# Cap. 6.1.- MODULACIÓN ANGULAR

La FM se consideró muy al principio del desarrollo de las radiocomunicaciones. Inicialmente, se pensó que la FM podría permitir un ancho de banda de transmisión reducido en comparación con la AM. En 1922 John Renshaw Carson (1887-1940) refutó lo anterior mediante pruebas experimentales y también con cálculos matemáticos.
Carson no observó que la FM tenga una ventaja sobre la AM en términos de la relación señal a ruido. Edwin Armstrong (sí, el mismo Armstrong que inventó el receptor superheterodino) observó lo anterior, y en 1936 propuso un sistema práctico de FM. La radiodifusión en FM comenzó en Estados Unidos en 1939, pero experimentó un retroceso en 1944 cuando su asignación de frecuencia de 42 a 50 MHz se desplazó de manera abrupta a su intervalo actual de 88 a 108 MHz. La radiodifusión en FM poco a poco se hizo popular, gracias a sus ventajas con respecto al ruido y a la fidelidad sobre la AM. En la actualidad hay más radioescuchas de FM que de AM.
Sin embargo, Armstrong no se benefició del éxito de la radiodifusión en FM. Se pasó el resto de su vida involucrado en juicios legales en un intento por recibir regalías por sus inventos y, finalmente, destrozado, se suicidó en 1954.

En una señal analógica pueden variar tres propiedades: la amplitud, la frecuencia y la fase. Anteriormente tratamos sobre la modulación en amplitud. Este texto, trataremos sobre la *modulación en frecuencia (FM) y* la *modulación en fase (PM)* La modulación en frecuencia y en fase, son ambas formas de la *modulación angular.* Desdichadamente, a ambas formas de la modulación angular se les llama simplemente FM cuando, en realidad, existe una diferencia clara (aunque sutil), entre las dos. Existen varias ventajas en utilizar la modulación angular en vez de la modulación en amplitud, tal como la reducción de ruido, la fidelidad mejorada del sistema y el uso más eficiente de la potencia. Sin embargo, FM y PM, tienen varias desventajas importantes, las cuales incluyen requerir un ancho de banda extendida y circuitos más complejos, tanto en el transmisor, como en el receptor.

La modulación angular fue introducida primero en 1931, como una alternativa a la modulación en amplitud. Se sugirió que la onda con modulación angular era menos susceptible al ruido que AM y, consecuentemente, podía mejorar el rendimiento de las comunicaciones de radio. El mayor E. H. Armstrong desarrolló el primer sistema de radio de FM con éxito, en 1936 (quien también desarrolló el receptor superheterodino) y, en julio de 1939, la primera radiodifusión de señales de FM programada regularmente comenzó en Alpine, New Jersey. Actualmente, la modulación angular se usa extensamente para la **radiodifusión de radio comercial, transmisión de sonido de televisión, radio móvil de dos sentidos, radio celular y los sistemas de comunicaciones por microondas y satélite.**

Los propósitos de este texto, son introducir a los conceptos básicos de la modulación en frecuencia y en fase y cómo se relacionan uno con otro, mostrar algunos de los circuitos más usados comúnmente para producir las ondas con modulación angular y comparar el rendimiento de la modulación angular con la modulación en amplitud.
Tanto la modulación de frecuencia (FM) como la modulación de fase (PM) se utilizan mucho en sistemas de comunicación. La FM es más familiar en la vida cotidiana, puesto que se utiliza de forma extensa para la radiodifusión. La FM se utiliza también para la señal de sonido en la televisión, para sistemas de radio bidireccionales fijos y móviles, para comunicaciones por satélite y para sistemas de telefonía celular, por nombrar sólo algunas de sus aplicaciones más comunes.
Aunque la PM es menos familiar, se utiliza mucho en comunicaciones de datos. También se utiliza en algunos transmisores de FM como un paso intermedio en la generación de FM. La FM y la PM están estrechamente relacionadas desde el punto de vista matemático, y es muy fácil cambiar de una a la otra.
La ventaja más importante de la FM o de la PM sobre la AM es la posibilidad de una relación señal a ruido bastante mejorada. Se paga por esto con un incremento en el ancho de banda: una señal FM podría ocupar varias veces tanto ancho de banda como el requerido para una señal AM. Al parecer, aquí podría haber una contradicción, y que, como se encontró en AM, disminuir el ancho de banda mejoró la relación señal a ruido. En breve se resolverá esta aparente contradicción.
En el análisis de la modulación de la amplitud, se encontró que la amplitud de la señal modulada varió según la amplitud instantánea de la señal modulante. En FM, la frecuencia de la señal modulada varía con la amplitud de la señal modulante. En PM, la fase varía directamente con la amplitud de la señal modulante. Es importante recordar que en todos los tipos de modulación, la amplitud de la señal modulante es la que varía o modifica la onda portadora.

En contraposición a la AM, la amplitud y la potencia de una señal FM o PM no cambian con la modulación. Por consiguiente, la señal FM no tiene una envolvente que reproduzca la modulación. Esto en realidad es una ventaja: un receptor de FM no tiene que responder ante las variaciones de amplitud y, por lo tanto, ignora el ruido hasta cierto grado. De manera similar, con los transmisores de FM se pueden utilizar amplificadores Clase C, puesto que no es importante la linealidad de la amplitud. La modulación puede llevarse a cabo a niveles bajos de potencia.

La *modulación angular* resulta cuando el ángulo de fase (θ), de una onda sinusoidal, varía con respecto al tiempo sin tocar los otros parámetros. La onda con modulación angular se muestra matemáticamente como

$$y(t) = V_c \cos [\cos \omega_c t + \theta(t)] \qquad (6\text{-}1)$$

en donde *y(t) = onda con modulación angular;*
$V_c$ = *amplitud pico de la portadora (voltios)*
$\omega_c$ = *frecuencia en radianes de la portadora (es decir velocidad angular,* $2\pi f_c(t)$
$\theta(t)$ = *desviación instantánea de fase (radianes)*

Con la modulación angular, es necesario que θ(t) sea una función de la señal modulante. Por lo tanto, si $v_m(t)$ es la señal modulante, la modulación angular se muestra matemáticamente como

$$\theta(t) = f[v_m(t)] \qquad (6\text{-}2)$$

en donde $v_m(t) = V_m \text{sen}(\omega_m t)$
$\omega_m$ = velocidad angular de la señal modulante (radianes/segundo)
$f_m$ = frecuencia de la señal modulante (hertz)
$V_m$ = amplitud pico de la señal modulante (voltios)

En esencia, la diferencia entre la modulación en frecuencia y en fase está en cuál propiedad de la portadora (la frecuencia o la fase) está variando directamente por la señal modulante y cuál propiedad está variando indirectamente. Siempre que la frecuencia de la portadora está variando, la fase también se encuentra variando, y viceversa. Por lo tanto, FM y PM, deben ocurrir cuando se realiza cualquiera de las formas de la modulación angular. Si la frecuencia instantánea de la portadora varía directamente de acuerdo con la señal modulante, resulta en una señal de FM. Si la fase de la portadora varía directamente de acuerdo con la señal modulante, resulta en una señal PM. Por lo tanto, la FM directa es la PM indirecta y la PM directa es la FM indirecta. La modulación en frecuencia y en fase pueden definirse de la siguiente manera:

*Modulación en frecuencia* directa (FM): variando la frecuencia de la portadora de amplitud constante directamente proporcional, a la amplitud de la señal modulante, con una velocidad igual a la frecuencia de la señal modulante.

*Modulación en fase* directa (PM): variando la fase de una portadora con amplitud constante directamente proporcional, a la amplitud de la señal modulante, con una velocidad igual a la frecuencia de la señal modulante.

La figura 6-1 muestra la forma de onda para una portadora sinusoidal para la cual la modulación angular está ocurriendo. La frecuencia y la fase de la portadora están cambiando proporcionalmente, con la amplitud de la señal modulante ($v_m$) El cambio en frecuencia ($\Delta f$) se llama *desviación en frecuencia y* el cambio en fase (Δθ) se llama *desviación en fase*. La desviación en frecuencia es el desplazamiento relativo de la frecuencia de la portadora en hertz y la desviación en fase es el desplazamiento angular relativo (en radianes), de la portadora, con respecto a una fase de referencia. La magnitud de la desviación en frecuencia y en fase es proporcional a la amplitud de la señal modulante ($v_m$) y la velocidad en que la desviación ocurre es igual a la frecuencia de la señal modulante ($f_m$).

Siempre que el periodo (T) de una portadora sinusoidal cambia, también cambia su frecuencia y, si los cambios son continuos, la onda ya no es una frecuencia única. Se mostrará que la forma de onda resultante abarca la frecuencia de la portadora original (a veces llamada la *frecuencia de reposo de la portadora*) y un número infinito de pares de frecuencias laterales desplazadas en ambos lados de la portadora por un número entero como múltiplo de la frecuencia de la señal modulante.

La figura 6-1 muestra una portadora sinusoidal en la cual la frecuencia (f) será cambiada *(desviada),* en un periodo de tiempo. La porción ancha de la forma de onda corresponde al cambio de pico-a-pico en el periodo de la portadora

($\Delta T$) El periodo mínimo ($T_{min}$) corresponde a la máxima frecuencia *(fmáx.)* y el periodo máximo ($T_{máx}$) corresponde a la frecuencia mínima ($f_{min}$) La desviación en frecuencia pico-a-pico se determina simplemente midiendo la diferencia entre las frecuencias mínimas y máximas ($\Delta f_{p\text{-}p} = 1/T_{min} - 1/T_{máx}$)

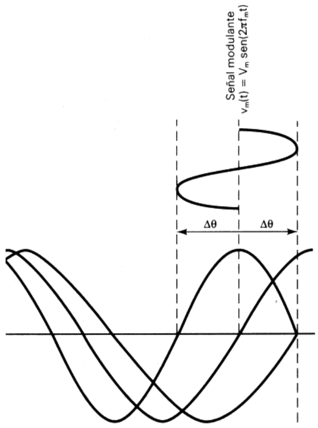



**Figura 6-1** Frecuencia variante con el tiempo.

En la figura 6.2 se muestra la FM con una onda cuadrada que modula una portadora de onda seno. En la figura 6.2(a) se ilustra la portadora sin modulación y la señal modulante. En la figura 6.2(b) se observa la señal modulada en el dominio del tiempo, como se vería en un osciloscopio. En aras de la claridad se exageró la cantidad del cambio de frecuencia. La amplitud permanece como antes, y los cambios de frecuencia se observan en el cambio en los intervalos de tiempo entre los cruces por cero de las formas de onda.
Resultan de interés las dos secciones siguientes. En la figura 6.2(c) se muestra cómo varía con el tiempo la frecuencia de la señal de acuerdo con la amplitud de la señal modulante. En la figura 6.2(c) se observa cómo cambia la fase con el tiempo. Para esta figura, se utiliza como referencia el ángulo de fase de la portadora no modulada. Cuando la frecuencia es mayor que la frecuencia de la portadora, el ángulo de fase aumenta poco a poco y, cuando la frecuencia es menor que la frecuencia de la portadora, la fase se empieza a decrementar.

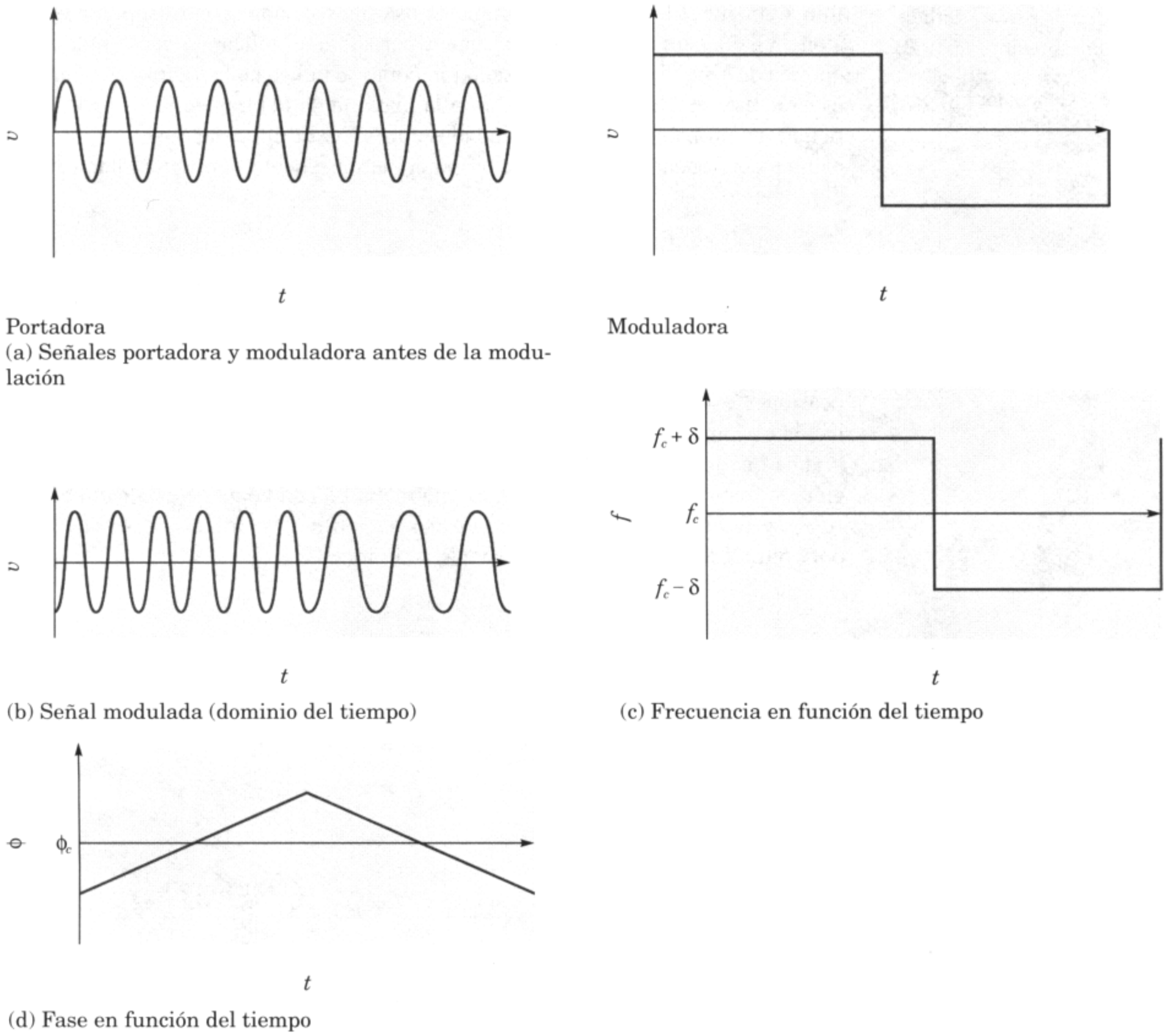



***Figura 6.2*** *Modulación de frecuencia de una portadora sinusoidal por medio de una onda cuadrada*

De la figura 6.2 se obtiene una inferencia más. Si bien la portadora sin modulación es una sinusoide, no lo es la señal modulada: una onda *"seno"* que *cambia* su frecuencia no es en realidad una onda seno. En el análisis de la AM, se encontró que cambiar la amplitud de una onda seno generó frecuencias extra llamadas frecuencias laterales o bandas laterales. Lo anterior también sucede en FM. De hecho, para una señal de FM, en teoría la cantidad de conjuntos de bandas laterales es *infinita*.

Existen muchas formas de generar FM, algunas de las cuales se describen deespués. El método más simple es usar un oscilador controlado por voltaje o tensión (VCO) para generar la frecuencia portadora y aplicar la señal modulante a la entrada de señal de control del oscilador, como se indica en la figura 4.2. Como se podría esperar, esto es algo muy simple para la mayoría de los transmisores prácticos; en particular, es probable que la estabilidad de un VCO de funcionamiento libre no sea suficientemente buena. No obstante, proporciona un modelo conceptual para utilizarlo por el momento.

## Desviación de frecuencia

Suponga que la frecuencia de la portadora es $f_c$. La modulación causará que la frecuencia de la señal varíe (se desvíe) de su valor original. Si el diseño del sistema de modulación es adecuado, esta desviación será proporcional a la amplitud de la señal modulante. En ocasiones esto se conoce como modulación lineal, aunque ningún proceso de modulación es completamente lineal. La FM puede llamarse lineal sólo en el sentido de que la gráfica que relaciona la amplitud instantánea de la señal modulante $e_m$ con la desviación de *frecuencia instantánea* $\Delta f$, es una recta. La pendiente de esta recta es la relación $\Delta f/e_m$, y representa la sensibilidad de desviación del modulador, en unidades de hertz por voltio. Llamémosle a esta constante $k_f$. Entonces,

$$k_f = \frac{\Delta f}{e_m}$$

Esto se demuestra en la figura 6.3.

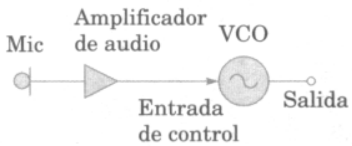



***Figura 6.3.- Diagrama simplificado de un generador de FM***

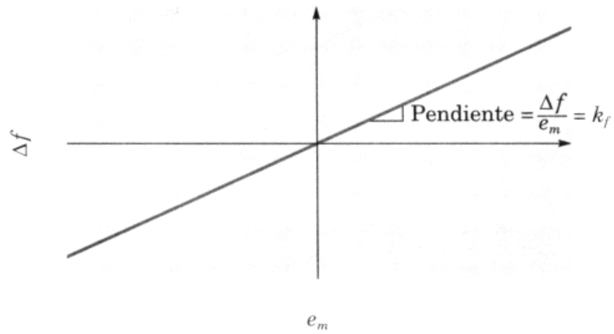



***Figura 6-4.-*** *Sensibilidad de desviación en un transmisor de FM*

## *Análisis matemático*

# MODULACIÓN ANGULAR

# Explicación de las expresiones

A diferencia de lo que ocurre en la transmisión de AM, en el proceso de Modulación Angular, la envolvente de la señal de RF permanece constante mientras lo que varía es la **Frecuencia Instantánea.**
Suponemos tener una portadora del tipo

$$y_c = A_c \cos(\omega_c t + \phi) = A_c \cos\theta$$

Definimos la *Frecuencia Angular Instantánea*

$$\omega_i = \frac{d\theta}{dt}$$

Eligiendo adecuadamente el origen $t=0$, se puede hacer que $\varphi=0$, entonces tendremos

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_c \quad \textit{(sin modulación, la portadora sola)}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_c + KA_m sen\omega_m t \quad \textit{(con modulación)}$$

observamos en las fórmulas que la portadora instantánea se ve afectada por una señal modulante, porque $\phi$ de la expresión de la portadora es ahora una función variable con el tiempo.

$$v_m(t) = A_m \cos \omega_m t$$

Como la portadora se va a desviar proporcionalmente al nivel de amplitud de la modulante, definimos ahora una desviación máxima de frecuencia (se dará cuando *sen* $w_m t = 1$

$$\Delta\omega = KA_m \; tambien \; \Delta f = \frac{KA_m}{2\pi}$$

Concluimos entonces que la desviación o cambio de frecuencia instantánea provocada por la modulante es únicamente función de la *Amplitud de la Señal de Audio*. Esta variación de frecuencia se realizará con una *velocidad* proporcional a la frecuencia de la señal modulante.

Como $\quad \omega_i = \frac{d\theta}{dt}$

Retornamos integrando

$$\theta = \int_0^t \omega_i dt$$

$$\theta(t) = \omega_c t + \frac{KA_m}{\omega_m} \cos \omega_m t + C$$

Eliminamos la constante C con una conveniente elección del tiempo. La expresión para una onda modulada en frecuencia será entonces, reemplazando

$$y(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + \frac{KA_m}{\omega_m} \cos \omega_m t\right]$$

Y en una forma más general

$$y(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + K \int f_m(t) dt\right]$$

Donde $f_m(t)$ es la señal modulante.

Observando éstas dos últimas expresiones, vemos que si bien el proceso de modulación en frecuencia es el resultado final de una modificación de la **fase** de la onda, debemos tener en cuenta que dicha modificación resulta según la **integral** de la modulante.

Dicho en otras palabras, para generar FM podemos usar dos métodos:

1. Modificar directamente la frecuencia de la portadora (oscilador) proporcionalmente a las variaciones de amplitud de la modulante.

2. Trabajar sobre la **fase** de la portadora (aparte del oscilador) con la integral de la señal modulante.

Aquí también definimos nuestro *índice de modulación.*

$$m_f = \frac{KA_m}{\omega_m} = \frac{\Delta\omega_{máx}}{\omega_m} = \frac{2\pi\Delta f_c}{2\pi f_m} = \frac{\Delta f_c}{f_m}$$

Luego, la expresión general nos quedará

$$y_c(t) = A_c \cos\left(\omega_c t + m_f \cos\omega_m t\right)$$

De esta expresión siguen todas las deducciones de este apunte.

**EJEMPLO 4.1** Un modulador de FM tiene $k_f = 30$ kHz/V y opera a una frecuencia portadora de 175 MHz. Determine la frecuencia de salida para un valor instantáneo de la señal moduladora igual a:

(a) 150 mV (b) −2 V

**Solución.** La ecuación (4.2) se utiliza para ambas partes de la pregunta.

(a) $$\begin{aligned} f_{sig} &= (175 \times 10^6\ \text{Hz}) + (30 \times 10^3\ \text{Hz/V})(150 \times 10^{-3}\ \text{V}) \\ &= 175.0045 \times 10^6\ \text{Hz} \\ &= 175.0045\ \text{MHz} \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} f_{sig} &= (175 \times 10^6\ \text{Hz}) + (30 \times 10^3\ \text{Hz/V})(-2\ \text{V}) \\ &= (175 \times 10^6\ \text{Hz}) - (30 \times 10^3\ \text{Hz/V})(2\ \text{V}) \\ &= 174.94 \times 10^6\ \text{Hz} \\ &= 174.94\ \text{MHz} \end{aligned}$$

En el análisis de AM, resultó conveniente suponer una sinusoide para la señal modulante. Este tratamiento puede generalizarse para abarcar cualquier señal periódica por medio de técnicas de Fourier.

**EJEMPLO 4.3** Un transmisor de radiodifusión de FM opera a su desviación máxima de 75 kHz. Determine el índice de modulación para una señal modulante sinusoidal con una frecuencia de:

(a) 15 kHz (b) 50 Hz

**Solución**

(a) $$\begin{aligned} m_f &= \frac{\delta}{f_m} \\ &= \frac{75\ \text{kHz}}{15\ \text{kHz}} \\ &= 5.00 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} m_f &= \frac{\delta}{f_m} \\ &= \frac{75 \times 10^3\ \text{Hz}}{50\ \text{Hz}} \\ &= 1500 \end{aligned}$$

## *Aplicado a la modulación de fase (PM)*

La PM se produce variando la fase instantánea de la portadora a una velocidad que es proporcional a la frecuencia de la modulación y por una cantidad que es proporcional a la amplitud instantánea de la modulante.
La amplitud de la portadora permanece constante e inalterable.

La señal modulante tiene la forma:

$$f_m = A_m sen\omega_m t$$

Recordamos la expresión de la portadora:

$$y_c = A_c \cos(\omega_c t + \phi) = A_c \cos\theta$$

Si al ángulo *Φ* le sumo un ángulo que sea proporcional a la señal modulante, estaremos modulando en **fase:**

$$y_c(t) = A_c\left[\cos(\omega_c t + \phi + KA_m sen\omega_m t)\right]$$

Si elegimos convenientemente el tiempo, podemos hacer *Φ=0*.
Definimos un índice de modulación

$$m_\phi = KA_m$$

Y la expresión general nos quedará

$$y_{PM}(t) = A_c \cos(\omega_c t + m_\phi sen\omega_m t)$$

Si comparamos con la expresión de FM

$$y(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + K\int f_m(t)dt\right]$$

Observamos que las dos expresiones son muy similares.
La desviación máxima de fase la podemos escribir

$$\Delta\phi_{máx} = KA_m$$

La frecuencia instantánea será:

$$\omega_i = \frac{d\theta_i}{dt} = \omega_c + KA_m\omega_m \cos\omega_m t$$

$$Entonces$$

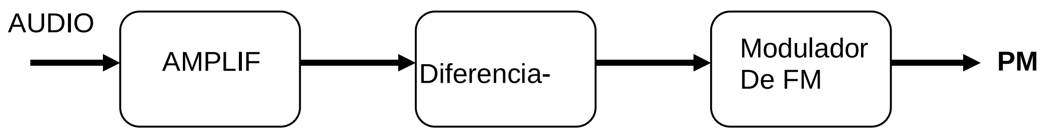
$$\omega_i = \omega_c + m_\phi\omega_m \cos\omega_m t$$

Luego, la modulación de fase es un medio de obtener modulación de frecuencia, en la cual la desviación de la frecuencia es proporcional a la frecuencia modulante.

La desviación máxima es, resumiendo:

$$\Delta f = KA_m \; en FM$$

$$\Delta f = m_\phi\omega_m \; en PM$$


*Desviación de fase instantánea.* La *desviación de fase instantánea* es el cambio instantáneo en la fase de la portadora, en un instante de tiempo, e indica cuánto está cambiando la fase de la portadora con respecto a su fase de referencia. La desviación de fase instantánea se muestra matemáticamente como

*desviación de la fase instantánea* = *θ(t)* radianes (6-3)

*Fase instantánea.* La *fase instantánea* es la fase precisa de la portadora, en un instante de tiempo, y se muestra matemáticamente como

$$fase\ instantánea = \omega_c t + \theta(t) \tag{6-4}$$

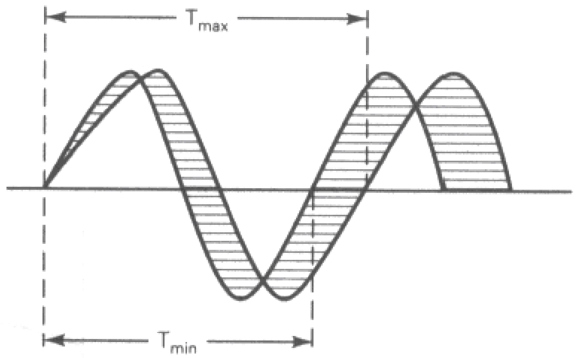



***Figura 6.5.-*** *Variación de la fase con la modulante* en donde *$\omega_c t$ = fase de referencia de la portadora = $2\pi f_c t$ radianes*

*Desviación de frecuencia instantánea.* La *desviación de frecuencia instantánea* es el cambio instantáneo en la frecuencia de la portadora y se define como la primera derivada con respecto al tiempo de la desviación de fase instantánea. Por lo tanto, la desviación de fase instantánea es la primera integral de la desviación de frecuencia instantánea. En términos de la ecuación 6-3, la desviación de frecuencia instantánea se muestra matemáticamente como

$$desviación\ de\ frecuencia\ instantánea = \theta'(t)\ rad/seg \tag{6-5a}$$

La prima (') se utiliza para denotar la primera derivada con respecto al tiempo.

*Frecuencia instantánea.* La *frecuencia instantánea* es la frecuencia precisa de la portadora, en un instante de tiempo, y se define como la primera derivada con respecto al tiempo de la fase instantánea. En términos de la ecuación 6-4, la frecuencia instantánea se muestra matemáticamente como

$$\omega_i(t) = \text{frecuencia instantánea} = \frac{d}{dt}[\omega_c t + \theta(t)] \tag{6-6a}$$

$$= \omega_c + \theta'(t)\ \text{rad/seg} \tag{6-6b}$$

Al sustituir a $2\pi f_c$ por $\omega_c$ da frecuencia instantánea =

$$f_i(t) = 2\pi f_c + \theta'(t)\ rad/seg \ \text{ ó } \ f_c + \theta(t)/2\pi\ [Hz] \tag{6-6c}$$

La modulación en fase puede definirse como la modulación angular en la cual, la desviación de fase instantánea, $\theta(t)$, es proporcional al voltaje de la señal modulante. Al igual, la modulación en frecuencia es la modulación angular en la cual, la desviación de la frecuencia instantánea, $\theta'(t)$, es proporcional al voltaje de la señal modulante.

Para una señal modulante $v_m(t)$, la modulación en fase y en frecuencia es

$$modulación\ en\ fase = \theta(t) = Kv_m(t)\ rad \tag{6-7}$$

modulación en frecuencia $= \theta'(t) = K1v_m(t)$ rad/seg (6-8)

en donde $K$ *y* $K_1$ son constantes y son las sensibilidades de desviación de los moduladores de fase y de frecuencia, respectivamente. Las sensibilidades de desviación son las funciones de transferencia de salida contra entrada para los moduladores. La sensibilidad de desviación para un modulador de fase es

$$K = \frac{radianes}{voltio}$$

y para un modulador en frecuencia

$$K_1 = \frac{radianes/segundo}{voltio}$$

La modulación en fase es la primera integral de la modulación de frecuencia. Por lo tanto, de las ecuaciones 6-7 y 6-8

$$\theta(t) = \int \theta'(t)dt$$

$$\text{modulación de fase } = \int K_1 v_m(t)dt \qquad (6\text{-}9)$$

$$= K_1 \int v_m(t)dt$$

Por lo tanto, al sustituir una señal modulante vm(t) = $V_m cos(\omega_m t)$, en la ecuación 6-1 da el resultado

Para modulación en fase $v(t) = V_c \cos[\omega_c t + \theta(t)]$

$$= V_c \cos[\omega_c t + KV_m \cos(\omega_m t)]$$

Para la modulación en frecuencia

$$\boxed{\begin{aligned} v(t) &= V_c \cos[\omega_c t + \int \theta'(t)] \\ &= V_c \cos[\omega_c t + K_1 \int V_m \cos(\omega_m t)] \\ &= V_c \cos[\omega_c t + \frac{K_1 V_m}{\omega_m} \operatorname{sen}(\omega_m t)] \end{aligned}}$$

Las relaciones matemáticas anteriores son resumidas en la tabla 6-1. Además, se muestran las expresiones para las ondas de FM y de PM que resultan, cuando la señal modulante es una onda sinusoidal de frecuencia única.

**EJEMPLO 4.4** Un modulador de fase tiene k = 2 rad/V. ¿Qué voltaje de una onda seno causaría una desviación de fase máxima de 60°?

Solución. Recordando que un círculo tiene 360° o 27r rad, se observa que

$$360° = 2\pi \text{ rad}$$

$$60° = \frac{2\pi \text{ rad} \times 60}{360}$$

$$= \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

## Relación entre la Modulación de Frecuencia y la Modulación de Fase

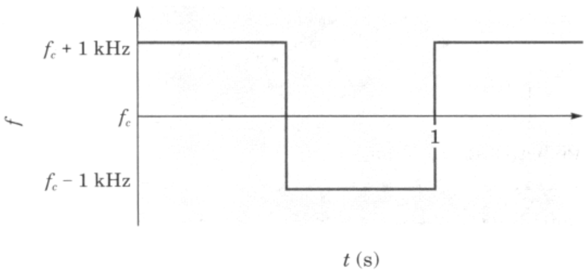
Como ya se mencionó, la FM o PM produce cambios tanto en la frecuencia como en la fase de la forma de onda modulada. También se señaló que la frecuencia (en radianes por segundo) es la rapidez de cambio de fase (en radianes). Es decir, la frecuencia es la derivada de la fase. Esto da lugar a una relación relativamente simple entre FM y PM que hace más fácil entenderlas y realizar cálculos con ambas.

Para cualquier señal modulada angularmente con modulación de onda seno, el índice de modulación $m_p$ o $m_f$ representa la desviación de fase pico desde la fase de la portadora no modulada, en radianes. Esto resulta evidente para PM pero no mucho para FM. Se sabe que

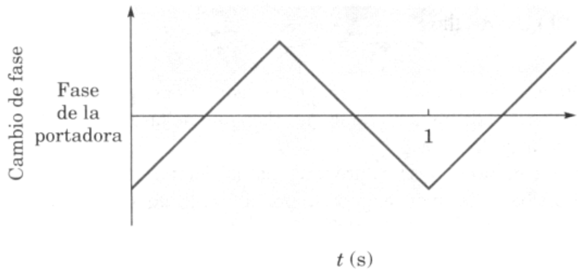
$$m_f = \frac{\delta}{f_m}$$

Es decir, el índice de modulación (que corresponde a la desviación de fase pico) es proporcional a la desviación de frecuencia e inversamente proporcional a la frecuencia de la modulante. La primera parte de la afirmación parece muy razonable. Suponga que aumenta la desviación de frecuencia. Entonces, la frecuencia superior representa un ángulo de fase que cambia con más rapidez que antes. A mayor cambio de desviación de frecuencia, mayor incremento en el ángulo de fase.

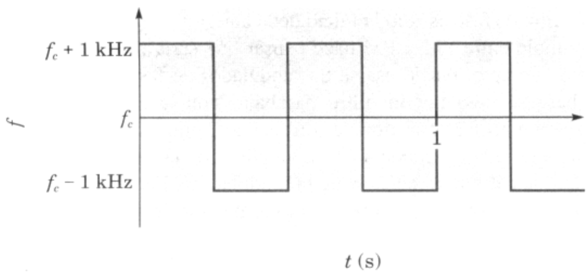
Para la segunda parte de la afirmación se requiere más explicación. ¿Por qué una frecuencia modulante mayor debe producir un cambio menor en el ángulo de fase? Considere una frecuencia modulante baja, por ejemplo *1 Hz*, que causa una desviación de frecuencia de *1 kHz*. Para simplificar, suponga que la señal modulante es una onda cuadrada. Luego, la frecuencia de la señal modulada se incrementará hasta un valor 1 kHz mayor que la frecuencia de la portadora $f_c$, permanece ahí durante medio segundo, luego disminuye 2 kHz hasta un valor 1 kHz menor que la frecuencia de la portadora $f_c$ durante el siguiente medio segundo. En la figura 4.4(a) se ilustra la forma cómo varía la frecuencia instantánea de la señal. Cuando la frecuencia de la señal modulada es más alta de lo normal, su ángulo de fase con respecto al de la portadora no modulada aumenta de manera uniforme a medida que la onda modulada se adelanta más y más a la portadora no modulada.



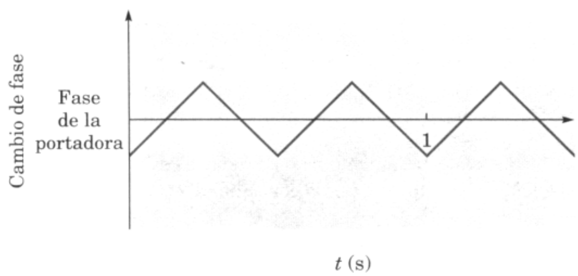

(a) Desplazamiento de frecuencia para una señal moduladora de 1 Hz




(b) Cambio de fase para una señal moduladora de 1 Hz

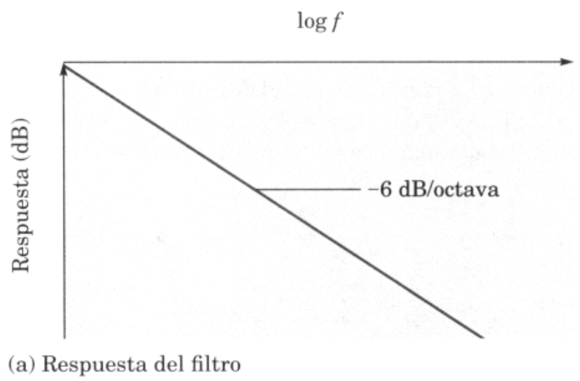



(c) Desplazamiento de frecuencia para una señal moduladora de 2 Hz




(d) Cambio de fase para una señal moduladora de 2 Hz

***Figura 6.6.- Frecuencia de señal modulante e índice de modulación***



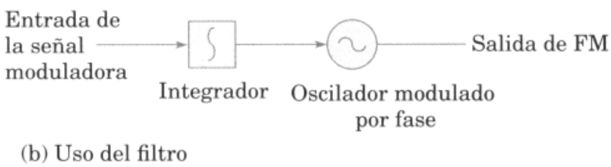




***Figura 6.7.- Uso de un integrador para convertir PM a FM***

Esto continúa hasta que disminuye la frecuencia de la señal modulada. En ese punto, el ángulo de fase de esta señal se empieza a disminuir, con lo que el ángulo de fase de la portadora no modulada lo alcanza y luego lo rebasa.

La cantidad de cambio de fase es proporcional al tiempo que la frecuencia instantánea permanece arriba de la frecuencia de la portadora, es decir, la desviación de fase es proporcional al periodo de la señal moduladora. Otra forma de decirlo es que la desviación de fase es inversamente proporcional a la frecuencia de la señal moduladora. En las figuras 4.4(c) y (d) se muestran el cambio de frecuencia y de fase, respectivamente, para una señal moduladora con la misma amplitud que antes, pero con el doble de frecuencia. La desviación de fase es sólo la mitad de la anterior.

La relación simple entre FM y PM hace pensar que sería fácil interconvertirlas, y esto es verdad. Por ejemplo, puede usarse un modulador de fase para generar FM. La señal en banda base se pasa por un filtro pasabajas con la respuesta en frecuencia mostrada en la figura 4.5(a). A este tipo de filtro suele llamársele *integrador*. Para amplitudes iguales a la entrada del modulador, la amplitud de la salida desde el filtro será inversamente proporcional a la frecuencia de la moduladora. En la figura 4.5(b) se ilustra la señal filtrada con pasabajas aplicada a un modulador de fase. La salida modulada por fase tiene un índice de modulación inversamente proporcional a la frecuencia moduladora, es decir, ¡es idéntica a FM!

**EJEMPLO 4.5** Un transmisor de comunicaciones de FM tiene una desviación de frecuencia máxima de 5 kHz y un intervalo de frecuencias moduladoras de 300 Hz a 3 kHz. ¿Cuál es el desfasamiento máximo que produce?

**Solución.** Se sabe que el desfasamiento pico en radianes es igual al índice de modulación de frecuencia mf, puesto que, por la ecuación del índice

$$m_f = \frac{\delta}{f_m}$$

$m_f$ será el máximo para el menor valor posible de *fm*, en este caso 300 MHz. Para esta frecuencia, el cambio de fase es

$$\begin{aligned}\phi_{\text{máx}} &= m_f\\ &= \frac{\delta}{f_m}\\ &= \frac{5000}{300}\\ &= 16.7 \text{ rad}\end{aligned}$$

**EJEMPLO 4.6** Un modulador de fase tiene una sensibilidad de $k_P$ = 3 rad/V. ¿Cuánta desviación de frecuencia produce con una entrada sinusoidal de 2 V pico a una frecuencia de 1 kHz?

**Solución.** El desfasamiento máximo se determina

$$\phi = k_p E_m \text{ sen } \omega_m t$$

El valor máximo de Φ es $m_p$, y ocurre para el voltaje pico de modulación.

$$\begin{aligned} m_p &= \phi_{máx} \\ &= k_p E_m \\ &= 3\ \text{rad/V} \times 2\ \text{V} \\ &= 6\ \text{rad} \end{aligned}$$

Este es el mismo valor que $m_f$, si se considera la señal como de modulación de frecuencia. De la ecuación

$$m_f = \frac{\delta}{f_m}$$

$$\begin{aligned} \delta &= m_f f_m \\ &= 6 \times 1\ \text{kHz} \\ &= 6\ \text{kHz} \end{aligned}$$

## Banda angosta

Según se ve en la expresión 6-12a hemos reemplazado el índice de modulación de la expresión de la portadora

$$m = \frac{K_1 V_m}{\omega_m} \quad (6\text{-}12a)$$

$$m = \frac{K_1 V_m}{2\pi f_m} \quad (6\text{-}12b)$$

$$y(t) = V_c \cos(\omega_c t + m \operatorname{sen} \omega_m t)$$

Recordando la expresión de la trigonometría

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$$\textit{reemplazando}$$

$$y(t) = V_c \cos\omega_c t \cos(m \operatorname{sen} \omega_m t) - V_c \operatorname{sen}\omega_c t \operatorname{sen}(m \operatorname{sen} \omega_m t)$$

Definimos un sistema de *banda angosta* como aquel cuyo índice de modulación es inferior a 0,5 rad (m << π/2)
Esto nos lleva a suponer que

$$\cos(m \operatorname{sen} \omega_m t) \approx 1$$

$$\operatorname{sen}(m_f \operatorname{sen} \omega_m t) \approx m \operatorname{sen} \omega_m t$$

por ser en el segundo caso el argumento igual al seno.

La portadora quedará reducida a una expresión reducida. Si suponemos que la amplitud de la portadora es la unidad, quedará

$$y(t) = \cos\omega_c t - m \operatorname{sen}\omega_c t \operatorname{sen}\omega_m t$$

$$\textit{recordando} \text{ que}$$

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

$$\text{reemplazando}$$

$$y(t) = \cos\omega_c t - \frac{m}{2}[\cos(\omega_c - \omega_m)t - \cos(\omega_c + \omega_m)t]$$

Se observa claramente que en este caso existen la portadora y dos bandas laterales como componentes del espectro. Se deduce que un sistema de FM de banda angosta requiere el mismo ancho de banda que un sistema de AM. Ver tabla 6-2, donde para un m< 1 solamente hay dos componentes laterales.

# Formas de onda de FM y de PM

La figura 6.8 muestra la modulación en frecuencia y en fase de una portadora sinusoidal por una señal modulante de frecuencia única. Se puede observar que las formas de onda de FM y de PM son idénticas, excepto por su relación de tiempo (fase) Por lo tanto, es imposible distinguir una forma de onda de FM de una forma de onda de PM, sin saber las características de la señal modulante.

**TABLA 6-1 ECUACIONES PARA LAS PORTADORAS DE FASE Y DE FRECUENCIA MODULADAS**

| Tipo de modulación | Señal modulante | Onda de modulación angular |
|---|---|---|
| (a) Fase | $v_m(t)$ | $V_c \cos [\omega_c t + K v_m(t)]$ |
| (b) Frecuencia | $v_m(t)$ | $V_c \cos [\omega_c t + K_1 \int v_m(t)\, dt]$ |
| (c) Fase | $V_m \cos (\omega_m t)$ | $V_c \cos [\omega_c t + K V_m \cos (\omega_m t)]$ |
| (d) Frecuencia | $-V_m \operatorname{sen}(\omega_m t)$ | $V_c \cos \left[\omega_c t + \frac{K_1 V_m}{\omega_m} \cos (\omega_m t)\right]$ |
| (e) Frecuencia | $V_m \cos (\omega_m t)$ | $V_c \cos \left[\omega_c t + \frac{K_1 V_m}{\omega_m} \operatorname{sen}(\omega_m t)\right]$ |

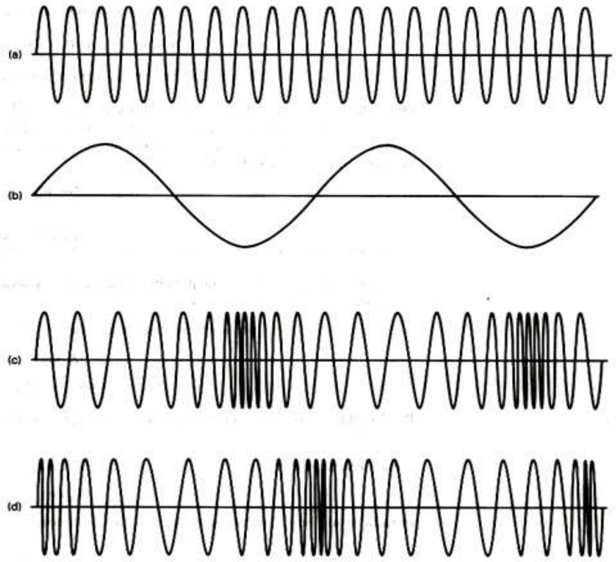



***Figura 6-8*** *Modulación en fase y en frecuencia de una portadora de onda seno, por una señal de onda seno: (a) portadora demodulada; (b) señal modulante; (c) onda de frecuencia modulada; (d) onda de fase modulada.*

Con FM, la máxima desviación de frecuencia (cambio en la frecuencia de la portadora) ocurre durante los máximos puntos negativos y positivos de la señal modulante (es decir, la desviación de frecuencia es proporcional a la amplitud de la señal modulante) Con PM, la máxima desviación de frecuencia ocurre durante los cruces de cero de la señal modulante (es decir, la desviación de frecuencia es proporcional a la pendiente o primera derivada de la señal modulante) Para la modulación de frecuencia y de fase, la razón por la cual los cambios de frecuencia ocurren es igual a la frecuencia de la señal modulante.

De manera semejante, no es aparente en la ecuación 6-1 si está representada una onda de FM o de PM. Podría ser cualquiera de las dos. Sin embargo, el conocimiento de la señal modulante permitirá una identificación correcta. Si $\theta(t) = K v_m(t)$, es una modulación de fase y si $\theta'(t) = K_1 v_m(t)$, es una modulación de frecuencia. En otras palabras, si la frecuencia instantánea es directamente proporcional a la amplitud de la señal modulante, es una modulación en frecuencia, y si la fase instantánea es directamente proporcional a la amplitud de la frecuencia modulante, es una modulación en fase.