גיאומטריה

מעגלים

מעגלים

השיעור הקרוב הוא שיעור מעגלים מתקדם, ולכן נדרשת בו שליטה בסיסית בהגדרות ובתכונות השונות של מעגלים.
דבר חשוב נוסף לפני שמתחילים אשר רלוונטי לכל הנושאים בגיאומטריה - הסרטוט המצורף לשאלות בגיאומטריה (כאשר מצורף) מהווה רמז. כל נתון שיש בו הוא רמז לנתון אחר שניתן להסיק ממנו.
אם, למשל, נתון לנו ערך של זווית היקפית, ייתכן כי מדובר ברמז לגבי ערכה של הזווית המרכזית.
ייתכן כי זווית היקפית בת $90°$ היא רמז לגילוי הקוטר במעגל, ובשל קוצר היריעה נסתפק בדוגמאות הללו.

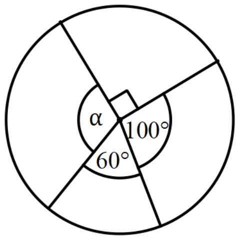
זוויות וקשתות

<u>זוויות</u>

לפני שמתחילים לדבר על זוויות במעגל ראוי להזכיר כי סכום הזוויות סביב נקודה מסוימת במישור הוא $360°$.

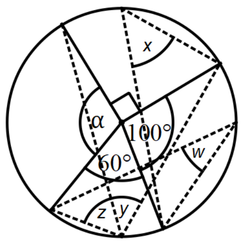
<u>לדוגמה:</u>
נתון מעגל שמרכזו O.

לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט,
$\alpha = ?$



כאמור, סכום הזוויות סביב נקודה מסוימת במישור הוא $360°$, ולכן הזווית α משלימה את הזוויות האחרות במעגל ($60°$, $100°$ ו- $90°$ ל- $360°$): $60°+100°+90°+\alpha=360°$. נעביר אגפים: $\alpha=110°$.

כעת, נסרטט זווית היקפית אשר נשענת על כל אחת מהקשתות שעליהן נשענת זווית מרכזית (הזווית x נשענת על הקשת שעליה נשענת הזווית בת ה- $100°$; הזווית w על הקשת שעליה נשענת הזווית בת ה- $60°$; הזווית y על הקשת שעליה נשענת הזווית בת ה- $90°$; הזווית z על הקשת שעליה נשענת הזווית בת ה- $110°$).



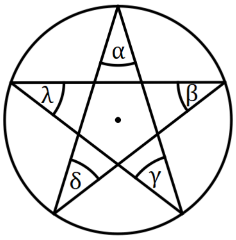
זווית היקפית שווה למחצית מזווית מרכזית כאשר שתיהן נשענות על אותה קשת.
לפיכך: $\sphericalangle x=\frac{100°}{2}=50°$; $\sphericalangle w=\frac{60°}{2}=30°$; $\sphericalangle y=\frac{90°}{2}=45°$; $\sphericalangle z=\frac{110°}{2}=55°$.
סכום הזוויות ההיקפיות במעגל הזה הוא: $55°+45°+30°+50°=180°$.

ככלל: **סכום הזוויות ההיקפיות שנשענות על קשתות שאורכן יחדיו שווה להיקף המעגל הוא** $180°$.

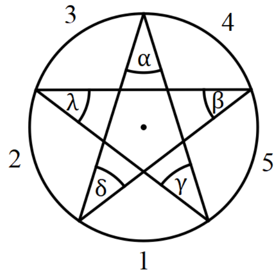
<u>דוגמה נוספת:</u>

לפי הנתונים שבסרטוט,

$\alpha+\beta+\delta+\gamma+\lambda=?$



נסמן את הקשתות שעליהן נשענות הזוויות הנתונות במספרים:

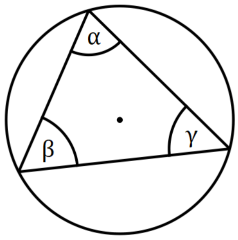


סכום אורכי הקשתות 1-5 שווה להיקף המעגל, ולכן סכום הזוויות המסומנות שווה ל- $180°$.

בשאלה הזו ראינו שגם אם מדובר בצורה גאומטרית שאיננו מכירים (כוכב למשל), ניתן יהיה למצוא תכונות שמתקיימות בה באמצעות שליטה בתכונות ובנוסחאות אשר קשורות במעגלים.

<u>דוגמה נוספת:</u>

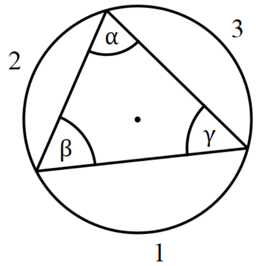
נתון משולש אשר חסום במעגל, כפי שמופיע בסרטוט.



כפי שאנו יודעים משיעור משולשים, סכום הזוויות במשולש הוא $180°$ ולכן: $\alpha+\beta+\gamma=180°$.

ניתן להסתכל על האמור לעיל גם כך:

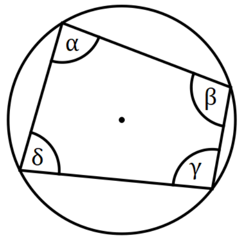
נסמן את הקשתות שעליהן נשענות הזוויות הנתונות במספרים:



סכום אורכי הקשתות 1-3 שווה להיקף המעגל, וזו דרך נוספת לקבוע ש- $\alpha+\beta+\gamma=180°$ (כאמור, סכום הזוויות ההיקפיות שנשענות על קשתות שאורכן יחדיו שווה להיקף המעגל הוא $180°$).

<u>דוגמה נוספת:</u>

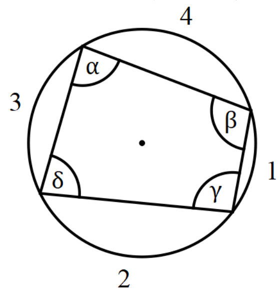
נתון מרובע אשר חסום במעגל, כפי שמופיע בסרטוט.



כפי שאנו יודעים משיעור מרובעים, סכום הזוויות במרובע הוא $360°$ ולכן: $\alpha+\beta+\gamma+\delta=180°$.

ניתן להסתכל על האמור לעיל גם כך:

נסמן את הקשתות במעגל במספרים:

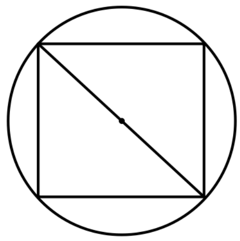


הזווית α נשענת על שתי הקשתות 1 ו-2, הזווית β על שתי הקשתות 2 ו-3, הזווית γ על הקשתות 3 ו-4 והזווית δ על הקשתות 4 ו-1.

כלומר, הזוויות ההיקפיות בסרטוט נשענות על קשתות שאורכן שווה לפעמיים היקף המעגל, ולכן סכומן הוא: $360°=2\cdot180°$.

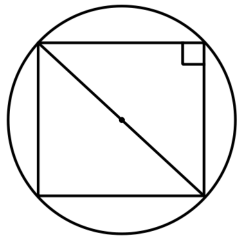
<u>דוגמה נוספת:</u>

נתון ריבוע אשר חסום במעגל, כפי שמופיע בסרטוט.

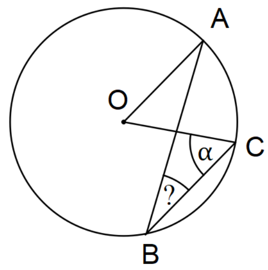


כזכור, זווית היקפית (במקרה הזה שתיים מזוויות הריבוע) הנשענת על קוטר שווה ל- $90°$.

נוסף על כך, זווית היקפית שווה למחצית מזווית מרכזית (במקרה הזה הזווית השטוחה) כאשר שתיהן נשענות על אותה קשת.



שאלה לדוגמה – זוויות וקשתות



בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O.

נתון: $BC \parallel OA$

לפי נתונים אלו והנתונים שבסרטוט,

$\sphericalangle ABC = ?$

(1) α

(2) 2α

(3) $\frac{\alpha}{2}$

(4) $\frac{\alpha}{4}$

<u>פתרון</u>

מהנתון לפיו $BC \parallel OA$ ניתן להסיק כי $\sphericalangle AOC = \alpha$ (זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים).

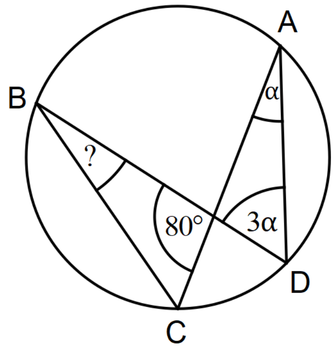
הזווית $\sphericalangle AOC$ היא זווית מרכזית שנשענת על הקשת AC. הזווית $\sphericalangle ABC$ היא זווית היקפית הנשענת על אותה קשת.

לפיכך, הזווית $\sphericalangle ABC$ שווה למחצית מהזווית $\sphericalangle AOC$: $\sphericalangle ABC = \frac{\sphericalangle AOC}{2} = \frac{\alpha}{2}$.

שימו לב! ניתן היה להציב מספר במקום α, למצוא את ערך הזווית $\sphericalangle ABC$ לפי אותה הצבה ולפסול 3 תשובות.

התשובה הנכונה היא (3).

שאלה נוספת – זוויות וקשתות



בסרטוט שלפניכם A, B, C ו-D הן נקודות על היקף המעגל.

לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט,

$\sphericalangle CBD = ?$

(1) $15°$

(2) $25°$

(3) $35°$

(4) $45°$

<u>פתרון</u>

נסמן את נקודת החיתוך בין המיתרים AC ו-BD ב-O.

הזוויות $\sphericalangle AOD$ ו- $\sphericalangle BOC$ קדקודיות ועל כן שוות ($\sphericalangle BOC = \sphericalangle AOD = 80°$).

נסכום את שלוש הזוויות במשולש AOD, ונשווה את הסכום ל- $180°$ (סכום הזוויות במשולש):

$\alpha + 3\alpha + 80° = 180° \Rightarrow 4\alpha + 80° = 180°$. נעביר אגפים: $4\alpha = 100°$. נחלק את שני אגפי המשוואה ב-4 ונקבל: $\alpha = 25°$.

הזוויות $\sphericalangle CBD$ ו-$\sphericalangle CAD$ הן זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת (CD), ולכן שוות זו לזו:

$\sphericalangle CBD = \sphericalangle CAD = \alpha = 25°$.

<u>דרך פתרון נוספת:</u>

כאמור, הזוויות $\sphericalangle CBD$ ו- $\sphericalangle CAD$ הן זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת (CD), ולכן שוות זו לזו (α).

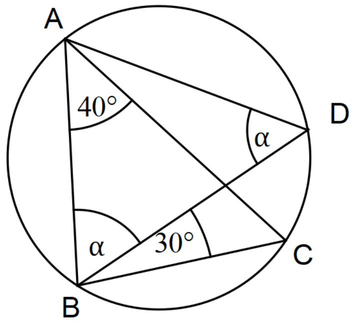
הזוויות $\sphericalangle ADB$ ו- $\sphericalangle ACB$ אף הן זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת (AB), ולכן שוות זו לזו גם כן (3α).

אם כן, במשולש BOC הזוויות 3α, α ו- $80°$. על ידי השוואת סכומן ל- $180°$ היינו מגיעים לתוצאה שאליה הגענו.

התשובה הנכונה היא (2).

שאלה נוספת - זוויות וקשתות

A, B, C ו-D הן נקודות על היקף המעגל שבסרטוט.



לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט,
$\alpha = ?$

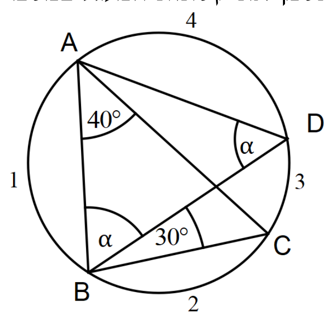
(1) $65°$
(2) $55°$
(3) $35°$
(4) $45°$

<u>פתרון</u>

הזוויות $\sphericalangle CBD$ ו- $\sphericalangle CAD$ הן זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת (CD), ולכן שוות זו לזו ($30°$).
אם כן, במשולש ABD הזוויות α , α , ו- $30°+40°=70°$.
נשווה את סכומן ל- $180°$ כדי למצוא את ערכה של α :
$\alpha+\alpha+70°=180° \Rightarrow 2\alpha+70°=180°$.
נעביר אגפים: $2\alpha=110°$.
נחלק את שני אגפי המשוואה ב-2 ונקבל: $\alpha=55°$.

<u>דרך פתרון נוספת:</u>

נסמן את קשתות המעגל במספרים 1-4.



הזווית $\sphericalangle ADB$ היא זווית היקפית הנשענת על הקשת המסומנת ב-1, הזווית $\sphericalangle BAC$ על 2, הזווית $\sphericalangle CBD$ על 3 ו- $\sphericalangle ABD$ על 4. סכום אורכן של הקשתות שעליהן נשענות כל הזוויות שציינו שווה להיקף של המעגל.
כפי שלמדנו בשיעור, סכום הזוויות ההיקפיות שנשענות על קשתות שאורכן יחדיו שווה להיקף המעגל הוא $180°$ ולכן: $\alpha+\alpha+40°+30°=180°$. זו המשוואה שאליה הגענו בדרך הפתרון הראשונה, ולכן אין צורך בפתירתה.

התשובה הנכונה היא (2).

גזרות וקשתות

בחלק הקרוב של השיעור נעסוק בגזרות ובקשתות, בקשר שבין זוויות היקפיות למרכזיות ובין היקף מעגל לשטחו.

תזכורת קצרה מהיסודות לגבי אורך קשת ושטח גזרה.

אורך קשת - מדובר בגודל חד-ממדי אשר לרוב יהיה נתון בס"מ.
כדי למצוא אורך קשת במעגל, עלינו לכפול את היקף המעגל ($2\pi r$) בחלק היחסי שמהווה הזווית המרכזית שנשענת על הקשת הרצויה מתוך הזווית המרכזית של המעגל כולו ($360°$).

אם, לדוגמה, הזווית המרכזית α נשענת על קשת מסוימת, אזי אורך הקשת הוא: $2\pi r\cdot\frac{\alpha°}{360°}$.

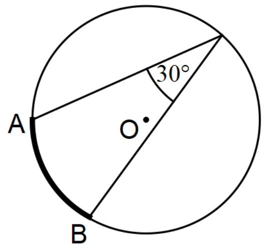
שטח גזרה - מדובר בגודל דו-ממדי אשר לרוב יהיה נתון בסמ"ר.
כדי למצוא שטח גזרה במעגל, עלינו לכפול את שטח המעגל (πr^2) בחלק היחסי של זווית הראש של הגזרה מתוך הזווית המרכזית של המעגל כולו ($360°$).

אם, לדוגמה, זווית הראש של גזרה מסוימת היא α, שטח הגזרה הוא: $\pi r^2\cdot\frac{\alpha°}{360°}$.

כעת, נראה כיצד מתבטאים הקשרים שהוזכרו בהתחלה בדוגמאות פשוטות יחסית.

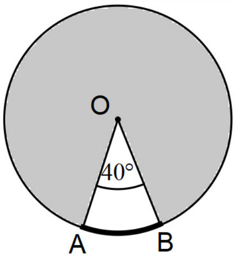
<u>לדוגמה:</u>
נתון מעגל שמרכזו O ושטחו 9π סמ"ר.
הנקודות A ו-B הן נקודות על היקף המעגל.

לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט,
מה אורך הקשת המודגשת AB (בס"מ)?



כדי למצוא את אורך הקשת AB, עלינו למצוא את היקף המעגל ואת גודל הזווית המרכזית שנשענת על הקשת המבוקשת.
כדי למצוא את רדיוס המעגל (ולאחר מכן את היקפו), נשווה את השטח הנתון לנוסחה למציאת שטח מעגל: $\pi r^2=9\pi$.
נחלק את שני אגפי המשוואה ב- π ונקבל: $r^2=9$.
נוציא שורש לשני אגפי המשוואה: $r=3$ (שימו לב כי אנו מתחשבים בערך החיובי בלבד, שהרי רדיוס לא יכול להיות שלילי).
אם כן, היקף המעגל הוא (בס"מ): $2\pi r=2\cdot\pi\cdot3=6\pi$.
הזווית ההיקפית שנשענת על הקשת AB בת $30°$, ולכן הזווית המרכזית שנשענת על אותה קשת בת $60°$ ($2\cdot30°$), שכן זווית מרכזית גדולה פי 2 מזווית היקפית כאשר שתיהן נשענות על אותה קשת.
כדי למצוא את אורך הקשת AB (בס"מ), נכפול את היקף המעגל (6π) בזווית המרכזית שנשענת על הקשת מתוך $360°$:
$6\pi\cdot\frac{60°}{360°}=\cancel{6}\pi\cdot\frac{1}{\cancel{6}}=\pi$.

לאור האמור לעיל, אורך הקשת AB הוא π ס"מ.



דוגמה נוספת:

נתון מעגל שמרכזו O ובו אורך הקשת AB (החלק המודגש) הוא 2π ס"מ.

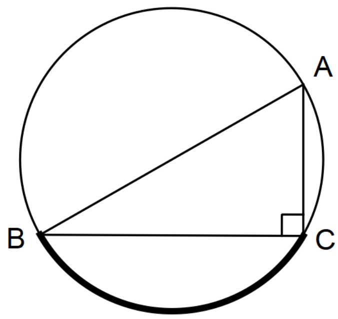
לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט,
מה שטח הגזרה המסומנת באפור (בסמ"ר)?

כדי למצוא את שטח הגזרה המסומנת באפור, עלינו למצוא את זווית הראש של הגזרה ואת שטח המעגל.
נתונים לנו אורך הקשת AB והזווית המרכזית שנשענת עליה ($40°$). נשווה את הנוסחה למציאת אורך קשת לאורך הנתון כדי למצוא את רדיוס המעגל: $2\pi r \cdot \frac{40°}{360°} = 2\pi$. נחלק את שני אגפי המשוואה ב- 2π ונקבל: $r \cdot \frac{40°}{360°} = 1 \Rightarrow r \cdot \frac{1}{9} = 1$.
נכפול את שני אגפי המשוואה ב-9 ונקבל: $r = 9$. אם כן, שטח המעגל הוא (בסמ"ר): $\pi r^2 = \pi \cdot 9^2 = 81\pi$.
הזווית הראש של הגזרה האפורה משלימה את הזווית הנתונה ($40°$) ל- $360°$ ולכן ערכה הוא: $360° - 40° = 320°$. כדי למצוא את שטח הגזרה האפורה (בסמ"ר), נכפול את שטח המעגל (81π) בזווית הראש של הגזרה מתוך $360°$:
$81\pi \cdot \frac{320°}{360°} = {}^{9}\cancel{81}\pi \cdot \frac{8}{{}_{1}\cancel{9}} = 72\pi$. לאור האמור לעיל, שטח הגזרה האפורה הוא 72π סמ"ר.

שימו לב! ניתן היה למצוא את שטח הגזרה הלבנה ולחסר אותה משטח המעגל כולו.

שאלה לדוגמה - גזרות וקשתות

בסרטוט שלפניכם משולש ABC החסום במעגל.
נתון: AC = 2 ס"מ.
AB = 4 ס"מ.



לפני נתונים אלו והנתונים שבסרטוט,
מה אורך הקשת המודגשת (בס"מ)?

(1) $\frac{1}{3}\pi$
(2) $\frac{2}{3}\pi$
(3) $\frac{3}{4}\pi$
(4) $\frac{4}{3}\pi$

פתרון

כדי למצוא את אורך הקשת המודגשת (BC), עלינו למצוא את היקף המעגל ואת גודל הזווית המרכזית שנשענת עליה.
הזווית $\measuredangle ACB$ היא זווית היקפית ישרה, ולכן המיתר שעליו היא נשענת הוא קוטר (AB).
נתון לנו כי AB = 4 ס"מ, ולכן רדיוס המעגל שווה ל-2 ס"מ ($\frac{4}{2}$) ומכאן שהיקפו הוא (בס"מ): $2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot 2 = 4\pi$.
הניצב הקטן במשולש ABC (AC) קטן פי 2 מהיתר בו (AB). לפיכך, מדובר במשולש 30; 60; 90.
אם כן, הזווית $\measuredangle BAC$, זו שנמצאת מול הניצב הגדול, בת $60°$, והיא זווית היקפית הנשענת על הקשת המודגשת.
לפיכך, הזווית המרכזית שנשענת על הקשת המודגשת בת $120°$ (זווית מרכזית גדולה פי 2 מזווית היקפית כששתיהן נשענות על אותה קשת). כעת, נכפול את היקף המעגל (4π) בזווית המרכזית שנשענת על הקשת הרצויה חלקי $360°$:
$4\pi \cdot \frac{120°}{360°} = 4\pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}\pi$. לאור האמור לעיל, אורך הקשת המודגשת הוא $\frac{4}{3}\pi$ ס"מ.

התשובה הנכונה היא (4).

משיקים למעגל

בחלק הקרוב של השיעור נעסוק במשיקים למעגל.

תזכורת קצרה לגבי משיק: **משיק הוא קו ישר אשר נוגע בקו עקום (במקרה הזה מעגל) בנקודה אחת בלבד**.

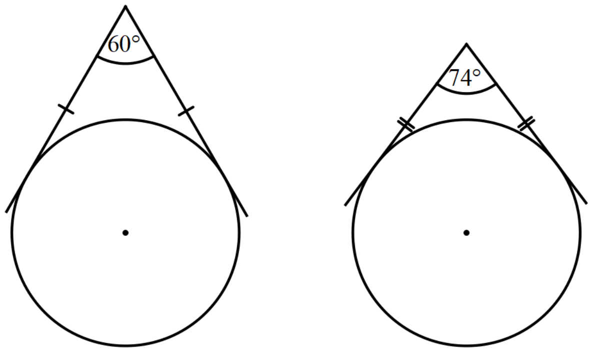
תכונות חשובות הנוגעות למשיק:

1. **הזווית בין משיק לרדיוס היא זווית ישרה**.

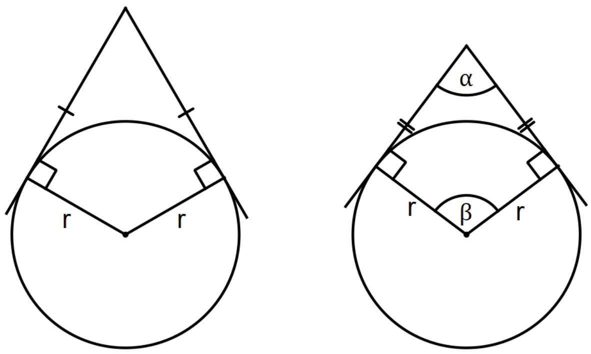
נתונים מיותרים בבחינה הפסיכומטרית הם מאוד נדירים, ולכן לרוב הנתונים בשאלות ישנה משמעות.
אם נתון לכם משיק למעגל שאינו מחובר למרכז המעגל, חברו אותו וסמנו ביניהם זווית של $90°$.
אם נתון משיק אשר כבר מחובר למרכז המעגל, סמנו זווית של $90°$ ביניהם אם אינה מסומנת.

2. **כשמשיקים למעגל יוצאים מאותה נקודה, אורכם עד לנקודת ההשקה זהה בהכרח**.

כמו כן, ככל שהנקודה שממנה המשיקים יוצאים תהיה רחוקה מהמעגל, הזווית הנוצרת ביניהם תהיה קטנה יותר.



בחיבור נקודות ההשקה למרכז המעגל נוצר דלתון, שהרי נוצרים שני משולשים שווי שוקיים בעלי בסיס משותף (משולש אחד שמורכב משני ישרים שווים באורכם שיוצאים מאותה נקודה במישור, ומשולש שני שהשוקיים שלו הן רדיוסים).



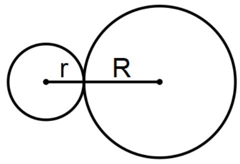
כאשר תהיה נתונה לנו אחת הזווית (זו בין הרדיוסים, β, או זו בין המשיקים, α), נוכל למצוא את השנייה, שהרי סכום הזוויות במרובע שווה ל- $360°$.

אנו יודעים כי שתיים מזוויות המרובע שוות ל- $90°$, ולכן סכומן של השתיים האחרות הוא $180°$: $\alpha+\beta=180°$.

מעגלים משיקים

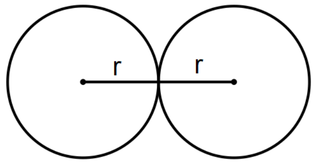
כעת, נראה מספר דוגמאות שבהן לא קטעים משיקים למעגלים, כי אם מעגלים, שכן בלא מעט שאלות בבחינה עוסקים במעגלים אשר משיקים זה לזה ובצורות שנוצרות כשמחברים בין מרכזם.

לדוגמה:



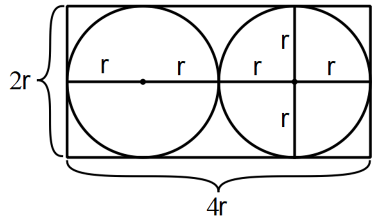
כשמעגלים שאינם זהים בגודלם משיקים זה לזה, אורך הקו שמחבר בין המרכזים שלהם שווה לסכום הרדיוסים שלהם: $R + r$.

דוגמה נוספת:



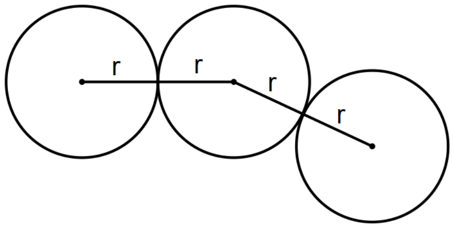
כשמעגלים זהים בגודלם משיקים זה לזה, אורך הקטע שמחבר בין מרכזם שווה לקוטר של כל אחד מהם (2r).

נוסף על כך, אם שני מעגלים זהים חסומים במלבן, רוחב המלבן שווה לפעמיים הקוטר ואורכו שווה לפעם אחת הקוטר.



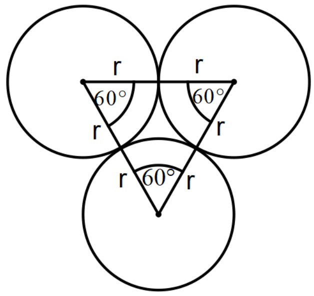
דוגמה נוספת:

בניגוד למצב שבו נתונים שני מעגלים, בין שלושה מעגלים זהים לא בהכרח עובר קו ישר.

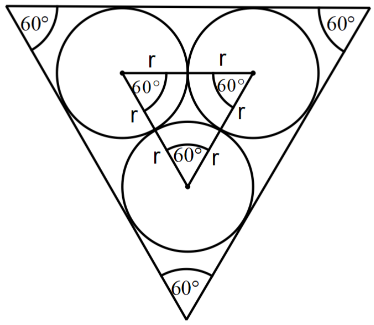


דוגמה נוספת:

כששלושה מעגלים זהים משיקים זה לזה, ניתן לחבר בין המרכזים שלהם וליצור משולש ששלוש צלעותיו שוות (2r).

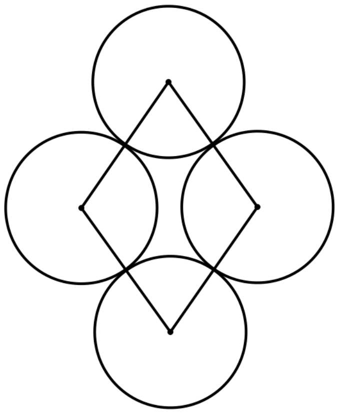


נוסף על כך, ניתן לחסום אותם במשולש שווה צלעות.

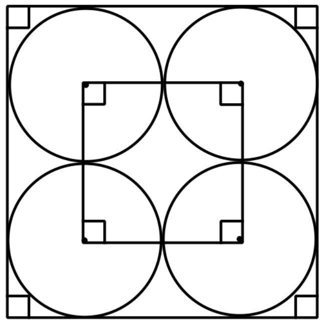


דוגמה נוספת:

כשנתונים ארבעה מעגלים זהים שחלקם משיקים זה לזה, כפי שמופיע בסרטוט, חיבור בין המרכזים שלהם יכול ליצור מעוין.



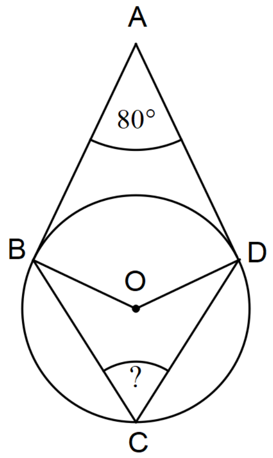
אם "נמעך" מעט את הקצוות העליונים ונסובב את הצורה, נקבל ריבוע. את ארבעת המעגלים ניתן לחסום בריבוע גם כן.



הראינו מספר דוגמאות כדי להמחיש את העיקרון של מעגלים משיקים. מאליו מובן שייתכנו דוגמאות נוספות והיווצרות של צורות נוספות, אולם לרוב העיקרון יהיה אותו עיקרון:

מציאת מספר הרדיוסים שמחברים בין הצורות והסקה של נתונים אחרים מכך.

שאלה לדוגמה - משיקים למעגל

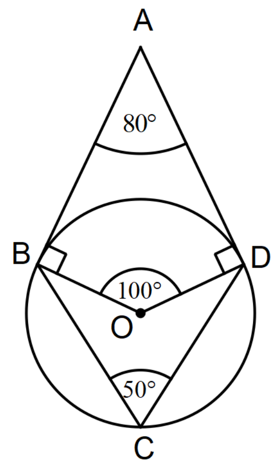


בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O.
AD ו-AB משיקים למעגל בנקודות D ו-B בהתאמה.

לפי נתונים אלו והנתונים שבסרטוט,
$\sphericalangle BCD = ?$

(1) $100°$
(2) $80°$
(3) $50°$
(4) $120°$

<u>פתרון</u>
כפי שלמדנו בשיעור, כשנקודות ההשקה (B ו-D) מחוברות למרכז המעגל נוצר דלתון (ABOD), שהרי נוצרים שני משולשים שווי שוקיים בעלי בסיס משותף. זאת ועוד, הזווית בין משיק לרדיוס היא זווית ישרה.
לפיכך, הזוויות $\sphericalangle ABO$ ו- $\sphericalangle ADO$ ישרות.
סכום זוויות הראש של דלתון ששתי זוויותיו האחרות ישרות שווה ל- $180°$:
$\sphericalangle BAD + \sphericalangle BOD = 180° \Rightarrow 80° + \sphericalangle BOD = 180°$.
נעביר אגפים: $\sphericalangle BOD = 100°$.
זווית היקפית (BCD) שווה למחצית מזווית מרכזית (BOD) כאשר שתיהן נשענות על אותה קשת (BD).
לפיכך: $\sphericalangle BCD = \frac{100°}{2} = 50°$.



שימו לב! ניתן היה למצוא כי $\sphericalangle BOD = 100°$ באמצעות המשפט לפיו סכום הזוויות במרובע הוא $360°$ (שלוש זוויות היו ידועות לנו).
התשובה הנכונה היא (3).

מעגלים ללא סרטוט

כפי שראינו בשיעורים הקודמים, לא בכל השאלות הגאומטריות מצורף סרטוט.
כשלא מצורף סרטוט, בדרך כלל יהיה עלינו לבנות משוואה מסוימת באמצעות הכללים והנוסחאות שאנו מכירים (שימו לב כי אם נוח לכם ליצור סרטוט, אין בעיה לעשות כן).

<u>לדוגמה:</u>

נתון מעגל ששטחו $\frac{\pi}{4}$ סמ"ר.

מה היקפו (בס"מ)?

כדי למצוא היקף של מעגל, עלינו למצוא את הרדיוס שלו.

אם נשווה את השטח הנתון ($\frac{\pi}{4}$) לנוסחה למציאת שטח מעגל, נוכל למצוא את הרדיוס: $\frac{\cancel{\pi}}{4}=\cancel{\pi}r^2 \Rightarrow \frac{1}{4}=r^2$.

נוציא שורש לשני אגפי המשוואה: $r=\frac{1}{2}$ (אנו מתעלמים מהערך השלילי, שהרי רדיוס מוכרח להיות חיובי).

כעת, נציב את אורך הרדיוס בנוסחה למציאת היקף מעגל: $2\pi r=\cancel{2}\cdot\pi\cdot\frac{1}{\cancel{2}}=\pi$.

אם כן, היקפו של המעגל הנתון הוא π ס"מ.

<u>דוגמה נוספת:</u>

נתון מעגל שקוטרו x ס"מ.
שטח המעגל הנתון גדול פי 4 משטח מעגל אחר שרדיוסו y ס"מ.

$$\frac{x}{y}=?$$

נבנה משוואה באמצעות הנתונים.

אורך רדיוס מעגל שקוטרו x ס"מ הוא: $\frac{x}{2}$ ס"מ. לפיכך, שטחו הוא: $\pi r^2=\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2=\pi\cdot\frac{x^2}{4}$.

שטח המעגל שרדיוסו y הוא: $\pi r^2=\pi\cdot y^2$.

נתון ששטח המעגל הראשון גדול פי 4 משטח המעגל השני ולכן: $\pi\cdot\frac{x^2}{4}=4\cdot(\pi y^2)$.

נחלק את שני אגפי המשוואה ב- π ונקבל: $\frac{x^2}{4}=4y^2$. נכפול את שני אגפי המשוואה ב-4 ונקבל: $x^2=16y^2$.

נחלק את שני אגפי המשוואה ב- y^2 ונקבל: $\frac{x^2}{y^2}=16$. נוציא שורש לשני אגפי המשוואה: $\frac{x}{y}=4$ (נתעלם מהשורש השלילי משום ששני הנעלמים חיוביים בהכרח).

שימו לב! ניתן היה לפתור את השאלה גם באמצעות דמיון בין מעגלים, ואולם על כך נרחיב בהמשך.

שאלה לדוגמה - מעגלים ללא סרטוט

ידוע כי $\frac{1}{3}$ משטחו של מעגל שרדיוסו x ס"מ שווה ל- $\frac{1}{4}$ משטחו של מעגל שרדיוסו $2x^2$ ס"מ.

$x = ?$

(1) $\frac{1}{9}$

(2) $\frac{1}{12}$

(3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(4) $2\sqrt{3}$

<u>פתרון</u>

נבטא את שטחם של שני המעגלים, ולאחר מכן ניצור משוואה בהתאם לנתונים.

שטח המעגל שרדיוסו x הוא πx^2 סמ"ר, ומכאן ש- $\frac{1}{3}$ משטחו שווה ל- $\frac{1}{3} \cdot \pi x^2$.

שטח המעגל שרדיוסו $2x^2$ הוא (בסמ"ר) $\pi\left(2x^2\right)^2 = \pi \cdot 2^2 \cdot x^4 = 4\pi x^4$, ומכאן ש- $\frac{1}{4}$ משטחו שווה ל- $\pi x^4 \Rightarrow \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4}\pi x^4$.

כעת, נשווה בין הביטויים: $\frac{1}{3} \cdot \pi x^2 = \pi x^4$. נחלק את שני אגפי המשוואה ב- π ונקבל: $\frac{1}{3} \cdot x^2 = x^4$.

נחלק את שני אגפי המשוואה ב- x^2 ונקבל: $\frac{x^4}{x^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}$.

נוציא שורש לשני אגפי המשוואה: $x = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (אנו מתעלמים מהערך השלילי, משום ש-x מוכרח להיות חיובי).

התשובה הנכונה היא (3).

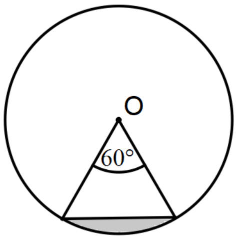
חיסורי שטחים

בשאלות מסוימות שקשורות במעגלים אנו עשויים להידרש למצוא את שטחן או את היקפן של צורות שאינן מוגדרות בבחינה. הצורות הללו, לרוב, נוצרות בהעברת קו או מספר קווים בתוך מעגל.

<u>לדוגמה:</u>

נתון מעגל שמרכזו O ואורך הרדיוס שלו 2 ס"מ.

לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט,
מה גודל השטח הכהה (בסמ"ר)?



לא ניתן לחשב את השטח הכהה באמצעות נוסחה כלשהי, לפחות לא באמצעות כזו הנלמדת לבחינה.
לפיכך, עלינו למצוא את שטחה באמצעות כללים ונוסחאות שאנו כן מכירים.
אם נחסר את שטח המשולש שנוצר משטח הגזרה, נקבל את גודלו של השטח הכהה.
שתי שוקיו של המשולש הן רדיוסים. כמו כן, זווית הראש שלו בת $60°$.
משולש שווה שוקיים בעל זווית ראש של $60°$ הוא משולש שווה צלעות.
נתון לנו כי אורך רדיוס המעגל (אחת מצלעות המשולש שווה צלעות) הוא 2 ס"מ, ולכן שטח המשולש הוא (בסמ"ר):
$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\cancel{4}\sqrt{3}}{\cancel{4}} = \sqrt{3}$.

הגזרה בסרטוט בעלת זווית ראש של $60°$, ולכן שטחה הוא (בסמ"ר): $\pi r^2 \cdot \frac{60°}{360°} = \pi \cdot 2^2 \cdot \frac{60°}{360°} = 4\pi \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}\pi$.

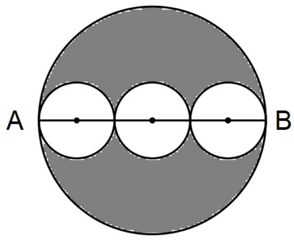
לאור האמור לעיל, גודל השטח הכהה הוא (בסמ"ר): $\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$.

לסיכום, כשאתם נתקלים בצורה שאינה מוגדרת ושאין בידכם את הכלים לחשב את שטחה או היקפה, נסו להבין בין אילו צורות אתם יכולים לחסר או מאילו חלקים היא מורכבת (למשל, גזרה במעגל מורכבת מקשת ומשני רדיוסים).

שאלה לדוגמה - חיסור שטחים

בסרטוט שלפניכם 3 מעגלים קטנים חופפים המשיקים זה לזה וחסומים בתוך מעגל גדול.
רדיוס כל אחד מן המעגלים הקטנים שווה ל-2 ס"מ.
AB הוא קוטר במעגל הגדול.

מה גודל השטח הכהה (בסמ"ר)?



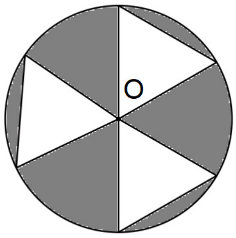
(1) 12π
(2) 20π
(3) 30π
(4) 24π

<u>פתרון</u>

כדי למצוא את גודל השטח הכהה, עלינו לחסר את שטחם של שלושת המעגלים הקטנים משטח המעגל הגדול.
רדיוס המעגל הגדול מורכב מ-3 רדיוסים קטנים, ולכן שווה ל-6 ס"מ $(2 \cdot 3)$ ומכאן ששטחו הוא (בסמ"ר): $\pi \cdot 6^2 = 36\pi$.
אורך רדיוס כל אחד מהמעגלים הקטנים הוא 2 ס"מ, ולכן שטח כל אחד מהם הוא (בסמ"ר): $\pi \cdot 2^2 = 4\pi$.
לפיכך, גודל השטח הכהה הוא (בסמ"ר): $36\pi - 4\pi - 4\pi - 4\pi = 24\pi$.
התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת - חיסור שטחים

בסרטוט שלפניכם 3 משולשים שווי צלעות החסומים במעגל שמרכזו O ורדיוסו 2 ס"מ.



מה סכום השטחים הכהים (בסמ"ר)?

(1) $4\pi-\sqrt{3}$

(2) $4\pi-2\sqrt{3}$

(3) $4\pi-3\sqrt{3}$

(4) $4\pi-4\sqrt{3}$

<u>פתרון</u>

כדי למצוא את סכום השטחים הכהים, עלינו לחסר משטח המעגל את סכום השטחים של שלושת המשולשים.

נתון כי אורך רדיוס המעגל הוא 2 ס"מ, ומכאן ששטחו הוא (בסמ"ר): $\pi\cdot 2^2=4\pi$.

אורך צלעותיהם של המשולשים שווי הצלעות שווה לאורך רדיוס המעגל, ולכן שטח כל אחד מהמשולשים הוא (בסמ"ר):

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{2^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\cancel{4}\sqrt{3}}{\cancel{4}}=\sqrt{3}.$$

לאור האמור לעיל, סכום השטחים הכהים הוא (בסמ"ר): $4\pi-\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{3}=4\pi-3\sqrt{3}$.

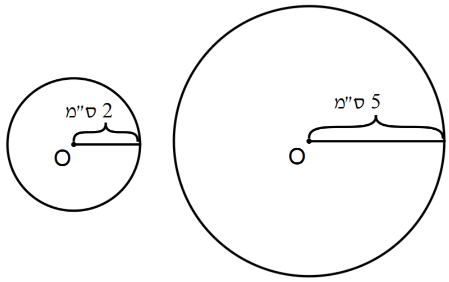
התשובה הנכונה היא (3).

דמיון מעגלים

מעגל הוא צורה משוכללת, ולכן כל המעגלים - יהיה גודלם אשר יהיה - דומים זה לזה בדיוק כשם שכל הריבועים דומים זה לזה, כל המחומשים המשוכללים דומים זה לזה וכך הלאה.

בדומה לכל הצורות שלמדנו עד כה, יחס השטחים בין מעגלים שווה ליחס הקווי ביניהם בריבוע.
וכפי שלמדנו קודם לכן, יחס קווי יכול להיות היחס בין כל גודל חד-ממדי שהוא (רדיוס, קוטר, היקף וכך הלאה).

<u>לדוגמה:</u>



היחס בין הרדיוסים של המעגלים הוא $2:5$ וזה גם היחס הקווי ביניהם.
כאמור, היחס זהה גם בין הקטרים ($4:10 \Rightarrow 2:5$) וגם בין ההיקפים ($4\pi:10\pi \Rightarrow 4:10 \Rightarrow 2:5$).

שטח המעגל **הקטן**: $\pi r^2=\pi\cdot 2^2=4\pi$. שטח המעגל **הגדול**: $\pi r^2=\pi\cdot 5^2=25\pi$.
כפי שציינו, היחס בין שטחי המעגלים שווה ליחס הקווי ביניהם בריבוע: $(2:5)^2 \Rightarrow 4:25$.
מאליו מובן שאם נתון לנו יחס בין שטחים, ניתן להוציא לשני האיברים ביחס שורש ולהגיע ליחס הקווי.

שאלה לדוגמה - דמיון מעגלים

אם נגדיל את רדיוסו של מעגל מסוים פי a, פי כמה יגדל שטחו?

(1) a
(2) $2a$
(3) $\sqrt{a}$
(4) a^2

<u>**פתרון**</u>
נסמן את רדיוס המעגל ב-x. אם נגדיל את רדיוסו פי a, גודל הרדיוס יהיה ax והיחס בין הרדיוסים יהיה: $x:ax \Rightarrow 1:a$.
אם כן, היחס הקווי בין המעגלים לפני ההגדלה ואחריה הוא: $1:a$.
היחס בין שטחים של מעגלים שווה ליחס הקווי ביניהם בריבוע: $(1:a)^2 \Rightarrow 1:a^2$. לפיכך, שטח המעגל יגדל פי a^2 .

<u>**דרך פתרון נוספת - הצבת מספרים:**</u>
נקבע מספרים נוחים עבור אורך רדיוס המעגל ועבור a: רדיוס המעגל הנתון 1 ס"מ ו- $a=3$.
שטחו של מעגל שרדיוסו 1 ס"מ הוא (בסמ"ר): $\pi\cdot 1^2=\pi$.
אם נגדיל את רדיוס המעגל פי 3, אורכו יהיה 3 ס"מ ושטחו יהיה (בסמ"ר): $\pi\cdot 3^2=9\pi$.
אם כן, שטח המעגל גדל פי 9. כעת, נציב $a=3$ בתשובות, ונפסול את אלו שערכן אינו 9:
תשובה (1): $a=3$. התשובה נפסלת.
תשובה (2): $2a=2\cdot 3=6$. התשובה נפסלת.
תשובה (3): $\sqrt{a}=\sqrt{3}$. התשובה נפסלת.
תשובה (4): $a^2=3^2=9$.
התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת - דמיון מעגלים

רדיוסו של מעגל א' גדול פי 2 **מקוטרו** של מעגל ב'.

מה היחס בין שטח המעגל ב' לשטח המעגל א'?

(1) $1:8$
(2) $1:2$
(3) $1:16$
(4) $1:4$

__פתרון__

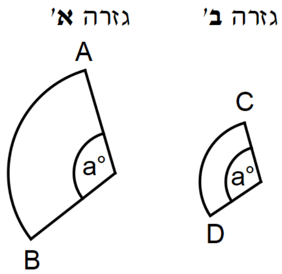
לשם הנוחות נסמן את הקטע הקטן ביותר, רדיוס מעגל ב', ב-x. לפיכך, קוטרו הוא 2x.
נתון כי רדיוסו של מעגל א' גדול פי 2 **מקוטרו** של מעגל ב', ולכן אורך הרדיוס של מעגל א' הוא 4x.
אם כן, היחס הקווי בין מעגל ב' למעגל א' הוא $x:4x \Rightarrow 1:4$, ומכאן שיחס השטחים ביניהם הוא: $(1:4)^2 \Rightarrow 1:16$.

__**דרך פתרון נוספת - הצבת מספרים:**__

נציב מספר נוח במקום קוטרו של מעגל ב' (4 ס"מ). לפי הצבה זו, רדיוסו הוא 2 ס"מ ומכאן ששטחו הוא (בסמ"ר): $\pi r^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$. נתון כי רדיוסו של מעגל א' גדול פי 2 **מקוטרו** של מעגל ב', ולכן אורך רדיוסו הוא 8 ס"מ, ומכאן ששטחו הוא (בסמ"ר): $\pi r^2 = \pi \cdot 8^2 = 64\pi$.
לאור האמור לעיל, היחס בין שטח המעגל ב' לשטח המעגל א' הוא: $4\pi : 64\pi \Rightarrow 1:16$.
ניתן לפסול את התשובות (1), (2) ו-(4).
התשובה הנכונה היא (3).

שאלה נוספת - דמיון מעגלים

בסרטוט שלפניכם שתי גזרות של מעגלים שונים.
ידוע כי השטח של גזרה א' גדול פי 4 מהשטח של גזרה ב'.



מה היחס בין אורך הקשת CD לאורך הקשת AB?

(1) $1:2$
(2) $1:a$
(3) $1:\sqrt{a}$
(4) $1:4$

__פתרון__

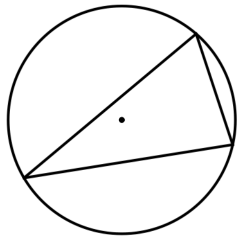
העובדה שנתונות גזרות בלבד אינה משנה, שכן היחס בין שטחי המעגלים זהה ליחס בין שטחי הגזרות (כל עוד הזווית המרכיבה את הגזרה, a, היא אותה זווית מרכזית).
אם כן, היחס בין שטח המעגל ב' לשטח המעגל א' הוא: $1:4$.
כפי שלמדנו בשיעור, ניתן להוציא שורש לאיברים שמייצגים את השטחים ביחס ולקבל את היחס הקווי: $\sqrt{1}:\sqrt{4} \Rightarrow 1:2$.
קשתות במעגל הן גודל חד-ממדי, ולכן היחס ביניהן זהה ליחס הקווי בין המעגלים.
התשובה הנכונה היא (1).

מעגלים חוסמים וחסומים

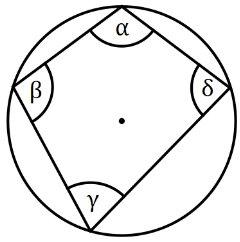
בחלק האחרון של השיעור נעסוק במעגלים שחוסמים צורות ובמעגלים שחסומים בצורות.
אגב, עשויות להופיע שאלות שישלבו בין שני התחומים.

תזכורת קצרה מיסודות:

משולש חסום במעגל רק אם שלושת הקדקודים שלו נמצאים על היקף המעגל. כמו כן, ניתן לחסום במעגל כל משולש שהוא. משולש יכול להיחסם על ידי מעגל בגודל אחד בלבד, כלומר לא ייתכנו שני מעגלים שונים שיכולים לחסום את אותו משולש.

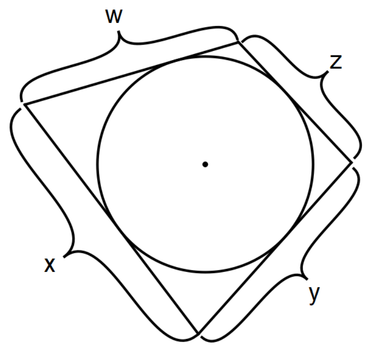


מרובע חסום במעגל - סכום הזוויות הנגדיות של מרובע החסום במעגל הוא $180°$.

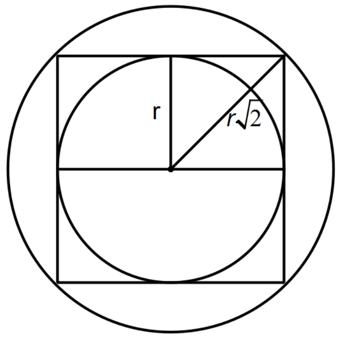


דיברנו על כך בתחילת השיעור - כאשר זוויות היקפיות נשענות על קשתות שאורכן יחדיו שווה להיקף המעגל, סכומן שווה ל- $180°$. לפיכך: $\alpha+\gamma=180°$ ו- $\beta+\delta=180°$ ומכאן ש- $\alpha+\gamma=\beta+\delta=180°$.

מרובע החוסם מעגל - סכום אורכן של זוג צלעות נגדיות אחד שווה לסכום אורכן של זוג הצלעות השני ($w+y=x+z$).



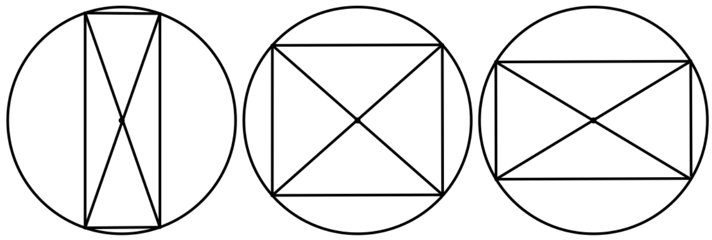
ריבוע חוסם מעגל - קוטר המעגל החסום שווה באורכו לצלע הריבוע. זאת ועוד, אם אנו חוסמים את הריבוע שחוסם במעגל, רדיוס המעגל החוסם גדול פי $\sqrt{2}$ מרדיוס המעגל החסום (אלכסון בריבוע גדול פי $\sqrt{2}$ מצלעו - ראו סרטוט מצורף).



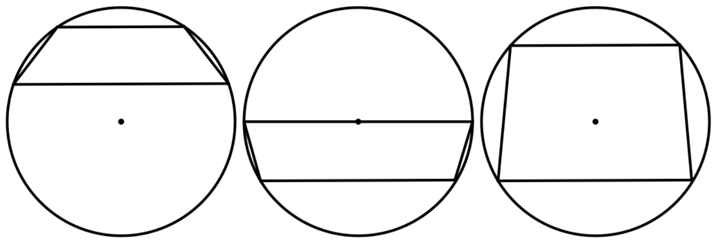
עד כה דיברנו על צורות באופן כללי, וכעת נעבור לעסוק בצורות ספציפיות.

מלבן וטרפז

מלבן - ניתן לחסום במעגל כל מלבן שהוא, ומרכז המעגל החוסם הוא נקודת המפגש של אלכסוני המלבן.
כפועל יוצא מכך, כל אחד מהאלכסונים במלבן הוא קוטר במעגל.

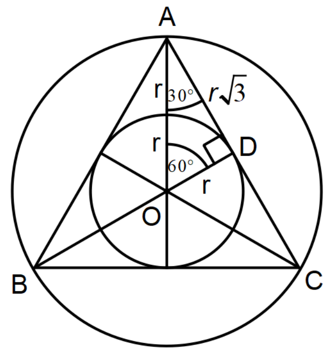


טרפז - ניתן לחסום במעגל טרפז שווה שוקיים בלבד.



משולש שווה צלעות

נתחיל בדוגמה שבה משולש שווה צלעות חוסם מעגל וחסום על ידי מעגל אחר.
נמצא את היחסים שבין הגדלים השונים במעגל ובמשולש, **שאותם אנו ממליצים לזכור בעל-פה**.
אם בבחינה אינכם זוכרים את היחסים בעל-פה, התחילו בסימון הגודל הקטן ביותר (במקרה הזה, רדיוס המעגל החסום) והגיעו באמצעותו לגדלים האחרים.

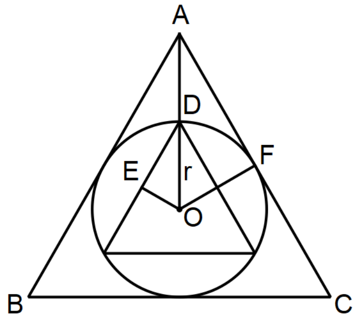


כאמור, נתחיל עם רדיוס המעגל החסום שאותו נסמן ב-r.
בהעברת שלושת הגבהים (שהם גם תיכונים וחוצי זווית) במשולש שווה הצלעות אנו יוצרים שישה משולשים 30; 60; 90.
הצלע AD היא ניצב גדול במשולש 30; 60; 90, ולכן גדולה פי $\sqrt{3}$ מהניצב הקטן, שהוא רדיוס המעגל - r.
זאת ועוד, היא חצי מצלע במשולש שווה הצלעות, ולכן גודל כל אחת מצלעות המשולש הוא: $2r\sqrt{3}$.
הצלע AO היא יתר במשולש 30; 60; 90, ולכן גדולה פי 2 מהניצב הקטן ומכאן שגודלה הוא 2r.
כמו כן, היא רדיוס במעגל החוסם, ומכאן שרדיוס המעגל החוסם גדול פי 2 מרדיוס המעגל החסום.
שימו לב! שלושת הגבהים במשולש מחלקים זה את זה ביחס של $1:2$.

תכונה נוספת שמתקיימת במקרה המתואר: שטח המעגל החוסם גדול פי 4 משטח המעגל החסום, שהרי היחס בין הרדיוסים שלהם הוא $1:2$ (יחס השטחים שווה ליחס הקווי בריבוע).

לסיכום, במקרה המתואר לעיל מתקיים:
רדיוס המעגל החסום r, גודל צלע המשולש $2r\sqrt{3}$ ורדיוס המעגל החוסם 2r.

כעת, נעסוק במקרה דומה שבו מעגל חוסם משולש שווה צלעות ונחסם על ידי משולש שווה צלעות אחר.



המשולש DOE הוא משולש 30; 60; 90 (אחד משישת המשולשים שנוצרים בהעברת הגבהים), ולכן הניצב הקטן בו שווה לחצי מהיתר (רדיוס המעגל הקטן): $\frac{r}{2}$. הצלע DE היא הניצב הגדול במשולש DOE, ועל כן גדולה פי $\sqrt{3}$ מהניצב הקטן: $\frac{r}{2}\cdot\sqrt{3}$.

הצלע במשולש החסום שווה לפעמיים הניצב הגדול: $\cancel{2}\cdot\frac{r}{\cancel{2}}\cdot\sqrt{3}=r\sqrt{3}$.

AOF הוא משולש 30; 60; 90 גם כן (אחד משישת המשולשים שנוצרים בהעברת הגבהים).

הניצב הקטן שלו (OF) הוא רדיוס במעגל, ולכן גודל הצלע AF הוא $r\sqrt{3}$ (הניצב הגדול במשולש 30; 60; 90).

לפיכך, צלע המשולש החוסם (ABC) גדולה פי 2 מצלע המשולש החסום: $2r\sqrt{3}$.

תכונה נוספת שמתקיימת במקרה המתואר:

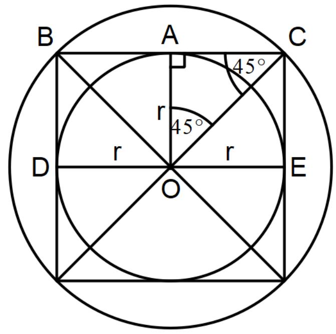
שטח המשולש החוסם גדול פי 4 משטח המשולש החסום, שהרי היחס בין צלעותיהם הוא $2:1$ ($2r\sqrt{3}:r\sqrt{3}\Rightarrow 2:1$).

לסיכום:

רדיוס המעגל r, צלע המשולש החסום גדולה פי $\sqrt{3}$ ($r\sqrt{3}$) וצלע המשולש החוסם גדולה ממנה פי 2: $2r\sqrt{3}$.

<u>ריבוע</u>

כפי שעשינו עם המשולש שווה הצלעות, נעשה כעת עם ריבוע.



אלכסונים בריבוע עוברים דרך מרכז המעגל ומחלקים את הריבוע ל-4 משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים זהים.

הורדת גובה ממרכז המעגל (O) לאמצע צלע הריבוע (A) מחלקת את המשולש BOC לשני משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים זהים.

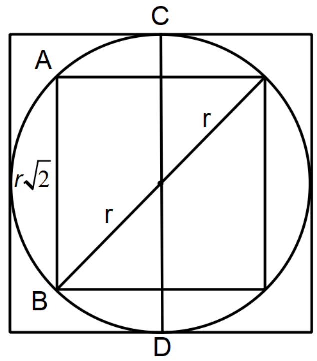
הצלע AO היא רדיוס המעגל והיא גם ניצב במשולש ישר זווית ושווה שוקיים.

הצלע OC היא יתר במשולש ישר זווית ושווה שוקיים, ולכן גדולה מהניצב (r) פי $\sqrt{2}$.

לאור האמור לעיל, במקרה המתואר לעיל מתקיים:

רדיוס המעגל החסום הוא r, צלע הריבוע שווה לפעמיים רדיוס המעגל (צלע הריבוע $= DE = 2r$) ורדיוס המעגל החוסם גדול פי $\sqrt{2}$ מרדיוס המעגל החסום. מהאמור לעיל עולה כי היחס בין רדיוס המעגל החסום לרדיוס המעגל החוסם הוא: $1:\sqrt{2}$ ומכאן שהיחס בין השטחים הוא: $1:2$ $\Rightarrow$ $\left(1:\sqrt{2}\right)^2$.

כעת, נעסוק במקרה שבו מעגל חוסם ריבוע ונחסם על ידי ריבוע אחר.

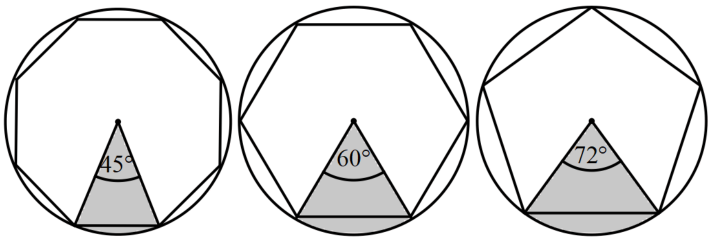


האלכסון בריבוע החסום הוא קוטר המעגל (2r), והוא מחלק את הריבוע לשני משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים זהים.

הצלע AB היא ניצב במשולש ישר זווית ושווה שוקיים, ולכן קטנה פי $\sqrt{2}$ מאלכסון הריבוע: $r\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{2}}\cdot r}{\cancel{\sqrt{2}}} = \frac{2r}{\sqrt{2}}$.

שימו לב! עד כה עבדנו עם רדיוס המעגל ובאמצעותו הגענו לגדלים האחרים.
אם בבחינה נוח לכם יותר לעבוד באמצעות איבר אחר (1, x או כל גורם אחר), אין כל בעיה לעשות כן.
קודם לכן כבר ראינו שצלע הריבוע החוסם שווה לקוטר המעגל (CD).
לאור האמור לעיל, במקרה המתואר לעיל מתקיים:
רדיוס המעגל הוא r, צלע הריבוע החסום גדול ממנו פי $\sqrt{2}$: $r\sqrt{2}$. צלע הריבוע החוסם שווה לפעמיים רדיוס המעגל (2r).
מהאמור לעיל עולה כי היחס בין צלע הריבוע החסום לצלע הריבוע החוסם הוא: $1:\sqrt{2}$ ($r\sqrt{2} : 2r \Rightarrow 1:\sqrt{2}$) ומכאן שהיחס בין השטחים הוא: $\left(1:\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow 1:2$.

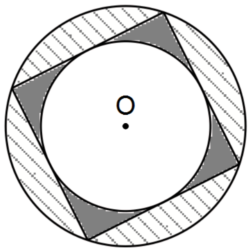
<u>מצולעים משוכללים</u>



מרכז המעגל החוסם את המצולעים המשוכללים הוא גם המרכז שלהם.
אם, לדוגמה, נתבקש לחשב את אחת הגזרות המסומנות באפור, נוכל לעשות כן משום שאנו יודעים את זווית הראש של כל אחד מהמשולשים שווי השוקיים המרכיבים את המצולעים.
שימו לב! צלעו של משושה משוכלל החסום במעגל שווה לרדיוס המעגל.

שאלה לדוגמה - מעגלים חוסמים וחסומים

בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O ורדיוסו שווה ל-r ס"מ.
מעגל זה חסום בריבוע החסום בתוך מעגל נוסף שמרכזו גם כן O.



$$? = \frac{\text{השטח הכהה}}{\text{השטח המקווקו}}$$

(1) $\frac{4-\pi}{2\pi-4}$

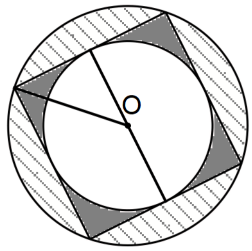
(2) $\frac{\pi-2}{2\pi-2}$

(3) $\frac{4-\pi}{4\pi-4}$

(4) $\frac{\pi-2}{4\pi-2}$

<u>פתרון</u>

ראשית, חשוב לשים לב כי על מנת למצוא את השטח הכהה, עלינו לחסר את שטח המעגל החסום משטח הריבוע.
כדי למצוא השטח המקווקו עלינו לחסר את שטח הריבוע משטח המעגל החוסם.
כעת, נמצא את שטח הצורות באמצעות הגודל הקטן ביותר, רדיוס המעגל החסום.



צלע הריבוע שווה לפעמיים רדיוס המעגל החסום (2r), ולכן שטח הריבוע הוא: $2r \cdot 2r = 4r^2$.
שטח המעגל החסום הוא πr^2, ועל כן גודל השטח הכהה הוא: $4r^2 - \pi r^2$.
רדיוס המעגל הגדול הוא יתר במשולש ישר זווית ושווה שוקיים שבו גודל ניצב הוא r.
לפיכך, גודל רדיוסו הוא: $r\sqrt{2}$ ומכאן ששטחו הוא: $\pi\left(r\sqrt{2}\right)^2 = \pi r^2 \cdot 2 = 2\pi r^2$.
אם כן, גודל השטח המקווקו הוא: $2\pi r^2 - 4r^2$.
לאור האמור לעיל: $\frac{4r^2-\pi r^2}{2\pi r^2-4r^2} = \frac{\text{השטח הכהה}}{\text{השטח המקווקו}}$.
משום שבתשובות לא מופיע r^2, נוציא גורם משותף r^2 במונה ובמכנה: $\frac{4-\pi}{2\pi-4} = \frac{\cancel{r^2}(4-\pi)}{\cancel{r^2}(2\pi-4)} = \frac{4r^2-\pi r^2}{2\pi r^2-4r^2}$.

התשובה הנכונה היא (1).

שאלה נוספת – מעגלים חוסמים וחסומים

באיזו מן הצורות הבאות **לא** ניתן לחסום מעגל?

(1) ריבוע
(2) מלבן שאינו ריבוע
(3) מעוין שאינו ריבוע
(4) משושה משוכלל

פתרון

בשיעור הזה ובשיעורים הקודמים ראינו שניתן לחסום מעגל בריבוע וכך גם באשר למשושה משוכלל.

ניתן לפסול את התשובות (1) ו-(4). התכונה שמקיים מרובע שחוסם מעגל היא שסכום אורכן של זוג צלעות נגדיות אחד שווה לסכום אורכן של זוג הצלעות הנגדיות השני. ארבע הצלעות של מעוין שוות, ולכן הוא מקיים את התכונה הזו.

ניתן לפסול את תשובה (3). פסלנו 3 תשובות, ולכן בשלב הזה ניתן לסמן את תשובה (2).

למען שלמות ההסבר:

במלבן שאינו ריבוע הצלעות הנגדיות אומנם שוות זו לזו, אך סכומן אינו שווה לסכום אורכן של זוג הצלעות האחר.

שימו לב! דרך נוחה לפתירת שאלות מהסוג הזה היא לנסות ליצור סרטוט שכן מתאפשר וכך לפסול 3 תשובות.

התשובה הנכונה היא (2).

שאלה נוספת – מעגלים חוסמים וחסומים

מעגל שרדיוסו r ס"מ חסום במשולש שווה צלעות.

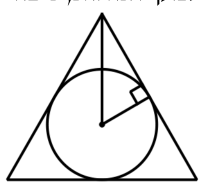
מה שטח המשולש (בסמ"ר)?

(1) $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$
(2) $\sqrt{3}r^2$
(3) $3\sqrt{3}r^2$
(4) $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$

פתרון

כדי למצוא את שטח המשולש, עלינו למצוא את גודל צלעו וככל הנראה יהיה עלינו לבטאה באמצעות r (לפי התשובות).

למען הנוחות, ניצור לעצמנו סרטוט לפי הנתונים, ונחבר את מרכז המעגל לנקודות השקה ולאחד מקדקודי המשולש.



המשולש ישר הזווית שנוצר הוא משולש 30; 60; 90 (אחד משׁשת המשולשים שנוצרים בהעברת הגבהים במשולש שווה צלעות).

נתון כי אורכו של רדיוס המעגל הוא r ס"מ. הניצב הגדול במשולש ישר הזווית שנוצר גדול מהרדיוס פי $\sqrt{3}$ ולכן אורכו הוא (בס"מ): $r\sqrt{3}$ ומכאן שאורכה של כל צלע במשולש שווה הצלעות הוא (בס"מ): $2r\sqrt{3}$.

נחשב את שטחו של המשולש באמצעות הנוסחה לחישוב שטח של משולש שווה צלעות (בסמ"ר):

$$\frac{\left(2r\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{2^2\cdot r^2\cdot 3\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{\cancel{4}\cdot r^2\cdot 3\cdot\sqrt{3}}{\cancel{4}}r^2\cdot 3\cdot\sqrt{3}=3\sqrt{3}r^2.$$

התשובה הנכונה היא (3).

שאלה נוספת - מעגלים חוסמים וחסומים

נתון מעגל שרדיוסו r.

המעגל חסום בריבוע שהיקפו (בס"מ) שווה לשטח המעגל (בסמ"ר).

$r = ?$

(1) 8π

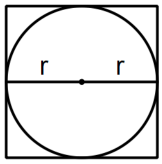
(2) $\frac{8}{\pi}$

(3) $\frac{4}{\pi}$

(4) 4π

פתרון

תחילה, ניצור סרטוט כדי להקל על עצמנו במציאת הקשר שבין רדיוס המעגל לצלע הריבוע.



כפי שלמדנו בשיעור, כשמעגל חסום בריבוע, צלע הריבוע שווה לקוטר המעגל (2r).

לפיכך, היקף הריבוע הוא: $2r \cdot 4 = 8r$.

שטחו של מעגל שרדיוסו r הוא: πr^2.

נתון לנו שהיקף הריבוע שווה לשטח המעגל ולכן: $8r = \pi r^2$.

נחלק את שני אגפי המשוואה ב-r ונקבל: $8 = \pi r$.

נתבקשנו למצוא את r, ולכן נבודד אותו על ידי חלוקת שני אגפי המשוואה ב- π : $r = \frac{8}{\pi}$.

התשובה הנכונה היא (2).

סיכום

1. זוויות וקשתות

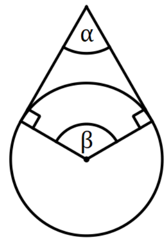
- סכום הזוויות ההיקפיות שנשענות על קשתות שאורכן יחדיו שווה להיקף המעגל הוא $180°$.
- זווית היקפית שווה למחצית מזווית מרכזית כאשר שתיהן נשענות על אותה קשת.
- זוויות היקפיות שנשענות על אותה קשת שוות.

2. גזרות וקשתות

- אורך קשת שעליה נשענת זווית מרכזית בת $\alpha°$ הוא: $2\pi r \cdot \frac{\alpha°}{360°}$.
- שטח גזרה בעלת זווית ראש $\alpha°$ הוא: $\pi r^2 \cdot \frac{\alpha°}{360°}$.

3. משיקים למעגל

- משיק הוא קו ישר אשר נוגע בקו עקום (במקרה הזה מעגל) בנקודה אחת בלבד.
- הזווית בין משיק לרדיוס היא זווית ישרה.
- כשמשיקים למעגל יוצאים מאותה נקודה, אורכם עד לנקודת ההשקה זהה בהכרח.
- כשמשיקים יוצאים מאותה נקודה ומחברים את נקודות ההשקה שלהם למרכז המעגל, נוצר דלתון ששתיים מזוויותיו ישרות (זווית בין רדיוס למשיק).



סכום זוויות הראש בדלתון שנוצר שווה ל- $180°$: $\alpha + \beta = 180°$.

- כשנתונה לכם שאלה שבה מעגלים משיקים זה לזה, חברו בין הרדיוסים שלהם.

4. מעגלים ללא סרטוט

בשאלות מעגלים ללא סרטוט, נסו ליצור משוואה באמצעות הנתונים.
אם נוח לכם ליצור סרטוט לפני יצירת המשוואה, אין בעיה לעשות כן.

5. חיסורי שטחים

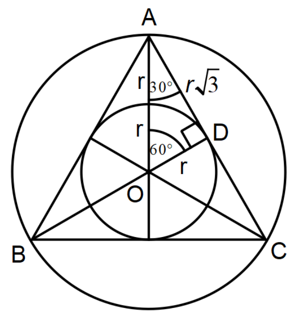
כשאתם נדרשים לחסר בין צורות כדי למצוא שטח של צורה אחרת, עשו לכם לפני החישובים סדר: איזו צורה צריך לחסר מאיזו צורה (למשל, ריבוע ממעגל) ורק לאחר מכן התחילו עם החישובים.

6. דמיון מעגלים

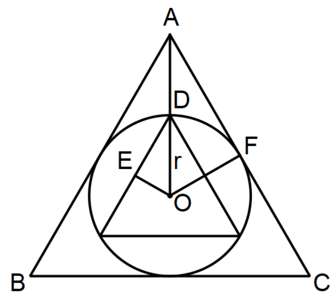
- מעגל הוא צורה משוכללת, ולכן כל המעגלים דומים זה לזה.
- בדומה לכל סוגי הצורות שבהן עסקנו עד כה, יחס השטחים בין מעגלים דומים שווה ליחס הקווי (זכרו כי יחס קווי יכול להיות בין כל גודל חד-ממדי: רדיוס, היקף, קוטר וכן הלאה) ביניהם בריבוע.

7. מעגלים חוסמים וחסומים

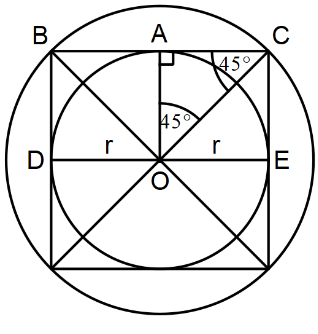
- משולש יכול להיחסם על ידי מעגל בגודל אחד בלבד, כלומר לא ייתכנו שני מעגלים שונים שיכולים לחסום את אותו משולש.
- סכום הזוויות הנגדיות של מרובע החסום במעגל הוא $180°$.
- במרובע החוסם מעגל, סכום אורכן של זוג צלעות נגדיות אחד שווה לסכום אורכן של זוג הצלעות השני.
- ניתן לחסום במעגל כל מלבן שהוא, ומרכז המעגל החוסם הוא נקודת המפגש של אלכסוני המלבן שהם קטרים במעגל.
- הטרפז היחיד שניתן לחסום במעגל הוא טרפז שווה שוקיים.
- כאשר מעגל שרדיוסו r חסום במשולש שווה צלעות אשר חסום במעגל אחר, גודל צלע המשולש הוא $2r\sqrt{3}$ וגודל רדיוס המעגל החוסם הוא 2r.
  יחס השטחים בין המעגל החסום למעגל החוסם הוא: $1:4$.



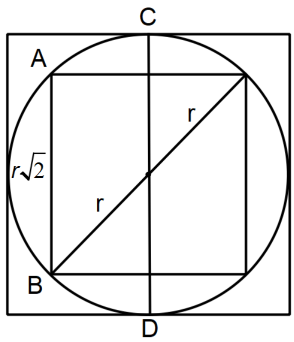
- כאשר מעגל שרדיוסו r חסום במשולש שווה צלעות וחוסם משולש שווה צלעות אחר, גודל צלע המשולש החסום גדולה הוא $r\sqrt{3}$ וגודל צלע המשולש החוסם הוא $2r\sqrt{3}$.
  יחס השטחים בין המשולש החסום למשולש החוסם הוא: $1:4$.



- כאשר ריבוע חוסם מעגל שרדיוסו r ונחסם על ידי מעגל אחר, צלע הריבוע שווה לפעמיים רדיוס המעגל החסום (2r) ורדיוס המעגל החוסם גדול פי $\sqrt{2}$ מרדיוס המעגל החסום ($r\sqrt{2}$).
  היחס בין שטח המעגל החסום לשטח המעגל החוסם הוא: $1:2$.



- כאשר מעגל שרדיוסו r חוסם ריבוע וחסום על ידי ריבוע אחר, גודל צלע הריבוע החסום הוא $r\sqrt{2}$ וגודל צלע הריבוע החוסם שווה לפעמיים רדיוס המעגל (2r).
יחס השטחים בין שטח הריבוע החסום לשטח הריבוע החוסם הוא: $1:2$.



- כאשר מצולע משוכלל חוסם מעגל ונחסם על ידי מעגל אחר, מרכז המעגל הוא מרכז הצורה המשוכללת.
- כאשר משושה חסום במעגל, אורך צלע המשושה שווה באורכה לרדיוס המעגל.

<u>סוף שיעור - בהצלחה בתרגול!</u>