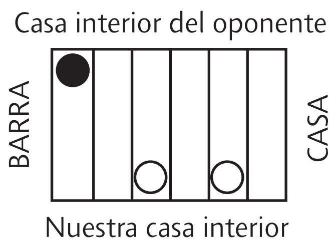
Intuitivamente se sugiere no doblar (excepto en los finales de partida), a menos que $p$ sea significativamente mayor que $\frac{1}{2}$ (digamos $p \geq \frac{2}{3}$). Si ningún jugador ha doblado, el que doblemos no le da al oponente más control del que ya tiene, por lo que los redobles iniciales se pueden realizar con una probabilidad $p$ algo más próxima a $\frac{1}{2}$ que la estimada anteriormente.

Para terminar, advertimos que si un jugador tiene una posibilidad de ser "*gammon*" debería evitar doblar, incluso aunque $p$ fuese muy superior a $\frac{1}{2}$ (en este caso, paradójicamente, cuanto mayor sea el valor de $p$, tanto menos deberíamos inclinarnos a proponer un redoble). Concluimos esta sección y nuestro estudio del *backgammon* con algunos ejemplos más que ilustran las ideas que acabamos de desarrollar.




***Backgammon*, ejemplo 3.** El diagrama anterior muestra nuestra propia casa interior (blanca) y la del adversario, siendo nuestro turno. ¿Es conveniente doblar?

Entre todas las posibles tiradas, 17 son perdedoras (3-2, 2-3, 4-2, 2-4, 4-3, 3-4 y las 11 con un "1" en algún dado). Por lo tanto, la probabilidad que tenemos de ganar es $p = \frac{19}{36}$. Tal como está la posición, no es conveniente preocuparse por la pérdida del control del dado (si no ganamos en nuestro turno perderemos de todos modos). Puesto que $p > \frac{1}{2}$ deberíamos doblar y nuestro adversario, aceptar, pues $1 - p > \frac{1}{4}$ (recordemos que $1 - p$ es la probabilidad de ganar del oponente).



***Backgammon*, ejemplo 4.** De nuevo, en la posición mostrada en el diagrama anterior, es nuestro turno (jugamos con blancas) y tenemos el control del dado múltiplo. ¿Deberíamos doblar en este caso? Tres posibles sucesos disjuntos deben ser tomados en consideración:

$A$ = ganamos con el primer lanzamiento de dados.

$B$ = nuestro adversario gana en su primera tirada (este suceso exige que previamente se verifique no $A$).

$C$ = ganamos en nuestra segunda tirada (este suceso requiere que sucedan con anterioridad no $A$ y no $B$). (Hemos ignorado el muy improbable suceso de que tras una tirada nuestra 2-1, el contrario no sea capaz de sacar su peón y que, seguidamente, volvamos a lanzar 2-1; en este caso, doblaríamos tras ver como nuestro oponente fracasa y nos encontraríamos en la situación $C$).

$p(A)=\frac{19}{36}$, como en el Ejemplo 3.

$p(B)=\frac{17}{36}\cdot\frac{3}{4}$ (solo 9 tiradas impedirán al adversario sacar su peón).

$p(C)=\frac{17}{36}\cdot\frac{1}{4}$.

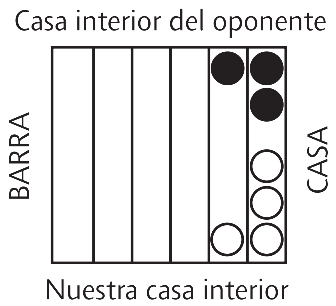
Debido a que el importe de la apuesta acumulada es irrelevante en nuestro análisis, supondremos que esta apuesta asciende a 1 unidad. Entonces,

$$X(\text{no doblar}) = \frac{19}{36}(1)+\frac{17}{36}\cdot\frac{3}{4}(-1)+\frac{17}{36}\cdot\frac{1}{4}(1)=\frac{21}{72}.$$

$$X(\text{doblar y aceptar un redoble del adversario}) = \frac{19}{32}(2)+\frac{17}{36}\cdot\frac{3}{4}(-4)+\frac{17}{36}\cdot\frac{1}{4}(4)=\frac{8}{72}.$$

[Observemos que los pagos de 4 unidades resultan del hecho de que el adversario redoble].

$$X(\text{doblar y rehusar el redoble del adversario}) = \frac{16}{36}(2)+\frac{17}{36}(-2)=\frac{8}{72}.$$




Comparando estas tres esperanzas, vemos que doblar la apuesta es la mejor opción debido a la posibilidad de redoble del contrario, por lo que deberíamos aplazar esta decisión para más adelante y continuar, por el momento, con el control del dado múltiplo.

Notemos la aparente paradoja que resulta de tener que doblar en el Ejemplo 3, con el peón adversario situado en su punto uno, mientras que en el Ejemplo 4 tenemos que abstenernos de doblar, a pesar de que la ficha negra se encuentre situada bastante más lejos de su casa (concretamente en su punto seis).

***Backgammon*, ejemplo 5.** Como en los anteriores ejemplos, supongamos que, jugando con blancas la posición anterior, tenemos el control sobre el dado múltiplo y es nuestro turno. ¿Qué deberíamos hacer? La probabilidad que tenemos de ganar es de, al menos, 31/36, puesto que a lo sumo en dos turnos habremos sacado todas nuestras fichas y el contrario solo dispone de cinco posibles tiradas (todos los dobles excepto el 1-1) para sacar sus fichas en su turno y, así, impedirnos ganar en la siguiente tirada (en realidad, debido a que también nosotros podemos sacar dobles en la primera tirada, nuestras expectativas son incluso mejores que las estimadas en un principio). Un cálculo en profundidad mostraría que:

$$p(\text{ganar la partida}) = 1 - \frac{31}{35} \cdot \frac{5}{36}.$$

Visto lo anterior, deberíamos doblar, en cuyo caso el contrario debería rehusar y abandonar, pues su probabilidad de vencer es menor que $\frac{1}{4}$. Observemos que si no se dobla, se le concede al adversario una posibilidad de victoria que, de otro modo, no tendría.

Como desgraciadamente ocurre a veces, los a menudo cruciales factores psicológicos son ignorados o minusvalorados a la hora de analizar juegos complejos y extremadamente dinámicos en clave matemática. En el caso del dado múltiplo, deberíamos poner a prueba la actitud del oponente, doblando en posiciones diversas, incluyendo unas cuantas matemáticamente desaconsejables. Así, si el adversario tiende a evaluar de manera muy pesimista sus posibilidades de victoria, doblar en forma reiterada puede ser una buena política de juego. Argumentos similares sobre la aceptación de los redobles, racionalmente empleados, pueden añadir una dimensión psicológica a nuestro juego, la cual, en ciertas situaciones, llegaría a ser incluso más efectiva y provechosa que el mero hecho de seguir invariablemente la optimización matemática.

## Estadística complementaria al método Montecarlo

### Origen y evolución de la estadística

La palabra "estadística" evoca, para muchos, extensos cuadros donde se inscriben hechos económicos y demográficos desprovistos de sustancias vivas, reducidos a la austera desnudez de las cifras. Los que están al día acerca de la técnica moderna imaginan máquinas complicadas, a las que se confían montones de fichas curiosamente perforadas, que aquellas restituyen luego de un misterioso desglose para clasificarlas. La actitud de la mayoría, ante las indicaciones de los estadísticos, es escéptica cuando no irónica.

La estadística no es solo un instrumento en manos de jefes de Estado, ministros, hombres de negocios, banqueros o aseguradores; interviene en los dominios más diversos y, curiosa paradoja para una disciplina de apariencia abstracta, se interesa especialmente por todo lo que supone materia viva. No se apoya siempre en hechos abundantes, pero sabe, mediante un análisis sutil, sacar partido de una pequeña cantidad de datos elegidos con acierto.

Cuando el común de los mortales decide no tomar el tren en la víspera de un feriado, o cuando aplica a su propia persona el lema "vale más prevenir que curar", hace estadística sin saberlo. En nuestros días, todo espíritu culto debe conocer los métodos y los campos de aplicación de la estadística.

La idea primera y, además, fundamental de la estadística es el recuento o inventario. Se encuentran ya en épocas más remotas ejemplos de recuentos o censos de personas y bienes. Hace más de 4 000 años, los chinos utilizaban tablas agrícolas. La Biblia cita varias operaciones de recuento; por ejemplo, en el libro IV de Moisés, el recuento de israelitas en edad de llevar las armas; el censo general ordenado por Cesar Augusto en año del nacimiento de Cristo, entre otros.

Los egipcios y los romanos conocieron encuestas semejantes en diversas oportunidades. En la época moderna, y tomando las más interesantes, vemos que los datos se hallan en los registros civiles, conservados hasta la Revolución francesa por la Iglesia y luego por el poder civil, extendiéndose al resto del mundo. En el siglo XVIII, el registro de los hechos mantiene un carácter pasivo debido a la falta de interpretación.

El estudio de los juegos de azar, extendido hasta formar una rama particular de la matemática, el *cálculo de probabilidades*, es lo que viene a dar a la ciencia estadística su justificación teórica y sus métodos de investigación.

Hay dos obras de divulgación que tratan los problemas de la probabilidad: *Las probabilidades y la vida*, de Émile Borel, y *La explotación del azar*, de Marcel Boll; y cabe recordar al respecto los nombres de Blaise Pascal, Pierre de Fermat, Jacques Bernoulli, Pierre-Simon Laplace y Carl Friedrich Gauss. El progreso, en materia estadística, se ha logrado gracias a dos impulsos complementarios. Los matemáticos han aportado elementos cada vez más precisos para los estadísticos, quienes, sin limitar su interés a temas demográficos y económicos, llevaron el campo de sus estudios a los dominios donde se supone que interviene el azar, planteando nuevos problemas a los matemáticos y suscitando soluciones nuevas.

En nuestro tiempo, frente a la cantidad, la importancia y la complejidad de los problemas que plantea la estadística, los matemáticos probabilistas se han dividido en dos escuelas cuyas bases de trabajo son idénticas, pero que persiguen diferentes fines: unos perfeccionan el cálculo de probabilidades recorriendo el camino señalado por sus fundadores y los otros han creado y desarrollado la *estadística matemática*. Entre estos últimos cabe mencionar Lambert Adolphe Jacques Quételet (22 de febrero de 1796-17 de febrero de 1874, Gante, entonces Primera República Francesa, hoy Bélgica), quien fue un astrónomo, matemático, demógrafo, estadístico y sociólogo del siglo XIX. En 1823, poco después de solicitar al Ministerio de Educación la instalación de un observatorio astronómico en Bruselas, fue a París para adquirir información avanzada sobre astronomía. Allí mantuvo contacto con varios científicos que sentaron las bases de la teoría de la probabilidad, como Jean-Baptiste Joseph Fourier, el marqués Pierre-Simon Laplace y Siméon Denis Poisson. A su regreso a Bruselas, impartió cursos y conferencias sobre probabilidad, reuniendo las conferencias en un libro publicado en 1828: *Sobre el cálculo de probabilidades*.

Merecen ser destacados, además: Francis Galton, padre de las ideas moderna de correlación; los estadísticos de la escuela escandinava, Carl Charlier, Jørgen Pedersen Gram, Holger Thiele; los ingleses Karl Pearson, George Udny Yule, Ronald Fisher; los norteamericanos Jerzy Neyman, Abraham Wald, y otros.

En cuanto a la evolución actual de los métodos estadísticos, se puede decir que estos ya no se reducen al análisis de los datos muy abundantes que se presentan en los relevamientos demográficos, económicos o sociológicos, sino que han extendido su campo de aplicación a todas las investigaciones en las que la gran cantidad y la complejidad de los factores de variación exigen una técnica y una interpretación basadas en el conocimiento de las “leyes del azar”. Como ejemplos citemos:

- algunas ramas de la físico-matemática: teoría cinética de los gases, mecánica estadística, astronomía;
- la biología: biometría, genética, herencia, medicina;
- el estudio del medio natural donde evolucionan los seres vivos: meteorología, ciencias agrícolas;
- la psicología aplicada: conducta de los individuos (método de tests), encuestas a la opinión pública;
- los problemas industriales: control de fabricación, especificación de productos, muestreo.

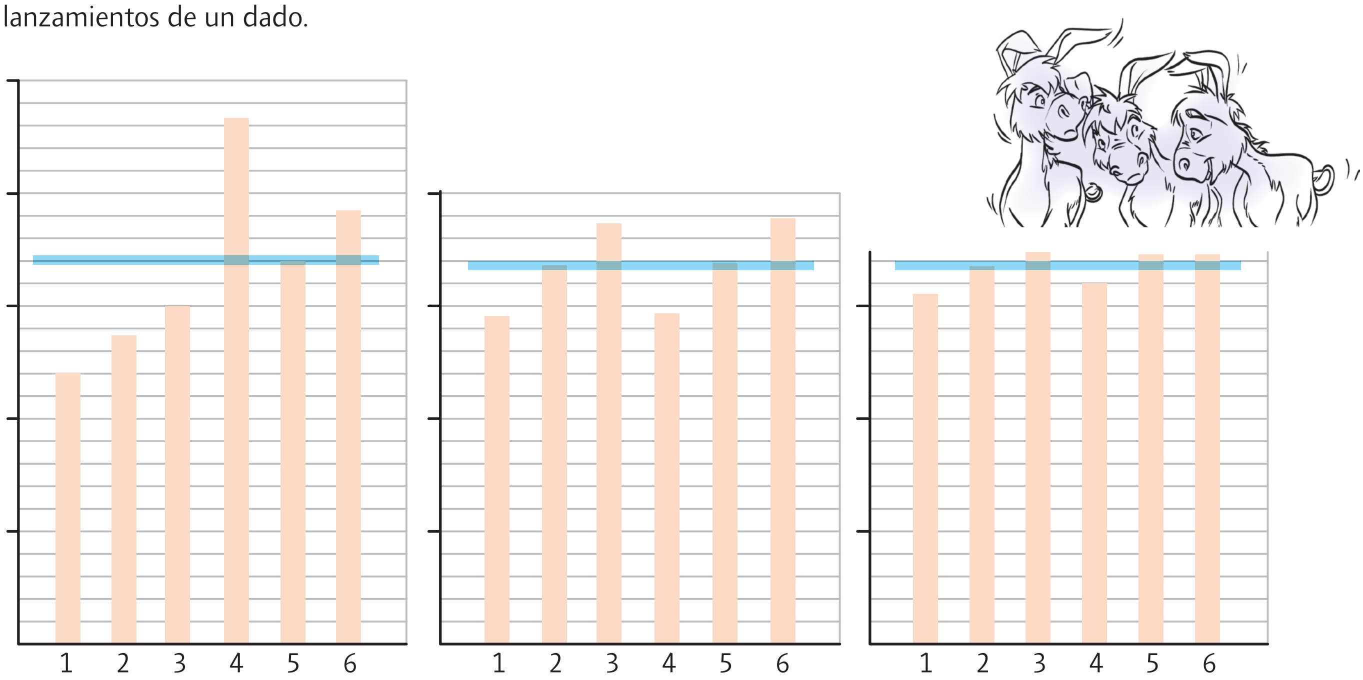
Este listado no es limitativo: algunas investigaciones se apoyan sin vacilar en el método estadístico para el estudio de fenómenos que en apariencia son completamente ajenos a las mediciones, como la evolución de las grandes corrientes de pensamiento o de las formas literarias.

En estos diferentes dominios, a la fase inicial, puramente descriptiva, sucede la investigación de las leyes estadísticas, únicas en las que se puede conocer cuando la experimentación propiamente dicha es imposible. La última etapa se refiere a la previsión. Hasta qué punto se ha llegado a la persecución de estos tres objetivos, qué grado de confianza se puede tener en las conclusiones formuladas por el estadístico, es lo que discutiremos para seguir adelante.

## Materiales para presentar en el aula

### Distribuciones de probabilidad de variables discretas

Los siguientes diagramas reflejan las distribuciones de frecuencias relativas correspondientes a tres series de lanzamientos de un dado.




En todos ellos se ha señalado en azul la ordenada 0,166 correspondiente a la probabilidad de cada una de las caras del dado, para poder comparar con ella las frecuencias relativas obtenidas.

**¿Qué relación hay entre las distribuciones de frecuencias relativas y la probabilidad de cada uno de los sucesos?**

Las gráficas anteriores han sido obtenidas experimentalmente por alumnos. En ellas se observa que cuanto mayor es el número de tiradas, más se parece la distribución experimental (empírica) a la distribución de probabilidades.

Recordemos la ley de los grandes números: cuando el número de experiencias crece más y más (es decir, tiende a infinito), la frecuencia relativa tiende a estabilizarse y el límite es la probabilidad. La distribución de probabilidad es, pues, la distribución límite de las distribuciones de frecuencias relativas.

Al tirar un dado, las probabilidades de obtener las distintas caras son:

$$P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=P(5)=P(6)=\frac{1}{6}=0{,}16667.$$

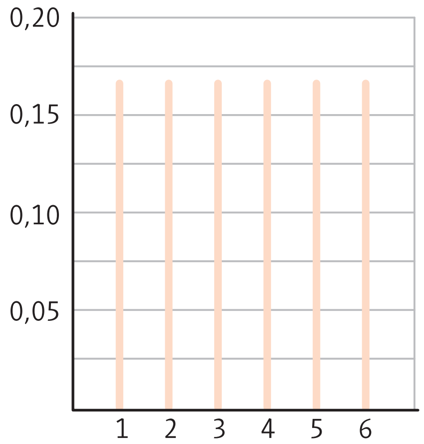
Al tirar dos dados y sumar los resultados, las probabilidades son:

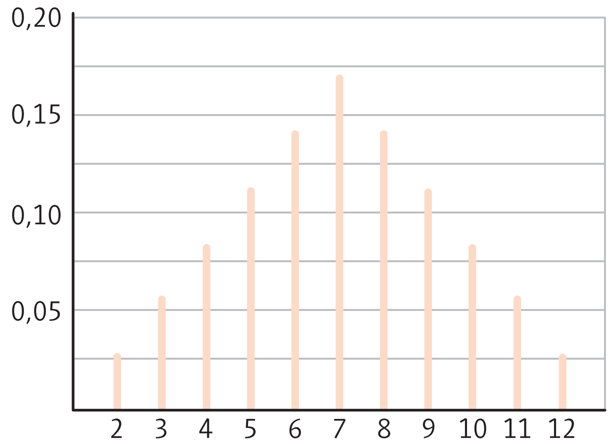
$$P(2)=P(12)=\frac{1}{36}\quad P(5)=P(9)=\frac{4}{3}\quad P(3)=P(11)=\frac{2}{36}\qquad P(6)=P(8)=\frac{5}{36}$$

$P(4)=P(10)=\frac{3}{36}$ $\quad P(7)=\frac{6}{36}$ (correspondiendo los colores a los de la figura siguiente):

| + | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Por tanto, sus distribuciones de probabilidad son las representadas en las figuras de abajo:




Observemos que, en una distribución de probabilidad, si la variable es discreta:

- en cada valor de la variable levantamos una barra de longitud proporcional a la probabilidad de que la variable tome ese valor;
- la suma de las longitudes de todas las barras es 1.

## Cálculo de $\bar{x}$ y $s$ en una distribución de variable discreta

En una distribución de frecuencias se observa que

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n}{N} = \frac{f_1}{N} x_1 + \frac{f_2}{N} x_2 + \dots + \frac{f_n}{N} x_n = \sum (\text{frecuencia relativa}) \cdot x_i$$

$\sum f_i = N$ es el número total de individuos. $\frac{f_i}{N}$ es la frecuencia relativa del elemento $x$.

Análogamente

$$\sigma = \sqrt{\sum (\text{frecuencia relativa}) \cdot x_i^2 - x^2}$$

Basándonos en ello, para una distribución de probabilidad de variable discreta:

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\dots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $\dots$ | $p_n$ |

Se llama $p_i$ a la probabilidad de $x_i$, es decir $p_i = P(x_i)$ y definimos la media y la desviación típica del siguiente modo:

$$\overline{x} = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n = \sum p_ix_i$$

$$\sigma = \sqrt{p_1\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + p_2\left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + \dots + p_n\left(x_n - \overline{x}\right)^2} = \sqrt{\sum p_i\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

expresión que también se puede escribir así:

$$\sigma = \sqrt{\left(p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \dots + p_nx_n^2\right) - \overline{x}^2} = \sqrt{\sum p_ix_i^2 - \overline{x}^2}.$$

Los cálculos se hacen, pues, de igual modo que en las distribuciones de frecuencias.

**Ejemplo.** Al lanzar dos dados y sumar los resultados, las probabilidades son:

| $x_i$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

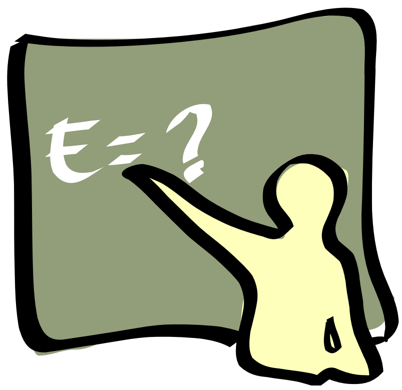
La media es, por tanto:

$$\overline{x} = \frac{1}{36}\cdot 2 + \frac{2}{36}\cdot 3 + \frac{3}{36}\cdot 4 + \frac{4}{36}\cdot 5 + \frac{5}{36}\cdot 6 + \frac{6}{36}\cdot 7 + \frac{5}{36}\cdot 8 + \frac{4}{36}\cdot 9 + \frac{3}{36}\cdot 10 + \frac{2}{36}\cdot 11 + \frac{1}{36}\cdot 12 = \frac{252}{36} = 7$$

y la desviación típica vale:

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{1}{36}\cdot 4 + \frac{2}{36}\cdot 9 + \frac{3}{36}\cdot 16 + \frac{4}{36}\cdot 25 + \dots + \frac{1}{36}\cdot 144\right) - 7^2} = \sqrt{\frac{1974}{36} - 49} = \sqrt{\frac{1974 - 1764}{36}} = \sqrt{\frac{210}{36}} = 2415.$$

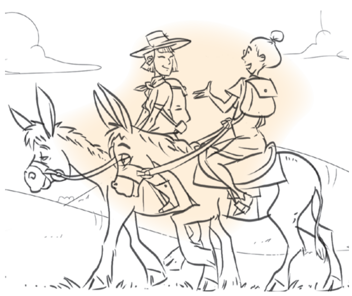
# Un diálogo con los maestros




## Materiales para presentar en el aula

### La estadística en el aula

***Su motivación, sus objetivos y sugerencias***



A partir de un repaso de las distribuciones de frecuencia aparecen, como límite o idealización de estas, las distribuciones de probabilidad. El primer tema consiste en un estudio en paralelo por el que las ideas ya conocidas de las distribuciones de frecuencia se extienden a las distribuciones de probabilidad.

En la distribución normal se procede a una detallada utilización del reparto de áreas en los intervalos

$$(\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma), (\overline{x} - 2\sigma, \overline{x} + 2\sigma), (\overline{x} - 3\sigma, \overline{x} + 3\sigma),$$

a partir de la cual el significado de las tablas y su aplicación al cálculo de probabilidades cualesquiera se ve como algo natural y sencillo.

La distribución binomial se enfoca mediante el paralelismo entre el aparato de Galton, el lanzamiento de monedas y el triángulo de Tartaglia.

Las distribuciones bidimensionales se tratarán de un modo eminentemente intuitivo y visual, a partir de las nubes de puntos y del grado de aproximación de estas a la recta de regresión.

Los temas se complementarán con una introducción, en la que se propondrá una breve reseña histórica de la estadística como ciencia, y se señalarán algunas de las grandes ramas en que actualmente se divide. Se presentarán juegos, curiosidades y ampliaciones de los correspondientes temas.

**Objetivos:**

- Examinar las distribuciones estadísticas y sus representaciones gráficas adecuadas a cada tipo de variable.
- Estudiar el significado de los parámetros $\overline{x}$ y $\sigma$ de una distribución y el papel que juegan en simultáneo.
- Interpretar las distribuciones de probabilidad como límite de las frecuencias.
- Comprender la peculiaridad de cada distribución de variable continua y asociar sus probabilidades a las áreas bajo la curva.
- Comprender la distribución normal y por qué aparece con tanta frecuencia, así como las singularidades de su gráfica.
- Calcular probabilidades de distribuciones normales con ayuda de las tablas.
- Comprender la distribución binomial y relacionarla con el triángulo de Tartaglia.
- Calcular probabilidades sencillas de distribuciones binomiales.
- Calcular probabilidades binomiales por aproximación a la distribución normal.
- Interpretar distribuciones bidimensionales y saber representar sus valores mediante una nube de puntos.
- Valorar a ojo el conocimiento de correlación de una distribución bidimensional.
- Conocer la fórmula de la correlación y saber calcularla numéricamente en casos concretos.
- Conocer la recta de regresión y saber utilizarla para hacer predicciones.
- Valerse de la estadística para interpretar con conocimiento de causa las noticias y los mensajes que aparecen en los medios de difusión e informes de divulgación.

### Armando festivales y pasatiempos

## La calculadora para obtener $\overline{x}$ y $\sigma$

Hay calculadoras que tienen funciones estadísticas. Las reconocemos porque, bajo algunas teclas, tienen las anotaciones: $\sum x^2$, $\sum x$, $n$, $\overline{x}$, $\sigma_n$.

¿Cómo proceder con ellas para calcular *x* y *a* a partir de una tabla de frecuencias? Veámoslo a continuación.

1. Procure que el aparato se encuentre en posición de efectuar cálculos estadísticos. En tal caso suele presentar en la parte alta de la pantalla la notación SD. En cada modelo esto se consigue de un modo distinto.
2. Cerciórese de que no hay nada acumulado. Para ello pulse la tecla $\boxed{\textbf{n}}$. Si sale 0 en la pantalla, está en condiciones de acumular los datos. Si no, borre lo que hay en memoria mediante la secuencia $\boxed{\textbf{INV}}$ $\boxed{\textbf{AC}}$.

   Cada modelo de calculadora tiene una nomenclatura y unos procedimientos propios. Lea con atención las orientaciones que aquí se dan e investigue en su aparato cómo se realizan las funciones que aquí describimos. Consulte el manual. Según el modelo de calculadora, los datos pueden introducirse con la tecla $\boxed{\text{DATA}}$ o, también, con la tecla $\boxed{\times}$.

3. Acumulación de datos:

   1º dato $\boxed{\times}$ 1ª frecuencia $\boxed{\text{M+}}$

   2º dato $\boxed{\times}$ 2ª frecuencia $\boxed{\text{M+}}$

   Así, sucesivamente, hasta haber cargado todos los datos. También se pueden cargar así:

   1º dato $\boxed{\text{M+}}$ ... (se pulsa la tecla $\boxed{\text{M+}}$ tantas veces como aparezca este dato).

   **Correcciones**. Si ha introducido erróneamente algún dato, puede suprimirlo del siguiente modo:

   Dato erróneo $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{M+}}$

4. Pulsando cualquiera de las teclas $\boxed{\eta}$, $\boxed{\sum x^2}$, $\boxed{\sum x}$, $\boxed{\bar{x}}$, $\boxed{\sigma_n}$ obtendremos el valor correspondiente, y esta consulta puede hacerse en cualquier momento del proceso. Después, si se quiere, se puede seguir poniendo datos.

   La tecla $\boxed{\sigma_n}$ corresponde a la desviación típica. La tecla $\boxed{\sigma_{n-1}}$ corresponde a otro parámetro estadístico que no hemos estudiado.

## Ejemplos interesantes para los festivales

**1.** Calculemos $\bar{x}$ y $\sigma$ en la primera de las distribuciones de la columna introductoria. Para ello debemos reconstruir la tabla de frecuencias asignando a cada intervalo su valor central (marca de clase), en el cual se representan todos los puntos del intervalo:

| Intervalos | Marcas $x_i$ | Frecuencias $f_i$ | $x_i \cdot f_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $f_i(x_1 - \bar{x})^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 148,5-153,5 | 151 | 2 | 302 | -13,5 | 182,5 | 364,5 |
| 153,5-158,5 | 156 | 4 | 624 | -8,5 | 72,25 | 289 |
| 158,5-163,5 | 151 | 11 | 1 771 | -3,5 | 12,25 | 134,75 |
| 163,5-168,5 | 166 | 14 | 2 324 | 1,5 | 2,25 | 31,5 |
| 168,5-173,5 | 171 | 5 | 855 | 6,5 | 42,25 | 211,25 |
| 173,5-178,5 | 176 | 4 | 704 | 11,5 | 132,25 | 529 |
| | | **40** | **6 580** | | | **1 560** |
| | **I** | **II** | **III** | **IV** | **V** | **VI** |

La columna I se obtiene calculando la semisuma de los extremos de cada intervalo. La suma de los números de la columna II es el total de individuos:

$$\sum f_i = 40.$$

La suma de la columna III es la suma total de las estaturas de todos los alumnos: $\sum f_i x_i = 6580.$ Por tanto, la media se obtiene, ahora, dividiendo (III) : (II).

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{6580}{40} = 164,5.$$

Las columnas IV y V son auxiliares para llegar a la VI, a partir de la cual se obtiene el valor de σ.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{1560}{40}} = 6245.$$

Observemos que el proceso ha sido pesado; y lo habría sido más aún si la media, en vez de tener una cifra decimal, hubiera tenido varias. Miremos con atención cómo se puede obtener lo mismo utilizando la otra fórmula de la desviación típica:

| $x_i$ | $f_i$ | $f_i x_i$ | $f_i x_i^2$ |
|---|---|---|---|
| 151 | 2 | 302 | 45 602 |
| 156 | 4 | 624 | 97 344 |
| 161 | 11 | 1 771 | 285 131 |
| 166 | 14 | 2 324 | 385 784 |
| 171 | 5 | 855 | 146 205 |
| 176 | 4 | 704 | 123 904 |
| | 40 | 6 580 | 1 083 970 |
| I | II | III | IV |

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{6580}{40} = 164{,}5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{1083970}{40} - 164\cdot 5^2} = 6{,}245$$

Las columnas I, II y III son las mismas que en la tabla anterior. Lo bueno de este método es que con solo elaborar una columna más se consigue obtener $\sum f_i x_i^2$, ya que $(x_i)\cdot(f_i x_i) = f_i x_i^2$. Aprendamos bien este método, pues en adelante es el que utilizaremos para el cálculo de σ.

2. Estos mismos parámetros pueden ser obtenidos con calculadora procediendo del siguiente modo (se sigue la descripción para un cierto modelo de calculadora, muy común en el mercado):

- Si se teclea **INV** **MODE**, la calculadora estará en disposición de trabajar en estadística. Aparece en la parte superior derecha de la pantalla el mensaje **SD**.
- Si pulsamos **n** y aparece un 0 en la pantalla, es que no hay ningún dato en memoria.
- Los datos se acumulan (se introducen) así:

151 **×** 2 **M+** 156 **×** 4 **M+** 161 **×** 11 **M+**
166 **×** 14 **M+** 171 **×** 5 **M+** 176 **×** 4 **M+**

- Pulsando **n** aparecerá el número 40, que es $\Sigma f_i$. Ello nos indica que hemos introducido todos los datos.
- La tecla $\boxed{\bar{x}}$ nos dará la media: **164,5**
- Pulsando $\boxed{\sigma}$ obtendremos la desviación típica: **6 244997998**

3. Veamos en la distribución anterior cómo se distribuyen los elementos según $\bar{x}$ y σ:

- El intervalo $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$ es (158,25; 170,74). En este intervalo hay, aproximadamente, 27 individuos, lo que supone $\frac{2700}{40} = 67{,}5\%$ del total.

- El intervalo ($\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma$) es (152,176). En este intervalo hay, aproximadamente, 37 individuos, lo que supone un 92,5 % del total.

Vamos a calcular los parámetros estadísticos de la segunda distribución presentada en la columna inicial "Intervalos" de la primera tabla de este apartado:

| **Intervalos** | 148,5-153,5 | 153,5-158,5 | 158,5-163,5 | 163,5-168,5 | 168,5-173.5 | 173,5-178,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Frecuencias** | 6 | 8 | 5 | 9 | 7 | 6 |

Pasos para resolver:

- Calculemos la marca de clase de cada intervalo: $\frac{148{,}5 - 153{,}5}{2} = 151$; etc.
- Formemos una tabla con las marcas de clase y las frecuencias:

| $x_i$ | $f_i$ |
|---|---|
| 151 | 6 |
| … | … |
| … | … |
| … | … |

- Ampliemos la tabla anterior con las columnas $f_i x_i$ y $f_i x_i^2$:

| $x_i$ | $f_i$ | $f_i x_i$ | $f_i x_i^2$ |
|---|---|---|---|
| 151 | 6 | 906 | 136 806 |
| …. | … | … | … |
| … | … | …. | … |
| … | … | … | … |

- Sumemos las columnas 2, 3 y 4, obteniendo así, $\sum f_i, \sum f_i \cdot x_i$ y $\sum f_i x_i^2$.
- Apliquemos las fórmulas para comprobar que $x = 163{,}25$ y que $a = 8{,}13$.

## Problemas y soluciones propuestos para el Festival

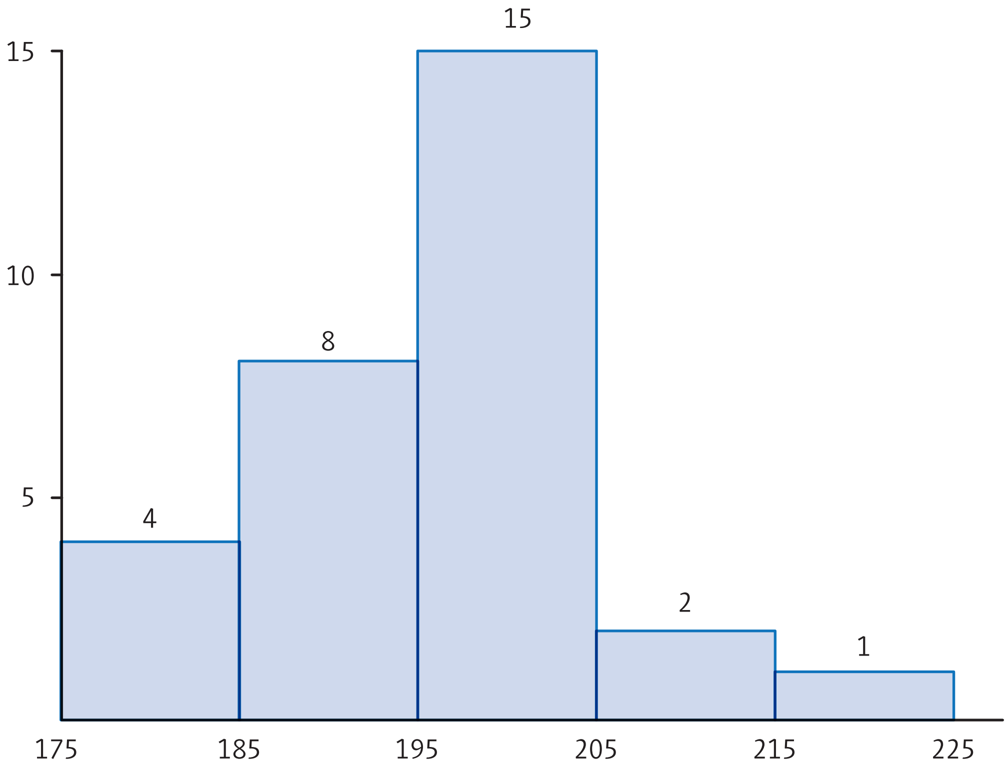
1. En una clase se ha pedido a los alumnos que valoren a ojo la longitud de la mesa del profesor. Las que siguen son sus respuestas:

   200, 205, 195, 180, 190, 203, 205, 200, 197, 199, 185, 177, 193, 195, 198, 205, 200, 210, 193, 187, 200, 175, 215, 225, 200, 205, 190, 192, 200, 200.

   Hagamos una tabla de frecuencias repartiendo las respuestas en los intervalos [175, 185]; [185, 195]; [195, 205]; [205, 215]; [215, 225] y representemos la distribución. ¿Qué diagrama es el idóneo?

**Solución:**

| [175, 185] | [185, 195] | [195, 205] | [205, 215] | [215, 225] |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 8 | 15 | 2 | 1 |

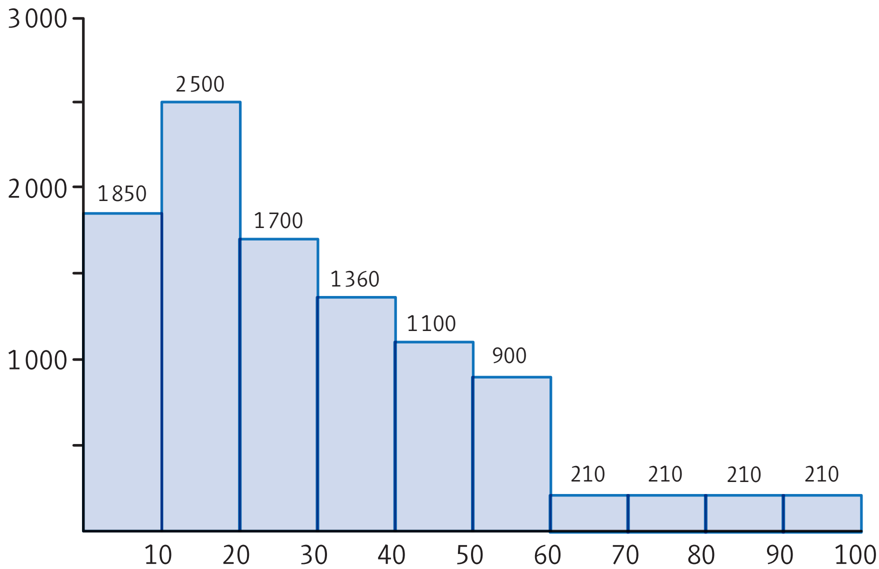



2. Tenemos la siguiente distribución de edades en una población:

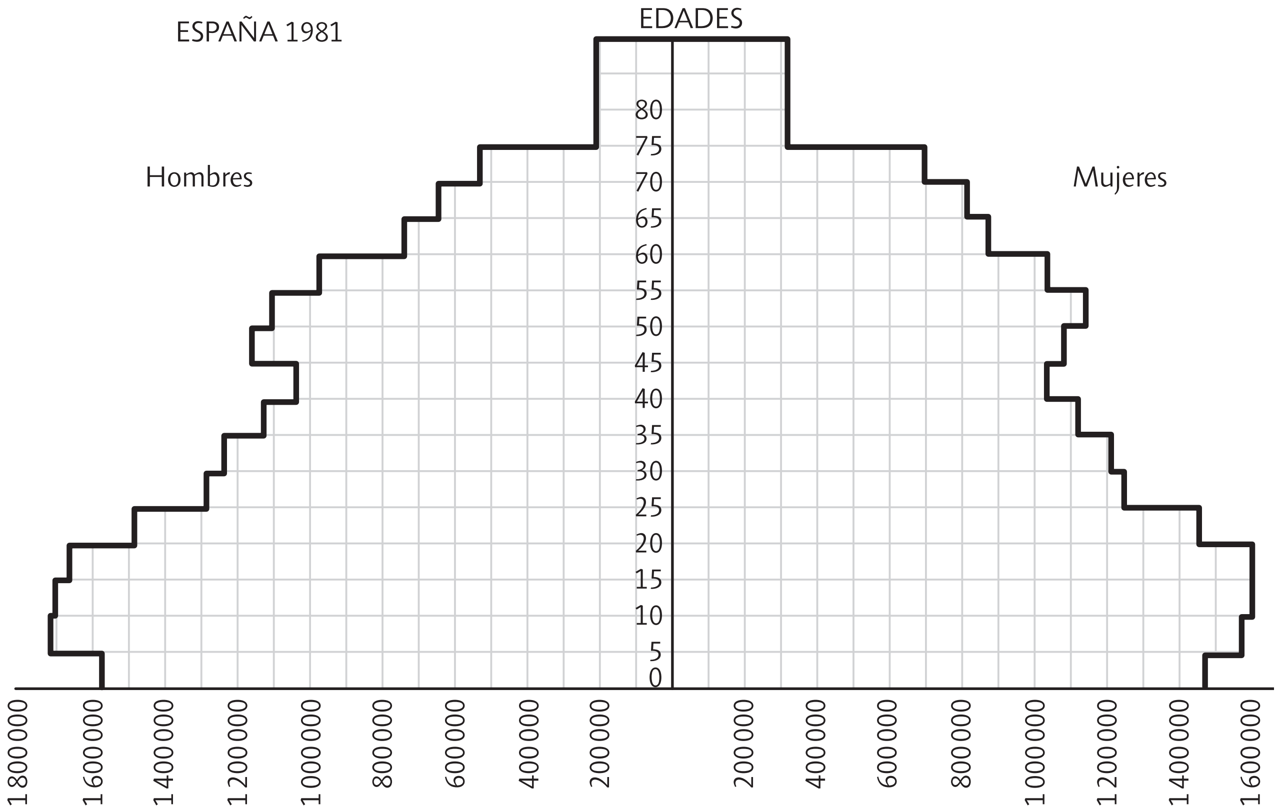
| **Edades** | [0, 5] | [5, 10] | [10, 15] | [15, 20] | [20, 25] | [25, 30] | [30, 40] | [40, 50] | [50, 60] | [60, 100] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Nº de personas** | 900 | 950 | 1 300 | 1 200 | 1 000 | 700 | 1 360 | 1 100 | 900 | 840 |

Observemos que los intervalos no son de la misma longitud. Teniendo esto en cuenta, agruparlos en intervalos de 10 años (para los más ancianos, se pueden repartir los 840 individuos en cuatro partes iguales) pues, si no, la representación puede ser engañosa.

**Solución:**




3. La que sigue es la pirámide de población de España correspondiente al año 1981. Observemos que se trata de dos histogramas de distribución de edades, uno para los hombres y otro para las mujeres:




Sobre esta pirámide podemos apreciar los efectos de la guerra civil (1936-1939). ¿Qué edades tenían en 1981 los que nacieron durante la guerra? ¿Se nota en la pirámide que durante la guerra murieron más hombres que mujeres? También se puede observar, en ella, la disminución de nacimientos en los últimos años.

**Solución:**

Entre los 42 y 45 años se observa efectivamente un descenso en la población de edades comprendidas entre los 35 y 45 años. Este descenso es más brusco en la población masculina. Los efectos de la guerra civil también se deben reflejar en un descenso en la población de edades comprendidas entre los 60 y 75 años (que corresponde a los jóvenes que tenían de 18 a 30 años en el período de guerra) y que incrementa el descenso por mortalidad, propio de esas poblaciones de edad avanzada.

4. Se han lanzado dos dados 120 veces y cada vez se ha anotado la suma. Estos son los resultados:

| **Número** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Veces** | 3 | 8 | 9 | 11 | 20 | 19 | 16 | 13 | 11 | 6 | 4 |

¿De qué tipo de variable se trata? Calculemos $\bar{x}$ y $\sigma$.

**Solución:**

Es una variable discreta: $\bar{x} = 7{,}025$; $\sigma = 2{,}434$.

5. a) Calculemos los parámetros $\bar{x}$ y $\sigma$ de la distribución, por portales, del número de personas que viven en una gran barriada propuesto en el problema 3.

b) Obtengamos el intervalo $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$ y contemos los valores que hay en él. ¿Qué porcentaje suponen del total? Hagamos lo mismo con $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$.

**Solución:**

a) $\bar{x} = 104{,}025$; $\sigma = 26{,}4$;

b) $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma) = (77{,}625; 130{,}425) \rightarrow 66{,}25\%$;

c) $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma) = (51{,}225; 156{,}825) \rightarrow 100\%$.

6. Calculemos la media y la desviación típica de la distribución del problema 1 (sobre valoración a ojo de la longitud de la mesa del profesor), y averigüemos el porcentaje de observaciones que hay en los intervalos

$$(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma) \text{ y } (\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma).$$

**Solución:**

$\bar{x} = 197{,}3$; $\sigma = 10{,}35$; $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma) = (186{,}95; 207{,}65) \rightarrow 80\%$;

$(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma) = (176{,}6; 218) \rightarrow 93{,}33\%$.

7. Calculemos $\bar{x}$ y $\sigma$ en la distribución de edades del problema 2 y averigüemos el porcentaje aproximado de individuos que hay en cada uno de los intervalos $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$ y $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$.

**Solución:**

$\bar{x} = 29{,}48$; $\sigma = 21{,}52$; $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma) = (7{,}96; 51) \rightarrow 69{,}36\%$;

$(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma) = (-13{,}56; 72{,}52) \rightarrow 93{,}85\%$.

8. En la distribución del problema 4 correspondiente a 120 lanzamientos de dos dados, averigüemos qué porcentaje de resultados hay en cada uno de los intervalos $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$ y $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$.

**Solución:**

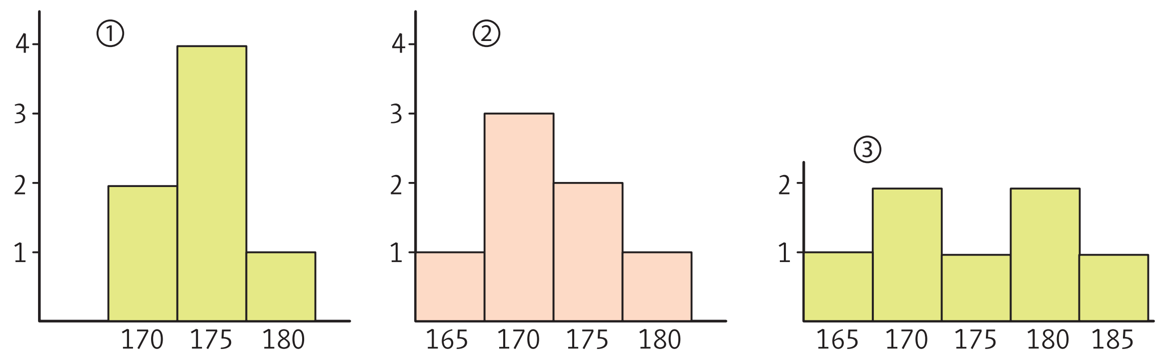
$(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma) = (4{,}591; 9{,}459) \rightarrow 65{,}83\%$;

$(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma) = (2{,}157; 11{,}893) \rightarrow 94{,}16\%$.

9. En un centro escolar hay tres equipos de baloncesto A, B y C. Se ha hecho un estudio estadístico de las estaturas de sus miembros y se han obtenido los siguientes parámetros:

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| $\bar{x}$ | 175 | 174,5 | 172,1 |
| $\sigma$ | 6,5 | 3,2 | 4,5 |

¿Qué gráfica corresponde a cada par de parámetros?




**Solución:** 1 B; 2 C; 3 A;

10. Calculemos la media y la desviación típica de la distribución de probabilidad correspondiente a la puntuación obtenida en el lanzamiento de un dado.

**Solución:** $\bar{x} = 3{,}5$; $\sigma = 1{,}7078$.

11. Si se tiran dos monedas al aire podemos obtener 0, 1 o 2 caras. Calculemos la media y la desviación típica de la distribución de probabilidad correspondiente.

**Solución:** $\bar{x} = 1$; $\sigma = 0{,}707$.

12. Tiremos dos monedas 800 veces y anotemos el número de caras. Calculemos la media y la desviación típica.

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 |
| 208 | 385 | 207 |

Comparemos los resultados obtenidos con los del ejercicio anterior.

**Solución:** $\overline{x} = 0{,}99875$; $\sigma = 0{,}72$.

13. Tiremos sucesivamente una moneda y anotemos el número de lanzamientos que necesitamos hasta obtener la primera cara. Realicemos el experimento 100 veces con los siguientes resultados:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sale cara en tantos lanzamientos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Veces que ocurrió | 53 | 24 | 11 | 6 | 3 | 2 | 1 |

Calculemos la media y la desviación típica.

**Solución:** $\overline{x} = 1{,}92$; $\sigma = 1{,}309$.

14. En el experimento anterior de lanzar una moneda para obtener cara por primera vez:

a) Obtengamos la distribución de probabilidades:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1/2 | 1/4 | 1/8 | ... |

b) ¿Cómo calcularíamos la media? Tendríamos que sumar infinitos términos de una serie. Expresemos esa suma, aunque no sepamos calcularla.

c) Hagamos lo mismo para $\sum p_i \cdot x_i^2$ y pongamos la expresión de la desviación típica.

**Solución:**

$$P(n) = \frac{1}{2^n},\ \overline{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n};\quad \sigma = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}\right)^2}.$$

15. En una bolsa hay bolas numeradas: 9 bolas con un uno, 5 con un dos y 6 con un tres. Saquemos una bola y veamos qué número tiene.

a) ¿Cuál es la distribución de probabilidad?

b) Calculemos la media y la desviación típica.

**Solución:**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| $\frac{9}{20}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{10}$ |

$\overline{x} = 20{,}32$; $\sigma = 0{,}853$.

16. Saquemos 2 cartas de una baraja y anotemos el número de ases (0, 1 o 2).

a) ¿Cuál es la distribución de probabilidad?

b) Calculemos la media y la desviación típica.

**Solución:**

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 |
| $\frac{105}{130}$ | $\frac{24}{130}$ | $\frac{1}{130}$ |

$\bar{x} = 0{,}2$; $\sigma = 0{,}4187$.

17. En una fábrica de tornillos se mide la longitud (en mm) de algunos de ellos y se obtiene:

22, 20, 18, 21, 19

17, 23, 23, 21, 18

22, 22, 19, 19, 20

19, 23, 21, 23, 21

19, 20, 18, 21, 19

22, 16, 19, 23, 18

20, 22, 18, 25, 23

21, 18, 24, 17, 20

20, 19, 21, 20, 22

18, 20, 22, 21, 19

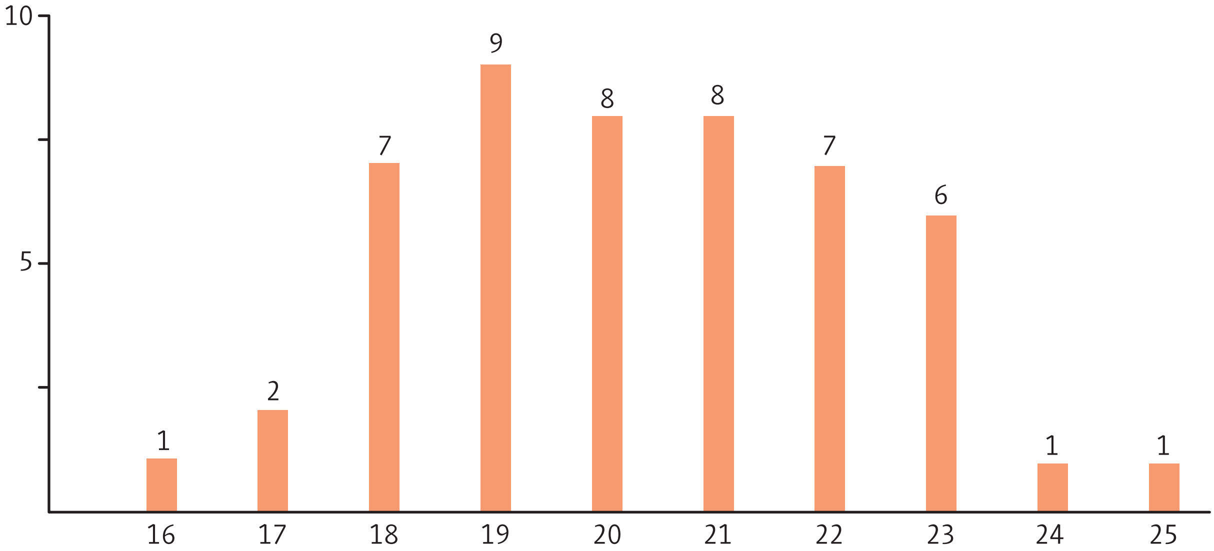
a) Hagamos una tabla de frecuencias, representémosla gráficamente y calculemos la media y la desviación típica.

b) Hagamos una nueva tabla de frecuencias agrupando los valores así: de 17 a 19 mm, de 20 a 22 mm y de 23 a 25 mm. Representémosla gráficamente y calculemos la media y la desviación típica.

**Solución a):**

| Longitud | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tornillos | 1 | 2 | 7 | 9 | 8 | 8 | 7 | 6 | 1 | 1 |

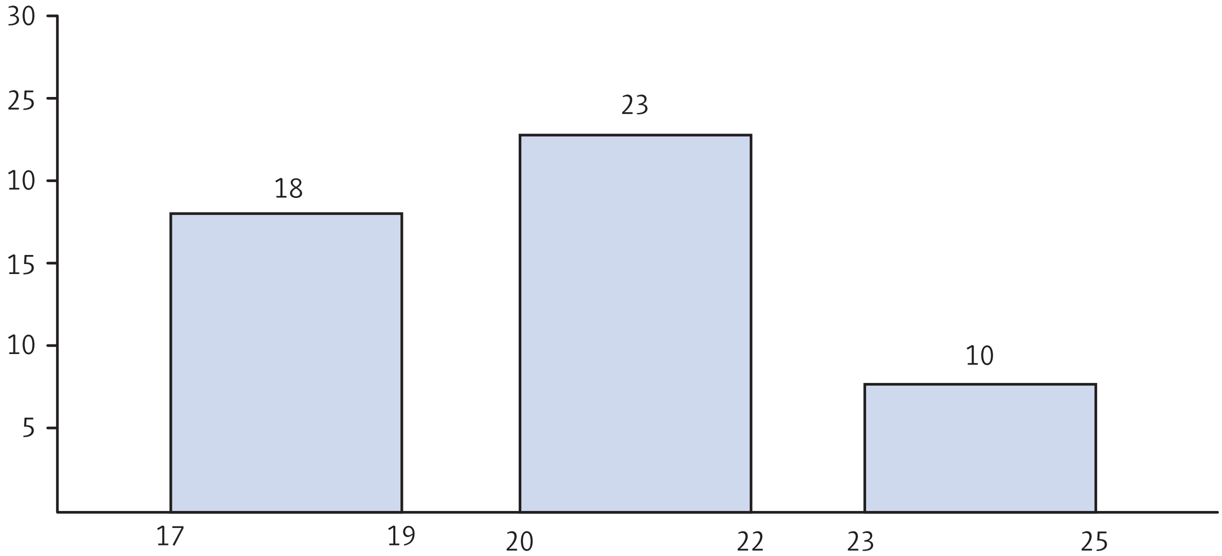
$\bar{x} = 20{,}32$; $\sigma = 1{,}984$.



**Solución b):**

| Intervalo | [17, 19] | [20, 22] | [23, 25] |
|---|---|---|---|
| **Marca de clase** | 18 | 21 | 24 |
| **Tornillo** | 18 | 23 | 8 |

$\overline{x} = 20{,}38$; $\sigma = 2{,}097$.



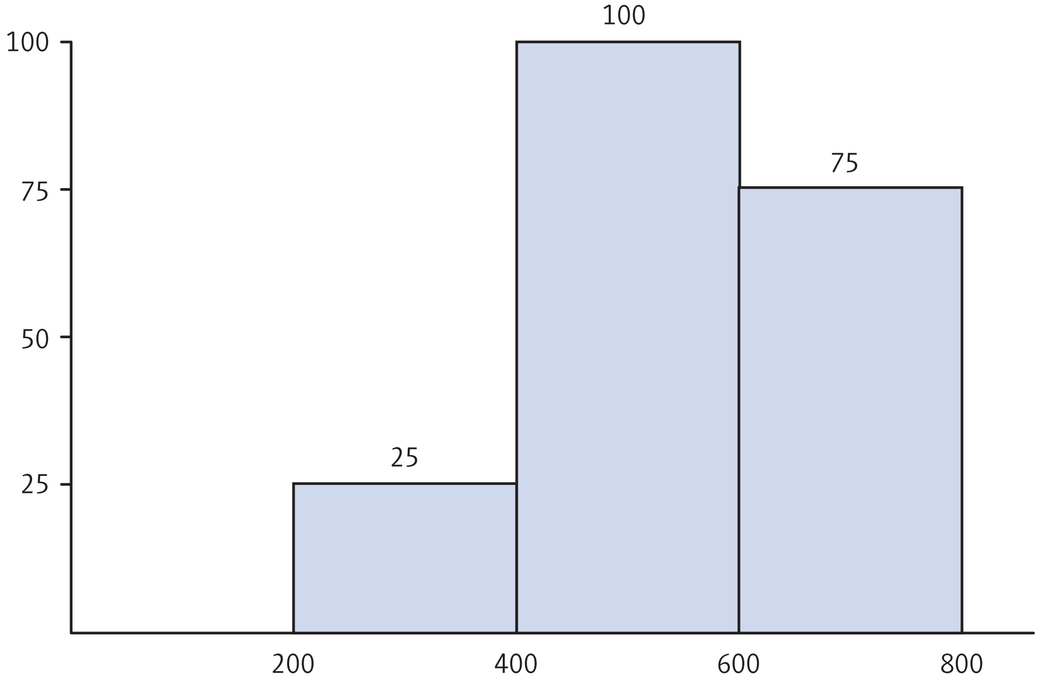

18. En una fábrica de bombillas se observaron 200 de ellas para estudiar su duración:

| Horas de vida | 200 a 399 | 400 a 599 | 600 a 799 |
|---|---|---|---|
| **Bombillas** | 25 | 100 | 75 |

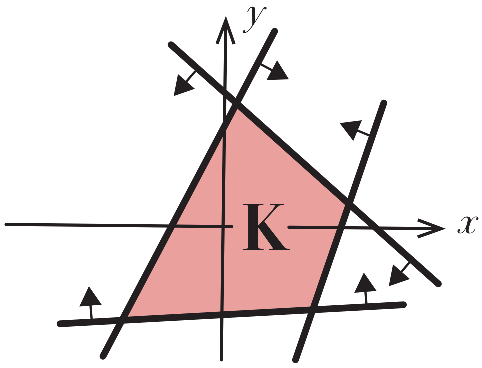
Representemos esta situación con un histograma y calculemos la media y la desviación típica.

**Solución:**

$\overline{x} = 550$; $\sigma = 132{,}287$.



# No olvidemos lo fundamental




## 5. Región de soluciones de un sistema de desigualdades con dos incógnitas

Ahora nuestra tarea es brindar una descripción eficaz de todas las soluciones de los sistemas de desigualdades lineales. En esta parte, esta labor se cumple para sistemas con dos incógnitas $x$ e $y$. A pesar de que el número de incógnitas no es grande (solo dos), procuraremos analizar estos sistemas desde posiciones generales, es decir, de tal forma que los resultados así obtenidos puedan ser transferidos fácilmente a sistemas con mayor número de incógnitas.

A fin de cuentas, la solución de cualquier sistema de desigualdades lineales se reduce a la solución de una serie de sistemas de ecuaciones lineales. Nosotros consideraremos la solución de sistemas de ecuaciones lineales como algo simple, como una operación elemental, y no nos desconcertaremos si para utilizar el método propuesto tenemos que realizar esta operación muchas veces.

➔ **1. Lemas indispensables.** Sea dado el sistema de desigualdades:

$$\left.\begin{array}{r} a_1x+b_1y+c_1\geq 0\\ a_2x+b_2y+c_2\geq 0\\ \dots\dots\dots\dots\\ a_mx+b_my+c_m\geq 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Resulta conveniente examinar, junto con este sistema, el siguiente sistema de desigualdades homogéneas:

$$\left.\begin{array}{r} a_1x+b_1y\geq 0\\ a_2x+b_2y\geq 0\\ \dots\dots\dots\dots\\ a_mx+b_my\geq 0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

y también el sistema correspondiente de ecuaciones homogéneas:

$$\left.\begin{array}{r} a_1x+b_1y=0\\ a_2x+b_2y=0\\ \dots\dots\dots\dots\\ a_mx+b_my=0 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

La región de soluciones del sistema (1), en un plano de coordenadas $xOy$, la designaremos por $\mathcal{K}$; la del sistema (2), por $\mathcal{K}_0$; y la del sistema (3), por $\mathcal{L}$. Está claro que $\mathcal{L}\subset\mathcal{K}_0$ (el símbolo $\subset$ significa "incluido en").

**Lema 1.** Se cumple la inclusión:

$$\mathcal{K}+\mathcal{K}_0\subset\mathcal{K},$$

es decir, la suma de cualquier solución de un sistema de desigualdades dado con cualquier solución del sistema correspondiente de desigualdades homogéneas es también solución del sistema dado.

**Demostración.** Sea $A$ un punto arbitrario de $\mathcal{K}$ y $B$, un punto arbitrario de $\mathcal{K}_0$. Entonces, son justas las desigualdades:

$$\left.\begin{array}{r} a_1x_A + b_1y_A + c_1 \geq 0 \\ a_2x_A + b_2y_A + c_2 \geq 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_mx_A + b_my_A + c_m \geq 0 \end{array}\right\} \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{l} a_1x_B + b_1y_B \geq 0 \\ a_2x_B + b_2y_B \geq 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_mx_B + b_my_B \geq 0 \end{array}\right.$$

Sumando cada una de las desigualdades escritas a la izquierda con las correspondientes de la derecha, obtenemos:

$$a_1(x_A + x_B) + b_1(y_A + y_B) + c_1 \geq 0,$$
$$a_2(x_A + x_B) + b_2(y_A + y_B) + c_2 \geq 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_m(x_A + x_B) + b_m(y_A + y_B) + c_m \geq 0.$$

Estas desigualdades significan que el par de números $x_A + x_B$ e $y_A + y_B$ –coordenadas del punto $A + B$– es solución del sistema inicial (1), es decir que $A + B \in \mathcal{K}$. Y con esto queda demostrado el lema.

**Lema 2.**

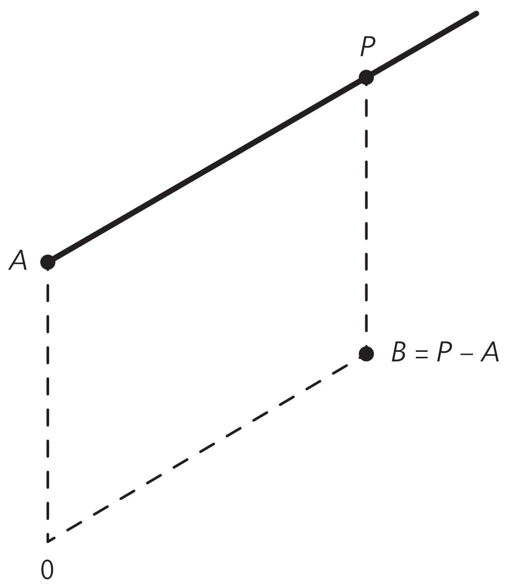
**1)** Si un rayo con origen en el punto $A$ pertenece totalmente al conjunto $\mathcal{K}$ y si $P$ es un punto arbitrario de este rayo, entonces $P - A \in \mathcal{K}_0$.

**2)** Si una recta pertenece totalmente al conjunto $\mathcal{K}$ y si $A$ y $P$ son dos puntos arbitrarios en esta recta, entonces $\boldsymbol{P - A \in \mathcal{L}}$.

**Demostración de 1).** Designamos el punto $P - A$ por $B$. El rayo considerado está compuesto por puntos de la siguiente forma:

$$A + sB, \tag{4}$$

donde $s$ es un numero arbitrario no negativo (véase la figura siguiente).




Según la condición, cualquiera de estos dos puntos es solución del sistema (1), es decir:

$$\left.\begin{aligned} a_1(x_A+sx_B)+b_1(y_A+sy_B)+c_1 &\geq 0,\\ a_2(x_A+sx_B)+b_2(y_A+sy_B)+c_2 &\geq 0,\\ \dots\dots\dots\dots &\\ a_m(x_A+sx_B)+b_m(y_A+sy_B)+c_m &\geq 0.\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Veamos, por ejemplo, la primera de estas desigualdades. Puede ser escrita de la forma:

$$(a_1x_A + b_1y_A + c_1) + s(a_1x_B + b_1y_B) \geq 0.$$

Puesto que esta desigualdad es adecuada con cualquier $s \geq 0$, entonces el coeficiente de $s$, como no es difícil ver, tiene que ser un número no negativo:

$$a_1x_B + b_1y_B \geq 0.$$

Analizando de forma análoga las demás desigualdades (5) se puede obtener:

$$\begin{gathered} a_2x_B + b_2y_B \geq 0,\\ \dots\dots\dots\\ a_mx_B + b_my_B \geq 0 \end{gathered}$$

por lo que vemos que el punto $B$ pertenece al conjunto $\mathcal{K}_0$.

**Demostración de 2).** Esta se realiza de forma análoga. La recta considerada se compone por los puntos de la forma (4), donde $s$ es un número arbitrario. Por eso las desigualdades (5) son válidas para cualquier valor de $s$. De ello se deduce que, en cada una de estas desigualdades, el coeficiente sumario de $s$ debe igualarse a cero, es decir,

$$\begin{gathered} a_1x_B + b_1y_B = 0,\\ a_2x_B + b_2y_B = 0,\\ \dots\dots\dots\\ a_mx_B + b_my_B = 0, \end{gathered}$$

Por lo tanto, $B \in \mathcal{L}$. El lema queda demostrado.

Fácilmente vemos que los lemas 1 y 2 son válidos para sistemas con cualquier número de incógnitas.

**2. Caso en que el sistema de desigualdades (1) es normal.** Examinemos nuevamente el sistema de desigualdades (1) y su sistema correspondiente de ecuaciones homogéneas (3).

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1 &\geq 0\\ a_2x+b_2y+c_2 &\geq 0\\ \dots\dots\dots &\\ a_mx+b_my+c_m &\geq 0\end{aligned}\right\} \ (1) \qquad \left.\begin{aligned} a_1x+b_1y &= 0\\ a_2x+b_2y &= 0\\ \dots\dots\dots &\\ a_mx+b_my &= 0\end{aligned}\right\} \ (3)$$

Este último sistema tiene solución evidente: $x = 0$, $y = 0$. Esta solución se llama *nula*. Para investigar el sistema (1) resulta importante saber si el sistema (3) tiene también soluciones no nulas. Con este fin introducimos la siguiente definición.

**Definición. Un sistema de desigualdades lineales se llama *normal* si su respectivo sistema de ecuaciones lineales y homogéneas tiene solamente solución nula.**

En otras palabras, un sistema de desigualdades es normal si el conjunto $\mathcal{L}$, determinado anteriormente, siendo región de soluciones del correspondiente sistema homogéneo de ecuaciones, contiene solamente un punto (el origen de las coordenadas). Está claro que el concepto de sistema normal conserva su sentido para cualquier número de incógnitas.

No es difícil demostrar que **un sistema compatible de desigualdades es normal si, y solo si, la región de sus soluciones $\mathcal{K}$ no contiene ninguna una recta**.

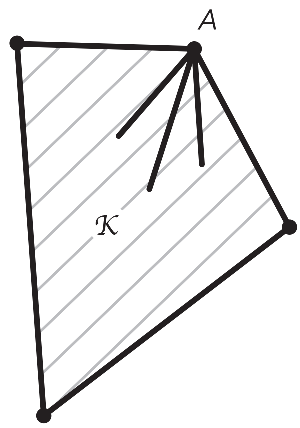
Efectivamente, si el sistema es normal, o sea, el conjunto $\mathcal{L}$ contiene solo el origen de las coordenadas, entonces la región $\mathcal{K}$ no contiene rectas; esto se deduce inmediatamente de la segunda afirmación del lema 2. Cuando el sistema no es normal, el conjunto $\mathcal{L}$ contiene, por lo menos, un punto $B$ diferente del origen de las coordenadas.

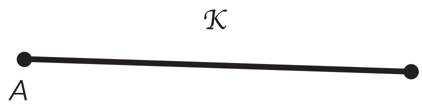
Por supuesto, todos los puntos de la forma $kB$ siendo $k$ un número cualquiera, también pertenecen a $\mathcal{L}$. Si los números $x, y, z$ (coordenadas del punto $B$) satisfacen a un sistema homogéneo de ecuaciones, entonces los números $kx, ky, kz$, siendo coordenadas del punto $kB$, también satisfacen este sistema.

Pero, en dicho caso, sea cual sea el punto $P \in \mathcal{K}$ (y un punto así forzosamente existe, puesto que el sistema es compatible y, por lo tanto, la región $\mathcal{K}$ no está vacía), el conjunto de todos los puntos de la forma $P + kB$ (siendo $k$ un numero cualquiera), según el lema 1, pertenece a $\mathcal{K}$. Este conjunto, como es sabido, es una línea recta. Entonces, cuando el sistema no es normal, la región $\mathcal{K}$ contiene una recta. Con esto queda demostrada, por completo, la afirmación destacada anteriormente con negritas.

A continuación examinaremos la región de soluciones del sistema (1) suponiendo que este sistema es compatible (la región $\mathcal{K}$ no está vacía) y normal. Ante todo, partiendo del hecho de que la región $\mathcal{K}$ no tiene rectas, deducimos que esta región tiene vértices, obligatoriamente. Al concepto de vértice le damos el siguiente sentido (cercano a la interpretación intuitiva de "vértice").

**Llamamos *vértice en la región* $\mathcal{K}$ al punto de esta región que no es punto interior con respecto a ningún segmento situado totalmente en $\mathcal{K}$**. En otras palabras, un vértice es un punto $A \in \mathcal{K}$, el cual es origen o extremo de cualquier segmento perteneciente a $\mathcal{K}$ que pasa por $A$ (véase las dos figuras siguientes), siendo el punto $A$ uno de los vértices (en la segunda figura, la región $\mathcal{K}$ es un segmento).




Explicaremos con más detalle por qué la región convexa $\mathcal{K}$ tiene vértices. Si $\mathcal{K}$ yace en una recta, entonces es un punto, un segmento o bien un rayo y el contenido de vértices en ella es evidente. Veamos los contornos de $\mathcal{K}$ cuando esta región no yace en una recta. En este caso, $\mathcal{K}$ está compuesta por segmentos y rayos (rectas completas, $\mathcal{K}$ no contiene). Es evidente que el extremo de cualquiera de estos segmentos y el origen de cualquier rayo serán los vértices de $\mathcal{K}$.

La determinación de los vértices de la región $\mathcal{K}$ no representa gran dificultad. Ante todo, observaremos que la $i$-ésima desigualdad del sistema (1) en el plano de coordenadas $xOy$ corresponde a un semiplano, cuya recta confín $l_i$ se determina por la ecuación:

$$a_i x + b_i y + c_1 = 0 \ (i = 1, 2, ..., m).$$

Por lo visto, el punto $A$ de la región $\mathcal{K}$ es vértice en aquel y solo en aquel caso en que pertenece a dos rectas confines diferentes. Acordaremos llamar *regular* a cualquier subsistema de dos ecuaciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 &= 0 \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_m x + b_m y + c_m &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

con la condición de que este subsistema tenga solamente una solución $(x, y)$.

Por la característica dada anteriormente a los vértices se deduce el siguiente procedimiento para hallar los vértices de la región $\mathcal{K}$. Para hallar todos los vértices, es preciso encontrar la solución de todos los subsistemas regulares del sistema (6) y elegir aquellas soluciones que satisfacen el sistema inicial (1).

Ya que el número de subsistemas regulares no supera $C_m^2$ (número de combinaciones de orden 2 de $m$ elementos), entonces el número de vértices de la región $\mathcal{K}$ tampoco puede ser superior. O sea, el número de vértices es finito.

**Observación.** De lo dicho anteriormente se deduce que si la región $\mathcal{K}$ de soluciones de un sistema normal no tiene ni un solo vértice, entonces esta región está vacía y el sistema no tiene soluciones (es incompatible).

**Ejemplo 1.** Hallar todos los vértices de la región $\mathcal{K}$ determinada por el sistema de desigualdades:

$$\left.\begin{aligned} x+y+1\geq 0\\ x-2y-2\geq 0\\ 2x-y-4\geq 0\end{aligned}\right\}$$

Resolviendo los subsistemas:

$$\left.\begin{aligned} x+y+1=0\\ x-2y-2=0\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned} x+y+1=0\\ 2x-y-4=0\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned} x-2y-2=0\\ 2x-y-4=0\end{aligned}\right\}$$

(todos ellos resultan regulares), hallamos tres puntos:

$$(0, -1), (1, -2), (2, 0)$$

de los cuales solo el segundo y el tercero satisfacen a todas las desigualdades dadas. Entonces, los vértices de la región $\mathcal{K}$ son los puntos:

$$A_1(1, -2) \text{ y } A_2(2, 0).$$

Volvamos al sistema (1). Sean:

$$A_1, A_2, \dots, A_p$$

todos los vértices de la región $\mathcal{K}$. El conjunto $\langle A_1, A_2, \dots, A_p\rangle$ es una cápsula convexa del sistema de puntos $A_1, A_2, \dots, A_p$ que también pertenece a $\mathcal{K}$, puesto que $\mathcal{K}$ es cápsula convexa. Pero entonces, según el lema 1, también el conjunto

$$\langle A_1, A_2, \dots, A_p\rangle + \mathcal{K}_0$$

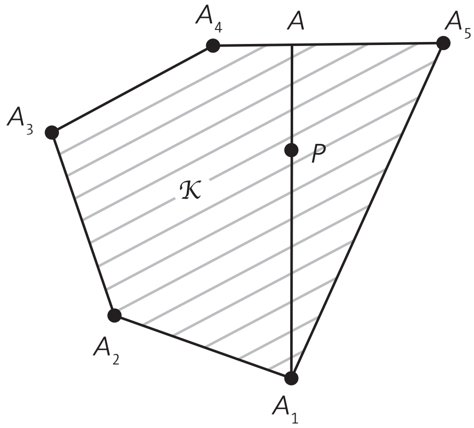
pertenece a $\mathcal{K}$. Demostraremos que esta suma, de hecho, coincide con $\mathcal{K}$, es decir, que es válido el siguiente teorema.

**Teorema.** Si un sistema de desigualdades es normal, entonces

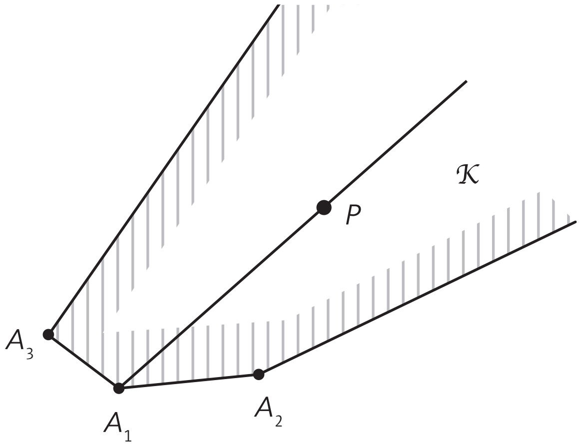
$$\mathcal{K} = \langle A_1, A_2, \dots, A_p\rangle + \mathcal{K}_0 \qquad (7)$$

siendo $A_1, A_2, \dots, A_p$ todos los vértices de la región $\mathcal{K}$.

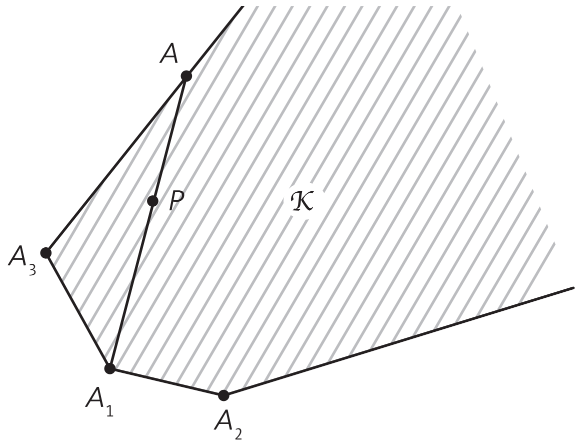
**Demostración.** Sea $P$ un punto arbitrario de la región $\mathcal{K}$ diferente de los vértices de esta región. La recta $\overline{A_1P}$ corta la región convexa $\mathcal{K}$, sea por un segmento $\overline{A_1A}$, como se representa en la figura siguiente,



o bien por un rayo cuyo origen es $A_1$, como se muestra abajo:




En el segundo caso, $P - A_1 \in \mathcal{K}_0$ (lema 2), por lo tanto, $P \in A_1 + \mathcal{K}_0$. En el primer caso, reflexionamos así: si el punto $A$ yace en la arista limitada $\overline{A_iA_j}$ de la región $\mathcal{K}$ (como en la primera figura de las dos anteriores), entonces $P$ pertenece a la cápsula convexa de puntos $A_1$, $A_i$, $A_j$.

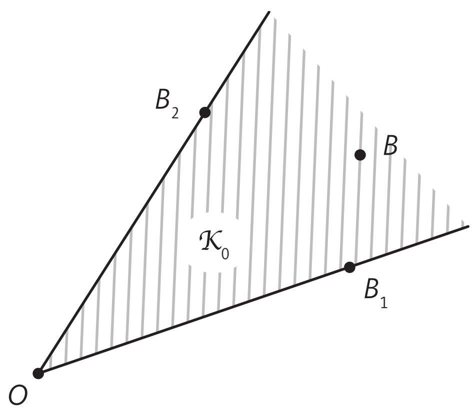



Si es que el punto $A$ yace en la arista ilimitada con origen en el vértice $A_i$ (véase la figura anterior), entonces, según el lema 1, tenemos que $A \in A_i + \mathcal{K}_0$, y por lo tanto, $P \in \langle A_1, A_i\rangle + \mathcal{K}_0$. Así pues, en todos los casos el punto $P$ resulta perteneciente al conjunto $\langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle + \mathcal{K}_0$. El teorema queda demostrado.

Puesto que el procedimiento de hallar los vértices nos es ya conocido, para una descripción completa de la región $\mathcal{K}$ queda solamente por saber cómo hallar la región $\mathcal{K}_0$. Esta última representa una región de soluciones del sistema normal y homogéneo (2). Pasemos a su descripción.

**3. Sistema de desigualdades normal y homogéneo (2).** Cada una de las desigualdades (2) determina un semiplano, cuya recta confín pasa por el origen de las coordenadas. La parte común de estos semiplanos es $\mathcal{K}_0$.

En este caso, entre las rectas confines hay por lo menos dos de ellas diferentes [¡pues el sistema (2) es normal!]. Por consiguiente, $\mathcal{K}_0$ o bien coincide con el origen de las coordenadas ($x = 0$, $y = 0$), o bien es un rayo con su vértice en el origen de las coordenadas, o bien representa cierto ángulo menor que 180°, con el vértice en el origen de las coordenadas.



Conociendo dos puntos $B_1$ y $B_2$, yacentes en distintos lados de este ángulo (véase la figura anterior), todos los demás puntos de dicho ángulo se expresan de la forma

$$B = t_1B_1 + t_2B_2 \tag{8}$$

siendo $t_1$ y $t_2$ números arbitrarios no negativos. Hallar los puntos $B_1$ y $B_2$ no es difícil si se tiene en cuenta que cada uno de ellos: a) pertenece a $\mathcal{K}_0$, es decir, satisface el sistema (2); y b) yace en el contorno de $\mathcal{K}_0$, es decir, satisface a una de las ecuaciones (3). Si $\mathcal{K}_0$ es un rayo, entonces en lugar de (8) tenemos

$$B = tB_1 \tag{9}$$

siendo $B_1$ cualquier punto de este rayo (diferente de su origen) y $t$ un número arbitrario no negativo.

**Ejemplo 2.** Hallar la región $\mathcal{K}_0$ de soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} x + y &\geq 0 \\ x - 2y &\geq 0 \\ 2x - y &\geq 0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

y también la región $\mathcal{K}$ de soluciones del sistema dado en el ejemplo 1.

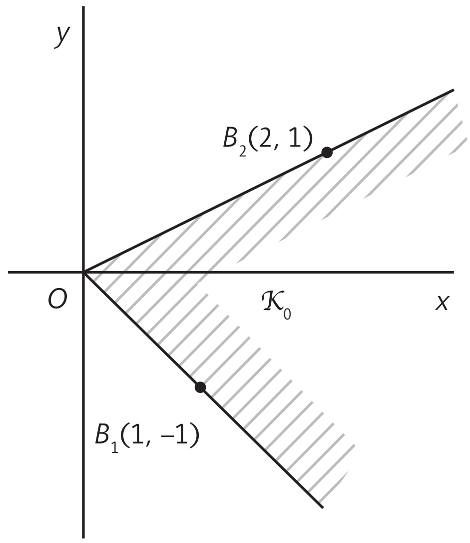
**Resolución.** El sistema (10) es normal: la única solución del sistema homogéneo de ecuaciones correspondiente

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x - 2y &= 0 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

es (0, 0).

Elijamos un punto cualquiera que satisfaga la primera de las ecuaciones (11) [pero diferente de (0, 0)]; por ejemplo, el punto $C$ (–1, 1). Una simple comprobación nos convence de que el punto $C$ no satisface todas las desigualdades (10); por consiguiente, ni este, ni otro punto cualquiera del rayo $\overline{OC}$ (diferente del origen $O$) pertenece a $\mathcal{K}_0$. Examinando el punto $-C$ [es decir, el punto (1, –1)] hallamos que este pertenece a $\mathcal{K}_0$, o sea, $B_1 = (1, -1)$. El punto (2, 1) satisface la segunda ecuación; este punto también es solución del sistema (10), por lo tanto, $B_2 = (2, 1)$. La región $\mathcal{K}_0$ –como muestra la figura siguiente– está compuesta por los puntos:

$$t_1B_1 + t_2B_2 = t_1(1, -1) + t_2(2, 1) = (t_1 + 2t_2, -t_1 + t_2),$$




siendo $t_1$ y $t_2$ números arbitrarios no negativos.

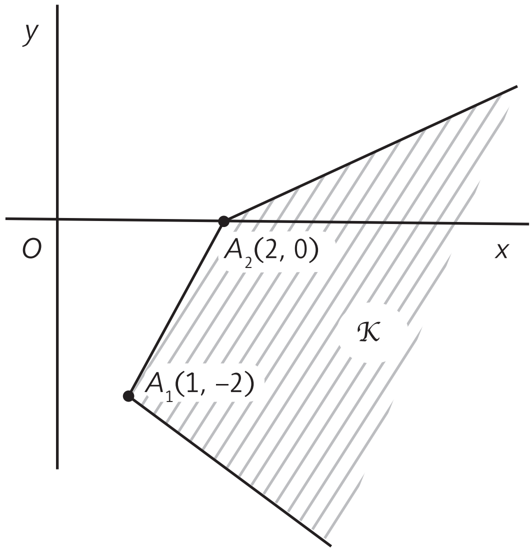
Dirigiéndonos al sistema de desigualdades dado en el ejemplo 1, observamos que el sistema homogéneo de desigualdades que le corresponde es, precisamente, (10). Por el teorema demostrado anteriormente, tenemos

$$\mathcal{K} = \langle A_1, A_2 \rangle + \mathcal{K}_0,$$

donde $A_1(1, -2)$ y $A_2(2, 0)$ son vértices de la región $\mathcal{K}$. Así pues: $\mathcal{K}$ está formada por los puntos:

$$s(1, -2) + (1 - s)\,(2, 0) + (t_1 + 2t_2, -t_1 + t_2) = (2 - s + t_1 + 2t_2, -2 - t_1 + t_2)$$

como se muestra en la figura siguiente

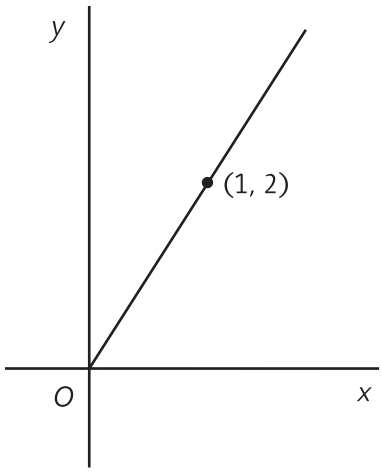



siendo $s$ cualquier numero del intervalo $[0, 1]$ y $t_1$, $t_2$ cualesquiera números no negativos.

**Ejemplo 3.** Hallar la región de soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y \geq 0 \\ -4x + 2y \geq 0 \\ x + y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Procediendo del mismo modo que en el ejemplo 2, hallamos solamente un rayo, ver la figura de abajo:




$$B = t(1, 2) = (t, 2t) \qquad (t \geq 0)$$

**Ejemplo 4.** Hallar la región de soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y \geq 0 \\ x + y \geq 0 \\ -3x + y \geq 0 \end{array}\right\}$$

En este caso, ninguna de las ecuaciones

$$2x - y = 0$$

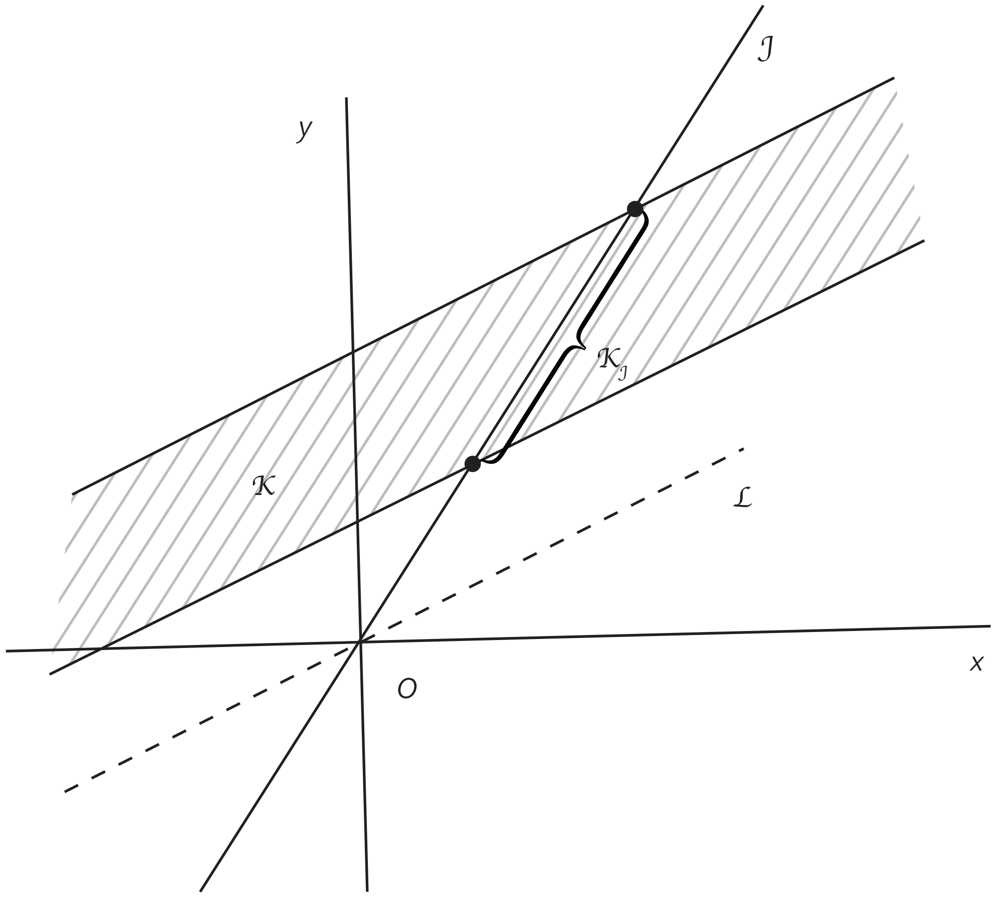
$$x + y = 0$$

$$-3x + y = 0$$

tiene soluciones [excepto (0, 0)] que satisfagan todas las desigualdades dadas. La región $\mathcal{K}_0$ está compuesta por un punto (0, 0) que es el origen de las coordenadas.

**4. Caso en que el sistema de desigualdades (1) no es normal.** Esto significa que la región de soluciones $\mathcal{L}$ del sistema homogéneo de ecuaciones (3) contiene no solo el origen de las coordenadas. Por lo tanto, todas las ecuaciones (3) determinan una misma recta en un plano, y esta recta es $\mathcal{L}$.

En conformidad con el lema 1, la región $\mathcal{K}$ contiene, junto con cada uno de sus puntos $P$, la recta $P + \mathcal{L}$ (recta que pasa por $P$ paralela a $\mathcal{L}$). Veamos cualquier recta $\mathcal{J}$ no paralela a $\mathcal{L}$. Conociendo que puntos de la recta $\mathcal{J}$ pertenecen a la región $\mathcal{K}$ (designaremos al conjunto de estos puntos por $\mathcal{K}_{\mathcal{J}}$), podemos hallar la propia región $\mathcal{K}$ puesto que, entonces, $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\mathcal{J}} + \mathcal{L}$ (figura siguiente).




La ecuación de la recta $\mathcal{L}$ es $a_1x + b_1y = 0$. En esta ecuación, uno de los coeficientes, $a_1$ o $b_1$, es diferente de cero; sea, por ejemplo, $b_1 \neq 0$. Entonces, en calidad de recta $\mathcal{J}$ no paralela a $\mathcal{L}$, se puede tomar el eje $y$ (su ecuación es $x = 0$). En este caso, el conjunto $\mathcal{K}_{\mathcal{J}}$ (designémoslo ahora por $\mathcal{K}_y$) es parte del eje y situado dentro de $\mathcal{K}$. Para hallar este conjunto se debe considerar en el sistema (1) que $x = 0$. Entonces tendremos el sistema de desigualdades

$$\left.\begin{array}{l} b_1 + c_1 \geq 0 \\ b_2 + c_2 \geq 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_n + c_n \geq 0 \end{array}\right\} \qquad (12)$$

con una incógnita $y$, cuya resolución no presenta dificultad.

Fijémonos en que el sistema (12), considerado como un sistema de desigualdades con una incógnita, será ya normal pues, de lo contrario, el sistema homogéneo correspondiente tendría solución nula $y^*$, y entonces el sistema (3) tendría solución $(0, y^*)$ no perteneciente a $\mathcal{L}$.

Observemos que el conjunto $\mathcal{K}_y$ puede ser un conjunto vacío (entonces $\mathcal{K}$ también está vacío), un punto, un segmento o un rayo (pero no de todo el eje $y$, pues de lo contrario $\mathcal{K}$ es todo el plano, lo cual es imposible). Hallando este conjunto, determinamos la región $\mathcal{K}$, ya que

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_y + \mathcal{L} \qquad (13)$$

(si $\mathcal{L}$ no es paralela al eje $y$).

**Ejemplo 5.** Hallar la región $\mathcal{K}$ de soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} x+y-1 &\geq 0 \\ -x-y+2 &\geq 0 \\ 2x+2y+3 &\geq 0 \end{aligned}\right\}$$

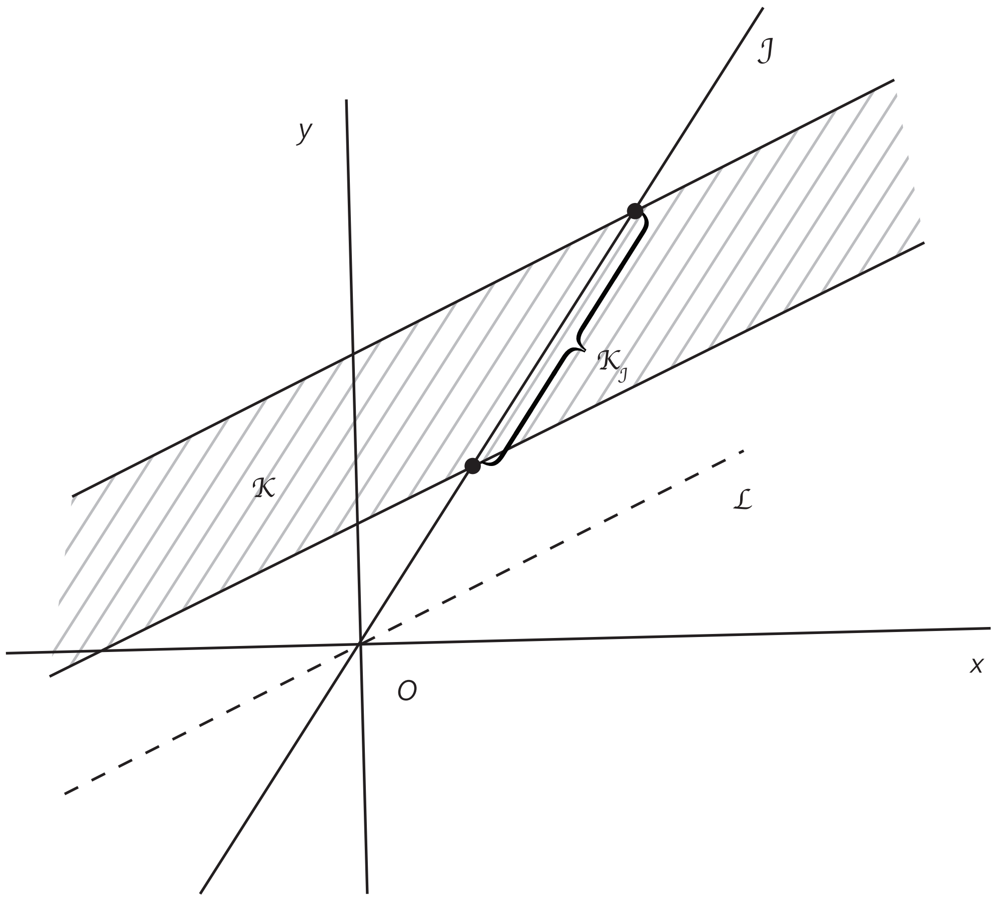
Es fácil ver que este sistema no es normal y que $\mathcal{L}$ es una recta $x + y = 0$ (no paralela al eje $y$). Suponiendo que $x = 0$, obtenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} y-1 &\geq 0 \\ -y+2 &\geq 0 \\ 2y+3 &\geq 0 \end{aligned}\right\}$$

por el cual se ve que $\mathcal{K}_y$, intersección de $\mathcal{K}$ con el eje y, es un segmento con los extremos $C_1(0, 1)$ y $C_2(0, 2)$. Es decir, $\mathcal{K}$ es un conjunto de puntos de la forma

$$(0, y) + (x, -x) = (x, y - x),$$

siendo $x$ número arbitrario, e $y$ cualquier número en el intervalo de 1 a 2 (véase la figura siguiente).




Para finalizar, nos detendremos brevemente en un teorema, el cual deriva de los resultados obtenidos anteriormente. En el caso bidimensional que analizamos ahora (es decir, cuando todo transcurre en un plano) este teorema no causa gran impresión y lo más justo sería considerarlo como punto de partida para generalizar el caso "$n$-dimensional". Esto se analiza más adelante.

**Teorema.** Cualquier región poligonal convexa (no vacía) $\mathcal{K}$ en un plano puede ser representada en forma de suma

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle + \langle B_1, B_2, \ldots, B_q\rangle. \qquad (14)$$

El primer sumando de esta suma es una cápsula convexa de cierto sistema de puntos$A_1, A_2, \ldots, A_p$; el segundo, un conjunto de puntos de la forma $t_1B_1 + t_2B_2 + \ldots, t_qB_q$, siendo $t_1, t_2, \ldots, t_q$ números arbitrarios no negativos.

La demostración de este teorema puede darse en pocas palabras. Veamos el sistema de desigualdades que determina a $\mathcal{K}$. Si este sistema es normal, se cumple la ecuación (7); teniendo en cuenta que, en esta ecuación, $\mathcal{K}_0$ es uno de los conjuntos de la forma $(B_1, B_2)$, $(B_1)$ o $(O)$ (origen de coordenadas), hallamos que, cuando el sistema es normal, nuestra afirmación es válida. Cuando el sistema no es normal, se cumple la ecuación (13), de la cual también se deduce la determinación de $\mathcal{K}$ en la forma necesaria (¿por qué?).

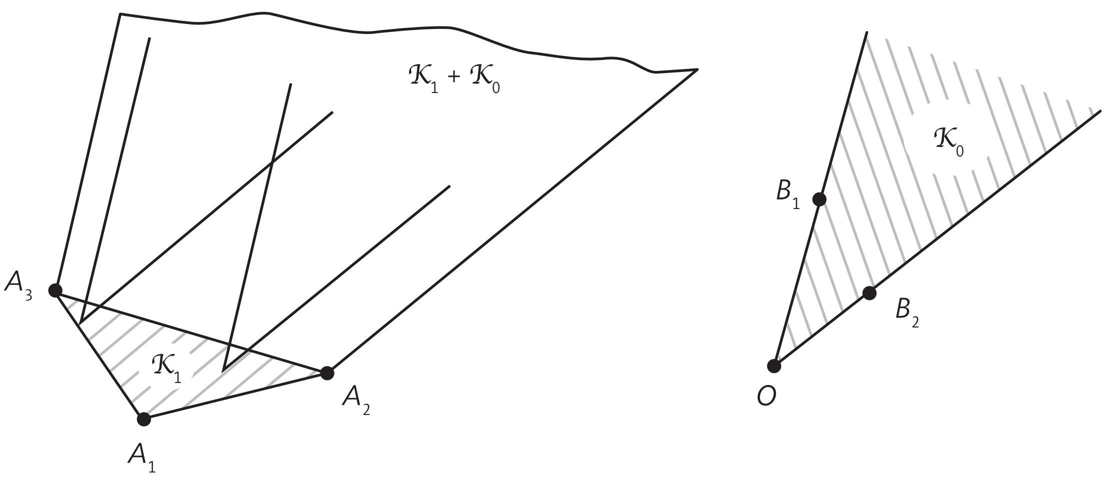
Observaremos que si todos los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_p$ coinciden con el origen de las coordenadas $O$, entonces también el conjunto $\langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle$ coincide con $O$. En este caso, de la suma (14) quedará solamente el segundo sumando. En el caso en que los puntos $B_1, B_2, \ldots, B_q$ coinciden con $O$, el conjunto $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$ también coincide con $O$ y de la suma (14) quedará solamente el primer sumando. El teorema recíproco también se cumple, si bien con cierta objeción.

**Teorema.** Cualquier conjunto de la forma

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle + (B_1, B_2, \ldots, B_q)$$

en un plano es todo el plano, o bien cierta región poligonal convexa en dicho plano.

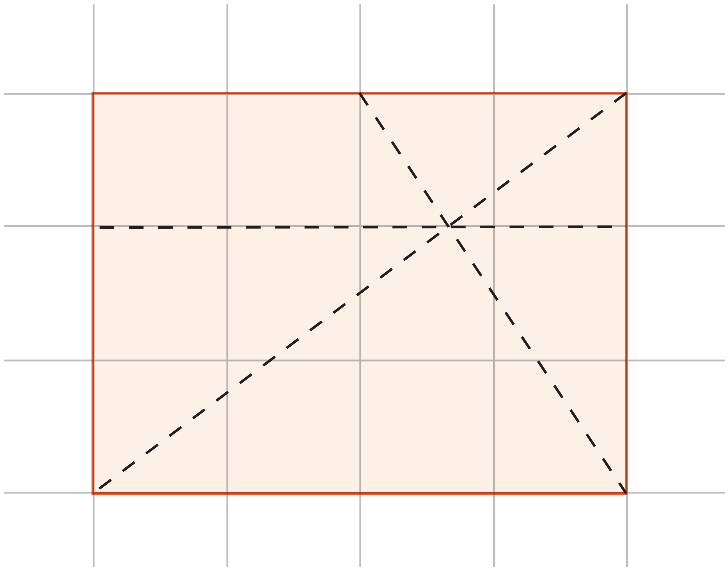
La demostración es lo suficientemente evidente. El segundo sumando, es decir, la región: $\mathcal{K}_0 = (B_1, B_2, \ldots, B_q)$ es o bien todo el plano, o bien un semiplano, o un ángulo (menor que 180°), o un rayo, o un punto (origen de las coordenadas). El primer sumando: $\mathcal{K}_1 = \langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle$ representa cierto polígono convexo. El conjunto $\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_0$ puede obtenerse mediante traslaciones paralelas de $\mathcal{K}_0$ a los segmentos $\overline{OK_1}$ (siendo $K_1$ cualquier punto de $\mathcal{K}_1$) y tomando la unión de los conjuntos obtenidos (véanse las figuras siguientes):




No es difícil comprobar que, de tal forma, se obtiene todo el plano (así será siendo $\mathcal{K}_0$ todo el plano), o bien cierta región poligonal convexa en dicho plano.

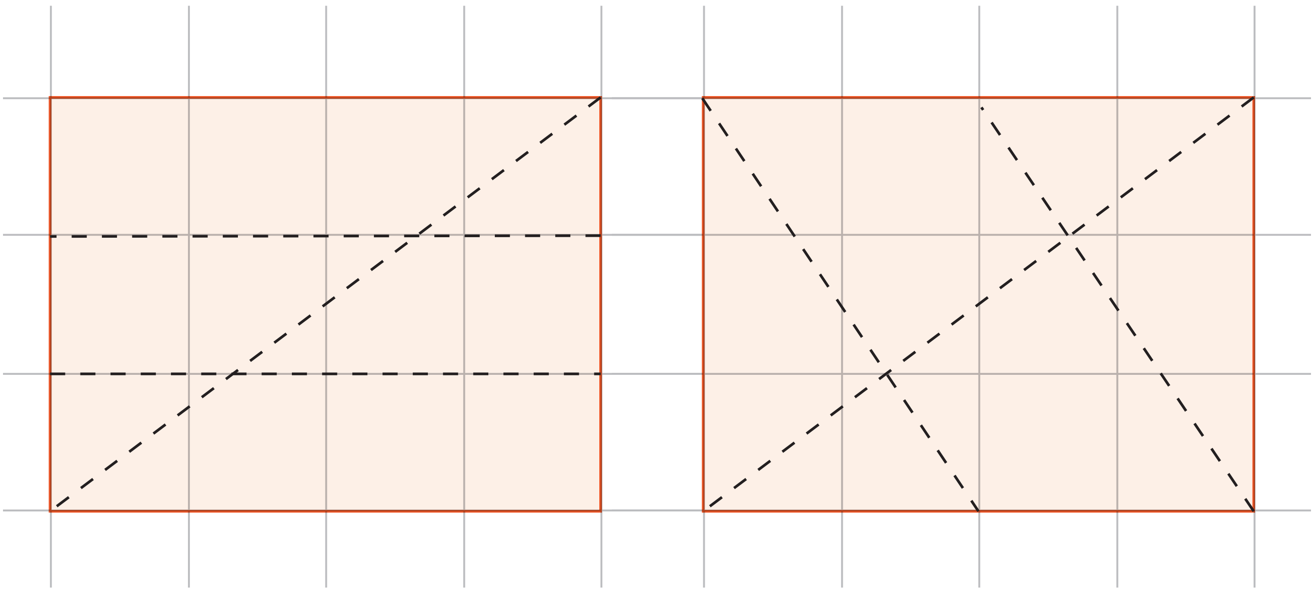
## Respuesta del Nº 10

Usando la información de la figura, justificar por qué los tres segmentos son concurrentes.



**Solución**

Por el teorema de Thales, podemos ver que la diagonal del rectángulo se divide en tres partes iguales de dos formas diferentes.



Esto muestra que los dos segmentos dados, que cortan a la diagonal del rectángulo, lo hacen en un mismo punto; luego, los tres segmentos son concurrentes.

## Respuesta del Nº 11

Cuatro esquinas de una ciudad son los vértices de un cuadrado. Para ir desde un vértice de este cuadrado hasta el vértice opuesto, hay que caminar 4 cuadras al oeste y 2 cuadras al norte. ¿A cuántas manzanas equivale el área de este cuadrado?

**Solución**

Si lo representamos en una cuadrícula y usamos la fórmula de Pick, podemos ver que su área equivale a 10 manzanas.