

2 Le rivoluzioni scientifiche del XX secolo e oltre

Le rivoluzioni concettuali della «nuova» fisica del XX secolo — termodinamica, relatività, quantistica, complessità — e i cambi di paradigma che esse comportano nell'epistemologia della scienza moderna di derivazione humiano-kantiana, in particolare rispetto alla fondazione «trascendentalista» (logicista) del principio di causa e alla dicotomia determinismo—aleatorietà nello studio dei processi fisici

Lista degli acronimi

CD	(Phase) Coherence Domains (Domini di Coerenza di Fase) nei Campi Quantistici della QFT
CMBR	Cosmic Microwave Background Radiation (Radiazione Cosmica di Fondo a Microonde)
CNBR	Cosmic Neutrino Background Radiation (Radiazione Cosmica di Fondo di Neutrini)
CCR	Canonical Commutation Relation (in QM e QFT)
FPUT	Esperimento di Fermi-Ulam-Pasta-Tsingou in SM
FT	Fourier Transform (Trasformata di Fourier)
GR	General Relativity (Teoria della Relatività Generale).
MS	Modello Standard (delle Particelle Elementari)
NG	Nambu-Goldstone Bosons (Bosoni di Nambu-Goldstone)
PDF	Probability Density Function (Funzione di Densità di Probabilità)
PMF	Probability Mass Function (Funzione di Massa di Probabilità)
QED	Quantum Electro-Dynamics (Elettrodinamica Quantistica)
QFT	Quantum Field Theory (Teoria Quantistica dei Campi)
QM	Quantum Mechanics (Meccanica Quantistica)
QV	Quantum Vacuum (Vuoto Quantistico)

RGL	Raddoppio dei Gradi di Libertà
SM	Statistical Mechanics (Meccanica Statistica)
SQ	Second Quantization (Seconda Quantizzazione nella QFT)
SR	Special Relativity (Teoria della Relatività Speciale).
SSB	Spontaneous Symmetry Breaking (Rottura Spontanea di Simmetria) in QFT
TC	Teoria delle Categorie
TLC	Teorema del Limite Centrale
TCS	Theoretical Computer Science (Informatica Teorica)
TI	Teoria degli Insiemi

2.1 Nascita della «nuova fisica»

A differenza di quanto abbiamo appena fatto con le rivoluzioni nella matematica della fine dell'800 e sulle quali non ritorneremo più in questo lavoro, le scoperte della «nuova fisica» costituiranno, approfondite dal punto di vista della filosofia della natura, l'oggetto della Terza Parte nel Secondo Volume di questo lavoro. In questa sezione ci limiteremo dunque a ricordarle sommariamente per completare il quadro della rivoluzione scientifica compiutasi negli ultimi centocinquanta anni, che ha mutato radicalmente concezioni secolari e, nel caso della matematica, millenarie.

2.2 Ridimensionamento della fisica newtoniana: lo schema di questo capitolo

Pretesa di onnicomprensività della meccanica newtoniana

Il punto di partenza è la *pretesa di onnicomprensività* della fisica-matematica newtoniana rispetto allo studio di *tutti* i fenomeni fisici che potessero essere oggetto di studio delle scienze naturali moderne. Una pretesa basata sulla presunta *auto-evidenza* e quindi assoluta *verità* delle tre *leggi della dinamica*¹ del tutto simile a quella a quel tempo supposta per i postulati della

¹ Li ricordiamo sommariamente: 1) *principio di inerzia*, un corpo non soggetto ad accelerazione e quindi isolato mantiene indefinitamente il suo stato di quiete o di moto (= velocità); 2) *principio di proporzionalità della forza al prodotto massa × accelerazione* ($F = m \times a$, legge fondamentale della dinamica); 3) *principio di azione e reazione*, a ogni azione segue una reazione uguale e contraria (nel verso della direzione). Il carattere matematico di tali principi deriva dal fatto che essi sono *condizione necessaria e sufficiente* per l'applicabilità del calcolo allo studio

geometria euclidea². Ecco, dunque, un passo dell'ottica di Newton dove questi ingredienti della sua teoria emergono chiaramente:



I fenomeni della natura ci insegnano che siffatti principi (= le tre leggi della dinamica) esistono realmente, anche se la loro causa non è stata ancora investigata. Le leggi di cui parliamo sono dunque *evidenti* e solo le loro cause possono dirsi *oscure*. Gli aristotelici e gli scolastici invece hanno considerato come qualità oscure non già delle proprietà in qualche modo note, ma piuttosto altre che pensavano fossero nascoste nei corpi e costituissero la ragione sconosciuta degli aspetti visibili. Ma a questa categoria tanto la gravitazione quanto la forza elettrica e magnetica apparterebbero solo se noi presupponessimo che esse derivano dalla natura intima delle cose a noi sconosciuta, cioè da un sostrato impensabile ed insondabile. Siffatte «qualità» sono indubbiamente un ostacolo per il progresso scientifico e sono quindi rifiutate a buon diritto dall'*indagine moderna*. La credenza in *essenze specifiche delle cose dotate di specifiche forze nascoste* e quindi adatte a produrre determinati effetti sensibili, è del tutto vuota e priva di significato. Derivare invece dai fenomeni due o *tre principi generali del movimento* e spiegare come poi da essi, quali presupposti chiari ed evidenti, debbano seguire tutte le proprietà e le manifestazioni di *tutte le cose materiali*, sarebbe già un importante progresso della conoscenza scientifica, anche se le cause di tali principi rimanessero a noi completamente sconosciute (Newton 1704, 326).

L'anticipazione in Tommaso d'Aquino della critica newtoniana all'interpretazione delle nature dei corpi come "forze nascoste (occulte)

È rilevante — sempre per porre in rilievo i punti di contatto che, a livello dei fondamenti metafisici, possono essere evidenziati fra scienza moderna e filosofia della natura aristotelico-tomista — che sull'argomento Tommaso d'Aquino era stato ancora più drastico con certi aristotelici del suo tempo di quanto, più di quattro secoli dopo, fu in questo ed in altri testi Newton — e prima di lui Galilei — con i pronipoti rinascimentali di quegli aristotelici medievali. Tommaso infatti definisce, non «vuota» e «priva di significato», ma addirittura «ridicola» quest'idea d'intendere la «natura» o «essenza specifica» dei corpi come una «forza nascosta» che produce

della dinamica. Solo infatti fermandosi, nell'ordine di derivazione, alle derivate seconde (v. *derivata**), ovvero non supponendo una variazione dell'accelerazione, il calcolo funziona. Per questo occorre che il sistema sia *isolato*, che valga cioè il principio d'inerzia, o che, comunque, operando opportunamente per ridurre la complessità del sistema studiato, la situazione possa essere realisticamente ridotta a tale paradigma di base.

² È storicamente accertato che Newton — proprio per combattere il carattere *ipotesico* che Galilei, attribuiva alla nuova scienza della natura proprio perché non si basava sul riferimento alle nature o essenze dei corpi (cfr. § 0.7 e (Drake, 1990, p. 183. 214ss.)) — aveva invece inteso dare un carattere apodittico e non ipotetico (*hypotheses non fingo*), ai suoi *Philosophiæ naturalis principia mathematica* del 1687, del tutto analogo a quello che al tempo si supponeva potesse essere attribuito alla geometria euclidea (Cfr. su questo (Boyer, 1982, p. 450ss.; Koyré, 1983, pp. 31-43).

effetti meccanici, particolari. Evidentemente, nel 1200 erano ben vive queste contaminazioni neoplatoniche dell'aristotelismo autentico che poi, purtroppo — anche perché l'insegnamento di Tommaso fu confinato alla sola teologia dalla Chiesa stessa — presero piede nel Rinascimento, contribuendo alla crisi di credibilità che ha afflitto la filosofia della natura aristotelico-tomista fino ai nostri giorni. Afferma testualmente Tommaso:



Poiché infatti «nascere» si dice di quelle cose che sono generate perché congiunti ad un generante come è evidente nelle piante e negli animali, il principio della generazione e del moto viene denotato come «natura». Sono perciò ridicoli (*deridendi sunt*) quegli aristotelici che volendo correggere Aristotele su questo punto, pretendono di definire la natura come qualcosa di assoluto (non relativo all'azione delle cause agenti sulla materia *N.d.R.*) affermando che la natura è una forza nascosta nelle cose (*vis insita in rebus*) o qualcosa di simile» (Tommaso d'Aq., *In Physic., II l. 1 n. 5.*)³.

Carattere ipotetico e probabilistico della fisica anche newtoniana

In ogni caso, innanzitutto dopo la scoperta delle geometrie non-euclidee è chiaro che anche la pretesa apoditticità delle leggi newtoniane ha dovuto essere sostituita con una più sana ed oggettiva *ipoteticità* rafforzata in maniera definitiva dalla dimostrazione, legata, alla questione dei fondamenti della matematica e al superamento delle antinomie dal carattere necessariamente ipotetico delle scienze matematiche anche teoriche e non solo applicate (Cfr. § 1.6.3). Un carattere ipotetico di tutta la scienza moderna che è andato di pari passo con lo sviluppo del necessario carattere *probabilistico* delle previsioni e quindi delle *Leggi Matematiche della Fisica Moderna* in quanto basate sul *metodo matematico-sperimentale* della scienza moderna che ha portato prima alla *definizione analitica* del calcolo delle probabilità applicato alla fisica ad opera di Laplace, e quindi allo sviluppo di una nuova branca della scienza matematica, la *Teoria della Probabilità* fino alla sua rigorosa assiomatizzazione nel '900 ad opera di Kolmogorov (cfr. § A4.3 in Appendice A).

La centralità dell'Appendice A per la comprensione del capitolo

Per questo raccomando al lettore — soprattutto quello non dotato di formazione fisico-matematica — di leggere attentamente l'intera **Appendice A** perché fornisce alcune nozioni-base del formalismo matematico e statistico della fisica moderna senza le quali l'intero capitolo risulterebbe inintelligibile. In particolare, invito il lettore ad approfondire la distinzione fra *cinematica* e *dinamica* nello studio dei sistemi fisici (cfr. su questo anche **Appendice B**) e alcune nozioni-base di *Teoria delle Probabilità* applicate in fisica, alcuni elementi dell'*analisi di Fourier* inclusi. Se ho messo queste nozioni in appendice è solo per non appesantire oltremodo il testo nei suoi

³ Per la spiegazione aristotelico-tomista della natura di una determinata specie di corpi come *principio passivo*, ovvero come effetto di una determinata causalità fisica all'interno del cosmo, cfr. il **Capitolo 5**.

contenuti fondamentali, ma non perché si tratti di nozioni da cui si possa prescindere, a cominciare dalle nozioni-chiave di *spazio degli stati* e di *ritratto di fase* nello studio matematico e sperimentale dell'evoluzione dinamica dei sistemi fisici.

Diversi, irriducibili livelli di indagine delle scienze naturali moderne.

Così, nell'attesa di riaffrontare approfonditamente e dal *punto di vista applicativo* temi fondativi che abbracciano l'intero arco delle *scienze naturali* moderne basate sul metodo galileiano matematico-sperimentale – in *cosmologia*, e in *fisica della materia condensata* (chimica, biologia e neurofisiologia) – come faremo nella *Terza Parte* sviluppata nel *Secondo Volume* di questo lavoro, limitiamoci ad evidenziare qui schematicamente le scoperte più eclatanti della fisica del XX secolo e oltre che hanno reso possibili questi sviluppi. Essi hanno infatti modificato radicalmente la visione della realtà fisica, non solo del mondo classico, ma anche della scienza moderna nelle sue origini galileiano-newtoniane, ampliandone prospettive, metodi e contenuti in modo assolutamente inimmaginabile nei secoli XVI-XIX.

In altri termini:

Livello macroscopico

◆ Da questo momento in poi, la meccanica newtoniana non sarà più «la meccanica», ma si identificherà con un sottoinsieme di essa, «la *Meccanica Classica*» che ha un dominio di applicazione ben definito — i cosiddetti fenomeni meccanici *macroscopici lineari*. Che seguono, cioè, la linearità della *Seconda Legge di Newton*. $f = ma$ perché suppongono in base al “principio di relatività galileiano” *sistemi di riferimento inerziali* coerenti con l'interpretazione newtoniana dello spazio-tempo (cfr. § 2.5.1).

Livello mesoscopico

◆ In campo *mesoscopico* (aggregati molecolari) valgono i principi della *Termodinamica* e della *Meccanica Statistica* (lineare e non-lineare) e della *Fisica della Materia Condensata*.

Livello microscopico

◆ In campo *microscopico* (dalla molecola, all'atomo, al sub-atómico e al sub-nucleare) valgono i principi della *Meccanica Quantistica* (*Quantum Mechanics*, QM) e della *Teoria Quantistica dei Campi* (*Quantum Field Theory*, QFT) (*elettrodinamica quantistica* e *cromodinamica quantistica*, innanzitutto).

Livello megaloscopico

◆ In campo *megaloscopico*, a livello dei fenomeni su scala cosmica, valgono i principi della *Meccanica Relativistica* o *Teoria della Relatività Generale* (*General Relativity*, GR) che nasce dall'estensione del Principio di Relatività spazio-temporale della *Teoria della Relatività Speciale* (*Special Relativity*, SR) dai fenomeni elettromagnetici a quelli gravitazionali.

Gli aspetti più innovativi rispetto alla meccanica classica di queste nuove teorie, oltre il *probabilismo* e l'*ipotesi* che le accomuna metodologicamente tutte, possono essere così sintetizzati in ordine storico-teoretico:

1. Termodinamica e freccia del tempo
 - ◆ *La nascita e lo sviluppo della Termodinamica* (§ 2.3) come teoria statistica degli aggregati molecolari che introduce un'irreversibilità temporale in siffatti fenomeni fisici (§ 2.3.2). Un'irreversibilità che, nei sistemi termodinamici *isolati*, va nella direzione dell'aumento dell'entropia all'interno del sistema (§ 2.3.3).

2. Meccanica statistica e complessità
 - ◆ *Lo sviluppo della Meccanica Statistica* (*Statistical Mechanics*, SM) strettamente legato ai formalismi della termodinamica statistica di Boltzmann perché dipende dalla necessità di una modellizzazione matematica di tipo statistico della meccanica delle particelle a livello *microscopico/mesoscopico* (cfr. § 2.4). Ci soffermeremo in particolare su due principi teorici fondamentali della SM, il *postulato di equiprobabilità* (§ 2.4.1) e l'*ipotesi ergodica* (§ 2.4.2). Infatti, la *rottura dell'ergodicità*, strettamente legata al fenomeno delle *transizioni di fase* che è ubiquo in fisica, è il fondamento dello sviluppo della *Teoria dei Sistemi Complessi*, basati sul fatto che, a livello mesoscopico, in tali sistemi le coerenze/transizioni di fase coesistono su *diverse scale spazio-temporali* perché in questi sistemi co-esistono *molteplici* (al limite, infiniti) *punti di equilibrio* (§§ 2.4.2.1-2.4.2.3). A livello esemplificativo nell'**Appendice B** ci dedicheremo anche all'illustrazione *cinematica* dei *sistemi caotici* come "modelli-esemplificativi di studio" (*toy-model*) mediante simulazioni al computer dei sistemi complessi. B.2.2

3. Sviluppo della Relatività Speciale
 - ◆ *La nascita e lo sviluppo della Teoria della Relatività Speciale* (*Special Relativity*, SR) (§ 2.5) che porta a un ridimensionamento del *carattere assoluto* dello spazio-tempo della fisica newtoniana (§ 2.5.1), fondato sulla scoperta della *finitezza della velocità della luce* come velocità-limite di propagazione di qualsiasi *segnale fisico*. Di qui la nascita e lo sviluppo della SR (§ 2.5.2), con la sua legge fondamentale $E = mc^2$ che evidenzia la reciproca trasformabilità fra massa ed energia per particelle accelerate a velocità prossime a quella limite della radiazione elettromagnetica (luce). Un'idea questa fondamentale a *livello microscopico*, dove, coniugata con i principi della QM, porta alla QFT, come vedremo in (§ 2.7).

4. Sviluppo della relatività generale
 - ◆ *La nascita e lo sviluppo della Teoria della Relatività Generale* (*General Relativity*, GR) (§ 2.5.3) in grado di fornire una *giustificazione matematica* della forza di gravità G che la fisica newtoniana di per sé non aveva, pur avendone Newton descritto, con la legge di gravitazione universale, per la prima volta nella storia dell'umanità, la sua *forma matematica*.

$$G = g \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

dove g è la costante di gravitazione universale, m_1 e m_2 le masse dei corpi, fra i quali si esercita la forza e d la loro distanza. Nella GR questa forza, per la prima volta nella storia dell'umanità, trova *una spiegazione matematica*, nell'ambito di una geometria non-euclidea di tipo riemanniano, come curvatura della struttura dello spazio-tempo legata alla massa di un corpo. Più esattamente del *campo gravitazionale* che costituisce la *struttura dinamica* dello spazio-tempo dell'universo relativistico. La forza gravitazionale in questo schema avrebbe dunque una natura completamente diversa da quella, per esempio, elettromagnetica. Non sarebbe, cioè, legata all'interazione fra le masse dei corpi fra cui si esercita, ma alla capacità della massa di un corpo celeste di modificare la struttura dello spazio-tempo circostante. Altrimenti, per esempio, non si spiegherebbe come la forza gravitazionale sia in grado di modificare la traiettoria della luce emessa dai corpi celesti, visto che la radiazione elettromagnetica e i suoi quanti (fotoni) non hanno massa.

5. Meccanica
quantistica ed
indeterminazione

- ◆ *La nascita e lo sviluppo della Meccanica Quantistica (Quantum Mechanics, QM) (§ 2.6)*, con i suoi *principi di quantizzazione, indeterminazione, esclusione, complementarità*, in fisica microscopica, che non hanno corrispettivo nella meccanica classica, e che vengono generalmente studiati all'interno del formalismo matematico della SM.

6. Teoria quantistica
dei campi come
Fisica
Fondamentale

- ◆ *La nascita e lo sviluppo della Teoria Quantistica dei Campi (Quantum Field Theory, QFT) (§ 2.7)* che nasce dall'estensione alla QM dei principi della SR e quindi della fondamentale trasformabilità reciproca fra massa ed energia nei fenomeni microscopici. La QFT si presenta così come la *Fisica Fondamentale*, sia della fisica microscopica delle particelle elementari (= *Modello Standard* (MS): §§ 2.7.2-2.7.3), sia della fisica *mesoscopica* della materia condensata e dei sistemi complessi chimici, biologici e neurali (§ 2.8), sia, in prospettiva – una volta quantizzato il campo gravitazionale (*gravitazione quantistica*) –, della fisica *megaloscopica* dell'universo e della sua evoluzione. La sua struttura spazio-temporale è costituita dinamicamente, infatti, in GR dal campo gravitazionale e quindi la QFT può costituire in prospettiva la Fisica Fondamentale anche della attuale *cosmologia quanto-relativista* cui manca attualmente, per la mancanza di una soddisfacente teoria quantistica del campo gravitazionale un quadro di riferimento teorico comune, come vedremo più approfonditamente nel *Secondo Volume* di questo libro.

2.3 Termodinamica

2.3.1 Termodinamica classica

Carattere reversibile di tutte le equazioni del moto nella fisica newtoniana

Come ricordavamo nella sottosezione precedente, il primo ridimensionamento del carattere incondizionato e onnicomprensivo della Fisica Newtoniana degli inizi della modernità si ha con la scoperta della *irreversibilità temporale* nella “Fisica del Calore” o *Termodinamica*. Infatti, una delle caratteristiche fondamentali dell’approccio newtoniano alla meccanica era la *reversibilità* temporale delle equazioni del moto. Detto in altri termini, nelle equazioni del moto della meccanica, dato un processo che ha portato il sistema nel tempo $t_0 \rightarrow t_1$ da A in B , è sufficiente invertire il verso della direzione delle velocità per riportare il sistema da B in A , ovvero *esattamente* dovéra a t_0 . L’*irreversibilità temporale dei fenomeni* — il fatto cioè che sia impossibile tornare indietro nel tempo —, basilare per la nostra esperienza, ma anche, come notava Einstein, basilare per poter parlare più in generale di sistemi fisici che *scambiano informazione* — essendo l’informazione una misura statistica della *sorpresa* o imprevedibilità dell’evoluzione del sistema — è qualcosa assolutamente privo di senso per le leggi della meccanica newtoniana.

Non esiste scambio di informazione in sistemi perfettamente deterministici

Essendo sistemi perfettamente deterministici e dunque reversibili sul modello dei sistemi geometrici (dalle condizioni iniziali si può passare deduttivamente a quelle finali e viceversa proprio come in un sistema deduttivo dai postulati ai teoremi e viceversa), *non esiste alcun aumento o diminuzione dell’informazione* nelle modificazioni che caratterizzano questi sistemi.

Tempo della fisica vs. tempo della storia e la contrapposizione delle due culture nella modernità

Potremmo affermare che il cuore dell’opposizione ottocentesca hegeliana fra *naturalismo* e *storicismo* si trovi tutto in questo punto: il tempo della *natura*, il tempo parametrizzato nelle equazioni della meccanica newtoniana dove è possibile andare *avanti e indietro* nel tempo, non è il tempo della *storia*, il tempo dell’esperienza e delle vicende umane dove invece il tempo è *irreversibile*.

Il carattere irreversibile del calore in tutte le trasformazioni energetiche

Si comprende allora lo shock che provocò nella mentalità scientifica e nella cultura filosofica del tempo la scoperta che anche in fisica, più esattamente in *termodinamica* si danno fenomeni *irreversibili*. Più esattamente tali fenomeni occorrono tutte le volte che si verificano *trasformazioni energetiche*. Trasformazione di energia in *lavoro* o *trasformazione di una certa forma di energia* (p.es. meccanica) in *un’altra forma di energia* (p.es., elettrica: si pensi al lavoro di una dinamo), poiché queste trasformazioni sono sempre associate alla produzione di una forma di *energia degradata*, non più trasformabile in lavoro, cioè al *calore*.

Calore, disordine ed entropia

È bene chiarire subito questo punto perché è la chiave per comprendere la relazione fra *calore* e *disordine*, quindi la relazione con la nozione di *entropia*, fondamentale in Termodinamica sia classica che statistica. Ciò può essere sintetizzato nella seguente figura (Atkins, 2010, p. 24):

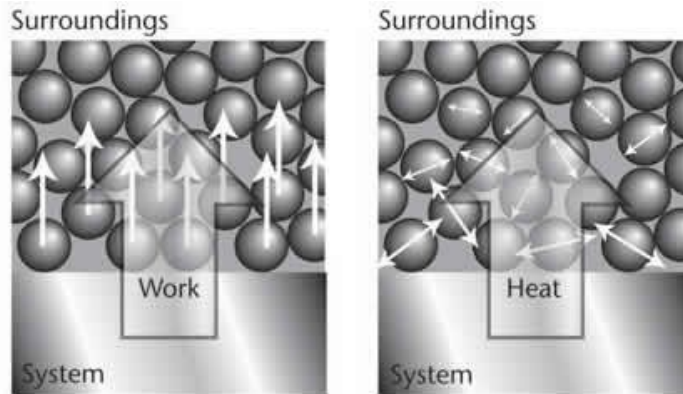


Figura 2-1. Distinzione molecolare fra il trasferimento di energia come lavoro (sinistra) e come calore (destra). Compiere un lavoro consiste in un moto uniforme di atomi nel loro spazio circostante. Viceversa, il riscaldamento determina il loro moto disordinato.

Transizione di fase ordine-disordine in sistemi complessi

Tutto questo ci aiuterà a comprendere la stretta relazione fra la transizione di fase *ordine-disordine* in *Teoria della Complessità* per sistemi atomici e molecolari all'interno del formalismo della Meccanica Statistica per sistemi complessi energeticamente “chiusi” (cfr. § 2.4) e più radicalmente all'interno del formalismo della QFT estesa ai sistemi dissipativi (cfr. § 2.8) ed interpretata come Fisica Fondamentale. Ma occorre procedere per gradi.

La nozione di temperatura come misura del calore

A questo punto, infatti, occorre innanzitutto fondare rigorosamente la nozione di *temperatura T* in termodinamica come *misura universale* del calore. Intuitivamente, essa viene misurata secondo *diverse scale* con uno strumento definito *termometro*.

La “Legge Zeresima” della Termodinamica

La possibilità della misurazione di una temperatura di corpi (sistemi) diversi mediante un unico strumento universale di misura suppone così quella che viene definita la *Legge Zeresima della Termodinamica* (Atkins, 2010, p. 5) o “principio di equivalenza fra le temperature”, che consente di definire la temperatura *T* come un parametro universale in fisica:

Legge Zeresima della Termodinamica. Se il corpo A è in equilibrio termico con B e B è in equilibrio termico con C, allora C sarà in equilibrio termico con A.

Fondamento dell'universalità della nozione di temperatura

Tutto questo implica che, se due corpi sono in *equilibrio termico* significa che essi hanno la medesima temperatura quando essi vengono posti in contatto mediante una parete che conduce calore. Così, in base alla suddetta legge, se poniamo in contatto termico mediante una parete conduttrice o *diatermica* (*adiabatica* se non-conduttrice) un sistema B (il termometro) con il corpo A e vediamo che la misura di temperatura non cambia e quindi poniamo il termometro B con il corpo C e vediamo che di nuovo la misura di temperatura non cambia, allora possiamo concludere che i corpi A e C hanno la *medesima temperatura*.

Le tre principali misure di temperatura e le loro relazioni

Per concludere questa trattazione delle nozioni-base di termodinamica rilevanti per noi, le tre principali *scale di misura della temperatura T* sono (cfr. **Figura 2-2**):

1. Scala Celsius

- ◆ *La scala Celsius* (centigrada), la più diffusa e intuitiva, che si deve all'astronomo svedese Anders Celsius (1701-1744) che prende come 0°C la temperatura a cui l'acqua ghiaccia e 100°C la temperatura a cui l'acqua bolle (a livello del mare).

2. Scala Fahrenheit

- ◆ *La scala Fahrenheit*, dovuta al fisico tedesco Daniel Fahrenheit (1686-1736) che fu il primo ad usare un termometro a mercurio che pose come temperatura 0°F la temperatura minima che ottenne per una miscela di sale, ghiaccio ed acqua (circa -20°C), mentre scelse per temperatura 100°F quella media del suo corpo (circa 37°C). Secondo questa scala, l'acqua ghiaccia a 32°F e bolle a 212°F. L'utilità di questa scala era che per gli strumenti di misura molto rozzi dell'epoca limitava al massimo l'uso di temperature negative, ma ovviamente è la meno scientificamente rilevante per la non-universalità dei sistemi di riferimento scelti.

3. Scala Kelvin, la scala ufficiale di misura in fisica

- ◆ *La scala Kelvin*, che si deve al fisico inglese Lord William Thomson Kelvin (1824-1907). Essa assume come temperatura minima 0°K il cosiddetto minimo assoluto o "0° assoluto" della temperatura in termodinamica (corrispondente a -273°C), sebbene, come vedremo, si tratti di un minimo teorico, mai effettivamente raggiungibile da alcun sistema fisico. Tale scala usa "gradi" delle stesse dimensioni di quelli della scala Celsius rendendole così direttamente confrontabili ed è perciò definita come la scala termodinamica della temperatura ed è la scala ufficiale di misura delle temperature usata in fisica. Su questa scala, l'acqua ghiaccia a 273°K e bolle a 373°K.

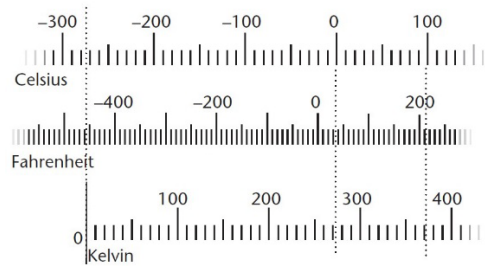


Figura 2-2. Confronto fra le tre principali scale di misura della temperatura da dove si evince la corrispondenza fra gradi Celsius e Kelvin (da (Atkins, 2010, p. 7)).

2.3.2 Termodinamica statistica

L'ipotesi di Boltzmann del caos molecolare

Questa vera e propria rivoluzione culturale — la prima di una lunga serie che avverranno nella fisica fra la fine del XIX secolo e i primi trent'anni del XX — è opera essenzialmente di un fisico austriaco, Ludwig Boltzmann (1844-1906), uno dei creatori della *teoria cinetica dei gas*. Grazie a lui e alla sua famosa equazione, l'*equazione di Boltzmann*, la teoria molecolare della materia — al cosiddetto livello *mesoscopico* di studio della materia — è entrata di diritto nello studio della fisica. La sua equazione, basata sull'ipotesi del *caos molecolare*, definisce infatti il comportamento di una collezione di molecole, effettivamente *moli di materia*⁴, in condizioni di non-equilibrio.

Dalla termodinamica statistica alla Meccanica Statistica

La termodinamica statistica afferma in sostanza che, alla variazione di una funzione che esprime la probabilità di trovare una particella in un particolare volume unitario dello *spazio delle fasi* contribuiscono diversi fattori, quali le forze esterne, gli effetti di diffusione e le collisioni fra le particelle. Effettivamente dalla *termodinamica statistica* di Boltzmann è nata, grazie ai successivi contributi di James Clerk Maxwell (1831-1879) e di Josiah Willard Gibbs (1839-1903) la nuova disciplina della *Meccanica Statistica*. Vi torneremo quando illustreremo le nozioni fondamentali della *teoria della complessità* (cfr. § 2.4).

⁴ Il concetto di *mole* (simbolo *mol*) di materia è l'unità di misura universale della *quantità di sostanza* che dal 1971 è una delle *sette grandezze fisiche fondamentali* del *Sistema Internazionale delle Unità di Misura*. Dal Maggio 2019 si definisce come la quantità di sostanza che contiene esattamente $6,02214076 \times 10^{23}$ entità elementari, essendo questo il valore numerico della *costante di Avogadro* quando espressa in mol^{-1} . Tale costante si deve al fisico e chimico italiano Amedeo Avogadro (1776-1856) che nel 1811 per primo formulò l'ipotesi secondo la quale volumi uguali di gas a condizioni fissate di temperature e pressione contengono lo stesso numero di molecole.

Collegamento con la visione atomica della materia

La fondamentale differenza fra la meccanica e la termodinamica *statistiche* con la meccanica e la termodinamica *classiche* è che questa vera e propria svolta culturale è legata al fatto che alla fine dell'800 è prevalsa la *teoria atomica* della materia in fisica come in chimica. In base a tale visione, il cuore della meccanica e della termodinamica statistiche è la spiegazione di *variabili macroscopiche* come la “pressione”, la “temperatura”, il “volume” la “energia libera”, nei termini della *dinamica microscopica* delle entità elementari (molecole, atomi) che compongono un dato “blocco” (*bulk*) di materia.

Coincidenza fra equilibrio meccanico ed equilibrio termodinamico

Dal punto di vista termodinamico, il risultato fondamentale è quello dell'unificazione fra la nozione di *equilibrio meccanico* (legato al III Principio della Meccanica Classica) ed *equilibrio termodinamico* basato sull'equivalenza fra la nozione di *calore* – fino a quel momento sufficientemente vaga in termodinamica classica – e *l'energia cinetica* delle moli di materia che compongono il sistema (la cosiddetta nozione di *agitazione termica*). Equivalenza che è al cuore della cosiddetta *teoria cinetica dei gas* che è il modello ideale di riferimento della termodinamica statistica di Boltzmann.

Coincidenza fra equilibrio termodinamico e meccanico in termodinamica statistica

La seguente **Figura 2-3** rappresenta intuitivamente la coincidenza fra equilibrio termodinamico ed equilibrio meccanico, come spiegato nella didascalia della figura. Essa acquista un significato fisico ben preciso quando teniamo presente che nel modello ideale del “gas perfetto” stiamo considerando nel calcolo del potenziale solo il termine di *energia cinetica* come nella Lagrangiana (cfr. Eq. (24) in **Appendice A**) e non quello di altre forme di energia potenziale, quali per esempio quelle legate ai legami chimici. Una nozione che diventerà molto più precisa quando esamineremo più approfonditamente la connessa nozione di *energia libera*, ovvero “libera” per compiere un lavoro che è fondamentale in termodinamica statistica e in Meccanica Statistica, sia classica che quantistica (QM). Una nozione sistematicamente collegata alla transizione di fase *ordine-disordine* in teoria dei sistemi complessi al confine fra fisica classica e quantistica (QM dei sistemi atomici e molecolari: cfr. § 2.4).

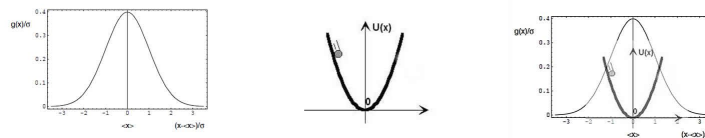


Figura 2-3. Rappresentazione intuitiva della coincidenza fra equilibrio termodinamico ed equilibrio meccanico nel modello ideale della teoria cinetica dei gas in termodinamica statistica. (Sinistra) Distribuzione normale dell'energia interna in un sistema termodinamico isolato: la moda delle molecole del gas si muovono con un'energia cinetica media che corrisponde (Centro e Destra) al minimo dell'energia potenziale e

quindi dell'energia libera del sistema (= minimo dell'energia "libera" per compiere un lavoro).

La distribuzione di Boltzmann e la misura di temperatura in termodinamica statistica

Infine, seguendo (Atkins, 2010, pp. 10-13), un modo matematicamente e fisicamente molto più efficace di rappresentare il cuore della termodinamica statistica di Boltzmann è la sua interpretazione della temperatura nei termini della famosa *distribuzione di Boltzmann*. Essa potrebbe essere rappresentata intuitivamente come il risultato che si ha a lanciare un gran numero di palline su uno scaffale fatto di mensole a vari livelli, dove le mensole rappresentano i diversi stati possibili e le loro altezze i livelli di energia. È chiaro che perché vi sia una probabilità alta che le palline si fermino sulle mensole più alte dello scaffale occorre lanciarle con maggiore energia, viceversa per quelle più basse.

La distribuzione esponenziale di Boltzmann e il parametro β della temperatura

La distribuzione di Boltzmann è il risultato, perciò, di un numero altissimo di questi lanci, al limite infinito sotto l'unica condizione che l'energia totale si conservi, ovvero che non siamo in presenza di una seconda sorgente di energia. Il risultato della distribuzione di probabilità è che la popolazione di particelle che occupano i livelli più alti di energia sarà molto più bassa di quella che occupano i livelli più bassi di energia con un andamento che segue una curva esponenziale che descrive l'andamento di un unico parametro β , che diviene così *la vera misura della temperatura* in termodinamica statistica. Di fatto tale distribuzione esprime il rapporto della popolazione di particelle ad un determinato stato di energia E , con la popolazione al più basso stato di energia, quello con $E=0$. Tale rapporto equivale alla formula esponenziale:

$$\frac{\text{Popolazione allo stato di energia } E>0}{\text{Popolazione allo stato di energia } E=0} = e^{-\beta E}$$

L relazione inversa fra E e β nella distribuzione di Boltzmann

Ciò significa che nella misura in cui β decresce sta decrescendo la relativa popolazione di uno stato con energia $E > 0$. Il che implica che le particelle si concentreranno sul livello più basso dell'energia $E = 0$ dove β avrà il suo massimo. Tutto questo significa che il rapporto che esiste fra questa misura β della temperatura legata alla distribuzione di Boltzmann della termodinamica statistica delle particelle che compongono il sistema e delle loro energie, e la misura standard della temperatura T della termodinamica classica che riguarda la massa (*bulk*) dell'intero corpo è dato dalla seguente relazione:

$$\beta = 1/kT$$

La costante di Boltzmann

Dove k è la cosiddetta *costante di Boltzmann* che, sebbene venga definita come una delle costanti fondamentali della natura, di fatto è solo un *fattore di conversione* fra la misura «propria» della temperatura in fisica β e quella «intuitiva» al senso comune che è T . Così per esprimere β nei termini della

scala Kelvin, β ha il valore 1.38×10^{-23} joules per grado Kelvin. In ogni caso il punto fondamentale da ricordare è che, poiché β è proporzionale a $1/T$, se la temperatura cresce β decresce, e viceversa.

Il significato molecolare della temperatura in termodinamica statistica

Il punto di fondamentale da tener presente è che la distribuzione di Boltzmann

rivela il significato molecolare della temperatura: *la temperatura è il parametro che ci dice quale sia la più probabile distribuzione di popolazioni di molecole su tutti gli stati disponibili di un sistema all'equilibrio*. Quando la temperatura è alta (β basso) molti stati hanno una popolazione significativa, quando la temperatura è bassa (β alto) solo gli stati vicini agli stati di più bassa energia che hanno popolazioni significative (...). La temperatura, allora è *solo un parametro che sintetizza le dimensioni delle popolazioni relative ai livelli di energia di un sistema all'equilibrio* (Atkins, 2010, p. 11). Corsivi nel testo.

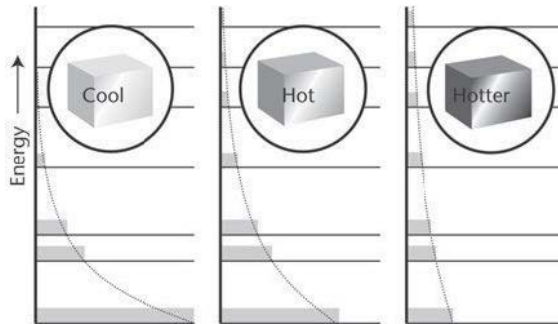


Figura 2-4. La distribuzione di Boltzmann è una funzione che decade esponenzialmente con l'energia. Quando la temperatura è incrementata, la popolazione migra dai livelli più bassi di energia a quelli più alti di energia. Allo zero assoluto solo gli stati più bassi sono occupati. A temperatura infinita tutti gli stati sono ugualmente popolati (da (Atkins, 2010, p. 12)).

Il concetto di soglia stocastica fra meccanica (termodinamica) statistica e quantistica

Per dare a questa caratterizzazione della temperatura tutta la sua generalità e allo stesso tempo definirne il suo limite – quello che Boltzmann stesso genialmente, ma troppo in anticipo sul suo tempo, definì col termine *soglia stocastica* sotto la quale la sua distribuzione non vale –, invece di parlare di «stato di equilibrio» del sistema sarebbe più opportuno parlare di *stato fondamentale* del sistema, quello caratterizzato dal *minimo dell'energia* del sistema. Infatti, l'aspetto più sconvolgente della QM ai suoi primordi è che, per il principio di quantizzazione, gli elettroni intorno al nucleo di un atomo allo stato fondamentale possono occupare stabilmente e *con la medesima probabilità* anche i livelli più alti di energia – i cosiddetti “orbitali elettronici” nella visione semiclassica dell'atomo di Bohr (cfr. § 2.6.2), o più esattamente, come tutte le particelle dotate di *spin seminteri*, non seguono la distribuzione di Boltzmann ma seguono la distribuzione di probabilità di

Fermi-Dirac, sono cioè *fermioni*, usando il linguaggio del *Modello Standard* della QFT (cfr. § 2.7). Ma su questo torneremo dopo.

2.3.3 Nozione di entropia

L'interpretazione statistica dell'entropia

In ogni caso, applicando questi principi allo studio dei fenomeni *termodinamici*, cioè dei fenomeni dinamici dove avvengono scambi irreversibili di calore, Boltzmann diede inizio ad una nuova branca della scienza fisica la *termodinamica statistica dei sistemi all'equilibrio* o *termodinamica lineare*. Ciò che, in particolare, portò al risultato che dà il titolo a questa nostra sottosezione è l'applicazione dei principi della statistica sopra ricordati ad un concetto particolare della termodinamica classica, introdotto a suo tempo dal fisico tedesco Rudolf Emanuel Clausius (1822-1888): il concetto di *entropia*.

L'entropia nella termodinamica classica

Per illustrare adeguatamente il concetto di entropia però, occorre prima uno sguardo per quanto sommario alla termodinamica classica — prima cioè della sua interpretazione statistica boltzmaniana— e all'enunciazione in essa dei primi due principi della termodinamica.

Prima Legge della Termodinamica: conservazione dell'energia

Il *Primo Principio* o *Prima Legge della Termodinamica* non è nient'altro che un'espressione del più generale *principio di conservazione dell'energia* nell'ambito dei sistemi termodinamici:

Prima Legge della Termodinamica: la quantità di calore Q che un sistema termodinamico scambia con l'esterno è data dalla somma del lavoro L che esso esercita sull'esterno (o che dall'esterno si esercita sul sistema) e dalla variazione dell'energia interna U del sistema stesso⁵.

Il *Secondo Principio* o *Seconda Legge della Termodinamica* introduceva già nella sua formulazione classica, data per la prima volta da Clausius stesso, un qualche tipo di *irreversibilità*. Nella sua formulazione esso infatti asserisce che

⁵ In termini più intuitivi, data una trasformazione termodinamica ciclica in cui il sistema torna allo stato iniziale (p.es., un ciclo completo di una macchina a vapore) la quantità di lavoro esercitata dal sistema L (p.es., il giro completo dello stantuffo della nostra vaporiera), pagata nei termini della diminuzione dell'energia interna U (p.es., la diminuzione della pressione del vapore nella caldaia), dev'essere compensata da una quantità Q di calore immessa nel sistema (p.es., attraverso la combustione nella fornace della caldaia), in base alla relazione $L = JQ$, dove J è un'unità di calore o *caloria* espressa in unità energetiche (joule). Ciò naturalmente è legato al fatto che il calore è una forma d'energia, anzi per il secondo principio, la forma più universale di energia, cui tutte le altre si riducono visto che qualsiasi lavoro fisico e/o trasformazione di energia produce necessariamente calore che non può essere ritrasformato in lavoro.

Seconda Legge
della
Termodinamica
nella sua versione
classica (Clausius)
Secondo principio
della termodinamica
nella sua versione
classica (Kelvin)

Seconda Legge della Termodinamica (postulato di Clausius): se il calore fluisce per conduzione da un corpo A ad un corpo più freddo B, allora è impossibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia far passare del calore in senso inverso, cioè da B ad A⁶.

Nell'altra formulazione classica, equivalente, del secondo principio, dovuta a Lord William Thomson Kelvin (1824-1907), il calore è considerato una forma degradata di energia, in quanto è impossibile *una trasformazione completa* del calore in lavoro (cfr. **Figura 2-1**). Ovvero, nella formulazione di Lord Kelvin del secondo principio si afferma che:

Seconda Legge della Termodinamica (postulato di Kelvin): è impossibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia la trasformazione in lavoro di calore tratto da un'unica sorgente a temperatura uniforme⁷

Definizione classica
della nozione di
entropia

Se dunque si prende l'entropia S nella definizione di Clausius, come quantità che misura il rapporto fra una variazione infinitesima della quantità di calore dQ e la temperatura assoluta T :

$$S = \int \frac{dQ}{T}$$

è chiaro che la quantità S non varierà in ogni trasformazione reversibile, in ogni trasformazione, cioè, in cui il sistema riceverà sufficiente calore da *una seconda sorgente* per ritornare alle condizioni iniziali. Viceversa, in un si-

⁶ Questa proprietà del calore — che in pratica afferma che è impossibile «far rientrare» tutto il calore emesso da una sorgente nella sorgente stessa — è fondamentale per la realizzazione di tutti i sistemi di raffreddamento, in quanto è legata all'altra proprietà del calore rispetto allo spazio: quella di preferire fra tutte le direzioni del moto quelle centrifughe. In altri termini, il calore rende *anisotropo* lo spazio intorno a sé per tutti i fenomeni dinamici ad esso associati: rende infatti alcune direzioni del moto *preferenziali* rispetto alle altre (per questo, p.es., in tutti i sistemi di dispersione di calore, di raffreddamento ad aria di una macchina e/o di riscaldamento di un ambiente, si moltiplicano gli spigoli della superficie irradiante). Vedremo nel **Capitolo 5** quanto questa proprietà intuitiva del calore, ben nota empiricamente anche agli antichi, fosse importante per Aristotele. Per lui era proprio la presenza irriducibile del calore in tutta la natura fisica non solo organica, con la sua proprietà di rendere anisotropo lo spazio, il motivo *fisico* per ripudiare l'uso platonico-pitagorico della geometria nello studio degli enti naturali. E, allo stesso tempo, era il motivo per affermare, su basi puramente fisiche, la presenza di una *causalità finale* che introduceva delle irreversibilità e delle direzioni preferenziali del moto dei corpi fisici terrestri.

⁷ Ovvero, «non è possibile costruire una macchina il cui unico risultato consista in produrre lavoro assorbendo calore da un'unica sorgente». P.es., parte del calore e dell'energia prodotta da una macchina a vapore non si trasformeranno in lavoro, ma si disperderanno sotto forma di irraggiamento termico, oppure si trasformeranno in attriti ed in conseguente degrado irreversibile del mezzo meccanico, etc. In altri termini: nessun processo fisico reale è completamente *reversibile*. In ogni trasformazione fisica (di energia in lavoro o in altre forme di energia) c'è sempre una qualche produzione di calore, ovvero di energia degradata non più trasformabile in lavoro.

stema termodinamico *isolato*, lasciato a se stesso, dove non c'è aggiunta di calore dall'esterno del sistema (dal suo cosiddetto *bagno termico*), la quantità S aumenterà irreversibilmente.

L'interpretazione statistica della termodinamica e dell'entropia nella distribuzione di Boltzmann

Tutto questo ha ricevuto una spiegazione più che convincente attraverso l'*interpretazione statistica della termodinamica* e delle sue leggi dovuta a Boltzmann. In tale interpretazione, nell'analisi *mesoscopica* dei sistemi fisici — a livello, cioè, del comportamento di aggregati molecolari e/o atomici o *moli di materia* —, le *variabili di stato macroscopiche* tipiche dei sistemi termodinamici, *volume*, V , *pressione* P e *temperatura* T , assumono un significato statistico ben preciso in termini di grandezze statistiche associate al *moto* e quindi all'*energia cinetica* del grandissimo numero di particelle che compongono il sistema a livello *microscopico*.

Interpretazione microscopica delle variabili termodinamiche macroscopiche

Così, per esempio nel caso di un *gas ideale* in un recipiente, la pressione P sarà proporzionale al numero medio degli urti delle particelle sulle pareti del recipiente, come pure la temperatura T sarà proporzionale alla velocità media con cui le particelle del gas si muovono. Aumentando la temperatura T , si aumenterà la velocità media delle molecole e quindi aumenterà anche la pressione P , perché aumenterà anche il numero medio degli urti che le molecole del gas avranno con quelle che formano la superficie interna del recipiente.

Principio di equipartizione dell'energia e la relazione fra energia interna e energia libera

Se invece non esiste fonte esterna di calore, attraverso i loro urti, le particelle che compongono il sistema si *equi-partiranno* progressivamente l'energia cinetica disponibile fino a far degradare completamente all'interno dell'*energia interna* U totale del sistema l'*energia libera* (*free energy*) F cioè quell'energia che è disponibile per compiere un lavoro L :

$$F = U - TS \quad (1)$$

Dove T è la temperatura e S è l'entropia. Dal che si evince immediatamente che al massimo dell'entropia corrisponde il minimo dell'energia libera e viceversa⁸. In altri termini, un sistema termodinamico isolato raggiungerà ineluttabilmente lo stato di *energia potenziale minima* o «stato di equilibrio» che sarà costituito dal numero *massimo* di configurazioni di moto (posizione + quantità di moto) equiprobabili del sistema, e quindi

⁸ Questa formula si deve al fisico e psicologo tedesco Von Helmholtz che usò il simbolo A per denotare l'energia libera che deriva dal tedesco *Arbeit* (lavoro). Tale energia dipende appunto dal fatto di non essere equidistribuita fra le particelle del sistema, dalla presenza cioè di una *differenza di potenziale*, nel nostro caso, del *potenziale termico* legato alla presenza di una chiara distinzione fra particelle «calde» e «fredde», dinamicamente, «veloci» e «lente». In base alla suddetta formula di F , appare infatti chiaro che, a temperatura assoluta T costante, più aumenta S , più diminuisce F , cioè la parte di energia non-degradata dell'energia totale U , ovvero $\Delta F = U - T\Delta S$.

statisticamente, al numero massimo dei *gradi di libertà* della descrizione statistica del sistema stesso.

Energia libera, energia vincolata e morte termodinamica

In altri termini, allo stato di equilibrio tutta l'*energia libera* del sistema sarà degradata in forma di *energia vincolata* incapace di compiere un *lavoro*. Per questo si parla di *morte termodinamica* del sistema come «destino ineluttabile» di qualsiasi sistema termodinamico isolato.

Misura statistica dell'entropia.

Di qui la definizione della *misura statistica logaritmica di entropia* definita da Boltzmann come l'energia E_i associata ad un determinato microstato x_i del sistema:

$$S := -k_B \sum_i \pi(x_i) \ln \pi(x_i) \quad (2)$$

Dove il segno “-” davanti alla formula *logaritmica* (logaritmo naturale \ln^* in base e) ci ricorda che siamo di fronte a un rapporto; k_B è la *costante di Boltzmann*⁹ e π la *probabilità di uno stato x_i del sistema*, in rapporto al (diviso il) numero totale dei possibili stati, ovvero delle possibili configurazioni *microscopiche* dello stato di moto definito dalle variabili canoniche $\langle p, q \rangle$ delle particelle del *microstato* che danno origine allo stesso stato termodinamico *macroscopico*.

Il concetto statistico di entropia

Nel caso dell'interpretazione boltzmaniana, ciò che si sta affermando è che un sistema termodinamico isolato va nella direzione di un aumento del *disordine globale del sistema*¹⁰ e, dato il carattere irreversibile del processo, lo stato finale disordinato — o stato di massima entropia S o di minima

⁹ Essa, come ricordato, è una delle *costanti fondamentali della natura* e vale $k = 1.380662 \approx 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$, ha dunque le dimensioni di un'energia minima rapportata alla quantità di calore.

¹⁰ Bisogna intendersi qui sul termine «disordine». Prendiamo il caso del classico esperimento termodinamico di due cilindri perfettamente isolati termicamente dall'esterno, ma comunicanti fra di loro attraverso un condotto, e contenenti un gas di molecole, l'uno ad alta temperatura, (molecole veloci) l'altro a bassa temperatura (molecole lente). In tal caso all'inizio del processo, il numero delle configurazioni possibili del moto delle particelle del sistema totale era limitato. Erano così sufficienti due soli set di equazioni, per rappresentare le uniche due configurazioni di moto possibili del sistema: particelle «veloci» (calde) e particelle «lente» (fredde). In questo stato, il sistema globale possiederà il massimo di *ordine* (due sole configurazioni possibili) ed il massimo di energia libera, data dalla differenza di potenziale termico fra i due recipienti. Man mano però che, a causa della comunicazione fra i due recipienti, gli urti fra particelle calde e fredde aumentano, le particelle «veloci» e «lente» tenderanno sempre più ad equidistribuirsi fra i due recipienti che tenderanno a raggiungere la medesima temperatura, T , media delle due iniziali. In tal modo, diminuirà l'energia libera A del sistema, le configurazioni disponibili aumenteranno, al limite diverranno una per ciascuna della miriade di particelle che compongono il sistema. Da un sistema ordinato con pochissimi *gradi di libertà*, si è passato ad un sistema a moltissimi gradi di libertà, quindi disordinato, casuale. Il massimo di entropia sarà toccato quando il sistema avrà raggiunto lo stato di equilibrio e le particelle si saranno equidistribuite casualmente (probabilità $1/2$) fra i due contenitori.

energia libera F o «morte termica» del sistema — sarà definito come lo stato più probabile cui *ogni sistema termodinamico isolato irreversibilmente tenderà*. Nel linguaggio più generale della meccanica statistica, tale stato finale — o *attrattore* della dinamica (cfr. § 2.4.1) — sarà quello cui tenderà ogni sistema fisico macroscopico *isolato* composto da un numero grandissimo di particelle (molecole o atomi), purché sia dato al sistema un tempo sufficiente per raggiungerlo (= *limite termodinamico*). Di qui la formulazione del *secondo principio della termodinamica* in termini di *meccanica statistica* (formulazione di Boltzmann):

Seconda Legge della Termodinamica nella versione di Boltzmann

Seconda Legge della Termodinamica: ogni sistema fisico isolato tende a trasformarsi in modo che aumenti la propria entropia, cioè il disordine delle sue componenti.

È chiaro che, in questa formulazione più generale, il secondo principio va a toccare il significato realistico degli stessi principi della meccanica classica, non solo introducendo in essi un'irreversibilità, ma indicando come *legge universale* di tutti i sistemi fisici — universo fisico compreso, nella misura in cui va inteso come sistema fisico isolato — un suo irreversibile destino verso il disordine e la «morte termica».

Conseguenza filosofica: fine del mito illuminista del progresso

A livello di mentalità culturale, comunque, credo non vi potesse essere shock più profondo della formulazione statistica del secondo principio della termodinamica per distruggere, d'un sol colpo, tutto il mito scienziato dell'idea illuminista di progresso, come destino stesso del *mondo fisico*, prima che umano, destino fondato sull'ottimismo della ragione «illuminata» dalla scienza. Il destino dell'universo invece che quello di un indefinito progresso, predicato dagli illuministi e, nelle scienze biologiche, da teorici dell'evoluzionismo come Lamarck e Spencer, è quello del disordine e della morte termica!

L'esempio di Nietzsche e la fine del nichilismo dell'Illuminismo

Non è casuale che il profeta più conosciuto della *crisi dell'ottimismo razionalista classico e moderno*, Friedrich Nietzsche, sia stato un attento studioso proprio della termodinamica boltzmaniana. E forse non è un caso che i tre più lucidi «profeti», Cantor, Boltzmann, e Nietzsche stesso, della «crisi delle scienze europee» — come più tardi la definirà Husserl (Husserl 1954), in quanto *crisi di un'epoca stessa*, quella *Illuminista* della strumentalizzazione razionalista e scienziato della scienza — siano tutti e tre morti abbandonati nella più terribile delle solitudini, e con seri disturbi mentali. Siamo in presenza di un dramma umano oltre che culturale, che questi grandissimi vissero sulla loro pelle prima di altri, perché compresero prima di altri ciò che stava succedendo. Un dramma *dell'assenza di certezze assolute* — né quelle «metafisiche» dell'età classica, né quelle «scientifiche» dell'età moderna illuminista — che oggi, diversamente da allora, investe

larghi strati della cultura e della mentalità contemporanee e che va sotto il nome di *nihilismo* e *relativismo*. Vi torneremo.

Nihilismo affetto dal medesimo assolutismo che voleva combattere

Per il momento sia sufficiente questa notazione. Il “nihilismo” in fondo è un frutto perverso dello stesso “assolutismo” che voleva giustamente combattere. Si basa infatti sul falso assunto che il carattere necessariamente *relativo* e non *assoluto* delle verità accessibili alla ragione umana scientifica o filosofica significhi la *non-esistenza della Verità* e dell'*Assoluto* e con ciò stesso la *negazione dell'universalità* della conoscenza razionale delle verità *necessariamente parziali e relative* cui la razionalità umana può fondatamente e universalmente attingere. In fondo, il *relativismo* e il *nihilismo* non sono altro che forme di *assolutizzazione* del relativo, sono infette del medesimo virus che volevano combattere! Vi torneremo nei prossimi due capitoli.

Rapporto fra variazione della temperatura e dell'entropia

Tornando alla nascita della termodinamica moderna per completare il quadro occorre introdurre anche con il *Terzo Principio o Terza Legge della Termodinamica*. Esso si deve ad una fondamentale intuizione di un chimico, tedesco, Walther Herman Nernst (1864-1941), che per primo formulò questo principio (“L'entropia di un sistema tende ad un *valore costante* quando la temperatura tende a zero”) e per questo ricevette il Nobel per la chimica nel 1920.

Il rapporto variazione di entropia e variazione di temperatura e la “catastrofe termodinamica”

Il problema cui Nernst diede per primo la risposta formulando la Terza Legge è che per una data mole di materia (cioè, un insieme costituito da un numero di Avogadro di atomi o molecole), per temperature vicine allo *zero assoluto* (0°K), T_0 , la variazione di entropia diventerebbe infinita (dividendo per 0). Esiste, infatti, alla luce del Secondo Principio un evidente rapporto fra la variazione dell'entropia ΔS e la variazione della temperatura ΔT , cioè $\Delta S/\Delta T$. Ora, se la temperatura raggiungesse lo zero assoluto la variazione di entropia, venendo divisa per 0, diverrebbe infinita, si produrrebbe, cioè, la cosiddetta *catastrofe termodinamica*.

La sua geniale soluzione proposta da Nernst

Nernst dimostrò che per evitare questa catastrofe dobbiamo supporre che la capacità termica molare C di un corpo *non sia affatto costante*, ma svanisca, nel limite $T \rightarrow 0$, in modo da rendere ΔS *finito*, effettivamente una costante come deve essere. Ciò implica che l'assoluto 0°K è irraggiungibile.

Quindi, in armonia con i due principi suddetti, può essere definito anche il *terzo principio della termodinamica*. Esso come già ricordato fu formulato per la prima volta, nel 1906, dal fisico-chimico tedesco Nernst.

Terzo principio della termodinamica

Terza Legge della termodinamica. In prossimità dello zero assoluto la differenza di entropia ΔS tra tutti gli stati di un sistema che sono in equilibrio termico è nulla (S è una costante). Ciò significa affermare l'irraggiungibilità dello zero assoluto da parte di un sistema fisico, in un tempo comunque finito.

Dalla
termodinamica
statistica lineare a
quella non-lineare

L'ultimo capitolo, però, nella recente storia della termodinamica moderna non è quello del Teorema di Nernst, alla base del terzo principio appena ricordato. L'ultimo capitolo riguarda i sistemi termodinamici «non-isolati» o *aperti* — che scambiano, cioè, energia e materia con l'esterno, come la gran parte dei sistemi chimici e la totalità dei sistemi viventi. Ma questo è il campo della cosiddetta *termodinamica non-lineare* per sistemi dissipativi e, più in generale, della *teoria della complessità*, a partire dai sistemi caotici come loro modello-base.

Il concetto di
struttura dissipativa
nella termodinamica
del non-equilibrio

Per tali sistemi termodinamici dissipativi in grado di *generare* e non solo *dissipare* informazione perché inseriti in un *bagno termico* il Premio Nobel 1977 per la Chimica Ilya Prigogine (1917-2003) che per primo li ha studiati sistematicamente, cercando di modellarli matematicamente, ha coniato il termine di *strutture dissipative* e di *termodinamica del non-equilibrio* (Prigogine, 1986; Prigogine & Stengers, 1999), arrivando addirittura a parlare di «leggi del caos» perché tutti questi sistemi esibiscono un comportamento caotico (Prigogine, 2003). Torneremo su questo in § 2.4.

2.3.4 Entropia fisica ed entropia informazionale

La teoria
matematica delle
comunicazioni
(MTC)

Per capire più precisamente il rapporto che abbiamo così introdotto fra *entropia* e *informazione* in fisica, partiamo dalla nozione di informazione in *teoria matematica delle comunicazioni* (*Mathematical Theory of Communication* MTC). La MTC che è al fondamento dell'attuale *Information Communication Technology* (ICT) e quindi della nostra Società delle Comunicazioni è stata sviluppata da Claude Shannon (1916-2001) in *teoria dei segnali*, ovvero per la trasmissione di simboli in canali rumorosi fra un mittente e un ricevente la trasmissione (Shannon, 1948).

Il concetto di
entropia
informazionale in
MTC e il rapporto
segnale/rumore nei
canali di
comunicazione

Il modo per garantire che al mittente arrivi il simbolo desiderato malgrado il rumore o incertezza provocata dalla presenza di rumore nel canale è *aumentare la ridondanza del segnale*, per incrementare *mediamente* la probabilità che arrivi il simbolo desiderato, tecnicamente aumentare al numeratore il rapporto *segnale/rumore* nel canale di comunicazione. Matematicamente, ciò portò Shannon a definire una misura logaritmica H di *entropia informazionale* — fu John Von Neumann a suggerire a Shannon di dare questo nome a questa misura — perché matematicamente ha la stessa formula di un'entropia in fisica.

L'informazione
come grandezza
statistica misurabile
(entropia) distinta
dall'entropia di
un'energia

In altre parole, in *Teoria dell'Informazione* l'entropia di una variabile casuale è il livello medio di «sorpresa» o «incertezza» inerente al possibile evento casuale X , nel nostro caso l'invio di un simbolo x_i appartenente a un determinato alfabeto finito \mathcal{X} a N simboli e distribuito secondo una *distribuzione binomiale* $\pi: \mathcal{X} \rightarrow [0,1]$ — la stessa usata da Laplace nella sua formulazione del TLC (cfr. nota 73) — visto che in ICT si usano i simboli

binari (*bit*) della Logica Booleana. Di qui la misura di entropia informativa H che ha evidentemente la stessa forma dell'entropia fisica S di Eq. (2), sebbene misuri *una quantità profondamente diversa* nei due casi. Là, l'energia E associata a un microstato del sistema, qui l'informazione \mathcal{J} associata a un simbolo x_i :

$$H(X) := - \sum_i^N \pi(x_i) \ln \pi(x_i) = \mathcal{J}[- \ln \pi(X)] \quad (3)$$

Informazione sintattica, semantica e pragmatica

Come Shannon non si stancherà mai di ripetere tutta la vita questa misura di informazione è, logicamente parlando, puramente *sintattica* non *semantica*, non ha, cioè, a che fare con il *contenuto semantico* di un simbolo, con ciò che il simbolo *significa* in riferimento ad un determinato oggetto. Al massimo in ICT la comunicazione assume un significato rispetto alle *aspettative del ricevente* della trasmissione, cosicché propriamente dovremmo parlare, logicamente, di *significato pragmatico* in ICT.

Il concetto di informazione in fisica e l'ambiguità della nozione di neghentropia

Anzi, da questo punto di vista, malgrado la misura statistica (quella dell'entropia) sia la stessa, l'informazione nella ICT dice l'opposto dell'informazione in fisica, biologia e nelle neuroscienze cognitive tanto che uno dei padri della fisica quantistica, Edwin Schrödinger, in un opuscolo dedicato alla base quantistica della vita (effettivamente della cellula) conio per essa il termine certamente evocativo ma fuorviante di *neghentropia* (Schrödinger, 1944). Dire infatti che l'informazione è "entropia negativa" è matematicamente una vera e propria sciocchezza, visto che siamo di fronte a una misura logaritmica sempre col meno davanti poiché si tratta di un rapporto, come abbiamo appena visto e non è certo questo il senso che voleva dare Schrödinger al termine. L'entropia in fisica è sempre una grandezza *positiva*, insomma.

Informazione sintattica e rapporto segnale/rumore in ICT

Per fare chiarezza allora dobbiamo dire che l'informazione H nel senso *sintattico* della ICT ha a che fare col *rapporto segnale/rumore* (S/R) e in questo senso – e di qui molte confusioni ne nascono – H è concettualmente molto simile a S visto che in ambedue i casi abbiamo a che fare con gli *stati più probabili*, sia di un processo fisico (termodinamico) in base alla II Legge, sia di un processo comunicativo. Dunque, in ICT l'incremento della *affidabilità* trasmissione di un segnale si ottiene aumentando la *ridondanza* della trasmissione del segnale (facendo, cioè, crescere il numeratore del rapporto S/R) in modo da aumentare la sua entropia e quindi la sua *probabilità*. È questo il cuore della teoria di Shannon dell'informazione in ICT (Shannon, 1948).

Informazione come "sorpresa" in senso pragmatico e il Teorema di Bayes

In senso contenutistico *pragmatico* rispetto alle aspettative del ricevente (ricordiamo che logicamente, in teoria delle comunicazioni, il significato pragmatico di un simbolo è quello legato alla modifica dello *stato interno* del sistema ricevente), H ha invece il senso opposto, perché un segnale ha

tanto più *contenuto informativo (pragmatico)* quanto più è alto il suo contenuto di *sorpresa*, di «improbabilità» rispetto alle *aspettative* del ricevente. Banalmente, la seconda volta che leggo la notizia sullo stesso giornale al mattino essa, causa la sua aumentata ridondanza, ha molto meno contenuto informativo (“sorpresa”) della prima volta. Non per nulla, generalmente, si usa il *Teorema di Bayes* (1763) sviluppato poi da Laplace – per modellizzare matematicamente questa nozione di informazione basata su una nozione di *probabilità condizionale*. Definita cioè $P(A)$ come la *probabilità a priori attesa* di un evento (p.es., 0.5 nel caso del lancio della moneta), il Teorema di Bayes misura il progressivo aggiornamento di $P(A)$ dato il verificarsi di una serie di eventi casuali B , quindi $P(B)$. In questo caso la probabilità condizionale $P(B|A)$ è una *funzione di verosimiglianza (likelihood)* che può definirsi come la probabilità che $P(B)$ (o “evidenza”) supporti $P(A)$, posto che A sia vera. Di qui l’enunciato del Teorema di Bayes per cui la probabilità condizionale di A dato B , $P(A|B)$ o *probabilità a posteriori* è espressa dalla seguente formula:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \tag{4}$$

con $P(B) \neq 0$. Per cui, se $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ è statisticamente una *partizione* dello spazio di campionamento costituito dal progressivo aggiornamento della probabilità attesa in base al risultato dell’esperimento (=affinamento della verosimiglianza in base all’evidenza), allora:

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \dots + P(B|A_n)P(A_n) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i) \tag{5}$$

Il che significa che $P(A|B) \propto P(B|A)P(A)$ e che soltanto nel *limite infinito* di occorrenze, verosimiglianza e evidenza a posteriori coincideranno, cioè, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(B|A_n) = P(A|B) = 1$, cosicché si possono dare solo stime del *massimo della funzione di verosimiglianza* usando metodi di ottimizzazione e/o usando i massimi di metodi variazionali applicati alla statistica di Bayes¹¹.

¹¹ Ovviamente, è possibile fornire una misura logaritmica dell’*informazione di Bayes* definita come *Bayesian Information Criterion* (BIC) (Schwarz, 1978), usato sia in logica che statistica che in informatica, particolarmente in AI. BIC è definito formalmente come: $BIC := k \ln(n) - 2 \ln(\hat{L})$. Dove \hat{L} è il valore massimo della funzione di verosimiglianza di un modello M , cioè $\hat{L} = \pi(x|\hat{\theta}, M)$, dove $\hat{\theta}$ sono i valori dei parametri che massimizzano la funzione di verosimiglianza; x sono i dati osservati; n è la dimensione del campione totale; e k è il numero dei parametri considerati nel modello.

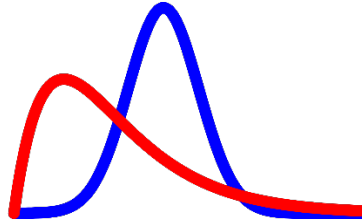


Figura 2-5. Rappresentazione intuitiva di una statistica bayesiana come approssimazione di due distribuzioni di probabilità a posteriori (rossa) e a priori (blu) mediante affinamento ricorsivo della verisimiglianza in base all'evidenza usando il Teorema di Bayes: $a \text{ posteriori} = (\text{verosimiglianza} \times a \text{ priori}) / \text{evidenza sperimentale}$.

Il senso proprio della nozione di neghentropia come misura di ordine

A questo punto diviene più chiaro cosa intendesse Schrödinger nel suo libro con la sua nozione di *neghentropia* come misura di *ordine*, in quanto opposta all'entropia come misura di *disordine*. Misura applicata nel suo libro all'*informazione biologica* in quanto – sono parole di Schrödinger – basata sulle “Leggi Universali della Natura” e in particolare sulla II Legge della Termodinamica. Un sistema vivente con la sua struttura *ordinata* costituisce infatti un sistema stabile nel tempo, fisicamente *altamente improbabile* rispetto all'aspettativa dettata dalla II Legge che invece è – con la più alta verisimiglianza nel senso bayesiano del termine – uno stato di *massimo disordine*. Un *ordine locale* che non viola il II Principio perché è “pagato” in termini energetici dal fatto che il “lavoro” di *auto-organizzazione* del vivente è pagato in termini di energia sottratta all'ambiente, e quindi è “pagato” con un aumento dell'entropia del *sistema totale* (sistema + ambiente). Il vivente infatti è un sistema *dissipativo*, energeticamente “aperto” e non “chiuso” che *scambia* energia con l'ambiente¹², e che, attraverso molteplici transizioni di fase disordine/ordine (cfr. **Figura 2-1**) a diversi livelli della sua struttura complessa, è capace di “ordinarsi” (auto-organizzarsi) così da rimanere localmente (nello spazio e nel tempo) stabile per un *tempo finito* in condizioni ordinate *molto fuori dall'equilibrio*. Dovremo introdurre alcune nozioni di *cibernetica* o “Teoria dei Sistemi a Controllo Attivo” per rendere conto della fisica dei sistemi auto-organizzanti.

¹² Il suo stato fondamentale di *minima energia* è cioè uno stato *bilanciato*, molto fuori dall'equilibrio ovvero con $T > 0$, “a somma-0” fra energia «in entrata/in uscita» da/verso l'ambiente: $E_{ent} + E_{usc} = 0$.

L'utilizzo geniale fatto da Schrödinger della sua intuizione per ipotizzare "macromolecole dell'ereditarietà genetica"

Il fatto notevole è che Schrödinger applicò questi principi ipotizzando nel suo libro l'esistenza di "cristalli aperiodici" come contenenti *l'informazione genetica* – i famosi "geni" della statistica di Mendel – nella loro configurazione di *legami chimici aperiodici* definendoli come le "macromolecole dell'ereditarietà genetica". Egli formulò così una precisa *ipotesi fisica* sulle basi chimiche dell'*ereditarietà genetica* ben prima che nel 1953 James D. Watson e Francis Crick scoprissero effettivamente la *struttura elicoidale* delle macromolecole del DNA (Watson & Crick, 1953), basandosi sulle figure di diffrazione a raggi-X di queste molecole fatte dalla loro collega Rosalind Franklin. È significativo che tutti e tre – Watson, Crick e Franklin – in seguito, dissero di essere stati profondamente influenzati dall'ipotesi di Schrödinger nel portare avanti le loro ricerche.

Il concetto di entropia informazionale H in fisica e le transizioni di fase disordine/ordine nei sistemi complessi

In ogni caso, la misura dell'entropia informazionale H in fisica come misura di *ordine* legato a un lavoro e quindi alla disponibilità di *energia libera* nel sistema (ecco perché un organismo biologico deve essere un sistema "aperto"), rispetto alla misura di *disordine* dell'entropia termodinamica dà un senso più preciso a quanto schematizzato in **Figura 2-1**. Sebbene occorreranno fare molti altri passi in SM sulla Teoria dei Sistemi Complessi (cfr. § 2.4) e quindi sui fondamenti della QFT (cfr. § 2.7) in relazione al concetto di *rottura spontanea di simmetria* del vuoto quantistico e delle connesse *correlazioni a lungo raggio* dei campi quantistici – che giocano un ruolo non piccolo anche nella determinazione della struttura elicoidale del DNA – per capire la nozione della misura di H in fisica, biologia, logica ed informatica come distinta da S anche se ad essa strettamente legata. Torneremo su questi temi, distinguendo fra transizioni di fase *del primo e del secondo ordine* quando affronteremo il problema della modellizzazione matematica di sistemi complessi in Meccanica Statistica e in QFT (cfr. § 2.4 e § 2.8, rispettivamente).

2.4 Dalla Meccanica Classica alla Meccanica Statistica e oltre nella Teoria della Complessità

2.4.1 Alcuni elementi di meccanica statistica

La Teoria dei Sistemi Complessi come apice delle rivoluzioni scientifiche del XX-XXI secolo

Che la *teoria dei sistemi complessi*, come già anticipavo nella I Edizione di questo volume, costituisca oggi uno dei settori fondamentali della ricerca e della pratica scientifica contemporanea è codificato dal fatto che il *Premio Nobel per la Fisica 2021* è stato conferito a tre scienziati che si sono distinti per i loro studi sui *fenomeni complessi* (The Royal Swedish Academy of Sciences, 2021a). Infatti, la nozione di *sistema complesso* ha un carattere *trans-*

disciplinare perché consente la costruzione di *modelli matematici* all'interno dell'intero arco delle *scienze naturali* (fisiche, biologiche e neurali), delle *scienze umane* (economiche sociali e politiche) e delle *scienze dell'artificiale* (reti neurali, sistemi di IA e modelli di *Machine Learning*, ML). Così nel documento divulgativo sulle motivazioni dell'assegnazione del Premio Nobel 2021 per la Fisica a Syukuro Manabe, Klaus Hasselmann e Giorgio Parisi, si sottolinea che «essi hanno scoperto strutture nascoste (*hidden patterns*) nel clima e in altri fenomeni complessi», si afferma testualmente:

Tre vincitori condividono il premio Nobel per la fisica di quest'anno per i loro studi sui fenomeni complessi. Syukuro Manabe e Klaus Hasselmann hanno gettato le basi della nostra conoscenza del clima terrestre e di come l'umanità lo influenza. Giorgio Parisi è premiato per i suoi contributi rivoluzionari alla teoria dei fenomeni disordinati e casuali. (...) I vincitori di quest'anno hanno tutti contribuito ad acquisire una maggiore conoscenza di tali sistemi e del loro sviluppo a lungo termine (The Royal Swedish Academy of Sciences, 2021a, pp. 1-2).

La struttura di un sistema complesso dal punto di vista della Fisica Fondamentale

Per comprendere lo statuto scientifico della *fisica della complessità* innanzitutto nella *fisica della materia condensata* e quindi nei suoi *fondamenti* in QFT occorre chiarire alcuni principi della *Meccanica Statistica* (*Statistical Mechanics* SM) nel suo legame diretto, storico e teoretico, con la *termodinamica statistica*, che è il quadro di riferimento teorico in cui la *fisica della complessità* generalmente si muove.

Il cuore teoretico della Meccanica Statistica (SM)

In generale come già sappiamo la SM utilizza la Statistica e la Teoria della Probabilità per lo studio del comportamento *meccanico e termodinamico* di sistemi composti da un gran numero di particelle. Dal punto di vista classico, come già sappiamo, lo studio di un sistema di N particelle *non interagenti* richiederebbe la soluzione di N equazioni differenziali che descrivono il moto di ciascuna particella. Il vantaggio enorme della SM è che quando il numero delle particelle (molecole, atomi) coinvolte è molto grande dell'ordine della *costante di Avogadro* (cfr. nota 4) valendo le leggi della statistica e della Teoria della Probabilità (cfr. § A4.3 in **Appendice A**), ciò rende possibile un legame sistematico tra le proprietà *microscopiche* del moto delle particelle e proprietà *macroscopiche* del sistema come *temperatura, energia libera, pressione, volume* come per primo Boltzmann si accorse nella sua *termodinamica statistica* (cfr. § 2.3.2).

Il postulato di equiprobabilità fra i microstati come cuore teoretico della SM

Questo stretto legame fra meccanica e termodinamica statistica fa sì che *postulato fondamentale* della SM è che, in un *sistema isolato all'equilibrio* ogni *microstato* – definito da una particolare coppia di valori delle variabili canoniche p, q – ha *uguali probabilità* di manifestarsi, ovvero il sistema non ha alcuna preferenza per nessuno dei suoi microstati possibili. Di qui il fondamentale *Postulato di Equiprobabilità* della SM:

Dati Ω microstati associati ad un particolare valore dell'energia, la probabilità P di trovare il sistema in un particolare microstato è $P = \frac{1}{\Omega}$.

Stretta relazione fra entropia fisica, entropia informazionale e energia libera in SM

Esiste dunque anche in SM uno stretto legame fra *entropia fisica* ed *entropia informazionale* nel senso che anche in SM come in Termodinamica lo stato massimamente probabile coincide con lo stato di equilibrio, ovvero di *minima energia libera*, e/o di *massima entropia* che è quello che fornisce anche la *minima informazione* circa la probabilità di trovare il sistema in uno dei particolari singoli stati del sistema (cfr. § 2.3.4). Ovvero, aggiungiamo qui, in una delle particolari *partizioni* dei microstati del sistema, dato il postulato di equiprobabilità *a priori*.

Tre tipi di insieme statistico (partizioni) in SM

Di per sé in SM queste *partizioni* sono diverse in basi a *tre diversi tipi di insieme statistico* definiti in SM: *microcanonico*, *canonico* e *grancanonico*

1. Insieme microcanonico

◆ *Insieme micro-canonico*. Si intende un insieme isolato caratterizzato dall'aver energia E e un numero di microstati Ω costanti poiché il sistema non scambia energia o materia con l'ambiente. In questi sistemi l'*energia interna* U è strettamente uguale alla sua *energia* E . Lo stato macroscopico di massima entropia è quello per il quale tutti i microstati sono equiprobabili, la loro probabilità è $1/\Omega(E)$ e il calcolo dell'entropia S è dato dalla formula di Boltzmann che ben conosciamo (cfr. Eq. (2)).

2. Insieme canonico

◆ *Insieme canonico*. Si tratta di un sistema in equilibrio termico col suo ambiente caratterizzato dall'aver numero di particelle, volume e temperatura costanti. In questi sistemi, la probabilità P_i che un sistema macroscopico in equilibrio col proprio ambiente alla temperatura T sia in un dato microstato con energia E_i è data dalla distribuzione di Boltzmann:

$$P_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{\sum_j^{j_{max}} e^{-\beta E_j}} \tag{6}$$

Dove $\beta = 1/k_\beta T$ è la misura fisica della temperatura legata alla distribuzione di Boltzmann dei microstati che già conosciamo (cfr. § 2.3.2) e la formula al denominatore altro non è che un fattore di normalizzazione che va sotto il nome di *funzione di partizione* Z per l'insieme canonico, ovvero:

$$Z = \sum_j^{j_{max}} e^{-\beta E_j} \quad (7)$$

Funzione di partizione come misura degli stati accessibili al sistema a una data temperatura

Dove E_j è l'energia del j -esimo microstato del sistema. La funzione di partizione è dunque una misura del numero di *stati accessibili* al sistema a una data temperatura, cosicché in definitiva (6) si può riscrivere in maniera più compatta come:

$$P_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{Z} \quad (8)$$

Quello che è notevole di una siffatta funzione di partizione per l'insieme canonico è che il valore previsto per l'energia E può essere interpretato come la definizione microscopica della variabile termodinamica dell'energia interna U del sistema che può essere ottenuta come derivata della funzione di partizione rispetto alla temperatura. Infatti:

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_i E_i e^{-\beta E_i}}{Z} = -\frac{1}{Z} \frac{dZ}{d\beta}$$

Legame fra energia interna, energia libera e funzione di partizione

Per cui, interpretando $\langle E \rangle$ come l'energia interna U ciò rende possibile una definizione microscopica dell'*energia interna* e quindi dell'*energia libera* del sistema (cfr. Eq. (1)) legata alla funzione di partizione:

$$U := -\frac{d \ln Z}{d\beta}$$

Ora, siccome l'entropia S può essere calcolata come:

$$\frac{S}{k} = -\sum_i p_i \ln p_i = \sum_i \frac{e^{-\beta E_i}}{Z} (\beta E_i + \ln Z) = \ln Z + \beta U$$

Relazione fra funzione di partizione energia libera

Di qui la stretta relazione fra funzione di partizione Z e l'energia libera F del sistema, cioè:

$$-\frac{\ln Z}{\beta} = U - TS = F, \text{ ovvero: } Z = e^{-\beta F}$$

Possibilità di rappresentare in un unico formalismo i diversi tipi di energie associabili alla dinamica molecolare

La rilevanza di tutto questo apparato teorico della SM per la ricerca scientifica in fisica della materia condensata si evince immediatamente quando teniamo presente che di fatto l'energia di una data molecola è distribuita fra *diversi tipi di energie*. Il principale è l'*energia di traslazione* E_t , che si riferisce a quella porzione di energia associata al moto del centro di massa della molecola. Vi è inoltre l'*energia di configurazione* E_c che si riferisce a quella porzione di energia associata con le varie forze attrattive e repulsive fra le molecole di un sistema. Le altre energie in gioco riguardano i gradi di libertà interni alla molecola, come l'*energia rotazionale* E_r , *vibrazionale* E_v , *elettrica* E_e e *nucleare* E_n . Se si suppone che ogni contributo energetico sia indipendente dagli altri,

l'energia totale può essere espressa come la somma di ciascuna componente. Di qui, data la stretta relazione fra funzione di partizione ed energia, diventa possibile definire una partizione Z per ciascuna delle componenti dell'energia totale, ovvero: $Z = Z_t, Z_c, Z_n, Z_e, Z_r, Z_t$. Anche solo da questo, si intuisce la rilevanza dell'apparato teorico della SM per la modellizzazione teorica e sperimentale di sistemi in fisica della materia condensata.

3. Insieme grancaonico e sua rilevanza in fisica della materia condensata e in fisica quantistica

- ◆ *Insieme gran-canonicalo.* Tale insieme è fondamentale per l'applicazione della SM in chimica e in fisica della materia condensata, ma anche in fisica quantistica come vedremo. Un insieme grancaonico in chimica descrive infatti un *sistema aperto*, caratterizzato dal non avere *temperatura, volume e potenziale chimico* fissati, perché *può scambiare materia ed energia* con il resto dell'universo. In un tale sistema il *numero di particelle non è conservato*, e diventa necessario pertanto introdurre i *potenziali chimici* μ_j , con $j = 1, \dots, n$ e rimpiazzare la funzione di partizione canonica Z con la funzione di partizione per l'insieme grancaonico \mathcal{Z} detta anche funzione di *granpartizione*.

$$\mathcal{Z} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_i\}} \prod_i e^{-\beta n_i (\epsilon_i - \mu)} \tag{9}$$

Dove N è il numero totale di particelle nel volume V , l'indice i varia a ogni microstato del sistema, essendo n_i il numero di particelle allo stato i ed ϵ_i l'energia dello stato i . $\{n_i\}$ è l'insieme di tutti i possibili *numeri di occupazione* per ciascuno dei microstati per cui $N = \sum_i n_i$.

Rilevanza per la fisica quantistica

La funzione di granpartizione ha però una rilevanza anche in QM dove, sebbene si parli di sistemi chiusi, pur tuttavia per il *principio di sovrapposizione* il numero di particelle che compongono il sistema può variare. Infatti, nel caso che i microstati siano quelli della QM dove vige il *principio di sovrapposizione* sia per *bosoni* (p.es., fotoni) che per *fermioni* (p.es., elettroni) otteniamo le funzioni di granpartizione \mathcal{Z} per bosoni e fermioni che, da una parte soddisfano le distribuzioni di Bose-Einstein e di Fermi-Dirac, rispettivamente e da cui derivano i loro nomi, particelle che impareremo a conoscere dalla nostra trattazione del MS (cfr. § 2.7), dall'altra forniscono in una sola formula il *link teoretico* fra quantistica e chimica di cui abbiamo a lungo parlato in questo capitolo.

Relazione con la statistica di Bose-Einstein per i bosoni in QM

Infatti, come vedremo discutendo i principi fondamentali della QM (§ 2.6), in un sistema composto da *bosoni* non interagenti non vi è un limite al numero di occupazione di uno stato e quindi la *funzione di granpartizione* \mathcal{Z} per i bosoni è la seguente:

$$Z_i = \sum_{n_i=0}^{\infty} e^{-\beta n_i(\epsilon_i - \mu)} = \frac{1}{1 - e^{-\beta n_i(\epsilon_i - \mu)}}. \quad (10)$$

Relazione con la statistica di Fermi-Dirac per i fermioni in QM

Invece, in un sistema composto da *fermioni* non interagenti, per il *principio di esclusione di Pauli* possiamo avere solo due fermioni sovrapposti con spin semintero opposto. Quindi il numero di occupazione per ciascun microstato può essere solo 0 o 1, pertanto la *funzione di gran-partizione Z per i fermioni* è la seguente:

$$Z_i = \sum_{n_i=0}^1 e^{-\beta n_i(\epsilon_i - \mu)} = (1 + e^{-\beta n_i(\epsilon_i - \mu)}). \quad (11)$$

Il numero di occupazione più probabile per i *bosoni* è dunque:

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{-\beta n_i(\epsilon_i - \mu)} - 1} \quad (12)$$

Mentre per i *fermioni* è:

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{-\beta n_i(\epsilon_i - \mu)} + 1} \quad (13)$$

Che sono esattamente i risultati della statistica di Bose-Einstein e Fermi-Dirac, rispettivamente.

Le differenze fra i tre diversi insiemi statistici riguardano le fluttuazioni fra i diversi microstati

Per chiudere questa parte dedicata alle nozioni elementari di SM, ritorniamo a quel postulato di equi-probabilità da cui eravamo partiti. Infatti, tutte le descrizioni precedenti per le tre diverse classi di insiemi statistici in SM differiscono per il modo con cui permettono al sistema di *fluttuare fra tutte le sue configurazioni*.

Nessuna fluttuazione per l'insieme microcanonico

P.es., nell'insieme *microcanonico* il sistema non è soggetto a fluttuazioni di energia poiché il sistema è chiuso, diversamente dall'insieme *canonico* dove il sistema può scambiare energia con l'ambiente pur essendo all'equilibrio con esso per una data temperatura T .

Ma nel limite termodinamico irrilevanza delle fluttuazioni anche per insiemi aperti (canonico e grancanonico)

Il postulato di equiprobabilità ritorna quando consideriamo il sistema nel *limite termodinamico* – quando, cioè, il numero di particelle tende all'infinito, cioè per $N \rightarrow +\infty$. Infatti, in tale limite le fluttuazioni diventano trascurabili così che tutte le descrizioni convergono in una sola. In una parola, nel limite termodinamico, il comportamento macroscopico del sistema *non dipende* dal particolare insieme scelto per la descrizione.

Quindi, la scelta fra i tre diversi tipi di insiemi per il calcolo probabilistico delle proprietà di un sistema *microscopico* dipende unicamente in SM da quella che è la migliore per ottenere la modellizzazione più aderente al risultato sperimentale.

2.4.2 Ipotesi ergodica, instabilità dinamica e sistemi caotici

2.4.2.1 Complessità e rottura dell'ergodicità

Ipotesi ergodica e postulato di equiprobabilità in SM

Introduciamo ora un'ulteriore nozione fondamentale in SM, la cosiddetta *ipotesi ergodica* che ci aiuta a considerare il postulato di equiprobabilità dal punto di vista *temporale*. Essa fu formulata da Boltzmann stesso nel 1898 per giustificare l'equipartizione dell'energia fra i microstati di un gas perfetto all'equilibrio termodinamico. L'ipotesi ergodica infatti afferma che:

In fisica e in termodinamica per sistemi chiusi, su lunghi periodi di tempo, il *tempo* speso da un sistema in una qualche regione con *la medesima energia* dello spazio delle fasi dei microstati del sistema è proporzionale al *volume della regione*. Ovvero: tutti i microstati accessibili in quella regione sono *equiprobabili* in un *lungo periodo di tempo*.

Nella formulazione di Boltzmann l'ergodicità riguarda insiemi micro-canonici estesa agli insiemi canonici da Gibbs

Ciò significa che la variabile *macroscopica* per una data energia, di un sistema che a livello *microscopico* soddisfa l'ipotesi ergodica, è compatibile con un qualsiasi insieme di microstati che occupano quella data regione dello spazio delle fasi. È chiaro che nell'originaria formulazione di Boltzmann l'ipotesi ergodica riguarda *insiemi micro-canonici*. Si deve a Josiah Willard Gibbs (1839-1903) l'estensione in SM dell'ipotesi ergodica anche ad *insiemi canonici* all'equilibrio con l'ambiente. Essa prevede che la media temporale di una proprietà del sistema sia equivalente alla *media istantanea* della medesima proprietà *nell'insieme canonico* quando il numero dei microstati *tende all'infinito*, quindi nel *limite termodinamico*.

Centralità ipotesi ergodica in SM

Si capisce perciò *la necessità dell'ipotesi ergodica* per i calcoli in SM: siccome sarebbe di fatto impossibile definire la *media temporale* dell'evoluzione di un determinato osservabile entro un dato intervallo temporale perché la dinamica dei microstati è *di fatto* sconosciuta – un'impossibilità pratica in SM che in QM diviene di principio, per la relazione di indeterminazione – l'ipotesi ergodica ci garantisce che *la media sull'insieme statistico* dei microstati è equivalente alla *media temporale sconosciuta*.

In sistemi statistici non-lineari si può invece rompere l'ergodicità innanzitutto nei sistemi caotici

In pratica, dal punto di vista *computazionale*, simulare l'evoluzione di un osservabile del sistema su un lungo intervallo temporale, o simularlo facendo la media su un gran numero di realizzazioni indipendenti dello stesso sistema *sono la stessa cosa*, anche se questo *non è sempre corretto*. Talvolta il sistema *rompe l'ergodicità* come per primi si accorsero Enrico Fermi e alcuni suoi collaboratori nel 1953 (cfr., per una sintesi, (Livi, Pettini, Ruffo,

Sparpaglione, & Vulpiani, 1985))¹³, fornendo un esempio di simulazione al computer di quello che, col senno di poi, si definisce col termine *caos deterministico* che descriviamo sistematicamente nell'Appendice B.

Collegamento fra la nozione di rottura dell'ergodicità e la nozione di rottura di simmetria nelle transizioni di fase

I fisici teorici, tuttavia, si concentrarono su altri esempi di *rottura dell'ergodicità* di più immediato significato fisico, quali le *rotture spontanee di simmetria* legate alle *transizioni di fase* di cui quella *paramagnetica-ferromagnetica* di cui ci occuperemo a lungo costituisce un esempio paradigmatico. La magnetizzazione spontanea di un magnete naturale sotto la temperatura di Curie contraddice infatti l'ipotesi ergodica. Secondo tale ipotesi, infatti, non dovrebbe esistere nessun *fenomeno collettivo di magnetizzazione* in virtù del fatto che il sistema, esplorando *con eguale probabilità* tutti gli stati del sistema compatibili col medesimo livello di energia, la magnetizzazione mediata sul tempo dovrebbe *risultare nulla*, cosa che invece assolutamente non è. In generale, dunque, tutti i fenomeni di *rottura spontanea di simmetria* in fisica macroscopica – ma anche microscopica e quantistica alla luce del Teorema di Goldstone (cfr. § 2.7.2) – costituiscono altrettanti esempi di *rottura dell'ergodicità*.

Nel quadro della SM possibilità di rompere l'ergodicità solo localmente negli insiemi canonici

Interpretati nel quadro teorico della SM, tutto ciò viene giustificato affermando che nei sistemi macroscopici le scale temporali sulle quali un sistema può effettivamente esplorare *completamente* il suo spazio delle fasi come l'ipotesi ergodica richiede possono essere sufficientemente grandi perché un sistema *canonico* all'equilibrio termodinamico con l'ambiente possa esibire comportamenti al suo interno, nei suoi sottosistemi, che rompono l'ergodicità *localmente* su *scale temporali diverse*.

¹³In presenza di un forte *termine non-lineare* nella simulazione al computer di un sistema di SM, il sistema invece di esibire un comportamento ergodico (casuale) come ci si aspetterebbe se il sistema *termalizzasse* velocemente – raggiungesse, cioè, l'equilibrio mediante un'equipartizione dell'energia fra le particelle –, Fermi si accorse che il sistema esibiva un comportamento *quasi-periodico*, *rompendo così l'ergodicità*. È questo il risultato della famosa simulazione al computer di un sistema di SM fatta da Enrico Fermi, John Pasta e Stanislaw Ulam nell'estate del 1953 – con la fondamentale assistenza di Mary Tsingou che pubblicò i risultati della simulazione nel 1954, dopo la morte di Fermi – che, col senno di poi, fornisce la prima evidenza sperimentale di un *sistema caotico*. Fu questo risultato totalmente inaspettato che innescò, da una parte lo studio sperimentale dei sistemi statistici *non-lineari* in SM e non solo, mediante la *simulazione al computer*, dall'altra concentrò l'attenzione sui *sistemi non-lineari*. Il loro comportamento *non-integrabile* sui lunghi periodi di tempo, e dove dunque tutti i sistemi di calcolo “a carta e penna” dell'analisi statistica fallirebbero, possono trovare nella simulazione al computer una valida modellizzazione. Possiamo dire che l'esperimento di Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou (FPUT) inaugurò la nuova era della *fisica computazionale*.

La possibilità di rotture dell'ergodicità a livello locale mediante transizioni di fase su diverse scale spaziali e temporali è il cuore della nozione di sistema complesso a livello della sua struttura interna

Il fatto che le rotture di simmetria e le connesse transizioni di fase in un sistema macroscopico possano avvenire con *differenti scale temporali* a diversi livelli (metriche) su scala subatomica, atomica, molecolare – le macromolecole della materia organica incluse – è il nucleo della nozione di *sistema complesso* in Fisica Fondamentale in quanto connesso al più generale fenomeno della *rottura dell'ergodicità*. È questo il cuore dell'approccio alla *teoria della complessità* innanzitutto all'interno del quadro teorico della SM. Un approccio al quale Giorgio Parisi ha dato recentemente dei contributi fondamentali dal punto di vista matematico che gli hanno invalso il Premio Nobel per la Fisica nel 2021. Vi torneremo nel **Secondo Volume**. Un approccio complementare a quello di Parisi e a quello della SM, perché estende la violazione dell'ipotesi ergodica alle transizioni di fase della QFT delle particelle elementari così da fare della QFT la Fisica Fondamentale anche dei sistemi complessi, lo esamineremo invece in § 2.8.

2.4.2.2 Instabilità dinamica, transizioni di fase e rottura dell'ergodicità nei sistemi complessi

Anticipazione dei sistemi caotici nel modello FPUT

Come ricordato nella nota 13, un'anticipazione in fisica computazionale della rottura dell'ergodicità per sistemi statistici non-lineari e non-integrabili che anticipa la nozione di caos deterministico l'abbiamo nel modello di Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou (FPUT) del 1953 (Livi, Pettini, Ruffo, Sparpaglione, & Vulpiani, 1985).

Sistemi caotici e instabilità dinamica nel modello a tre corpi di Poincaré

Il risultato del modello FPUT era fisicamente rilevante perché nella storia della fisica moderna era ben noto un altro fondamentale risultato riguardo i sistemi dinamici *non-lineari* e *non-integrabili*. Quello ottenuto da un altro eminente fisico matematico del XIX secolo, Henry Poincaré (1854-1912), riguardo il famoso «problema dei tre corpi» nella teoria newtoniana della gravitazione (Poincaré, 1890). Tale sistema non-lineare però – differentemente dal modello FPUT e in generale dai sistemi caotici – *non rompeva l'ergodicità*, malgrado, sia i sistemi caotici sia il sistema dinamico a tre corpi di Poincaré, come sappiamo bene, condividano lo stesso principio *dell'instabilità dinamica* e della conseguente *divergenza esponenziale delle traiettorie* rispetto alle medesime condizioni iniziali legati alla non-linearità delle equazioni. Vale la pena, perciò, esaminare più da vicino questo fatto per capire meglio la peculiarità dei sistemi caotici e dei sistemi complessi in generale.

Instabilità dinamica e metodi perturbativi

Il risultato ottenuto da Poincaré alla fine del XIX secolo era considerato infatti una delle più grandi sfide matematiche al determinismo della meccanica classica di Newton e della meccanica statistica di Laplace nella teoria della gravitazione basata sui *metodi perturbativi*. Infatti, era legato al fenomeno della cosiddetta *instabilità dinamica* per un sistema gravitazionale *a tre corpi* (in seguito generalizzato a sistemi con $n > 2$ corpi) causa la *non-linearità* dell'equazione gravitazionale di questi sistemi, differentemente dall'equa-

zione gravitazionale di Newton che considera solo l'interazione *a due corpi* ed è quindi *lineare* ed *integrabile*.

Presenza di punti di equilibrio instabili nel modello a tre corpi di Poincaré

La scoperta dell'instabilità dinamica di Poincaré nello studio, per esempio, dell'evoluzione dinamica di un sistema di meccanica celeste a tre corpi (p.es., sole, terra, luna)¹⁴ che interagivano mediante forze gravitazionali consisteva essenzialmente in questo. Malgrado il sistema fosse governato da *equazioni differenziali*, il carattere *non-lineare* di queste equazioni, dovuto al fatto che si stava studiando l'interazione gravitazionale simultanea fra tre corpi — e non «due a due» (p.es., terra-sole, sole-luna e terra-luna) come nel classico approccio newtoniano ai problemi gravitazionali «a molti corpi» — faceva sì che la soluzione dell'equazione Lagrangiana del sistema fosse caratterizzata dalla presenza di molti *punti di equilibrio instabili*. Il sistema manifestava così il fenomeno della cosiddetta *instabilità dinamica* caratterizzato da una *divergenza esponenziale* delle traiettorie dei componenti del sistema nello spazio delle fasi (cfr. **Figura 2-54**).

Esemplificazione della stabilità dinamica...

Per fornire una sorta di illustrazione intuitiva del principio che ci riporta a quanto già ben sappiamo: nei *sistemi stabili all'equilibrio* è come se io lasciassi cadere n palline lungo le pareti di vaso chiuso. Anche variando di molto le condizioni iniziali della posizione delle palline lungo le pareti del vaso, con assoluta certezza so che, dopo un transitorio più o meno lungo, unica sarà la posizione finale stabile delle n palline sul fondo del vaso (cfr. § A3.2 in Appendice A, **Figura 2-44** nella parte sinistra estesa a un modello a n palline). In altre parole, nei sistemi lineari stabili le traiettorie anche per condizioni iniziali non-identiche *convergono* verso un'unica traiettoria o *attrattore* della dinamica (= punto di equilibrio *stabile*) così da risultare *integrabili* e il loro comportamento predicibile *anche nel lungo periodo* come la nozione di *attrattore* di ciclo-limite e/o di toroide esemplificano (cfr. **Appendice B**).

...E della instabilità dinamica

Viceversa, se ponessi le medesime palline sulla cima di una collina (= punto di equilibrio *instabile*, intuitivamente, come nella parte destra di **Figura 2-44**), anche una *piccolissima differenza* nelle condizioni iniziali del moto delle n palline — una piccola variazione nella posizione q o nella direzione dell'impulso iniziale di \vec{p} — determinerebbe una grossa variazione nello stato finale. P.es., determinerà su quale versante della collina la pallina cadrà. *Indefinitamente piccole* variazioni delle condizioni iniziali, determineranno *esponenzialmente grandi* variazioni nelle condizioni finali, determinando allo stesso tempo la *non-integrabilità* dell'equazione del moto e quindi l'*impredicibilità* del comportamento del sistema dinamico *sul lungo*

¹⁴ Effettivamente il sistema gravitazionale «a tre corpi» studiato da Poincaré non era quello sole-terra-luna come in altri lavori precedenti addirittura di Galilei stesso, ma il sistema costituito da Giove e i suoi due satelliti.

periodo. Ne parleremo a lungo nell'**Appendice B** discutendo la **Figura 2-54**.

Distinzione fra aleatorietà dovuta...

A questo punto è fondamentale un'osservazione ontologica ed epistemologica della massima importanza. Va tenuta presente la profonda differenza fra:

All'instabilità dinamica

◆ L'incertezza o aleatorietà dovuta *all'instabilità dinamica* nei sistemi non-lineari di Meccanica Classica, quale appunto il modello di Poincaré, il modello FPUT o un sistema caotico;

All'indeterminazione quantistica in QM

◆ Con l'incertezza dovuta al *principio di indeterminazione* nei sistemi lineari della QM basati sull'equazione di Schrödinger.

Ai termini perturbativi in SM

◆ Con l'incertezza dovuta all'inserimento di un *termine perturbativo* nei sistemi stocastici della SM.

I sistemi quantistici della QM data la loro linearità sono stabili

Infatti, nei sistemi instabili, l'incertezza nella determinazione dello stato *non* rimane confinata entro un valore determinato $\Delta q \Delta p \geq \hbar/2$ come in quantistica, ma viene amplificata dalla dinamica del sistema. I sistemi quantistici della QM come in generale i sistemi stocastici della SM sono, cioè, *sistemi stabili*. In questo senso ai sistemi caotici in quanto caratterizzati da instabilità dinamica, pur essendo generati da *equazioni differenziali* non sono applicabili i *metodi perturbativi* della SM che storicamente furono inventati da Laplace proprio per modellizzare un sistema gravitazionale a molti corpi. Per questo, è invalso in matematica la convenzione di usare il termine sistemi *caotici* per distinguerli dall'aleatorietà dei sistemi *stocastici*. In una parola, il «caos» non è il «caso». Vi torneremo in

I sistemi caotici non sono sistemi stocastici

In particolare, il fatto di essere generati da un sistema di equazioni differenziali – dove, cioè, il passo successivo è *causalmente* determinato dal passo precedente – giustifica la denotazione di per sé contraddittoria al senso comune di «caos *deterministico*». Il determinismo è legato al fatto che, differentemente dai *sistemi stocastici* studiati dalla SM, nell'equazione differenziale che definisce il sistema non è inserito alcun *termine casuale* come nel classico esempio *dell'equazione di Langevin* nello studio dei metodi perturbativi tipici della SM.

Equazione di Langevin per sistemi stocastici

In altri termini, i sistemi caotici non sono assimilabili ai *sistemi stocastici*, almeno nella loro forma tradizionalmente studiata in SM, secondo il paradigma dato dall'*equazione di Langevin* (Paul Langevin, 1872-1946), originariamente sviluppata per la caratterizzazione del *moto browniano*. Quello, p.es., tipico del moto casuale non equilibrato di particelle in agitazione termica. Secondo questa equazione, la funzione $v(x)$, che descrive l'evoluzione macroscopica di una quantità osservabile x del sistema, non è suf-

ficiente per descrivere lo stato istantaneo di x . Ad essa bisogna aggiungere un *termine perturbativo* (casuale) ξ secondo la seguente equazione:

$$\frac{dx}{dt} = v(x) + \sigma(x)\xi \quad (14)$$

Dove $\sigma(x)$ è l'ampiezza della perturbazione (varianza della gaussiana) e $\xi = dw/dt$ è conosciuta come «rumore bianco», un termine perturbativo che può essere considerato come derivata di un *processo di Wiener*. Come si vede, il termine perturbativo nell'equazione di Langevin appare come un termine estrinseco *additivo* alla dinamica $v(x)$. Tale termine vuole esprimere infatti l'effetto applicato costantemente a una dinamica «dal di fuori», dipendente cioè *dalla nostra ignoranza* dell'evoluzione dinamica del sistema nel tempo, come è standard in SM.

L'aleatorietà caotica dipende dalla struttura interna della dinamica

Nel caso dell'instabilità dinamica non esiste invece alcun termine perturbativo aggiunto «dall'esterno» nell'equazione differenziale che li genera, come vedremo meglio studiando il *sistema di Lorenz* che ha fornito il primo esempio in meteorologia di simulazione al computer di un *attrattore strano o caotico* (cfr. § B.2, in **Appendice B**). Siamo confrontati invece con un *termine intrinseco di aleatorietà*, legato all'evoluzione dinamica stessa del sistema e ai suoi punti di equilibrio instabili. In questo caso, infatti, il termine perturbativo è in grado di «far esplodere» il fenomeno della divergenza esponenziale delle traiettorie perché legato ad un punto di equilibrio *instabile* e non *stabile* del sistema come l'uso dei termini perturbativi in SM suppone. In altri termini, i sistemi caotici sono caratterizzati da mancanza di *stabilità strutturale* (Viana, 2000). Vi torneremo nell'**Appendice B** quando illustreremo i *sistemi caotici* come modelli-esemplificativi dei *sistemi complessi*.

Instabilità dinamica e fine del mito laplaciano del determinismo assoluto nei sistemi gravitazionali

Ecco come Poincaré stesso spiegava questa sua inquietante scoperta *dell'instabilità dinamica*, che cancellava d'un colpo solo l'ideale deterministico della meccanica classica newtoniana e statistica laplaciana – ovvero, il costrutto del «demone di Laplace», che era stato enunciato solo un secolo prima e che abbiamo ricordato nel capitolo precedente del nostro libro come apice dell'approccio determinista della fisica newtoniana intesa come Fisica Fondamentale degli inizi della modernità.

Una causa piccolissima che sfugge alla nostra attenzione determina un effetto considerevole che non possiamo mancar di vedere, e allora diciamo che l'effetto è dovuto al caso. Se conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dello stesso universo all'istante iniziale potremmo prevedere esattamente la situazione dello stesso universo in un istante successivo (il demone di Laplace idealizzato, *N.d.R.*). Tuttavia, se pure accadesse che le leggi naturali non avessero più alcun segreto per noi, *anche in tal caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente*. Se questo ci permettesse di prevedere la situazione con la stessa approssimazione, non ci occorrerebbe di più e dovremmo dire che il fenomeno è stato pre-

visto ed è governato da leggi. Ma non sempre è così: può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali. Un piccolo errore nelle prime produce un errore enorme nei secondi. La previsione diviene *impossibile* e si ha un fenomeno fortuito¹⁵.

Instabilità dinamica di Poincaré mantiene tuttavia l'ergodicità diversamente dal modello FPUT e dai sistemi complessi, caotici inclusi

Allo stesso tempo – e questo rendeva la scoperta del modello FPUT nel 1953 come antesignano dei modelli caotici così sconvolgente – il fenomeno dell'instabilità dinamica scoperto da Poincaré *non rompeva l'ergodicità del sistema*. Infatti, Poincaré stesso affermava che per un sistema dinamico «chiuso» caratterizzato da instabilità dinamica, dopo un tempo molto lungo ma comunque *finito*, il sistema avrebbe avuto il tempo sufficiente di visitare tutte le configurazioni del moto accessibili al suo spazio delle fasi e compatibili con il principio di conservazione dell'energia come l'ipotesi ergodica suggerisce. Anzi, nello stesso articolo in cui spiegava il suo trattamento del problema dei tre corpi, Poincaré avanzava l'ipotesi del suo *teorema di ricorrenza ergodica* (Poincaré, 1890), successivamente dimostrato, secondo il quale, dopo un tempo sufficientemente lungo ma comunque finito, il sistema tornerà ad uno stato *arbitrariamente vicino* (per sistemi a stati continui), o *esattamente identico* (per sistemi a stati discreti) al suo *stato iniziale*.

Anche il modello di Sinai di sistema instabile mantiene ergodicità

D'altra parte, il fatto che il fenomeno della divergenza esponenziale delle traiettorie in sistemi non-lineari non fosse sufficiente a rompere l'ergodicità è stato poi analiticamente confermato dal classico sistema dinamico instabile studiato dal matematico ebreo-russo Yasha Sinai. Egli ha dimostrato *l'ergodicità di un sistema dinamico instabile* assai semplice: quello del biliardo con ostacoli curvi convessi. Vi ritorneremo nell'**Appendice B**, illustrando la **Figura 2-55 in § B.2**.

Per questo instabilità dinamica solo prima condizione da soddisfare nella definizione matematica di sistema caotico

Devono dunque darsi altre condizioni, oltre l'estrema sensibilità alle condizioni iniziali perché un sistema deterministico, generato da un sistema di equazioni differenziali non-lineari possa definirsi propriamente «caotico». Ed infatti, come vedremo, nella caratterizzazione topologica di un sistema caotico che illustreremo brevemente in **Appendice B, § B.2.2** l'instabilità dinamica e dunque la sensibilità alle condizioni iniziali è solo la prima delle tre condizioni da soddisfare per definire un sistema caotico. Le altre due sono legate a particolari proprietà dello *spazio topologico*, lo spazio che definisce la struttura interna di relazioni che definisce un sistema caotico – e cioè, *transitività topologica* e *densità delle sue orbite quasi-periodiche* – e che fisicamente collegheremo alla «trasformazione del fornaio» interpretata come introduzione di un «bagno termico» nella definizione di un sistema caotico.

¹⁵ Da *Science et Méthode*, citato in (Ruelle, 1991, p. 19).

Fisicamente la complessità dipende dalle transizioni di fase su diverse scale temporali

Quando teniamo presente che la «rottura di ergodicità» in un sistema dinamico è intrinsecamente legata alle *transizioni di fase su diverse scale spazio-temporali*¹⁶ che caratterizzano il sistema, tutto questo ci porterà a comprendere meglio nella prossima sottosezione il contributo matematico fondamentale dato da Giorgio Parisi alla modellizzazione dei sistemi complessi – quelli caotici inclusi – identificando una *nuova classe di universalità* nei sistemi stocastici, estendendo il formalismo dei metodi perturbativi della SM ben al di là dei suoi confini tradizionali. Allo stesso tempo tutto questo ci porterà a comprendere meglio un approccio complementare a quello della SM per rendere conto della proprietà delle *correlazioni a lungo raggio* che caratterizzano su molteplici scale spazio-temporali le *coerenze di fase* dei campi che caratterizzano i sistemi complessi. Si tratta delle correlazioni a lungo raggio fra i campi quantistici allo stato fondamentale di *minima energia* o *vuoto quantistico* legate al *Teorema di Goldstone*, un ingrediente fondamentale del formalismo fisico-matematico della QFT (cfr. § 2.7.2). Questa interpretazione costituirà l'ultimo passo della nostra trattazione della complessità e di tutto questo capitolo. Quello dell'interpretazione della complessità nel quadro teorico della QFT estesa a sistemi quantistici dissipativi come Fisica Fondamentale (cfr. § 2.8).

2.4.2.3 La congettura di Kardar-Parisi-Zang e la modellizzazione stocastica dei sistemi complessi

Nobel 2021: Modellizzazione del clima e sistemi complessi

Nel comunicato stampa della Accademia Reale Svedese delle Scienze che annunciava il conferimento del Premio Nobel 2021 per la Fisica a Syukuro Manabe, Klaus Hasselmann e Giorgio Parisi «Per i fondamentali contributi alla nostra comprensione dei sistemi fisici complessi», le motivazioni del Premio ai tre scienziati sono illustrati come segue:

Manabe: aumento CO₂ nell'atmosfera e aumento temperatura

Un sistema complesso di vitale importanza per l'umanità è il clima terrestre. **Syukuro Manabe** ha dimostrato come l'aumento dei livelli di anidride carbonica nell'atmosfera porti a un aumento delle temperature sulla superficie della Terra. Negli anni '60, ha guidato lo sviluppo di modelli fisici del clima terrestre ed è stata la prima persona a esplorare l'interazione tra il bilancio radiativo e il trasporto verticale di masse d'aria. Il suo lavoro ha gettato le basi per lo sviluppo degli attuali modelli climatici.

¹⁶ Bisogna ricordare che le transizioni di fase sono essenzialmente di due tipi, quelle del *primo ordine* che sono temporalmente *istantanee* (p.es., le transizioni di stato liquido-gassoso in fisica dei materiali), quelle del *secondo ordine* che avvengono su scale temporali *più lunghe* (p.es., la transizione di fase ferromagnetica) (cfr. § A4.4 in **Appendice A**).

Hasselmann: segnale (clima) vs. tempo atmosferico (rumore) e identificazione ruolo attività umane	Circa dieci anni dopo, Klaus Hasselmann ha creato un modello che collega il tempo atmosferico (<i>weather</i>) e il clima (<i>climate</i>), rispondendo così alla domanda sul perché i modelli climatici possano essere affidabili nonostante il tempo atmosferico sia mutevole e caotico. Ha anche sviluppato metodi per identificare segnali specifici, le impronte digitali, che sia i fenomeni naturali che le attività umane imprime nel clima. I suoi metodi sono stati utilizzati per dimostrare che l'aumento della temperatura nell'atmosfera è dovuto alle emissioni umane di anidride carbonica.
Modellizzazione dei sistemi complessi in SM	Intorno al 1980, Giorgio Parisi scoprì modelli nascosti in materiali complessi e disordinati. Le sue scoperte sono tra i più importanti contributi alla teoria dei sistemi complessi. Permettono di comprendere e descrivere molti materiali e fenomeni diversi e apparentemente del tutto casuali, non solo in fisica ma anche in altri settori molto diversi, come la matematica, la biologia, le neuroscienze e l'apprendimento automatico.
Struttura multi-scala delle coerenze / transizioni di fase cuore della complessità	Nell'annesso documento a cura della medesima Accademia che illustrava in forma estesa e sintetica le motivazioni scientifiche del conferimento ai tre scienziati, la sfida scientifica dei sistemi complessi veniva introdotta ricordando che la <i>struttura multi-scala</i> che caratterizza a <i>livello mesoscopico</i> un sistema complesso richiede soluzioni che «hanno la medesima struttura multi-scala dei fenomeni a cui si rivolgono» (Accademia Reale Svedese delle Scienze, 2021, p. 4).
Nei sistemi complessi non vale equipartizione energia dei sistemi all'equilibrio	Dal punto di vista dinamico, affrontato nel contesto della <i>Teoria dei Sistemi Stocastici</i> in SM, l'approccio multi-scala necessario per affrontare la sfida dei sistemi complessi dei sistemi complessi in quanto sistemi <i>non-lineari</i> in condizioni <i>fuori dall'equilibrio</i> , rispetto ai sistemi <i>all'equilibrio</i> che sono caratterizzati da <i>un'equipartizione dell'energia</i> veniva così sintetizzato citando un lavoro di Parisi (Parisi, 2005):
Sistemi complessi modellizzati in SM come sistemi stabili leggermente fuori dall'equilibrio	La situazione è differente per sistemi che sono solo leggermente (<i>slightly</i>) fuori dall'equilibrio. Per esempio, immaginiamoci un sistema che non può raggiungere l'equilibrio a causa delle barriere di energia libera (...) ¹⁷ ; questa situazione tipicamente si applica ai sistemi disordinati, come i “vetri di spin” e i vetri strutturali. Un tale sistema approssimerà l'equilibrio lentamente, saltando da uno stato metastabile ad un altro, e potrebbe rimanere leggermente fuori dall'equilibrio per sempre, se continuamente perturbato con un campo esterno che cambia lentamente. In tali sistemi ci possiamo aspettare una separazione, per diversi ordini di grandezza, fra la scala temporale microscopica del sistema (per esempio, quella rappresentata dalle vibrazioni dei singoli atomi) e la scala temporale macroscopica necessaria per saltare le barriere (per esempio, cambi nella struttura del sistema stesso). Il sistema può essere quindi considerato come essenzialmente terminalizzato all'interno di uno stato metastabile, e così le idee di fluttuazione-dissipazione possono essere ancora applicate: lo stato totale del sistema

¹⁷ Il riferimento intuitivo può essere al “paesaggio dell'energia” di sistemi non-lineari quale quello descritto in **Figura 2-44** di **Appendice A** dove le barriere di energia libera sono quelle che separano i vari minimi locali (punti metastabili) del potenziale totale del sistema.

che cambia lentamente è considerato come una piccola perturbazione (Accademia Reale Svedese delle Scienze, 2021, p. 4).

Segnali climatici nell'atmosfera modellizzati come variabile lenta (segnale) rispetto a variabile veloce (rumore) nell'atmosfera

Come viene suggerito nel documento, l'idea-guida di Hasselmann che lo ha portato ad avere successo nell'individuare i segnali specifici delle attività umane sulle variazioni climatiche rispetto ai segnali di altri fattori naturali sullo sfondo della variabilità del tempo atmosferico, usando la classica distinzione *segnale-rumore*, consiste nel distinguere «il clima – il *segnale* – come la varietà lenta del tempo atmosferico – il *rumore*» (Accademia Reale Svedese delle Scienze, 2021, p. 4). Il tempo atmosferico è cioè un insieme di microstati dell'atmosfera che *variano velocemente* in maniera disordinata rispetto alla *variabile lenta* della variazione climatica.

Il fenomeno della risonanza stocastica e la sua rilevanza per il clima

In questo senso assume una rilevanza del tutto particolare il fenomeno ben noto della *risonanza stocastica* di cui Parisi e alcuni suoi colleghi hanno mostrato la rilevanza nello studio della dinamica dei sistemi complessi e, nel caso specifico, nel rapporto *segnale – clima – rumore – tempo atmosferico* – (Benzi, Parisi, Sutera, & Vulpiani, 1982). La risonanza stocastica è ben nota e sfruttata da tutti coloro che operano in teoria delle comunicazioni e nella teoria delle reti neurali applicata al *riconoscimento di patterns* in ambienti altamente rumorosi. Io stesso, insieme ad altri miei colleghi, ne abbiamo fatto uso in questo campo con ottimi risultati (cfr., in particolare, (Castiglione, Basti, Fusi, & Perrone, 1992)).

Utilizzo della risonanza stocastica in teoria matematica delle comunicazioni

Vediamo questo fenomeno dal punto di vista della *teoria matematica delle comunicazioni* che è più intuitivo. Per garantire una comunicazione efficiente, dobbiamo essere certi che il canale sia “pulito” che cioè non esistano nel canale segnali (*pattern*) la cui presenza distorcerebbe il segnale (*pattern*) che vogliamo inviare attraverso quel canale. Il modo più efficiente per garantirci questo è quello di iniettare nel canale del *rumore bianco* (cfr. **Figura 2-6**), ovvero un segnale che ha la medesima intensità a *tutte le frequenze* così da produrre una *densità costante* dello *spettro di potenza* (*power spectrum*). Spettro di potenza da non confondersi con lo *spettro di energia* di un segnale, quello, per intenderci, di cui ci occuperemo quando parleremo degli spettri di energia emessi dall'atomo di idrogeno eccitato, spettri che sono all'origine della QM. Infatti, con “potenza” di un segnale si intende la *quantità di energia* trasferita dal segnale *per unità di tempo*. È chiaro dunque che, se nel canale vi fosse del segnale (*pattern*) con un suo specifico spettro di potenza e specifiche frequenze, esso andrebbe immediatamente *in risonanza* (*interferenza costruttiva*) con le medesime frequenze presenti nel rumore così da venire *amplificato* e quindi facilmente riconosciuto. Per “pulire” il canale basterà quindi introdurre del segnale *in controfase* con quello spurio presente nel canale così da annullarlo per *risonanza* (*interferenza distruttiva*) (cfr. **Figura 2-39 in Appendice A**).

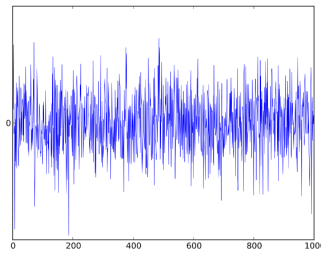


Figura 2-6. Rappresentazione grafica della forma d'onda del rumore bianco gaussiano¹⁸

Applicazione della risonanza stocastica allo studio dei segnali dell'attività umana sulle variazioni climatiche

Lo stesso principio vale al contrario nel caso di un *segnale*, p.es., quello prodotto dall'attività umana in grado di influenzare il clima, all'interno del *rumore* che è il resto del tempo atmosferico (atmosfera). Nello specifico il segnale è l'aumento anomalo di immissione di anidride carbonica (CO₂) nell'atmosfera a partire dall'inizio della cosiddetta "era industriale", per l'aumento dell'uso dei combustibili fossili. Un "segnale" che, per lo stesso principio della risonanza stocastica, viene *amplificato* dal "rumore" del tempo atmosferico, così da produrre effetti catastrofici sul clima (=aumento della temperatura) malgrado di per sé il segnale – senza questo effetto di amplificazione per risonanza stocastica – non sarebbe in grado di influenzare il clima, come per ignoranza di questo principio affermano tutti i cosiddetti "negazionisti" dell'influenza dell'attività umana sull'attuale aumento della temperatura.

Relazione con lo "effetto-farfalla" nei sistemi caotici

Visto da un altro punto di vista, cioè quello della modellizzazione del tempo atmosferico non dal punto di vista della teoria dei *sistemi stocastici*, ma dal punto di vista dei *sistemi caotici* (cfr. **Appendice B**), l'effetto di amplificazione del segnale legato all'azione umana sul clima può essere visto come il corrispettivo del cosiddetto "effetto-farfalla" dovuto all'*instabilità dinamica* che caratterizza questi sistemi dinamici complessi non-lineari fuori dall'equilibrio (cfr. § **B.2** in **Appendice B**).

Il contributo matematico di Parisi va oltre quello della risonanza stocastica

Ma non è quello dell'aver evidenziato la rilevanza della risonanza stocastica nelle mutazioni climatiche il motivo per cui Parisi è stato insignito del Nobel. Il suo contributo per la modellizzazione matematica dei sistemi complessi nell'ambito della SM dei processi stocastici è legato – come egli stesso ci spiega nel testo divulgativo recentemente pubblicato che sintetizza aspetti fondamentali della sua ricerca (Parisi, 2021, pp. 51-72) – al fondamentale contributo che egli ha dato al *metodo delle repliche*

¹⁸ Da: *By Morn - Own work*, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=24084756>.

(*replica method*) nello studio del modello-esemplificativo (*toy-model*) per lo studio dei sistemi complessi: il modello dei *vetri di spin* (*spin glasses*) cui Parisi stesso si riferiva nella sua citazione sopra riportata all'interno del documento dell'Accademia Reale Svedese delle Scienze (Accademia Reale Svedese delle Scienze, 2021, p. 4).

Uso del modello a vetri-di-spin nella modellizzazione di una vasta gamma di sistemi complessi

Come abbiamo detto, ciò che in generale caratterizza un sistema complesso è il fatto che in esso coesistono, al *livello mesoscopico* dei condensati atomico-molecolari che li costituiscono, molteplici *transizioni/coerenze di fase* dei suoi componenti su *diverse scale spazio-temporali*. Si pensi, per esempio, al livello *inorganico*, al *vetro* o ad una *lega metallica*, p.es., il bronzo, o, al livello della *materia organica*, ai diversi tipi di *polisaccaridi*, agli *acidi nucleici* del DNA e alle *proteine* composte da catene di acidi nucleici legati da legami polipeptidici e che costituiscono i “mattoni” degli organismi viventi...

Vetri di spin come sistemi frustrati rispetto alla transizione di fase para/ferromagnetica

Il modello-esemplificativo (*toy-model*) più semplice di sistema complesso è dunque quello dei *vetri di spin* ovvero di un sistema in cui gli spin non sono tutti (o nella stragrande maggioranza) orientati nella medesima direzione come nello stato ferromagnetico di un magnete al di sotto della temperatura di Curie (cfr. **Figura 2-24**) ma un numero significativo di essi sono orientati in *versi opposti* così da non essere, né orientati tutti nel medesimo verso, ma neanche tutti orientati in maniera casuale come nel caso paramagnetico. Fisicamente ciò dipende, nel caso del vetro di una finestra dal fatto che non è composto di solo silicio ma in esso vi sono diverse impurità, oppure nel caso di una lega dal fatto che è composta di materiali diversi. Un vetro di spin rappresenta quindi un modello di *sistema frustrato*, dipendente dal fatto che forze opposte agiscono sull'orientamento degli spin degli atomi, un po' come – l'esempio è di Parisi stesso – persone legate da profonda antipatia sono costrette a stare insieme in un unico gruppo. Si tratta evidentemente di uno stato collettivo psicologicamente “frustrante” (cfr. **Figura 2-7**).

Sistemi frustrati come modelli di tutti i solidi amorfi rispetto ai cristalli

La struttura a “vetro-di-spin” è quella comune a tutti i *solidi amorfi* allo stato fondamentale di minima energia in cui i legami atomici sono irregolari, a differenza dei *cristalli* che hanno strutture *regolari* di legami atomici. In questo senso un solido ferromagnetico con gli spin allineati in un unico verso ha una struttura analoga a quella della struttura-a-reticolo di un cristallo che è all'origine dell'unica struttura geometrica del cristallo stesso (p.es., le splendide strutture geometriche di un fiocco di neve).

Possibilità di molteplici strutture a vari livelli

Il legame con la struttura dei sistemi complessi è dato dal fatto che in un vetro-di-spin sono possibili più di una struttura geometrica dei legami atomici ugualmente stabili. La spiegazione dinamica è data dal fatto che queste strutture sono *metastabili* perché corrispondono a diverse configurazioni stabili (fra n minimi locali del potenziale) diverse dall'unica configu-

razione degli spin dello stato di *minima energia* che corrisponderebbe allo stato ferromagnetico (e/o cristallino) (cfr. **Figura 2-45** in **Appendice A**).

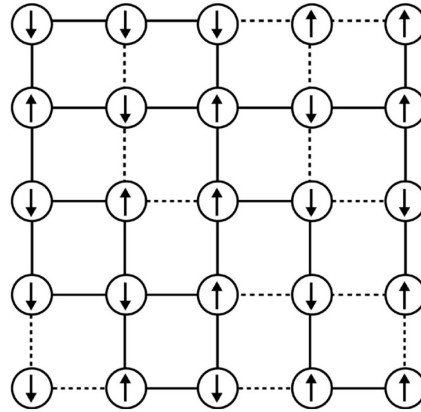


Figura 2-7. «Rappresentazione schematica di un vetro di spin. A bassa temperatura, gli spin collegati da una linea tratteggiata cercano di allinearsi su versi opposti, mentre gli spin collegati da linee continue si allineano sullo stesso verso» (da (Parisi, 2021, p. 58)).

Il metodo delle infinite repliche e le teorie di campo medio: studio correlazioni di un medesimo stato fra n repliche del sistema

La modellizzazione in SM di un vetro di spin si basa sul *metodo delle infinite repliche* (*replica method*) del sistema attraverso la quale è possibile definire la *funzione di partizione* Z (cfr. Eq. (7) in § 2.4.1) fra spin del medesimo reticolo definiti sul medesimo punto del reticolo ma appartenenti a n repliche diverse. In base a tale metodo, è stato possibile definire una *teoria di campo medio* mediante cui approssimare la *dinamica lenta* della magnetizzazione di un vetro di spin e il suo stato di minima energia *non-ergodico* perché caratterizzato dalla presenza di molti minimi in cui il sistema resta intrappolato. La prima formulazione di questa teoria si trova nel modello di Edwards-Anderson (Edwards & Anderson, 1975) sviluppato solo per le correlazioni fra due spin appartenenti a due repliche diverse, e nel modello di Sherrington-Kirkpatrick che estesero il metodo a correlazioni di raggio infinito perché definite su un numero indefinito di repliche (Sherrington & Kirkpatrick, 1975). Il modello, tuttavia, era soggetto a inconsistenze matematiche perché dava luogo a possibili *valori negativi* dell'entropia, fisicamente assurdi come sappiamo. Dopo ulteriori perfezionamenti del modello la dimostrazione matematicamente rigorosa e consistente delle teorie di campo medio si deve al prof. Francesco Guerra (1942-) – collega di Parisi a La Sapienza di Roma – che, come riconosciuto da Parisi stesso, diede indirettamente consistenza fisico-matematica alla stessa brillante

idea di Parisi per la quale poi ha ottenuto il Nobel (cfr. (Guerra & Toninelli, 2002))¹⁹.

L'idea-base del modello di Parisi: parametro d'ordine di una transizione di fase come funzione e non come numero

Quale sia stata questa brillante idea che costituisce l'apporto dato da Parisi alla modellizzazione dei sistemi complessi nell'ambito della teoria dei sistemi stocastici in SM estendendo il metodo delle repliche la teoria dei vetri di spin è sintetizzata da Parisi stesso con queste parole:

...Il fatto fisico che non capivo era legato a quello che i fisici chiamano parametro d'ordine. I passaggi di stato in un sistema, come abbiamo visto, sono generalmente caratterizzati dalla variazione di *un parametro*. Ad esempio il parametro d'ordine per studiare la transizione tra un liquido e un gas è la densità. Nel caso della transizione magnetica, il parametro d'ordine da studiare è la magnetizzazione. Questi parametri d'ordine variano durante le transizioni di fase assumendo diversi valori numerici il cui significato fisico, come quello della densità o della magnetizzazione, è molto facile da capire. Sorprendentemente, nel caso dei miei risultati sui calcoli per i vetri di spin, il parametro d'ordine non era più un semplice numero il cui valore cambiava durante la transizione: quello che variava durante la transizione era *una funzione*. Non bastava un punto per caratterizzare la transizione, ma dovevo usare una funzione composta non più da un solo numero, bensì da infiniti numeri. Cosa rappresentava fisicamente questa funzione? Avere una funzione al posto di un numero come parametro d'ordine per una transizione indicava anche lo spartiacque per poter utilizzare il metodo delle repliche come veniva usato normalmente. Nel caso in cui il parametro fosse stato un solo numero, il metodo delle repliche portava a risultati assurdi; se invece il parametro d'ordine era una funzione, *cioè un insieme infinito di numeri* (allo stesso modo in cui una linea può essere vista come un insieme infinito di punti), allora il metodo delle repliche funzionava e dava risultati coerenti (Parisi, 2021, pp. 61-62) Corsivi miei.

Intuizione di Parisi come estensione significativa della SM allo studio della complessità

Questo risultato fu ottenuto da Parisi nel 1980 (Parisi, 1980) e questa intuizione si è rivelata estremamente feconda. Tralasciamo qui la spiegazione matematica di questa idea che Parisi stesso tenta di darci intuitivamente nel suo testo divulgativo (Parisi, 2021, pp. 62-65). Infatti, nota Parisi, il lavoro per arrivare ad una piena comprensione e giustificazione matematica di questa estensione del metodo delle repliche richiede tuttora ancora molto lavoro. Più semplice invece è stato comprendere il *significato fisico* di questa estensione sempre nell'ambito teorico della SM:

¹⁹ Io stesso insieme con il mio collaboratore Antonio Luigi Perrone che, a quel tempo stavamo sviluppando un modello alternativo a quello basato sui metodi stocastici in SM applicato alla modellizzazione delle reti neurali, siamo stati testimoni di quegli anni eccitanti, perché onorati dell'amicizia e della stima del prof. Guerra. Un modello basato sulla caratterizzazione caotica delle dinamiche delle reti neurali e che ha trovato la sua modellizzazione appropriata solo molti anni dopo, nella fondazione quantistica in QFT di siffatta dinamica dei sistemi complessi, come illustrato in § 2.8. In ogni caso, per questi comuni interessi, più volte il prof. Guerra ha accettato l'invito a partecipare a diversi Congressi organizzati dall'IRAFS su questi temi.

Utilizzando una serie di indizi, io e i miei amici Marc Mézard, Nicola Sourlas, Gérard Toulouse e Miguel Virasoro siamo riusciti a capire il significato fisico del risultato, una caratteristica comune a tutti i sistemi disordinati: i sistemi disordinati si trovano contemporaneamente in un numero elevatissimo di stati diversi di equilibrio. Era una scoperta del tutto inaspettata²⁰. (...) Normalmente un sistema fisico si trova in un solo stato. Ad esempio, l'acqua a una certa temperatura e a una certa pressione o è liquida o è solida o è un gas. Ci sono casi particolari in cui il sistema può trovarsi in due stati, che di solito vengono chiamati fasi. A 100 °C l'acqua può stare contemporaneamente nella fase liquida e nella fase gassosa. Esiste anche un unico valore di pressione e temperatura in cui l'acqua si trova nelle tre fasi: solida, liquida e gassosa. È il famoso «punto triplo» dell'acqua, e non a caso è famoso. In genere, infatti, un sistema è in una sola fase. Un sistema disordinato a bassa temperatura si trova invece in un numero molto elevato di fasi contemporaneamente. Ecco il senso del parametro d'ordine che diventa una funzione, cioè un insieme di infiniti valori. Capire questo è stato un vero passo avanti per la fisica. La costruzione di un modello sintetico e la sua soluzione ci hanno permesso di scoprire un fenomeno del quale ignoravamo l'esistenza: abbiamo spalancato la porta sul mondo dei sistemi disordinati (Parisi, 2021, pp. 65-68).

Definizione di una nuova classe di universalità per sistemi stocastici

Viceversa, continua ancora Parisi, per giungere ad una spiegazione matematica consistente della teoria ci sono voluti oltre vent'anni di lavoro. Il riferimento stavolta è a una particolare congettura sotto forma di equazione formulata nel 1986 da Parisi, Mehran Kardar e Yi-Cheng Zang (Kardar, Parisi, & Zhang, 1986) che ha portato, in appunto oltre vent'anni di lavoro con contributi di molti altri fisici e matematici alla definizione di una *nuova classe di universalità* per sistemi stocastici in SM e che va sotto il nome di *Classe di Universalità KPZ*.

Classi universalità per comportamenti simili a livello mesoscopico vicino ai punti di transizioni di fase di sistemi molto diversi tra loro a livello microscopico

Per capire di cosa si tratta, bisogna evidenziare una proprietà fondamentale della materia a *livello mesoscopico* quando siamo in presenza dell'emergere di *fenomeni collettivi* legati alle *transizioni fra fasi coerenti* delle oscillazioni di un numero eccezionalmente grande di componenti elementari (p.es., atomi) del sistema. Il fatto sorprendente è che per sistemi fra loro completamente diversi a *livello microscopico* il comportamento collettivo a *livello mesoscopico* o *comportamento critico* dei sistemi in prossimità del punto di transizione di fase è *lo stesso*, così da costituire un'unica *classe di universalità*. Di qui la formalizzazione di questo fenomeno proposta per la prima volta dal fisico americano Leo Philip Kadanoff (1937-2015) che evidenziò come siffatte classi di universalità dipendessero dal fatto che tutti i sistemi della medesima classe fossero caratterizzati dal condividere un *medesimo valore* di un unico parametro statistico, l'esponente β della relativa curva (legge) esponenziale che regola *l'aggregazione dei componenti elementari* di un

²⁰ Il riferimento bibliografico implicito in questa affermazione di Parisi è il libro (Mézard, Parisi, & Virasoro, 1987)

sistema in funzione della variazione della temperatura e che già conosciamo dalla distribuzione di Boltzmann in termodinamica perché l'inverso di β , $1/\beta$, è la misura della temperatura in termodinamica statistica (cfr. **Figura 2-4** in § 2.3.2).

Nel caso delle classi di universalità, il coefficiente β assume la forma di un *coefficiente critico* perché è ciò che pone in relazione la *temperatura* con il *parametro di ordine* di una transizione di fase che, in ultima analisi, è una misura di “addensamento/rarefazione” di microstati in *modi collettivi coerenti*. Se vogliamo, nei termini della matematica statistica, una misura di “riduzione (coerenza di fase)/aumento (decoerenza di fase)” dei *gradi di libertà* del sistema (cfr. § A4.4 in **Appendice A**).

Per capire però la rilevanza della nozione di “classe di universalità” per la Teoria dei Sistemi Complessi dobbiamo introdurre – sempre seguendo la ricostruzione divulgativa di Parisi (Parisi, 2021, pp. 47-50) – il concetto dei *gruppi di rinormalizzazione* come tecnica di calcolo dei coefficienti critici di Kadanoff per le sue classi di universalità. Si deve in particolare al contributo di Kenneth G. Wilson (1936-2013) lo sviluppo di questo metodo di calcolo che gli meritò il Premio Nobel nel 1982, anche se gli articoli che egli dedicò a questo metodo per il calcolo dei coefficienti critici risalgono agli anni 1971-72 (cfr. in particolare (Wilson, 1971a; 1971b)).

Come abbiamo detto, un sistema complesso si caratterizza per il fatto che molteplici coerenze/transizioni di fase e quindi diverse strutture geometriche coesistono nel medesimo sistema su *diverse scale spazio-temporali*. Il metodo di “rinormalizzazione” di Wilson consiste infatti nella possibilità di passare matematicamente da una scala all'altra di osservazione del sistema, evidenziando così *l'emergenza di un'unica struttura invariante* (= *simmetria*) che si ripete sempre simile a se stessa (= *auto-similare*) alle diverse scale, manifestando così le caratteristiche geometriche di un *oggetto frattale*. Si tratterà quindi dell'unica struttura geometrica (*forma*) di un sistema complesso in quanto tale, anzi di una *classe di universalità (specie)* di sistemi complessi.

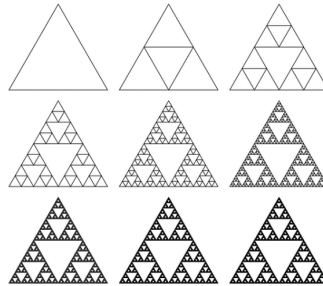


Figura 2-8. Esempio di oggetto frattale (il cosiddetto “Triangolo di Sierpinski”)²¹ che ha una struttura auto-similare su diverse scale. Forniremo in Appendice B altri esempi della struttura frattale degli pseudo-cicli di un “attrattore strano” di un sistema caotico simulato al computer (“Attrattore di Lorenz”) come modello di sistema complesso in meteorologia.

Infatti, se da una parte tutto questo dà un senso ben preciso alla nozione delle “classi di universalità” di Kadanoff e al loro legame coi rispettivi coefficienti critici β , per i nostri scopi, dal punto di vista dell’ontologia descrittiva di tali sistemi, ovvero dal punto di vista della *filosofia della natura*, le “invarianze di scala” (*simmetrie*) che definiscono un sistema complesso costituiscono il *corrispettivo operativo* (matematico-sperimentale) dell’*unicità della forma sostanziale* per corpi fisici (=sistemi complessi) appartenenti alla *medesima specie*, tipica dell’ontologia aristotelico-tomista della natura.

In ogni caso, si intuisce così immediatamente la rilevanza della “classe di universalità KPZ” dove il parametro di controllo è una *funzione* non un solo numero – per dirla con le stesse parole di Parisi –, per modellizzare in un’unica struttura matematica transizioni/coerenze di fase molteplici e diverse fra di loro, ma riportabili a un’unica classe di universalità (Hairer, 2013). Per capire la versatilità di questa classe di universalità è sufficiente consultare l’articolo di sintesi, davvero notevole, di oltre venti anni di studio da parte di molteplici autori dove si esplicita un lungo elenco di diverse specie di sistemi complessi cui la classe di universalità KPS è stata applicata con successo (Corwin, 2011).

Per concludere, quella di Parisi come tutte le altre modellizzazioni di sistemi complessi in condizioni “leggermente” fuori dall’equilibrio – come Parisi stesso ci ha ricordato all’inizio di questa illustrazione del suo modello – sono per questo definibili canonicamente attraverso l’Hamiltoniana del sistema e mediante l’uso dei metodi perturbativi della SM e quindi come sistemi dinamicamente “chiusi”. Di qui la proposta di Parisi

²¹ Da: <https://aperiodical.com/2015/12/aperiodvent-day-21-sierpinski-triangles/>

di definire su queste basi una vera e propria *teoria statistica dei campi* (Parisi & Ramaurti, 1988) che è certamente il contributo scientifico rilevante dato da Parisi e dai suoi colleghi per l'estensione della SM al di là dei suoi confini tradizionali, rendendola capace di modellizzare sistemi complessi con un numero *potenzialmente infinito* di *punti di equilibrio*, come egli stesso ha anche recentemente ricordato in un'intervista di sintesi del suo lavoro (Parisi, 2023). Vedremo in § 2.8 la possibilità di una rappresentazione canonica dei sistemi complessi anche nel caso *dissipativo*, per sistemi, cioè, dinamicamente “aperti”, mediante l'inserimento nell'Hamiltoniana anche dei gradi di libertà dell'ambiente con cui il sistema scambia energia, nel quadro di una QFT intesa come Fisica Fondamentale.

Dedichiamoci invece adesso all'ulteriore capitolo della «nuova fisica» del '900 rispetto alla Meccanica Classica newtoniana. Se la Termodinamica viola uno dei principi fondamentali della Meccanica Classica, quello della *reversibilità temporale* di tutte le equazioni del moto che accade quando abbiamo a che fare con trasformazioni termiche, la Teoria della Relatività viola un altro dei principi della Meccanica Classica, il *carattere assoluto*, indipendente dalla dinamica dei sistemi fisici che parametrizzano, dello *spazio e del tempo*.

2.5 Teoria della relatività

2.5.1 Concezione newtoniana dello spazio-tempo

Nella meccanica aristotelica distinzione assoluta fra quiete e moto perché scienza causale

Lo spazio-tempo nella fisica newtoniana

Per avviarci a completare il nostro quadro iniziale sulle rivoluzioni scientifiche del '900 dobbiamo dire ora qualcosa su quella forse più conosciuta dal grande pubblico, proprio perché, nell'immaginario comune, ottenuta dal prototipo di scienziato moderno, Albert Einstein (1879-1955): la *Teoria della Relatività*.

Una delle concezioni che rende profondamente diversa la visione dello *spazio e del tempo* fisico della meccanica newtoniana rispetto a quella della visione greca, p.es. aristotelica, è che per le leggi della meccanica newtoniana non esiste alcuna sostanziale differenza fra stato di *quiete* e stato di *moto*. Nella filosofia della natura aristotelica si cercavano cause e non leggi matematiche per rappresentare e predire fenomeni misurabili. Nella meccanica aristotelica si cercavano perciò *le cause* del moto di corpi in quiete.

Nella meccanica moderna, mancanza di una distinzione assoluta fra quiete e moto perché scienza fenomenica

Questa prospettiva cambia del tutto nella *meccanica* e nella *dinamica* moderne a cominciare da Galilei. Esse, interessandosi essenzialmente alle leggi matematiche che determinano le relazioni fra grandezze misurabili, quando studiano le *forze*, non stanno studiando «cause» che determinano l'esistenza di eventi (accidenti), p.es., cause che determinano l'esistenza dell'evento del passaggio dallo stato di quiete allo stato di moto di un corpo (sostanza) o viceversa, ma studiano la relazione fra la variazione di una determinata grandezza dinamica (variabile indipendente: la forza) e la variazione di un'altra grandezza meccanica (variabile dipendente: la posizione). Applicando questo metodo, Galilei giunse al non piccolo risultato definire la «legge della caduta dei gravi» che porta il suo nome. Newton, seguendo e perfezionando formalmente questo metodo, definì la legge che determina l'intensità della forza di gravità che a sua volta determina la quantità di moto in questione. Scoprendo, cioè, che l'intensità della forza è direttamente proporzionale alle masse dei corpi coinvolti e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza. In sintesi, dunque, nella dinamica moderna le forze *non causano* spostamenti di corpi in quiete, ma *modificano velocità*. Quietè e moto non sono stati fisici dei corpi assolutamente distinti, come peraltro il principio d'inerzia nella sua successiva formulazione newtoniana evidenzia. Sono semplicemente stati fisici caratterizzati da due grandezze numeriche diverse della velocità: $= 0$, per la quiete, $\neq 0$ per lo stato di moto.

Il principio di relatività galileiano e la mancanza di un sistema di riferimento assoluto per i corpi in quiete.

Questa differenza di prospettive implica un profondo cambio riguardo alle nozioni di *tempo* e di *spazio* nella meccanica moderna rispetto a quella antica. Mentre in questa esisteva un sistema di riferimento *assoluto* per giudicare della quiete dei corpi (il cielo delle stelle fisse, nella visione cosmologica, a sfere concentriche della cosmologia aristotelico-tolemaica), ciò manca completamente nella meccanica classica, galileiano-newtoniana. In essa vige cioè il cosiddetto *principio di relatività galileiano* che in sostanza afferma che nei sistemi inerziali non esiste un sistema di riferimento privilegiato rispetto al quale si possa dire, nel descrivere un moto, quale sia il corpo in movimento e quale quello in quiete. Intuitivamente ciò ha un corrispettivo immediato nell'esperienza che tutti abbiamo fatto sul treno fermo in stazione, quando, guardando dal finestrino, non abbiamo nessun modo per decidere chi si sta muovendo: se noi o il treno parcheggiato a fianco.



Il principio di relatività galileiano, si enuncia dicendo che, se nella descrizione di un fenomeno fisico la posizione dei corpi è riferita a un sistema K di coordinate cartesiane ortogonali, per cui sia valido il principio d'inerzia (sistema di riferimento inerziale), questa legge è ancora valida per un altro sistema K' , rispetto al quale il precedente sia in moto uniforme.

Nell'esempio precedente, K sia fissato al treno, K' alla strada ferrata (pur essendo entrambi non perfettamente inerziali), gli assi x, y, z che definiscono il sistema K siano paralleli agli assi x', y', z' che definiscono il sistema K' , e il moto sia parallelo a x ; la relazione tra le coordinate x, y, z e x', y', z' , secondo la trasformazione di Galileo, è la seguente:

$x' = x - ut$, dove u è la velocità e t il tempo

$$y' = y$$

$$z' = z$$

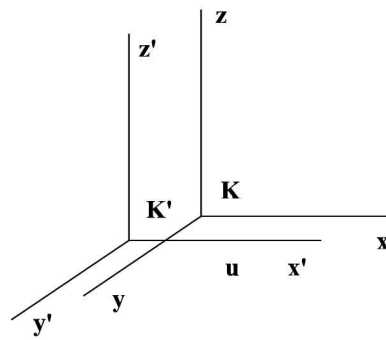


Figura 2-9 Principio di relatività galileiano

Nondimeno, presenza di un'idea di misura assoluta dello spazio e del tempo nella meccanica classica

Malgrado questa rinuncia ad un sistema di riferimento assoluto per la quiete, resta in Newton e Galilei l'idea di uno spazio (per l'esattezza di una misura della distanza spaziale) e di un tempo (per l'esattezza di una misura della distanza temporale) *assoluti*, ovvero di un sistema di riferimento assoluto rispetto all'osservatore. In tal modo, lo spazio e il tempo vengono considerati dalla fisica galileiano-newtoniana una sorta di «contenitore» degli eventi fisici che si svolgevano al suo interno, per nulla influenzato da questi stessi eventi²². In particolare, tipico della concezione newtoniana del *tempo* è che esso potesse essere misurato con precisione *assoluta*, qualunque fosse la posizione nello *spazio*, purché si fosse dotati di un buon orologio. Ciò supponeva il considerare:

- ◆ *Spazio e tempo* due coordinate fra di loro assolutamente *indipendenti* e, conseguentemente,

²² Addirittura, nell'interpretazione metafisica newtoniana, spazio e tempo assoluti erano definiti *sensoria Dei*, il modo del «Dio-orologiaio» newtoniano di entrare in relazione col mondo e per ciò stesso di garantire l'assolutezza delle leggi della meccanica. Si incaricherà Kant di «demitizzare» quest'idea per fare dello spazio-tempo assoluti dei *sensoria hominis*, ovvero delle «forme a priori» della sensibilità umana nella conoscenza empirica di eventi fisici.

- ◆ Che fosse perfettamente plausibile l'ipotesi della *simultaneità assoluta* fra eventi, il che fisicamente suppone che si potessero inviare segnali (p.es., fra due orologi per sincronizzarli) a velocità infinita.

D'altra parte, l'infinità della velocità della luce era una concezione comune anche alla fisica antica tanto da fondare una metafisica delle *energie spirituali* basata sulla luce, la cosiddetta *Lichtmetaphysik*.

Il problema della velocità finita della luce e la teoria ondulatoria della luce di Maxwell

Eppure, che la luce avesse una velocità finita era una scoperta già disponibile ai moderni, fatta addirittura undici anni prima la pubblicazione dei *Principia* di Newton, nel 1675, dall'astronomo danese Olaf Christensen Römer. Una scoperta fatta osservando le eclissi dei satelliti di Giove in diversi periodi dell'anno, quando la distanza Terra–Giove varia, causa l'orbita ellittica che questi due pianeti del sistema solare percorrono. A parte la non esattezza della misura di questa velocità che Römer aveva tentato, bisognerà attendere il 1865, perché il fisico inglese James Clerk Maxwell (1831-1879) fornisca alla fisica moderna una teoria consistente della radiazione luminosa (elettromagnetica), basata sull'idea della velocità finita di propagazione della radiazione luminosa medesima c in tutti i sistemi di riferimento facendo di essa una *costante universale*.

L'ipotesi dell'etere e la sua confutazione

Il problema era che, se si accettano le equazioni di Maxwell ed insieme la velocità finita della luce, *non vale più il principio di relatività galileiana*. Se infatti valesse tale principio, rispetto ad un sistema in quiete (p.es., l'«etere» inteso come l'ipotetico mezzo in quiete che le radiazioni luminose farebbero vibrare, una specie di corrispettivo elettromagnetico dell'aria per le onde sonore), le equazioni di Maxwell risulteranno verificate così come sono state scritte, mentre rispetto ad altri sistemi inerziali in moto rispetto all'etere, esse dovrebbero dare risultati differenti. Un esperimento famoso, condotto da Albert Michelson (Premio Nobel nel 1907) e Edward Morley nel 1887 dimostrò l'infondatezza dell'ipotesi suddetta. Essi confrontarono la velocità della luce nella direzione del moto della terra e perpendicolarmente rispetto ad essa. Se fosse stata vera l'ipotesi dell'etere, la velocità della luce e quella del moto della terra avrebbero dovuto sommarsi e quindi la luce essere più veloce misurata nel primo caso rispetto al secondo. Viceversa, la velocità risultò essere sostanzialmente identica.

2.5.2 Relatività speciale

La Relatività Speciale e Generale

In questa sezione esamineremo i principi generali della *Teoria della Relatività Speciale* (*Special Relativity*, SR) o “Relatività Ristretta”, che riguarda i fenomeni meccanici ed elettrodinamici, per estenderla poi, nella sezione seguente, anche ai fenomeni gravitazionali nella *Teoria della Relatività Generale* (*General Relativity*, GR).

Proposta di soluzione con la relatività speciale di A. Einstein

Il punto di partenza per comprendere la nascita della Teoria della Relatività è la soluzione geniale proposta da Albert Einstein (1879-1955) della conciliabilità dei risultati dell'esperimento di Michelson-Morley con l'elettrodinamica di Maxwell che implicava l'abbandono del principio di relatività galileiano della Meccanica Classica.

Nel 1905, il giovane A. Einstein, allora impiegato all'Ufficio Brevetti di Vienna per sbarcare il lunario dopo la laurea in fisica, pubblicò una famosa memoria, dal titolo: *Sull'elettrodinamica dei corpi in moto*. Einstein osservò che alcune dissimmetrie dell'elettrodinamica di Maxwell, applicata ai corpi in movimento, e i tentativi falliti di porre in evidenza il moto della Terra rispetto al mezzo ipotetico («etere») di propagazione della luce conducono a ritenere che:



Principio di relatività speciale. Le leggi che reggono tutti i fenomeni fisici sono le stesse per due osservatori animati di moto rettilineo uniforme uno rispetto all'altro. [In altre parole, nessun esperimento, meccanico o elettromagnetico, può porre in evidenza questo tipo di moto: il principio classico di relatività galileiano affermava la stessa cosa, ma limitatamente ai fenomeni meccanici].

Principio che si lega immediatamente all'altro della *costanza universale della velocità della luce*.



Principio della costanza della velocità della luce. La luce si propaga nel vuoto con una velocità costante in tutte le direzioni, indipendentemente dalle condizioni di moto della sorgente e dell'osservatore.

Carattere assoluto della velocità della luce

Questo secondo principio è in contrasto con la legge di composizione delle velocità dedotta dalle trasformazioni di Galileo. In fisica classica si trova, infatti, che la velocità di un punto materiale varia al variare del sistema inerziale in cui si effettua la misura. Su questa base era stata formulata l'ipotesi dell'etere. Più banalmente: se lancio un sasso a 5 Km/h ad un'automobile che va a 90 Km/h, il sasso colpirà l'auto ad una velocità di 95 Km/h. Viceversa, ammettendo la costanza della velocità della luce, se la illumino con un raggio di luce che viaggia a 1.080.000.000 Km/h (300.000 Km/sec) esso non colpirà la nostra automobile alla velocità di 1.080.000.090 Km/h, ma sempre a 1.080.000.000 Km/h!

Dalla relatività galileiana alla relatività einsteiniana

Occorre dunque sostituire alle trasformazioni di Galileo fra sistemi di riferimento inerziali (p.es., fra un osservatore in movimento ed un corpo in moto), delle altre trasformazioni che soddisfino il postulato della costanza della velocità della luce c . Einstein scoprì che queste trasformazioni sono proprio quelle già trovate dal fisico olandese Heinrich A. Lorentz (1855-1928) per spiegare i risultati di Michelson e Morley, ma che ancora attendevano di essere inquadrare in una teoria fisica coerente, quale invece la

teoria di Einstein era. Ne segue che il valore c è una costante universale, ha cioè lo stesso valore per tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Le conseguenze
strabilianti della
relatività:

Tutto l'impianto della teoria della relatività portava però a delle conseguenze paradossali, legate ultimamente alla fine dell'idea, tipica della meccanica classica, di uno *spazio e di un tempo assoluti*. «Spazio» e «tempo», ovviamente, considerati non in se stessi — che non è compito di una teoria fisica moderna considerare —, ma in quanto misurati, ovvero come «distanza spaziale misurata» e come «intervallo temporale misurato». Sinteticamente, le conseguenze paradossali sono le seguenti:

1. Dilatazione dei
tempi

- ◆ *Dilatazione dei tempi (= relatività del tempo)*. Per comprendere la critica del principio del carattere assoluto del tempo ritorniamo al moto del treno, di lunghezza L . Le due estremità del treno corrispondano a due punti A, B prossimi al binario lungo il quale, nel punto M tra A e B , sia fermo un osservatore O_b .

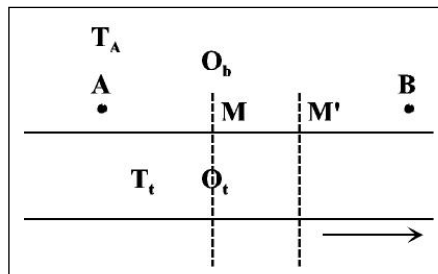


Figura 2-10. Illustrazione intuitiva del principio di relatività temporale

- ◆ Se due impulsi luminosi vengono emessi alle estremità del treno a istanti tali che O_b li veda arrivare contemporaneamente mediante un sistema ottico, egli affermerà che le due emissioni sono avvenute contemporaneamente. Ma un altro osservatore O_t , posto nel punto medio del treno in moto, non le vedrà arrivare contemporaneamente perché intanto il treno si è spostato in M' e se il treno si muove nel senso AB affermerà che l'emissione in A è avvenuta dopo l'emissione in B . Dunque, il concetto di contemporaneità è relativo al sistema di riferimento. Dalla *relatività della contemporaneità* si passa alla *relatività del tempo* considerando un orologio T_A fisso in A e un altro orologio T_t sul treno in moto, orologio che per ipotesi dovrebbe essere sincrono al precedente se il treno fosse fermo. Via via che l'orologio T_t si sposta da A verso B le sue lancette, che immaginiamo possano essere viste da A , sembreranno ruotare più lentamente di quelle di T_A in misura dipendente dalla velocità del treno, in relazione al fatto che al crescere della distanza aumenterà in proporzione il tempo di propagazione della luce (*dilatazione dei tempi*).



2. Contrazione delle lunghezze



◆ *Contrazione delle lunghezze (= relatività dello spazio).* L'inesattezza del carattere assoluto della distanza deriva direttamente dalle considerazioni precedenti. Infatti, una distanza l misurata su un corpo fermo è la differenza $x_2 - x_1$ di due coordinate spaziali rispetto a un dato sistema K ; quando questo è in moto rispetto a un altro sistema K' , x_1 e x_2 e, quindi, anche la loro differenza, diventano, rispetto a K' , funzioni della velocità u e della velocità della luce c . Il risultato è una contrazione della lunghezza.

3. Tempo come quarta dimensione dello spazio

◆ *Sistema di riferimento spazio-temporale (=cronotopo).* La costanza della velocità della luce nei sistemi inerziali, la relatività del tempo e la relatività della distanza spaziale rendono necessario *introdurre sempre il tempo* nella descrizione dei fenomeni fisici, anche nel loro aspetto puramente geometrico, ossia nelle *coordinate spaziali*. P.es., nella figura che illustrava il principio di relatività galileiano era sufficiente indicare le tre coordinate spaziali (Cfr. **Figura 2-9**). Ma per illustrare quello einsteiniano occorre necessariamente indicare anche *la coordinata temporale*. Si dice allora che il sistema di riferimento diventa spazio-temporale. O, come, si sente dire da divulgazioni affrettate della teoria, "il tempo diviene una quarta dimensione dello spazio". In ogni caso, lo spazio e il tempo *cessano di essere indipendenti dai fenomeni dinamici* che parametrizzano, com'erano nella meccanica classica. Cessano, cioè, di essere rappresentati matematicamente nelle equazioni della Meccanica Relativistica come se fossero dei «contenitori» assoluti dei fenomeni dinamici, come era nella Meccanica Newtoniana.

Le trasformazioni di Lorentz e rapporti con le trasformazioni di Galilei

A questo punto, si comprende meglio anche il senso delle trasformazioni Lorentz fra sistemi di coordinate che vanno a sostituire quelle di Galilei, tipiche della meccanica classica. Le trasformazioni di Galilei sono sostituite dalle seguenti, dovute a H. A. Lorentz, dove, come si vede, diventa essenziale definire la trasformazione anche rispetto a t e non solo rispetto alle tre dimensioni spaziali x, y, z :

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(x - ut)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \beta \frac{x}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \left(t - \beta \frac{x}{c} \right)$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto e inoltre $\beta = \frac{u}{c}$ e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$.

Le *trasformazioni di Lorentz* hanno, infine, l'ulteriore proprietà di lasciare invariante le equazioni dell'elettromagnetismo di Maxwell.

Novità della relatività: carattere unificante di molte soluzioni a diversi problemi

Come si vede, con una sola idea, la relatività delle misure di tempo e spazio, Einstein, non solo aveva dato coerenza all'elettrodinamica di Maxwell garantendone l'invarianza fra sistemi inerziali — proprio come la medesima invarianza era garantita ai sistemi dinamici in meccanica classica —, ma aveva trovato anche che le trasformazioni che garantivano siffatta invarianza erano quelle trasformazioni di Lorentz che già spiegavano il risultato di Michelson–Morley. In tal maniera, finalmente, sia il risultato sperimentale, sia la trasformazione che ne rendeva teoricamente conto, erano inseriti in un quadro fisico–teorico complessivo e coerente di tutti i fenomeni elettrodinamici e meccanici.

Trasformazioni di Galileo come trasformazioni-limite di quelle di Lorentz

Inoltre, si tengano ben presenti le seguenti considerazioni. Sia la contrazione delle lunghezze sia la dilatazione dei tempi sono tanto più sensibili quanto più grande è la velocità u in questione. Quando tale velocità è molto più piccola di quella della luce nel vuoto, come avviene nell'esperienza comune, questi effetti sono completamente trascurabili. È infatti facile vedere che *le trasformazioni di Lorentz si riducono a quelle di Galileo* quando u/c tende a 0; perciò in questo limite valgono con ottima approssimazione le leggi della meccanica classica.

La causalità fisica nella teoria della relatività e concetto dei «coni di luce»

La teoria della relatività introduce, inoltre, una profonda modificazione del concetto di ordinamento temporale, affermando in sostanza che non esiste un orologio che batta il tempo a tutto l'universo, ma tanti orologi quanti sono i sistemi di riferimento impiegati. Dati due eventi a e b che avvengono in due punti diversi dello spazio, si può determinare in un dato sistema inerziale l'ordine cronologico di questi due eventi; tuttavia può talvolta succedere che, passando a un altro sistema inerziale, tale ordine venga invertito. Se, per es., per un dato osservatore, a precede b , può avvenire che un altro osservatore, in moto rispetto al primo, veda invece che b precede a . È chiaro quindi che l'ordine cronologico di due eventi non ha sempre un significato fisico intrinseco. Mediante le trasformazioni di Lorentz, si può determinare quale condizione devono soddisfare i due eventi affinché un dato ordine cronologico sia lo stesso per tutti i sistemi inerziali considerati. Si trova che a precede b in ogni sistema inerziale solo se l'evento b è raggiungibile da un segnale che parte da a e viaggia con una velocità minore o uguale a quella della luce, cioè solo se l'evento a può influire in qualche modo su b . Da questo principio discende in particolare che, non solo nessun corpo materiale può viaggiare a velocità superiore a quella della luce nel vuoto, ma che non esiste nessun segnale e nessun mezzo fisico che *consenta di trasmettere un'informazione a velocità superiore a c* .

Il principio dei coni di luce e il suo significato fisico

Quest'idea è sintetizzabile nel famoso principio dei *coni di luce*. Ogni evento propaga nel futuro i suoi effetti causali più o meno come i cerchi concentrici di un sasso gettato nell'acqua. Aggiungendo la terza dimensione dell'altezza per significare lo sviluppo temporale, il dispiegarsi nel tempo degli effetti causali di un evento assomiglia ad un cono rovesciato che ha come vertice l'evento stesso. Rientrano in questo cono tutti gli eventi raggiungibili causalmente dall'evento in questione, tenendo conto che la velocità con cui questi effetti si propagano non può mai superare c , la velocità della luce. Per questo si parla di *cono di luce* dell'evento causale considerato.

Viceversa e complementariamente, l'evento considerato è effetto di tutta un'altra serie di eventi causali che rientrano in un secondo cono di luce che ha sempre come vertice l'evento considerato, e che contiene tutti e solo gli eventi che potevano entrare causalmente in contatto con l'evento dato. Che potevano cioè raggiungerlo con velocità minore o pari a c .

Il tutto viene sintetizzato nelle figure seguenti:

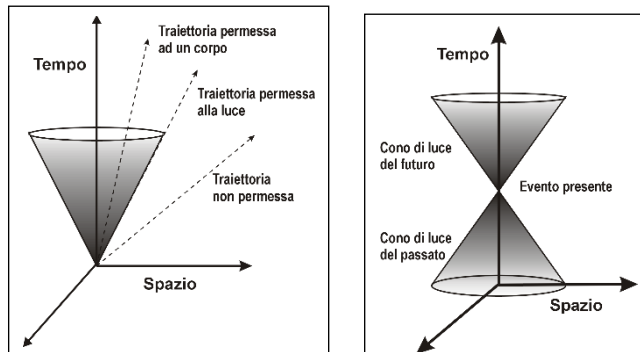


Figura 2-11. Il principio dei coni di luce che determinano gli eventi causali ammissibili in base alla teoria della relatività.

Ma la potenza esplicativa della teoria non era finita qui, come non erano finite le sue conseguenze paradossali. Alla nostra descrizione manca, infatti, la più paradossale ed insieme la più affascinante di queste conseguenze.

Il recupero del principio di causalità in fisica

La conseguenza teoretica fondamentale del principio del cono di luce è il recupero del *principio di causalità* in Fisica Fondamentale – ricordiamo infatti che i principi della Relatività Speciale valgono sia in fisica quantistica (QFT) che nella Relatività Generale e dunque in cosmologia – indipendentemente dalle considerazioni logico-epistemologiche di Leibniz e di Kant. Come ha recentemente sottolineato uno dei più illustri fisici teorici del nostro tempo, il Premio Nobel per la Fisica del 1979 Steven Weinberg

(1933-2021), nel suo ultimo libro pubblicato, dedicato ai Fondamenti della Fisica Moderna, nel paragrafo sulla *causalità* nella Fisica Fondamentale, ha affermato:

Abbiamo visto (...) che nessuna trasformazione di Lorentz che agisce su un corpo a riposo potrebbe dargli una velocità maggiore di c , la velocità della luce. Possiamo ricavare un risultato più forte, che nessuna influenza può viaggiare più veloce della luce. Questa non è solo una confessione di inadeguatezza tecnologica, *ma una conseguenza di un'assunzione di causalità, che "gli effetti vengono sempre dopo le cause"* (Weinberg, *Foundations of Modern Physics*, 2021, pp. 121-122) (corsivo mio).

Due ulteriori conseguenze della relatività, legate alla natura-limite della velocità della luce

In fondo, i paradossi che abbiamo esaminato fin qui modificano il quadro rappresentativo e il formalismo matematico della meccanica classica, ma non danno ancora il senso di quanto il principio di relatività speciale spazio-temporale incida anche sul *contenuto fisico* di questo quadro e di questo formalismo. Le altre due conseguenze paradossali della teoria hanno, invece, proprio questo effetto che le rende a loro volta esplicative di quei fenomeni meravigliosi e terribili — il decadimento radioattivo e la fissione e la fusione nucleari — che l'altra rivoluzione concettuale del XX secolo, la meccanica quantistica, cominciava a scoprire e studiare proprio in quegli anni. Le ultime due, principali conseguenze paradossali della teoria sono strettamente legate al fatto che *la velocità della luce*, in base alle relazioni precedenti, costituisce *un limite massimo invalicabile* per i corpi in moto. Quando dunque un corpo viene accelerato, aumenta la sua quantità di moto m . Ma se v , oltre un certo limite, all'approssimarsi a c , non può crescere più di tanto, a cominciare ad accrescersi sarà allora la massa m . E questo accrescimento di m sarà tanto più marcato, quanto più v si approssimerà al suo limite superiore c . Di qui due conseguenze fondamentali della SR:

4. Aumento relativistico della massa

- ◆ L'aumento relativistico della massa di corpi accelerati per velocità prossime alla velocità della luce, in base alla relazione:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

In questo senso occorre distinguere fra la *massa a riposo*, m_0 , che il corpo possedeva in quiete e la *massa cinetica*, m , che esso possiede quando è accelerato per velocità prossime a quelle della luce. Il senso della suddetta relazione è chiaro: quando la velocità del corpo v tende a uguagliare c , il valore al denominatore del termine destro dell'equazione tende a 0 e quindi il valore di m tende a infinito.

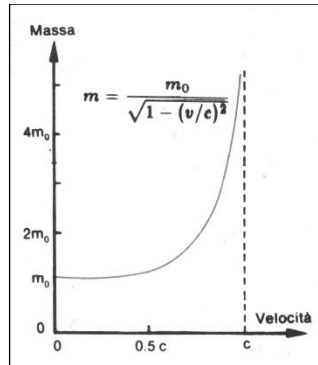


Figura 2-12. Andamento dell'aumento della massa cinetica per velocità prossime a quelle della luce (=massa relativistica). Si noti l'aumento esponenziale della massa per valori di $v > 0.5 c$.

5. Equivalenza
massa-energia

- ◆ *L'equivalenza e reciproca trasformabilità fra massa ed energia* per corpi che si muovono a velocità prossime a quella della luce, secondo la famosa relazione:

$$E = m c^2 \text{ e quindi } m = E/c^2$$

Queste ultime relazioni hanno consentito di spiegare la produzione eccezionale di energia che si ha in fenomeni quali il decadimento radioattivo e la fissione e fusione nucleari. Più in generale queste due relazioni, specialmente la prima, fotografano quanto avviene ogni istante negli acceleratori di particelle dei centri di ricerca di fisica alle alte ed altissime energie, come, per esempio, al CERN di Ginevra.

Il valore per la fisica
quantistica di simili
scoperte

In particolare, nel caso di particelle accelerate a velocità prossime alla luce, le particelle possono acquisire nuova massa (*massa relativistica*) rispetto alla massa che avevano quand'erano in quiete (*massa a riposo*). Oppure, tutta la loro massa «a riposo» e «cinetica» si può trasformare in un'altra forma di energia, sia sotto forma di radiazione, sia sotto forma di particelle dotate di massa che non erano certo «dentro» le particelle originarie, purché la somma totale della massa-energia prima e dopo l'evento si conservi.

Creazione-
annihilazione di
particelle dal/nel
vuoto quantistico

Un fenomeno questo della *creazione/annihilazione* di particelle dal/nel cosiddetto *vuoto quantistico* nella QFT relativistica (cfr. § 2.7.1), che potremo capire formalmente solo quando approfondiremo il formalismo degli *spazi di Hilbert* in fisica quantistica (cfr. § 2.6.8). Un fenomeno di Fisica Fondamentale misurabile e matematicamente formalizzabile quindi pienamente scientifico nel senso galileiano del termine che, comunque, dal punto di vista metafisico viola i principi dell'atomismo metafisico o atomismo ingenuo. Per es., un *elettrone* e^- di materia e un *positrone* e^+ (antielettrone o elettrone a carica positiva) di antimateria, che sono dotati di una

stessa massa sebbene molto piccola, possono interagire tra loro «annichilendosi». Il prodotto di questo processo non è una particella dotata di massa, ma una pura radiazione elettromagnetica ad altissima frequenza (un cosiddetto raggio γ).

La loro verifica sperimentale in cosmologia e negli acceleratori di particelle

Viceversa, se acceleriamo queste particelle a velocità prossime a c , *acquistando massa relativistica*, il loro annichilimento produrrà anche particelle dotate di massa: neutrini e neutroni che velocemente decadranno in protoni, molto più stabili. Particelle, queste ultime, molto pesanti e che certamente non erano «dentro» le particelle originarie come l'atomismo metafisico potrebbe far supporre²³. È grazie all'equazione di Dirac che le equazioni della relatività speciale hanno potuto essere inserite sistematicamente nel quadro teorico della meccanica quantistica, dando luogo agli eccezionali sviluppi della ricerca fisica delle alte ed altissime energie che sono dinanzi ai nostri occhi. Ma sull'equazione di Dirac, il suo sviluppo nel formalismo di Feynman e il ruolo della teoria *elettrodinamica quantistica* — e della *cromodinamica quantistica* — nello studio, sia della costituzione materiale di tutti i corpi fisici, sia della struttura e dell'evoluzione dello stesso cosmo, torneremo in § 2.7 quando esamineremo il *Modello Standard* delle particelle elementari e delle loro interazioni. Il più alto risultato ottenuto finora dalla QFT grazie all'inserimento dei principi della SR in fisica quantistica.

2.5.3 Relatività generale

La relatività generale e il problema della conciliazione fra relatività speciale e gravitazione

La Relatività Speciale (*Special Relativity*, SR), come la meccanica classica, assegna ai sistemi in moto rettilineo uniforme una situazione privilegiata, poiché solo rispetto a essi le leggi fisiche sono invarianti. L'arduo compito che Einstein affrontò nell'elaborazione della *Relatività Generale* (*General Relativity*, GR) è quello di far sì che le leggi della fisica conservino la loro struttura in qualsiasi riferimento comunque sia accelerato. In altre parole, le leggi della fisica devono essere tali che la loro forma rimanga inalterata rispetto a qualsiasi osservatore; dunque le equazioni della fisica devono

²³ Come vedremo in seguito, nel **Capitolo 5**, il concetto di massa-energia relativistica è una sorta di corrispettivo quantificabile della nozione aristotelica di *materia prima*, «in potenza» rispetto alle particelle elementari che costituiscono il sostrato materiale di tutti i corpi fisici. Attraverso tale nozione Aristotele correggeva l'atomismo democriteo, sostenendo, in base all'evidenza sperimentale allora disponibile, la *trasformabilità* degli elementi gli uni negli altri. P.es., seguendo la teoria di Empedocle che identificava gli elementi con acqua, aria, terra e fuoco, esisteva evidenza empirica per Aristotele della «volatilizzazione» dell'acqua in aria (evaporazione), della trasformazione della terra in fuoco (probabilmente in terreni intrisi di idrocarburi), etc. Così gli elementi stessi, da Democrito considerati eterni e immutabili, o appunto «atomi», non costituivano per Aristotele il fondamento ultimo del sostrato materiale dei corpi, ma tale sostrato ultimo era la materia prima, intesa come ciò che si poteva trasformare in ciascuno degli elementi.

non solo essere invarianti per trasformazioni di Lorentz, ma *invarianti per qualsiasi trasformazione*.

La geniale soluzione einsteiniana: la gravitazione è una forza che modifica la struttura dello spazio-tempo

Diciamo la stessa cosa in termini più semplici. La SR con la centralità che essa dà alla velocità finita della luce, lascia fra gli altri, irrisolto un arduo problema: entra in contrasto con la *forza gravitazionale* e la sua capacità di *agire istantaneamente* a grande distanza. Fra il 1908 e il 1914 Einstein prova in diverse maniere a rendere coerente la relatività speciale con la gravità. Di qui l'ipotesi rivoluzionaria che la gravità non sia una forza come le altre, ma la conseguenza del fatto che geometricamente lo spazio-tempo non è piatto, ma *curvato, distorto* dalla distribuzione di masse ed energie dei corpi che lo abitano. Un principio astratto di matematica (quello dello «spazio curvo» di Riemann) che acquisisce un significato fisico preciso se teniamo presente che la struttura dello spazio-tempo dell'universo ha una *natura dinamica*. È costituito, cioè, dal *campo della forza gravitazionale* che «tiene insieme» i corpi celesti nell'universo. Un'ipotesi ardita formulata da Einstein nel 1916 che trova la sua conferma sperimentale definitiva solo un secolo dopo nel 2016 con la dimostrazione sperimentale dell'esistenza delle *onde gravitazionali*, ovvero delle *fluttuazioni del campo gravitazionale*. In tal modo, l'ipotesi matematica dell'esistenza del campo gravitazionale come struttura dello spazio-tempo cosmologico entra a pieno titolo nell'ambito della *scienza galileiana moderna*.

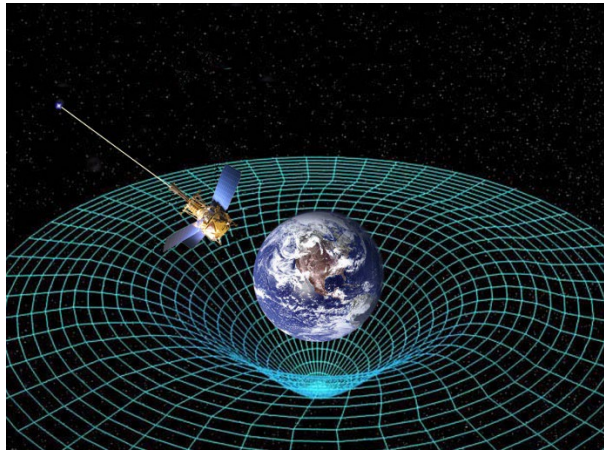


Figura 2-13. Rappresentazione intuitiva della curvatura del campo gravitazionale provocata dalla massa della terra da cui dipende l'orbita attorno alla terra percorsa dal satellite in figura.



In altri termini, i corpi celesti seguono una traiettoria curva non perché si muovono su orbite incurvate dalla gravità nel vuoto come nella rappresentazione intuitiva usuale, bensì perché seguono la cosa più vicina che

assomiglia ad una traiettoria rettilinea in uno spazio curvo: la *geodetica* che su una sfera corrisponde ad un arco di cerchio di raggio massimo della sfera (spazio sferico a curvatura ellittica lo *spazio di Klein*, vi torneremo nel **Capitolo 6**). In altri termini: nella GR, *i corpi seguono linee rette nello spazio-tempo quadridimensionale, ma nel nostro spazio tridimensionale esse appaiono curve*. Un po' come quando proiettassimo una linea retta nello spazio tridimensionale (p.es., la rotta rettilinea di un aereo nel cielo tridimensionale) su una superficie curva bidimensionale (p.es., sulla terra) essa ci apparirà come una linea curva, al limite una geodetica che connette sulla superficie curva le proiezioni dei punti che la linea retta congiunge, come linea più breve fra i due punti stessi nello spazio tridimensionale.

Utilizzo della geometria riemanniana dello spazio curvo

La relatività generale, quindi, utilizza per le sue rappresentazioni matematiche, non lo spazio piano euclideo come la meccanica classica, ma *lo spazio curvo della geometria riemanniana* di cui già ci siamo occupati nel **Capitolo 2**, più esattamente della *geometria ellittica* di Klein. E, come la geometria piana euclidea può essere considerata un caso particolare di quella curva, per spazi a curvatura zero, p.es., valida per porzioni infinitesime dello spazio curvo, così la relatività generale ingloba la gravitazione classica newtoniana, rendendo la gravità relativistica capace di spiegare fenomeni che la gravitazione classica newtoniana non era in grado di fare.

Le eccezionali, iniziali conferme sperimentali della teoria

P.es., una delle prime conferme della teoria della relatività generale fu *la correzione dell'orbita di Mercurio*, il pianeta più vicino al sole e che quindi risente moltissimo dell'azione della gravità esercitata dal Sole su di esso, correzione sperimentalmente provata, ma che la teoria newtoniana non riusciva a spiegare. Un altro effetto che la relatività generale è in grado di spiegare è il cosiddetto *effetto Doppler* riguardo la luce delle stelle. È noto che la luce delle stelle appaia ai nostri occhi a prevalenza rossastra, benché la loro composizione chimica non giustifichi affatto tale apparenza. La spiegazione è presto data quando si pensi che questa predominanza è effetto della curvatura imposta ai raggi luminosi dalla superficie terrestre. La curvatura esercitata su un'onda ha infatti la conseguenza di «stirarla», allungando la lunghezza d'onda e diminuendo la frequenza, che nel nostro caso significa deviare la radiazione luminosa verso la parte bassa dello spettro in frequenza del visibile, verso il rosso, appunto.

La conferma iniziale più clamorosa durante un'eclisse del 1919

Ma la conferma iniziale più clamorosa della teoria, perché pubblica e facilmente comprensibile da tutti, si ebbe nel 1919 quando si poté constatare, durante un'eclissi totale di sole, che effettivamente la luce proveniente dalle stelle era distorta dal fatto di transitare vicino al sole. Di notte, quando il sole non è frapposto fra la stella e noi, la stella appare in una certa posizione del cielo. Di giorno, se la relatività generale fosse vera, la posizione della stella nel cielo dovrebbe risultare spostata di un certo angolo, proporzionale alla curvatura imposta dalla massa del Sole al raggio

luminoso proveniente da essa. Durante le giornate normali osservare questo è però impossibile, poiché la luce del sole cancella quella delle stelle. Viceversa, durante l'eclissi totale di Sole del 1919, in un cielo particolarmente terso come quello dell'Africa, una spedizione scientifica, guidata dall'astrofisico inglese Arthur Stanley Eddington (1882-1944) e finanziata dalla Royal Society di Londra, poté constatare e misurare questo fenomeno. In pratica, una stella che la sera prima era osservata in una certa posizione, al mattino appariva spostata in un'altra, per la curvatura del suo raggio luminoso imposto dall'interposizione del sole.

La conseguenza teorica: il principio di equivalenza



L'unificazione dei fenomeni inerziali con quelli gravitazionali, che è una delle conseguenze teoriche più importanti della teoria relativistica della gravitazione, fu ottenuta da Einstein enunciando il famoso:

Principio di equivalenza. In un campo gravitazionale (di piccola estensione spaziale) tutto accade come in uno spazio libero da gravitazione, purché vi si introduca, al posto di un sistema inerziale, un sistema di riferimento accelerato rispetto al sistema inerziale.

Il principio dello «ascensore di Einstein»

È questo il principio del famoso «ascensore di Einstein»: all'interno di un ascensore in caduta libera sulla terra, i corpi fluttuano come in assenza di gravitazione perché l'ascensore occupa una parte relativamente infinitesimale e quindi a curvatura nulla del campo gravitazionale terrestre. Anche di questo principio è stata data una conferma clamorosa che è dinanzi agli occhi di tutti col rientro nell'atmosfera di capsule da viaggi spaziali. All'interno di esse, sebbene siano nel campo gravitazionale della terra e non più nello spazio, si è in assenza di gravità. Il fatto che la capsula in moto accelerato di caduta libera verso la terra, costituisca una parte infinitesimale dello spazio su cui agisce la forza gravitazionale terrestre, fa sì che lo spazio all'interno della capsula sia praticamente a curvatura nulla ed è dunque come se al suo interno la gravitazione terrestre non agisse.

Relatività generale e teorie cosmologiche basate sull'osservazione sperimentale

Per concludere, la teoria generale della relatività, oltre che fornire una teoria fisica coerente per corpi che si muovono a distanze cosmiche (il livello *megascopico* dell'osservazione fisica) ha reso possibile di nuovo la *cosmologia scientifica*, ovvero lo studio delle origini e dell'evoluzione dell'universo. A differenza, però, dell'antica cosmologia filosofica, essa usa il metodo galileiano, matematico e sperimentale. Il principio che ha reso possibile questa estensione dello studio matematico-sperimentale fino all'indagine sull'origine e lo sviluppo dell'universo è legato alla rivoluzione concettuale che la relatività generale ha introdotto nella concezione fisico-matematica dello spazio-tempo. Nella meccanica classica, ma anche nella relatività speciale, lo spazio e il tempo erano intesi come contenitori, non influenzati dagli eventi dinamici che avvengono al loro interno. Viceversa, con la relatività generale, la struttura dello spazio-tempo fisico viene modificata dagli eventi che avvengono al suo interno. Addirittura, dato il carattere

espansivo dell'universo, spazio e tempo interni all'universo fisico vengono «creati» dall'allontanarsi reciproco dei corpi che compongono l'universo stesso. Anche da questo punto di vista, il quadro monolitico della scienza antica e moderna delle origini è stato profondamente modificato. Ma su queste nozioni che riguardano la *cosmologia scientifica quanto-relativista* torneremo nella **Parte Terza** nel Secondo Volume di questo lavoro.

2.6 Meccanica quantistica

Studio del livello
microscopico delle
strutture della
materia

Un ulteriore ridimensionamento della meccanica classica, originariamente indipendente dalla Teoria della Relatività, si è avuto al livello dello studio delle strutture *microscopiche* della materia di cui tutti gli enti fisici sono fatti. Tali strutture si incontrano quando si va oltre il livello mesoscopico, «dentro» la struttura di atomi e molecole, per grandezze che sono dell'ordine da 10^{-8} cm (un centomillesimo di centimetro: il diametro di un atomo) in giù. A questo livello, la *divisibilità all'infinito* e la *località* (o “localizzazione puntiforme” con precisione incrementabile indefinitamente) che caratterizzano l'identificazione ingenua fra *spazio geometrico* e *spazio fisico* nella Meccanica Classica non valgono più.

2.6.1 Principio di quantizzazione

La rivoluzionaria
scoperta del
principio di
quantizzazione di
Planck e le sue
prime conferme

Questa rivoluzione concettuale ha una data che coincide con quella dell'inizio del XX secolo — o più esattamente della fine del secolo XIX: il 1900. In quell'anno, più esattamente il 14 dicembre, parlando ad una riunione della Società Tedesca di Fisica, Max Planck (1858-1947) affermò che ci si poteva liberare dai paradossi della teoria classica dell'emissione-assorbimento della luce da parte dei materiali (la cosiddetta “radiazione di corpo nero”), se si ammetteva *che l'energia radiante poteva esistere solo sotto forma di pacchetti discreti* che egli definì *quanti di luce*. Filosoficamente, ciò significava abbandonare la «seconda idea chiara e distinta» del *Discorso sul Metodo* cartesiano, l'identificazione della materia fisica con l'estensione geometrica perché ambedue *divisibili all'infinito*.

La scoperta di
Einstein dell'effetto
fotoelettrico

L'ipotesi di Planck fu confermata nel 1905 dalla scoperta dell'*effetto fotoelettrico* da parte di Albert Einstein. Tale effetto consisteva nell'emissione di elettroni da parte di superfici metalliche irraggiate di luce violetta e ultravioletta, che poteva essere spiegato solo ammettendo una natura quantizzata della radiazione elettromagnetica, l'esistenza cioè di *fotoni*, o quanti elementari di energia elettromagnetica. D'altra parte, l'esistenza di fotoni poteva essere dedotta direttamente, nella teoria della SR, dal principio della velocità finita della propagazione delle onde elettromagnetiche (luce). Se la luce si propaga a velocità finita, non potevano esistere onde

luminose di *frequenza infinita*, per cui sotto un certo limite, la radiazione luminosa poteva propagarsi solo attraverso *pacchetti d'onda* discreti. In ogni caso anche Einstein, per questa scoperta che confermava la teoria di Planck — e non per la teoria della relatività! —, ricevette nel 1921 il Premio Nobel per la fisica.

La scoperta dell'effetto Compton

Un altro successo che determinò l'affermarsi definitivo dell'ipotesi di Planck fu la scoperta del cosiddetto *effetto Compton*, dal nome del suo scopritore, il fisico americano Artur Holly Compton (1892-1962), Premio Nobel per la fisica nel 1927. Tale effetto consiste nella diffusione di raggi X da parte degli elettroni di un determinato materiale (paraffina). La rivoluzionaria scoperta di Compton è che tale fenomeno può spiegarsi solo se si interpreta l'urto della radiazione elettromagnetica ad alta frequenza (raggi X) con l'elettrone, come urto elastico di due particelle. Come se, cioè, la luce fosse composta di particelle senza massa, i «*quanti di luce*» di Planck appunto, cui per la prima volta Compton attribuì il nome di *fotoni*.

La costante di Planck come costante fondamentale della natura

In ogni caso, la scoperta di Planck, radiazione elettromagnetica inclusa, ha un valore molto più generale e universale. Essa significa che *tutte le grandezze fondamentali della materia* (massa e/o energia) a livello microscopico sono dei *multipli dell' h di Planck*. In altri termini, Planck ha introdotto nella fisica moderna un criterio di quantizzazione che ha dato luogo alla nascita di una nuova *costante fondamentale della natura*, la costante più misurata, finora, che esista in ogni campo della fisica da quella subatomica all'astrofisica: *la costante di Planck*

$$h = 6.626176 \times 10^{-34} \text{ J/sec}$$

Essa può essere definita come il rapporto tra un'energia e la sua frequenza, o, più propriamente, come *quanto elementare d'azione*. Infatti, come si vede dalla formula, h ha la dimensione di *un'azione*, di *un'energia* (misurata in Joule) *nel tempo* (misurato in secondi). Possiamo dunque definire il seguente

Principio di quantizzazione

Principio di quantizzazione. Ogni grandezza fisica, in particolare ogni grandezza dinamica o intensità di un'energia E , è un multiplo intero n di h , secondo la relazione: $E = \hbar \nu \times n$.

dove \hbar (« h tagliato», si legge) è $h/2\pi$, ovvero h rinormalizzato sulla circonferenza (trigonometrica), e ν è la frequenza dell'onda associata all'intensità dell'energia E .

2.6.2 Atomo di Bohr

Il modello semi-classico di atomo costruito da Bohr

Il quadro delle conferme della scoperta di Planck fu completato quando, nel 1913, il fisico danese Niels Bohr (1885-1962) applicò quest'ipotesi di quantizzazione al modello di atomo dotato di una struttura interna, sco-

perto dal fisico neozelandese Ernest Rutherford (1871-1937). Un atomo, cioè che non è più la sferetta di materia *omogenea, elementare, indivisibile*, degli atomisti antichi e moderni, ma è dotato di *struttura*, è un ente composto esso stesso. È costituito, cioè:

L'atomo non è "atomo", indivisibile

- ◆ Da un *centro di massa*, il *nucleo*, dov'è concentrata quasi tutta la massa dell'atomo e che è dotato di *carica elettrica positiva*;
- ◆ Da un insieme di particelle, gli elettroni, ruotanti attorno al nucleo come pianeti intorno al sole, di massa molto più piccola del nucleo e dotati di *carica elettrica negativa*.

Gli "orbitali" discreti dell'atomo di Bohr

L'apporto fondamentale di Bohr fu di supporre che questi «orbitali» fossero *discreti*. Ovvero, a differenza del sistema planetario, solo alcune orbite erano consentite così che, da una parte gli elettroni non collassassero tutti sul nucleo, dall'altra, potessero ricevere energia dall'esterno solo a pacchetti discreti, multipli dell' h si Planck, quindi per valori ben definiti, e non in forma continua. Essi così daranno origine, quando "eccitati" – fatti "vibrare" secondo il modello *dell'oscillatore armonico quantistico* (cfr. § 2.6.6) – da un impulso energetico intermittente dall'esterno, all'emissione di quegli *spettri discreti di emissione elettromagnetica* che sono "l'impronta digitale univoca di atomi e molecole" e che costituisce il cuore della cosiddetta *spettroscopia di massa* mediante cui otteniamo informazione fondamentale sulla struttura microscopica della materia.

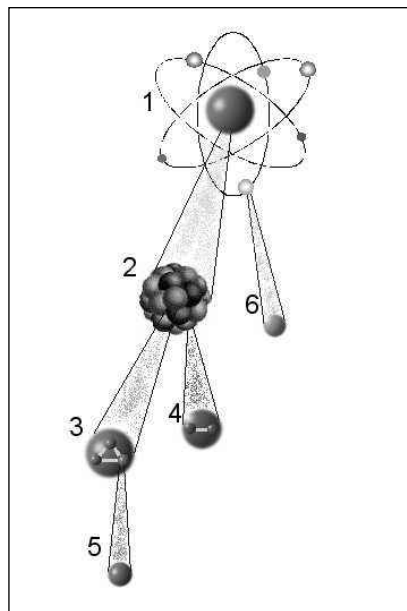


Figura 2-14. Quest'immagine sintetizza bene la storia della nozione moderna della struttura dell' «atomo», a partire dall'iniziale modello plane-

tario di Bohr–Rutherford (1). In essa il nucleo era concepito come una particella elementare. Solo dopo, si scoperse che esso aveva a sua volta una struttura, era composto di *protoni e neutroni* (2). Ognuno di questi era composto a sua volta di tre *quark* (3), mentre altri abitatori del nucleo, i *mesoni* erano composti da due *quark* (4). Viceversa, *quark* (5) ed *elettroni* (6) risultano a tutt'oggi essere *particelle elementari*, non composte a loro volta. Della struttura quantistica della materia atomica e sub-atomica ne parleremo illustrando il Modello Standard in § 2.7.

Carattere
«quantistico» degli
orbitali dell'atomo di
Bohr e primi
successi
sperimentali

In tal maniera, usando il modello di Bohr, quando l'atomo è eccitato, ciascun elettrone poteva «saltare» all'orbitale di livello più alto, per poi ridiscendere ognuno al proprio posto o allo «stato fondamentale» di energia minima quando l'eccitazione terminava, riemettendo, sempre in forma quantizzata, l'energia ricevuta (fotoni), definendo così il caratteristico *spettro elettromagnetico*, diverso per ciascun tipo di atomo, di molecola e quindi di materiale. Attraverso l'idea degli orbitali quantizzati, Bohr ottenne tre eccezionali risultati:

1. Dare coerenza al
modello di
Rutherford

◆ *Dare coerenza al modello di Rutherford.* Infatti, senza la quantizzazione degli orbitali, non si capiva perché gli elettroni, essendo di carica elettrica opposta al nucleo, perdendo di velocità, non «cadessero su di esso», attirati dal nucleo medesimo. Proprio come farebbe un satellite in orbita intorno alla terra che perdesse velocità: comincerebbe a percorrere con continuità orbite a spirale sempre più stretta intorno alla terra, finché, catturato completamente dalla sua forza gravitazionale, ricadrebbe su di essa.

2. Dare una
spiegazione allo
spettro proprio
emesso da ciascun
materiale

◆ *Dare una spiegazione, almeno iniziale, del perché ogni tipo di atomo è caratterizzato da uno specifico spettro discreto di emissione elettromagnetica, quando l'atomo stesso viene «bombardato» di energia elettromagnetica «disordinata» (calore) dall'esterno²⁴.* Si può dire che l'atomo

²⁴ Un effetto noto a tutti di questo fenomeno si ha nelle lampade che contengono al proprio interno vapori, p.es., di neon o di sodio. Il gas di molecole viene bombardato in queste lampade da scariche di energia elettromagnetica disordinata (calore) — la corrente alternata della linea, anche se aumentata di frequenza, rispetto ai 50Hz usuali della rete elettrica, per evitare l'effetto visivo di sfarfallamento. Durante la fase positiva l'atomo riceve la scarica elettrica sotto forma di pacchetti d'onda discreti, in base al principio di quantizzazione. Gli elettroni «saltano» così ciascuno all'«orbitale» («livello di energia») nel modello ondulatorio di Schrödinger: § 2.9.6) superiore. Durante la fase negativa in cui l'atomo non riceve la scarica, esso riemette il pacchetto di energia, ricevuto durante la fase positiva. E la riemette in forma ordinata, con una data lunghezza d'onda in base al tipo di atomo, così che l'emissione acquista la tipica colorazione «bluastro», se è lampada al neon, «gialla», se è lampada al sodio. Gli elettroni, intanto, ritornano allo stato fondamentale per essere pronti a «risaltar su» alla successiva immissione di energia, e così via per centinaia di volte al se-

così aggiunge «ordine» all'energia ricevuta e che esso riemette sotto forma di energia elettromagnetica dotata di frequenze caratteristiche (luce colorata, nello spettro del visibile), un ordine che fornisce al fisico informazione essenziale della sua struttura ordinata interna. Si tratta, ripeto, della base dell'*indagine spettrografica* come cuore sperimentale della fisica quantistica e non solo. Infatti, ripeto, ogni atomo o molecola è dotato di un unico *spettro elettromagnetico di emissione* che lo identifica univocamente dagli altri atomi o molecole.

3. Dare una spiegazione della Tavola Periodica degli elementi in chimica

- ◆ Dare spiegazione, almeno iniziale, alla *periodicità delle proprietà* degli elementi chimici, già scoperta e descritta, ma non ancora spiegata dal chimico russo Dmitrij Mendelejev (1834-1907) con la sua famosa *tavola periodica degli elementi*.

Con la scoperta di Bohr, che fu solo la prima di una serie di altre di fisica atomica, nucleare e sub-nucleare, ben maggiori, durante i primi trent'anni del XX secolo, scoperta per la quale egli ottenne nel 1922 il Premio Nobel per la fisica, l'ipotesi di Planck ottenne la sua conferma più clamorosa, dopo quelle dell'effetto fotoelettrico di Einstein e dell'effetto Compton. Soprattutto la scoperta di Planck mostrò di avere delle conseguenze che andavano ben al di là di quanto il suo stesso autore sospettasse.

La rivoluzionarietà della scoperta di Planck: fine del mito della divisibilità all'infinito della materia.

Non sfugga la rivoluzionarietà di questa nuova scoperta. Mediante l'applicazione sistematica della nozione di quanto d'azione alla fisica che studia le strutture fondamentali della materia atomica e sub-atomica, un altro principio della filosofia moderna della natura veniva smantellato, quello della *divisibilità all'infinito* della materia fisica²⁵. Una proprietà, invece, che aveva fatto porre a Descartes l'identificazione fra materia fisica ed estensione geometrica, la cosiddetta *res extensa*, come la seconda delle sue «idee chiare e distinte» — essendo la prima l'idea della *res cogitans*. L'identificazione di materia fisica ed estensione geometrica — ovvero l'affermazione che la materia fisica era divisibile all'infinito come l'estensione geometrica

condo. Questa evidenza è alla base della cosiddetta *spettrografia di massa* mediante cui “bombardando” gli atomi con radiazione elettromagnetica induciamo un atomo (o la molecola) a produrre il suo proprio *spettro elettromagnetico* che ci fornisce informazione fondamentale sulla sua *struttura interna* — “forma sostanziale” della materia, la definirebbe Aristotele — da cui dipendono tutte le proprietà fisico-chimiche della sostanza in questione. D'altra parte tutto questo ci fa comprendere quella rappresentazione intuitiva a scaffale con mensole di diversa altezza dello *stato fondamentale* di energia minima di un atomo (stato di equilibrio) che abbiamo introdotto già in § 2.7.3.

²⁵ È chiaro che il principio di quantizzazione, si applica innanzitutto alla materia nelle sue manifestazioni come *energia*. Ma, dopo l'applicazione alla meccanica quantistica del principio-base della relatività speciale della convertibilità *massa-energia per velocità prossime a quelle della luce* — quelle, appunto, cui le particelle sub-atomiche generalmente si muovono —, il principio della quantizzazione è estensibile anche alle manifestazioni della materia fisica come *massa*.

— era, insomma, il secondo dei pilastri, il terzo era il *principio di inerzia*, su cui Descartes intendeva fondare la nuova filosofia moderna della natura, dopo la nascita della nuova scienza galileiana della natura.



Base scientifica della teoria dei *minimi naturali* e dunque della nozione di *specie* nella fisica

Come nel caso delle irreversibilità, ingrediente fondamentale della spiegazione della struttura mesoscopica della materia dei corpi fisici (Cfr. nota 6), anche in questo caso, che riguardava la struttura microscopica della materia dei corpi fisici, era un altro assioma della filosofia aristotelica della natura a dover essere rivalutato. Quello, appunto, che affermava che materia fisica ed estensione geometrica non erano identificabili, innanzitutto — ma non solo — perché la prima, a differenza della seconda, non è divisibile all'infinito. Vi torneremo nel **Capitolo 5**.

Per ciascun tipo di materiale esistono infatti, nella visione aristotelica, delle *grandezze minime naturali* (*minima naturalia*) che caratterizzano le proprietà dinamiche del materiale stesso, il suo modo cioè di interagire con il resto dell'universo fisico e quindi anche di manifestarsi alla conoscibilità da parte dell'uomo. Di questa nozione metafisica della filosofia della natura aristotelica, fondamentale per dare una base empirica alla distinzione di *varie specie* di elementi e quindi di corpi, contro l'atomismo geometrico in cui tutti gli elementi erano senza distinzione qualitativa, l'assioma di quantizzazione di Planck, e il conseguente schema discreto di emissione elettromagnetica degli atomi, offre la base per una sua versione *operazionale*, quantificata e dunque calcolabile e misurabile. Questo dato empirico sarà confermato in sede fondazionale, quando esamineremo la comune struttura causale di fondazione della distinzione fra varie specie di elementi e quindi di corpi (non-viventi e viventi), sia nella fisica quantistica che in quella aristotelica nel **Capitolo 5**.

2.6.3 Principio d'indeterminazione

Fine del mito della precisione assoluta nelle misurazioni e/o nelle osservazioni.

Il fatto che nella fisica *microscopica* valesse un criterio di quantizzazione o di discretizzazione della materia (massa/energia), introduceva, però, un altro cambio di prospettiva nella filosofia della natura associata alla scienza moderna. Immediatamente veniva posto in crisi l'ideale del «demone di Laplace». L'ideale cioè di una visione determinista della natura, basata sulla meccanica, e legata ultimamente alla supposizione che *la precisione delle misurazioni* — in particolare la precisione con cui si definiscono le *condizioni iniziali* del moto di una particella, la sua «posizione», q , e la sua «quantità di moto», p — possa essere *sempre e comunque incrementata a piacere*.

Il principio d'indeterminazione di Heisenberg

E, infatti, la seconda rivoluzione concettuale, susseguente alla prima dell'introduzione del criterio di quantizzazione nella fisica microscopica, fu la definizione nel 1927, ad opera di un giovane fisico tedesco, Werner

Heisenberg (1901-1976), di un ulteriore nuovo assioma vigente nella Meccanica Quantistica (*Quantum Mechanics*, QM) e che la distingue dalla Meccanica Classica. Si tratta del cosiddetto *principio d'indeterminazione*.

L'esemplificazione intuitiva di Heisenberg del principio

Per illustrarlo, partiamo da un classico «esperimento di pensiero» da Heisenberg stesso proposto. Immaginiamo di dover seguire la traiettoria che un elettrone percorre nelle sue orbite intorno al nucleo, secondo il modello semi-classico dell'atomo di Rutherford-Bohr appena illustrato. Quando lavoriamo a distanze dell'ordine quantistico (dell'ordine dei 10^{-8} cm, il diametro dell'orbita dell'elettrone intorno al nucleo dell'atomo d'idrogeno), la «luce» di cui mi devo servire per «illuminare» la posizione di un elettrone in un atomo — p.es., illuminando di lampi di luce sempre più ravvicinati diversi punti della sua traiettoria — modificherà necessariamente la quantità di moto (velocità) dell'elettrone stesso, che comincerà a procedere a «salti». Infatti, la più piccola quantità di energia con cui si potrà illuminare la suddetta traiettoria sarà uguale a $h\nu$, che corrisponderà ad un'energia comunicata alla particella pari a $h\nu/c$, dove c è la velocità della luce e ν la frequenza della radiazione elettromagnetica. Quindi l'imprecisione risultante nella determinazione della quantità di moto p dell'elettrone sarà del medesimo ordine, e cioè: $\Delta p \approx h\nu/c$. Viceversa, se si vuole evitare questa distorsione, dovrò accontentarmi di un'indeterminazione nella posizione: dovrò dare cioè un'«illuminazione» a frequenza e dunque energia più bassa. Tale imprecisione, nell'uno o nell'altro caso, non potrà mai essere comunque inferiore ad h .

Il principio d'indeterminazione di Heisenberg

Principio d'indeterminazione. Il prodotto delle incertezze con le quali sono note una grandezza e la sua coniugata (p.es., posizione e quantità di moto) non sarà mai inferiore ad h : $\Delta p_x \Delta x \geq \frac{h}{2}$.

Dove, seguendo una convenzione ormai invalsa in fisica denotiamo con x la posizione q e denotiamo con p_x la quantità di moto relativa alla posizione x e \hbar è la costante di Planck rinormalizzata sulla circonferenza perché abbiamo a che fare con frequenze (probabilistiche) e quindi con Fourier. Per convincerci di tutto questo, seguiamo il Premio Nobel George Gamow (Gamow 1980, 112ss.) in una semplice dimostrazione di come il principio d'indeterminazione produca effetti notevoli a livello di *fisica microscopica* e non a livello di *fisica macroscopica*. Questo giustifica perché debba essere inserito, con quello di quantizzazione da cui deriva, fra i principi della meccanica quantistica e non fra quelli della meccanica classica (newtoniana). Facciamo comparire nella formula matematica precedente, al posto della quantità di moto $m \times v$, direttamente le velocità, in modo da porre in evidenza la massa m , e quindi il fatto che il principio vale solo per masse piccolissime. In tal modo, la suddetta relazione d'indeterminazione di Heisenberg diviene:

$$\Delta v \Delta q \cong \frac{h}{m}$$

La sua rilevanza nel mondo degli eventi microscopici

Così, per esempio, se prendiamo una massa di 1 mg. (10^{-3} g), approssimativamente quella di un pallino di un fucile da caccia — una massa enorme rispetto a quella di un elettrone che è circa di 10^{-27} g — otteniamo la relazione²⁶:

$$\Delta v \Delta q \approx \frac{h}{m} = \frac{10^{-27}}{10^{-3}} = 10^{-24}$$

che può essere soddisfatta, p.es., prendendo:

$$\Delta v \approx 10^{-12} \text{ cm / sec}; \quad \Delta q \approx 10^{-12} \text{ cm}$$

Il che significa che l'errore con cui possiamo misurare la velocità del nostro pallino di piombo è inferiore a 0,3 m in un secolo, mentre l'indeterminazione della sua posizione è paragonabile alla grandezza di un nucleo di un atomo (il cui diametro è dell'ordine di 10^{-8} cm). Se prendiamo, però, invece del nostro pallino da caccia, un elettrone la cui massa è, lo ripetiamo, 10^{-27} grammi, allora:

$$\Delta v \Delta q \approx \frac{10^{-27}}{10^{-27}} \approx 1$$

Ora, poiché dire che un elettrone si muove all'interno dell'atomo significa che la variazione del suo spostamento può essere al massimo quella del raggio dell'atomo stesso, quindi $\Delta q \approx 10^{-8}$ cm, allora l'indeterminazione della velocità diviene del medesimo ordine, ovvero:

$$\Delta v = \frac{1}{10^{-8}} = 10^8 \text{ cm/sec}$$

che è un'indeterminazione enorme, dell'ordine dei milioni di metri al secondo.

²⁶ Attenzione: nella formula sottostante, l'ordine di grandezza di h è di 10^{-27} , perché, seguendo Gamow, preferiamo qui esprimere la grandezza di h in termini di erg/sec, e non di J/sec (1 erg = 10^{-7} J) come nella formula precedente, dove l'ordine di grandezza di h , era, appunto, di 10^{-24} . Il motivo di tale trasformazione è solo intuitivo. Siccome qui, per facilitare la comprensione, stiamo parlando in termini di centimetri e milligrammi, è meglio usare l'«erg», come unità di misura dell'energia (o lavoro), piuttosto che il «Joule», malgrado l'uso dell'erg sia proibito dalle convenzioni internazionali fin dal 1979. Infine, è non poco significativo il fatto che, come appare immediatamente prima nel testo, 10^{-27} è l'ordine di grandezza anche della massa dell'elettrone espressa in grammi.

2.6.4 Principio di esclusione di Pauli

Spiegazione della periodicità degli elementi attraverso la distribuzione degli elettroni negli orbitali

Ma le sorprese non erano finite. In base alle scoperte di Bohr, la distribuzione periodica delle proprietà chimiche nella Tavola degli Elementi è legata a come gli elettroni si distribuiscono nei vari *livelli di energia* (orbitali) intorno al nucleo. Una delle proprietà più interessanti è che, mentre le dimensioni esterne dell'atomo sono più o meno sempre le stesse, il numero degli orbitali atomici varia moltissimo: p.es., si può andare dal solo elettrone dell'atomo d'Idrogeno, ai ben 92 dell'Uranio 238. Quindi, con l'aggiunta di sempre nuovi elettroni, i volumi occupati dai vari stati quantistici (i diversi orbitali) si contraggono, ma il numero degli stati occupati dai diversi elettroni aumenta, così che il diametro esterno dell'atomo resta approssimativamente lo stesso, dell'ordine di 10^{-8} cm.

La scoperta di Pauli del momento angolare intrinseco dell'elettrone (spin elettronico)

Il problema allora è quello di trovare un meccanismo per cui gli elettroni non vadano ad ammassarsi tutti al livello energetico minimo, non vadano tutti cioè ad occupare «l'orbitale» più interno, seguendo cioè la distribuzione di Maxwell-Boltzmann della Meccanica Statistica classica o non-quantistica (cfr. § 2.3.2). Ciascun stato quantistico o «livello energetico», corrispondente ad un «orbitale» di Bohr, veniva connotato mediante *tre numeri quantici*, in quanto comunque multipli di h . Un'ipotesi originariamente perfettamente plausibile con il fatto che il modello di atomo di Bohr si sviluppava effettivamente su tre dimensioni. In base ad alcuni esperimenti (il cosiddetto *effetto-Zeeman*, ovvero lo scindersi delle righe spettrali dell'atomo in base a campi magnetici molto forti), suggerì che fosse necessario un *quarto numero quantico* e che tale numero non definisse una proprietà del livello energetico e/o dell'orbitale abitato da un elettrone, ma una proprietà dell'elettrone stesso.

Il numero quantistico di spin

In particolare, fu il fisico austriaco Wolfgang Pauli (1900-1958), a suggerire quale dovesse essere questo *quarto numero quantico* dell'elettrone. Esso, si pensava dovesse avere le dimensioni di un *momento magnetico*. Ovvero, doveva avere le dimensioni di una quantità di forza magnetica, legata ad una sorta di moto «a trottola» (*spin*) dell'elettrone su se stesso da cui dipendeva l'orientamento verso l'alto \uparrow (rotazione levogira) o verso il basso \downarrow (rotazione destrogira) del vettore di magnetizzazione, da cui deriva la propagazione «a spirale» («elicoidale» destrogira o levogira) lungo l'asse di propagazione del campo elettromagnetico (cfr. *infra* **Figura 2-27**). Pauli dimostrò quindi che per ogni «orbitale» dell'atomo di Bohr caratterizzato da tre numeri quantici potessero esserci solo *due* elettroni, ma ognuno col suo verso di momento magnetico dovuto alla rotazione sul proprio asse dell'elettrone. Ipotizzò quindi, l'esistenza di un *quarto numero quantico* relativo alla rotazione su se stesso, verso destra o verso sinistra o *versore* o *spin*,

dell'elettrone medesimo (cfr. *infra* **Figura 2-27**)²⁷. Di qui la formulazione del:

Il Principio di esclusione di Pauli

Principio di esclusione. In un sistema di particelle dotate di spin frazionario altrimenti indistinguibili (fermioni), due di tali particelle non possono trovarsi nel medesimo stato quantistico, caratterizzato da un n -upla di numeri quantistici

I quattro numeri quantici che definiscono lo stato quantico dell'elettrone

Ad esempio, per gli elettroni negli atomi, per i quali originariamente Wolfgang Pauli formulò il suo principio, ciò significa che è impossibile che in un atomo con molti elettroni essi abbiano gli stessi valori dei quattro numeri quantistici che identificano i loro stati quantistici. Vale a dire, se essi occupano il medesimo orbitale (effettivamente, *livello discreto di energia*), i loro primi tre numeri quantici saranno identici. Ovvero, essi avranno:

- ◆ Lo stesso *numero quantico principale* n (approssimativamente, la stessa energia quantizzata).
- ◆ Lo stesso numero quantistico azimutale ℓ .
- ◆ Lo stesso numero quantico magnetico m_ℓ .

²⁷ In seguito, si scoprì che lo *spin* è una proprietà che caratterizza *tutte* le particelle quantistiche. In tal senso lo *spin* è stato definito «momento angolare intrinseco» di una particella subatomica, una sorta cioè di *versore*, di «preferenza» della specie di particella per un determinato verso nella direzione dell'interazione con altre particelle e che «pesa» statisticamente nella determinazione del risultato finale dell'interazione stessa. In tal senso, esistono molti tipi di questi *spin*, numericamente caratterizzati, non solo da *numeri frazionari* come nel caso dell'elettrone (il cui *spin* vale $\pm 1/2$), ma anche da *numeri interi*. Nel primo caso si tratterà di quelle particelle che costituiscono i mattoni della materia (p.es., elettroni, protoni, neutroni, etc.), le particelle di cui tutti gli atomi e dunque tutti i corpi sono fatti. Per questa loro proprietà di *spin* frazionario esse si distribuiranno, al loro stato fondamentale, su diversi livelli energetici dentro e fuori del nucleo e non solo su quello più basso, come dovrebbe essere se valessero anche qui le leggi della meccanica statistica classica. In termini matematici, si dice che queste particelle seguono una particolare funzione di distribuzione, studiata nella meccanica statistica da Enrico Fermi (1901-1954) e Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984). Di qui il nome di *fermioni* attribuito a questo tipo di particelle quantistiche. Nel secondo caso, quello delle particelle a *spin* intero, si tratterà di particelle che non sono i mattoni di costruzione degli atomi (protoni, neutroni, elettroni), ma «particelle di scambio di energia». Si tratterà, cioè, di mediatori delle varie forze che agiscono nell'atomo: forza elettromagnetica (*fosoni*); e, all'interno del nucleo, forza debole (*bosoni vettori intermedi*), forza forte (*gluoni*). Tali particelle, che mediano gli scambi quantizzati di forze fra i fermioni, seguono una funzione di distribuzione più simile a quella di Boltzmann della Meccanica Statistica classica, quella secondo la quale, allo stato fondamentale, tutte le particelle si trovano allo stesso livello di energia, quello più basso. Tale distribuzione è stata studiata in maniera particolare da Satyendra Nath Bose (1894-1974) e Albert Einstein, così che queste particelle vengono chiamate anche *bosoni*. La distinzione fra *fermioni* e *bosoni* è il cuore del cosiddetto Modello Standard delle particelle in fisica quantistica (cfr. § 2.10).

Ma se due elettroni nel medesimo orbitale di un atomo allo stato fondamentale hanno gli stessi numeri quantistici, n, ℓ, m_ℓ , per distinguersi, avranno:

- ◆ *Opposti numeri quantici di spin m_s seminteri $+ 1/2, - 1/2$ rispettivamente relativi all'orientamento \uparrow, \downarrow del momento magnetico.*

Tutto questo completa la fondazione quantistica della struttura dell'atomo secondo la Tavola di Mendeleev per cui per ogni livello energetico attorno al nucleo possono esistere al massimo due elettroni con spin opposti.

Spiegazione del guscio elettronico e quindi della struttura degli atomi

In altri termini una conseguenza particolarmente importante del principio di Pauli è *l'elaborata struttura a guscio (shell) elettronico* degli atomi e il modo in cui gli atomi condividono gli elettroni, spiegando la varietà di elementi chimici e le loro combinazioni chimiche. Un atomo elettricamente neutro contiene elettroni legati in numero uguale ai protoni nel nucleo. Gli elettroni, essendo fermioni, non possono occupare lo stesso stato quantico degli altri elettroni. Quindi gli elettroni devono «impilarsi» all'interno di un atomo, cioè avere spin diversi mentre si trovano nello stesso orbitale elettronico come descritto di seguito.

La spiegazione della tavola periodica degli elementi

Un esempio è l'atomo di elio neutro, che ha due elettroni legati, entrambi i quali possono occupare *gli stati di energia più bassa (1s)* acquisendo spin opposto; poiché lo spin fa parte dello stato quantico dell'elettrone, i due elettroni sono in stati quantici diversi e non violano il principio di Pauli. Tuttavia, lo spin può assumere solo due valori diversi (autovalori). In un atomo di litio, con tre elettroni legati, il terzo elettrone non può risiedere in uno stato 1s e deve invece occupare uno degli stati 2s ad energia superiore. Allo stesso modo, gli elementi successivamente più grandi devono avere gusci di energia successivamente superiore (cfr. **Figura 2-15**). Le proprietà chimiche di un elemento dipendono in gran parte dal numero di elettroni nel guscio più esterno. Gli atomi con un numero diverso di gusci di elettroni occupati ma con lo stesso numero di elettroni nel guscio più esterno hanno proprietà simili, il che dà origine alla *tavola periodica degli elementi*.

Giustificazione della stabilità della materia e del fatto che gli atomi occupano un volume incompressibile di spazio

Infine, è stato dimostrato che il principio di esclusione di Pauli è responsabile del fatto che un blocco (*bulk*) materia ordinaria è *stabile e occupa volume*. Questo suggerimento fu fatto per la prima volta nel 1931 da Paul Ehrenfest, che sottolineò che gli elettroni di ogni atomo non possono cadere tutti nell'orbitale a più bassa energia e devono perciò occupare successivamente gusci sempre più grandi. Gli atomi, quindi, occupano un volume e non possono essere compressi troppo strettamente insieme.

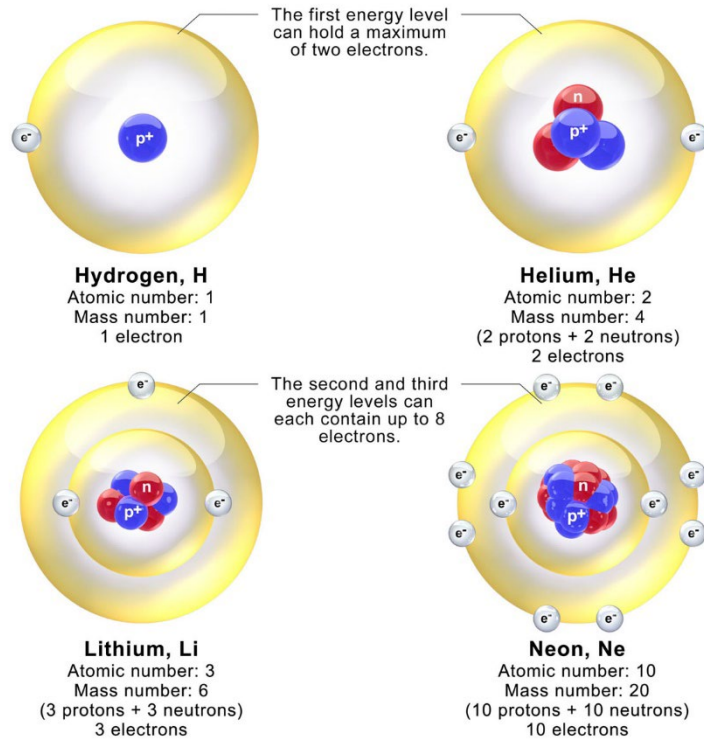


Figura 2-15. Struttura a più livelli di energia del guscio elettronico degli atomi in base al Principio di Pauli.

2.6.5 Dualità particella-onda

L'intuizione di De Broglie: il carattere ondulatorio e probabilistico invece che tipo-traiettorie e deterministico della propagazione degli eventi quantistici

Ma le sorprese che lo studio della struttura «fine» della materia dovevano riservarci non erano ancora finite. Un ulteriore «scandalo» fu provocato da un'elegante ipotesi matematica di un fisico francese, Louis Victor duca di De Broglie (1892-1975), il quale, nella sua tesi di dottorato in fisica nel 1925, avanzò un'idea del tutto originale che, collegata al principio d'indeterminazione di Heisenberg, costituì il vero e proprio punto di svolta della nascente meccanica quantistica. Sinteticamente, nella meccanica classica, la possibilità di determinare univocamente, con una precisione incrementabile a piacere all'infinito, posizione e quantità di moto di una particella, giustifica la rappresentazione matematica del suo moto nei termini di spostamento, proporzionale alla quantità di moto, di un punto materiale (a -dimensionale) lungo una singola traiettoria (ovvero lungo una linea unidimensionale).

Rappresentazione
ondulatoria di De-
Broglie

Una volta che però cade tale possibilità di determinazione univoca causa il principio di quantizzazione e quello d'indeterminazione, tale tipo di rappresentazione diviene profondamente errato. La natura quantica dei fenomeni considerati fa sì che non si possa parlare di determinazione univoca e continua di una posizione lungo una traiettoria unidimensionale ma di determinazione *probabilistica e a tratti della posizione, non più lungo una traiettoria unidimensionale, ma lungo una superficie n-dimensionale con diversi spessori, una superficie curva, appunto*. Questo passaggio concettuale è rappresentato intuitivamente nella **Figura 2-16**. In altri termini, alla rappresentazione del moto di una particella come susseguirsi continuo di posizioni lungo una traiettoria unidimensionale, bisogna sostituire nella nostra mente un altro tipo di rappresentazione. Quello del moto della particella come propagazione nello spazio di un'onda *n*-dimensionale (con $n \geq 2$) di posizioni probabili, la cosiddetta *onda di De Broglie*, un'onda la cui lunghezza λ , nel *caso-prototipo* dell'elettrone dell'atomo d'idrogeno studiato da Bohr, è proporzionale alla quantità di moto *mv*, secondo una relazione già scoperta nel 1922 da Compton, ovvero:

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

Il modello
ondulatorio di
atomo come
oscillatore armonico
quantistico

Attraverso tale semplicissima e sconvolgente idea, il fenomeno dei «salti di orbita» dell'atomo di idrogeno, quando viene eccitato da impulsi di energia quantizzata dall'esterno — il fenomeno per cui l'elettrone passa dall'orbita più interna del suo stato fondamentale ad orbite via via più complesse intorno al nucleo, secondo il modello di Bohr —, può essere spiegato mediante un modello ondulatorio. Può essere spiegato in maniera più coerente considerando l'atomo non come un sistema planetario, ma come un *oscillatore armonico* (come p.es., nel caso delle vibrazioni acustiche di un diapason, caso tipico per comprendere lo *sviluppo in serie di Fourier* cfr. § A2.1 in **Appendice A**) che, quando viene colpito da una certa quantità d'energia, «vibra». Esso produce un'onda (sonora, nel caso della corda di chitarra, «onda elettronica» nel caso dell'atomo interpretato come un *oscillatore armonico quantistico*) che si propaga nello spazio. La modellizzazione dell'atomo come oscillatore armonico quantistico è il cuore dell'*equazione di Schrödinger* che esamineremo nella prossima sottosezione.

L'ipotesi di De
Broglie formulata
prima del principio
d'indeterminazione
di Heisenberg

L'ipotesi di De Broglie, quando fu formulata, era tanto più sconvolgente in quanto fu formulata due anni prima e non dopo la scoperta del principio d'indeterminazione di Heisenberg. Noi, per ragioni pedagogiche, l'abbiamo posta dopo così da rendere immediatamente evidente che le onde di De Broglie sono intrinsecamente legate al carattere probabilistico e quindi *ondulatorio* della determinazione dello *stato di moto* delle particelle nello spazio delle fasi dei sistemi quantistici.

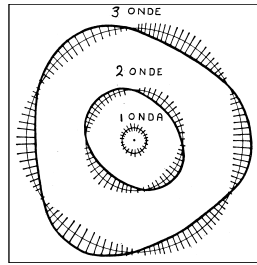


Figura 2-16. Le onde di De Broglie adattate alle orbite quantiche dell'atomo di Bohr (da Gamow 1980, 85). Si può vedere bene il passaggio di rappresentazione dalle traiettorie unidimensionali di Bohr alle onde probabilistiche di De Broglie — bidimensionali come un nastro in questa rappresentazione. Entro quelle linee di spessore, che definiscono il profilo della nostra onda bidimensionale, la particella può essere localizzata dovunque. Per questo si dice che con la rappresentazione ondulatoria di De Broglie–Schrödinger–Dirac si è passati dal modello «planetario» dell'atomo di Bohr (elettroni assimilati a pianeti) al modello dell'atomo «a nube». Come il volume di una nube è fatta di goccioline d'acqua che si muovono vorticosamente dentro quel volume senza una localizzazione precisa, ma solo statistica, così nella «nube elettronica» del modello ondulatorio di atomo.

Le prime verifiche sperimentali del modello ondulatorio

Per tutto questo risultarono così sconvolgenti le *verifiche sperimentali* che ne seguirono. Innanzitutto, se le particelle elementari si propagavano non come corpi lungo traiettorie, ma come onde, essi passando attraverso la materia avrebbero dovuto produrre *fenomeni di diffrazione*, proprio come i fasci di luce. P.es., in base alla formula sopra ricordata della lunghezza d'onda di De Broglie, accelerando opportunamente dei fasci di elettroni, si sarebbe potuta ottenere una lunghezza d'onda di De Broglie, $\lambda \approx 10^{-8} \text{ cm}$, paragonabile a quella dei raggi X con le onde elettromagnetiche — seppure i quanti dell'onda elettromagnetica sono fotoni, particelle senza massa, mentre gli elettroni sono dotati di massa. Se allora l'ipotesi di De Broglie era giusta, «l'onda elettronica», attraversando un reticolo di atomi, avrebbe dovuto produrre dei *caratteristici fenomeni di diffrazione* come fossero raggi di luce ad alta frequenza, ovvero raggi X. Di solito, questo esperimento, giustamente posto alla base della QM come meccanica ondulatoria, viene divulgato come l'esperimento della *doppia fessura*.

Fenomeni di diffrazione come tipici fenomeni ondulatori di interferenze costruttive e distruttive di onde

I fenomeni di diffrazione sono tipici di tutti i fenomeni ondulatori. Intuitivamente, ammettiamo di avere un fascio di luce e immaginiamo di farlo passare attraverso due fessure parallele di uno schermo. È chiaro che i due fasci così ottenuti interferiranno fra di loro, secondo delle tipiche figure di *interferenza costruttiva e distruttiva*. Ovvero, dove a picchi corrispondono picchi (=onde in fase), quando le onde interferiscono, esse si som-

mano formando un picco di altezza proporzionale alla loro somma. Invece, quando ad un picco corrisponde un ventre (=onde in controfase), s'annullano (cfr. **Appendice A, Figura 2-39**). Se ai fasci risultanti dall'interferenza facessimo impressionare una lastra fotografica, otterremmo una figura caratteristica a *strisce chiare* (interferenza costruttiva) e *scure* (interferenza distruttiva) dell'onda luminosa. Ora, ciò che è sconvolgente è che otteniamo ugualmente fenomeni diffrattivi usando non onde luminose ma facendo interferire opportunamente fasci di particelle – elettroni, atomi, molecole... Particelle dunque che si comportano come onde.

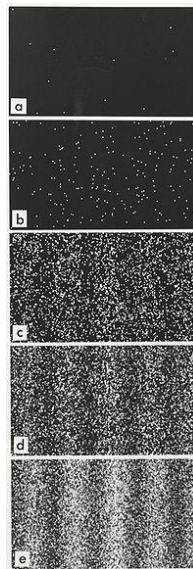
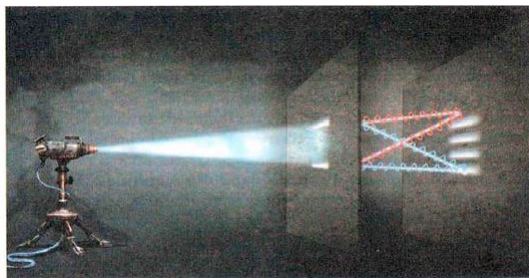


Figura 2-17. Sopra. Rappresentazione intuitiva dell'esperimento della doppia fenditura che rivela il comportamento ondulatorio delle particelle (elettroni, atomi, molecole...) a livello quantistico. Fasci di particelle si comportano come fossero onde dando origine ad una figura di diffrazione sullo schermo dove le righe scure/chiare corrispondono a onde in interferenza distruttiva (in controfase) / costruttiva (in fase), come in Figura 2-39, evidenziando la centralità della nozione della «coerenza di fase» in QM e QFT. Sotto. Immagine sperimentale dell'effetto di difra-

zione sullo schermo con un numero diverso di elettroni, dell'ordine: $\approx 100, \approx 3000, \approx 20000, \approx 70000, \dots$ Più è alto il numero degli elettroni, più è chiaro l'effetto diffrattivo, il che evidenzia la natura intrinsecamente statistica del fenomeno. Da (Halliday, Resnick, & Walker, 2021).

Evidenze sperimentali del comportamento ondulatorio della materia

L'esperimento della doppia fessura per dimostrare il comportamento ondulatorio degli elettroni fu effettuato indipendentemente da Thomson in Inghilterra e Davisson e Germer negli Stati Uniti. In ambedue i casi, si ottenevano sulla lastra fotografica i fenomeni diffrattivi previsti dalla teoria di De Broglie, corrispondenti, nel caso dei fasci di elettroni, alle lunghezze d'onda previste dalla formula di De Broglie. Addirittura, lo stesso fenomeno è stato ottenuto dal fisico tedesco Otto Stern, usando *atomi* — migliaia di volte più pesanti di un elettrone! — fino ad ottenere una lunghezza d'onda di De Broglie di $\lambda \approx 10^{-8} \text{ cm}$. Più recentemente — e provocando grande scalpore — lo stesso fenomeno diffrattivo è stato osservato usando molecole e addirittura *macromolecole* organiche degli acidi nucleici del DNA — effettivamente un *polipeptide* formato da ben 15 diversi aminoacidi, 15 macromolecole organiche (Shayeghi, Rieser, P., Richter, & et al., 2020) — dimostrando ulteriormente le *radici quantistiche della biochimica alla base della vita*. Tutte queste evidenze di una dualità particella-onda nella struttura anche macroscopica della materia hanno di per sé il loro quadro teorico di riferimento al livello della Fisica Fondamentale non tanto in QM, ma piuttosto in una QFT (Preparata, 2023), estesa alla modellizzazione dei sistemi dissipativi quali sono appunto sistemi chimici e organici (Basti, Capolupo, & Vitiello, 2020).

La nascita della meccanica ondulatoria

In ogni caso, dopo il fondamentale lavoro di De Broglie, attraverso il suo controllo sperimentale, essenziale, al pari della sua formulazione matematica, per appartenere al novero delle ipotesi scientifiche moderne, «galileiane», possiamo dire che era nata una nuova branca della fisica *la meccanica ondulatoria*. Per questa sua scoperta che cambia il corso della storia della fisica, De Broglie otterrà il Nobel in Fisica nel 1929²⁸.

Conseguenza ontologica: il campo come entità fisica fondamentale

Per concludere *conseguenza ontologica* fondamentale è che l'entità fondamentale in fisica quantistica, in QM come in QFT è che

L'attore fisico fondamentale non è più la particella ma il *campo*, cioè le distribuzioni spaziali della particella che variano nel tempo. Le particelle di-

²⁸ Nel modello classico a traiettoria di punti materiali, era impossibile spiegare come particelle dotate di un'energia inferiore potessero saltare «barriere di potenziale» più alte, determinando, p.es., i classici fenomeni di radioattività, dove particelle alfa vincono l'attrazione del nucleo nell'atomo di uranio. Ma se i fenomeni hanno natura ondulatoria diviene possibile, con una certa probabilità, che particelle dotate di un'energia più bassa della barriera, ogni tanto, «passino attraverso» la barriera stessa. È il cosiddetto *effetto tunnel* della QM.

ventano i “quanti” di questi campi materiali, proprio come i fotoni sono i quanti del campo elettromagnetico (Del Giudice, Pulselli, & Tiezzi, 2009, p. 1786).

In fisica quantistica l'oggetto fondamentale è il campo non la particella

In fisica quantistica, infatti, sono i campi, non le onde né le particelle, le entità che soddisfano il principio leibniziano di individuazione dell'*identità degli indiscernibili* che persiste nel tempo (Preparata, 2023). Ma su questo punto fondamentale dell'ontologia della fisica quantistica – che fa del *campo* e non della *particella-onda* l'ente quantistico fondamentale come nell'*interpretazione di Copenaghen* della fisica quantistica – torneremo fra poco.

2.6.6 La meccanica ondulatoria di Schrödinger

Il passaggio all'equazione ondulatoria di Schrödinger

La consacrazione definitiva della nuova meccanica ondulatoria si ebbe comunque solo un anno dopo la pubblicazione dell'eccezionale idea di De Broglie, nel 1926, quando il fisico austriaco Erwin Schrödinger (1887-1961) formulò una nuova elegante teoria matematica dell'atomo di idrogeno nei termini della meccanica ondulatoria di De Broglie. Per questo, egli ricevette il Nobel nel 1933. Il modello «planetario» di atomo, semi-classico di Bohr, era sostituito definitivamente dal modello «ondulatorio» originato dall'intuizione di De Broglie. Non più di «elettroni» ruotanti su «orbite» intorno al nucleo si dovrà parlare, ma di livelli di energia di onde «elettroniche» di De Broglie, in un atomo che quando «eccitato» da opportuni pacchetti quantizzati di energia, «vibra», facendo saltare ai livelli più alti di energia «la nube elettronica», come fosse *un oscillatore armonico quantistico*.

Il modello dell'atomo d'idrogeno a onde stazionarie circoscritte

Secondo l'equazione di Schrödinger, i diversi livelli dell'energia a cui «salta» l'unico elettrone dell'atomo d'idrogeno, quando questo è «eccitato» dall'immissione in forma discreta di energia dall'esterno, sono calcolati con precisione sconvolgente come «vibrazioni» di un oscillatore armonico quantistico. Essi sono calcolati *nell'equazione di Schrödinger*, secondo il modello ad *onde stazionarie circoscritte*.

Il modello di oscillatore armonico quantistico che “vibra” come un'onda stazionaria circoscritta

Il modello intuitivo di onda stazionaria circoscritta è quello di una corda di chitarra fissata ai due estremi e fatta vibrare. Dopo una fase transitoria, nella corda in vibrazione si sovrappongono, punto per punto, due *movimenti*. Il *primo movimento* si verifica spostando la corda verso l'alto o verso il basso (lungo un asse perpendicolare alla corda), per esempio pizzicandola come nel caso di una chitarra. Poiché la corda, elasticamente, tende a tornare nella posizione iniziale, questo spostamento perpendicolare si propaga per tutta la lunghezza della corda, finché giunge ad un estremo. Il *secondo movimento*, allora, rimbalza e torna indietro. Intanto, però, la corda possiede ancora il primo movimento, per inerzia; allora, lo spostamento che «ritorna» si sovrappone a quello che «arriva». Il risultato è che due

onde uguali si propagano lungo la corda in sensi opposti. Sovrapponendosi, esse possono produrre un'interferenza distruttiva, fino ad annullarsi, oppure costruttiva, fino a raggiungere un'ampiezza di oscillazione massima.

Interferenze distruttive e costruttive nel modello ondulatorio di Schrödinger

Pizzicando la corda con un'intensità doppia, tripla, quadrupla, etc. di quella originaria, la corda *proporzionalmente* – si tratta di equazioni lineari – vibrerà con una frequenza doppia, tripla, quadrupla, ... e quindi con lunghezza d'onda pari a $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ di quella originaria come in figura.

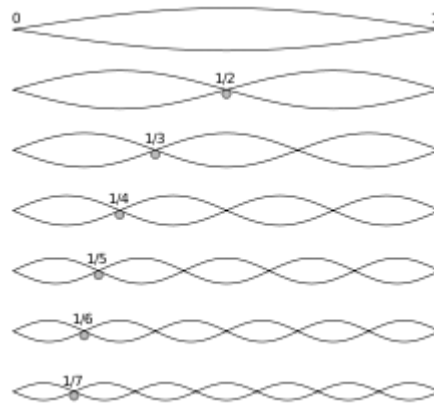


Figura 2-18. Rappresentazione intuitiva di un'onda stazionaria circoscritta

Le due onde hanno caratteristiche (periodo, lunghezza d'onda...) *identiche*. A causa della loro uguaglianza e degli estremi della corda fissi, esse si sovrappongono in un modo ben determinato: allora i punti in cui si annullano sono sempre gli stessi (= interferenza distruttiva) e allo stesso modo risultano stabiliti anche quelli in cui l'ampiezza può risultare massima (= interferenza costruttiva) come in **Figura 2-38 in Appendice A**. Intuitivamente, questi punti di interferenza rappresentano gli *autovalori* dell'equazione di Schrödinger.

Il modello di Schrödinger in sintesi

In sintesi, nel caso dell'equazione di Schrödinger ψ , la corda che vibra è una funzione d'onda di De Broglie, le intensità discrete tutte multiple di h con cui viene fatta vibrare, sono i quanti di energia con cui posso eccitare (far vibrare) un atomo o una molecola rispetto al suo *stato fondamentale*. I punti risultanti, sempre gli stessi, o *stati stazionari* in cui le due onde si annullano o raggiungono il loro massimo di ampiezza di oscillazione costituiscono gli *autovalori* dell'equazione di Schrödinger. Ovvero, forniscono in modo straordinariamente preciso le soluzioni dell'equazione. Cioè la probabilità in cui posso trovare gli elettroni intorno al nucleo secondo diversi *livelli discreti di energia* (i massimi), e, viceversa le probabilità nulle in

cui non troverò mai elettroni ovvero i *livelli vietati di energia* (i punti nulli). Sono cioè gli *autostati dell'energia* di $\psi, E\psi$. Formalmente:

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi + \frac{m\omega^2 x^2 \psi}{2}$$

Dove m è la massa, x è lo spostamento e ω è la frequenza angolare. Gli autovalori discreti dell'energia saranno (come si intuisce dalla **Figura 2-18**):

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega$$

Il caso $n = 0$ è lo *stato fondamentale* ovvero lo stato di *energia di punto-zero* e la funzione d'onda è una gaussiana.

Senza riportare qui le formule, l'equazione di Schrödinger è in grado di fornire le soluzioni *esatte* per calcolare i tre numeri quantici principali, n, ℓ, m (energia, azimutale, magnetico) che definiscono lo *stato quantico* $\psi_{n,\ell,m}$ dell'unico elettrone dell'atomo di idrogeno, costituito da un solo elettrone e un solo protone.

Determinazione dello schema di termini dei vari livelli energetici permessi all'atomo (i vecchi «orbitali» di Bohr), come autovalori delle relative funzioni d'onda (autofunzioni)

In altri termini più generali, la funzione d'onda $\psi(x, y, z)$ che compare nell'equazione di Schrödinger è *una funzione delle coordinate spaziali della particella*. Se è possibile trovare la soluzione di quell'equazione per un dato sistema (p.es.: un elettrone in un atomo), allora la soluzione, che dipende dalle condizioni al contorno (p.es., l'energia immessa nel sistema), è un insieme delle funzioni d'onda permesse (*autofunzioni*) della particella, ciascuna delle quali corrisponderà ad un livello energetico permesso (*autovalore*). Fisicamente, in ogni punto, il quadrato della funzione d'onda è proporzionale alla probabilità di trovare la particella in un elemento infinitesimo di volume, $dx dy dz$, centrato su quel punto. In questo senso un *orbitale* atomico o molecolare non corrisponderà più, come nel modello di Bohr, ad un'orbita o traiettoria definita. L'elettrone ha solo una certa probabilità di occupare una data posizione dello spazio. Tale probabilità è data dalla soluzione dell'equazione di Schrödinger, per ottenere la funzione d'onda ψ : infatti la probabilità di trovare l'elettrone in una certa posizione è proporzionale a $|\psi|^2$. Un *orbitale atomico* invece che essere un'orbita, una traiettoria in senso classico, corrisponde ad una distribuzione di probabilità di localizzazione spazio-temporale entro un volume di dimensione $\geq h/2$ attorno al nucleo o, in maniera equivalente, ad una distribuzione di carica elettrica (negativa: sono elettroni) mediata sul tempo.

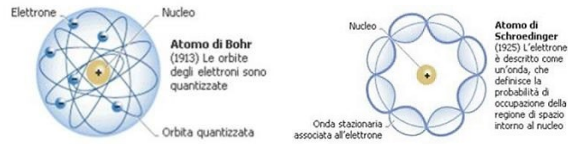


Figura 2-19. Rappresentazione intuitiva dei due modelli di atomo di Bohr a funzioni-traiettorie (orbitali) e di Schrödinger a funzioni d'onda probabilistiche (onde stazionarie circoscritte)

2.6.7 Principio di complementarità e il dibattito Einstein-Bohr sulla fisica quantistica

La duplice rappresentazione particellare-ondulatoria in QM

La nuova eccezionale situazione — la medesima realtà fisica *rappresentata secondo due formalismi o rappresentazioni matematiche*, quello semi-classico secondo funzioni-traiettorie dell'atomo di Bohr, e quello ondulatorio dell'atomo di De Broglie-Schrödinger — fu fotografata nell'enunciazione, da parte di Niels Bohr medesimo, di un ulteriore nuovo principio, che caratterizza, rispetto alla meccanica classica di Newton, la nuova meccanica quantistica. Si tratta del cosiddetto:

Il principio di complementarità di Bohr

Principio di complementarità. Tutti i fenomeni microscopici sono caratterizzati dalla presenza di una doppia rappresentazione, nei termini di particella e nei termini di onda. I due aspetti sono legati dalla duplice relazione $p = h\lambda$ e $E = h\nu$, dove h è la costante di Planck, p ed E rappresentano, rispettivamente, la quantità di moto e l'energia associabili all'ente quantistico sotto forma particellare; mentre λ e ν rappresentano la lunghezza d'onda e la frequenza associabili all'ente quantistico sotto forma ondulatoria.

Ora, se si guardano attentamente queste due formule del principio di complementarità una cosa balza immediatamente alla vista, del massimo interesse per una ontologia dell'ente fisico quantistico.

L'indeterminazione quantistica legata alla riduzione della funzione d'onda

L'indeterminazione — legata ad h — è tutta dalla parte destra «ondulatoria» delle due equazioni che sintetizzano l'enunciato del principio di complementarità, contenendo la parte sinistra solo variabili tipiche della rappresentazione «particellare» dell'evento quantistico. In altri termini, l'indeterminazione si manifesta allorché si cerca di operare la cosiddetta *riduzione della funzione d'onda*. Allorché, cioè, si vogliono costringere ad una rappresentazione, in forma di traiettorie di particelle, gli eventi quantistici che hanno, invece, la loro rappresentazione matematica in termini ondulatori e quindi *probabilistici* (Born). Eventi, cioè, che matematicamente parlando, hanno la loro rappresentazione adeguata in termini di *funzioni d'onda probabilistiche* e non di *traiettorie*. In termini di funzioni d'onda, gli eventi quantistici sono perfettamente *prevedibili* (a meno dell'indeterminazione di Hei-

senberg e dunque in forma ondulatoria) perché soluzioni di equazioni *lineari*, sono cioè caratterizzati da *stabilità dinamica*. La dinamica, cioè, *non amplifica l'incertezza iniziale* ma essa resta costante nei termini della relazione d'indeterminazione di Heisenberg, a differenza di quanto accade nella fisica dei sistemi a *n*-corpi della meccanica classica, ma anche in quantistica della QFT, ambedue intrinsecamente *non-lineari* (Cfr. *infra* § 2.4.2 e § 2.8.3), a differenza della *linearità* della funzione d'onda di Schrödinger della QM. Torneremo dopo sull'essenzialità di questa notazione.

Debolezza dell'interpretazione divulgativa dell'indeterminazione legata all'interferenza dell'osservatore umano

Ciò significa però anche un'altra cosa. Generalmente nell'interpretazione corrente della teoria quantistica che risale a Heisenberg stesso, si afferma che l'indeterminazione di cui Heisenberg per primo ci ha parlato dipende dall'irriducibile interazione dei nostri strumenti di misura con l'evento osservato. Una visione fatta propria da Bohr e dalla conseguente *interpretazione di Copenaghen* della QM che discuteremo fra poco. Spesso però ciò è servito ad elucubrare per un'epistemologia di tipo *soggettivista* sull'ineliminabile influenza del soggetto umano sulla natura dell'oggetto osservato, nel cuore stesso della scienza fisica. Ma come vedremo questa lettura soggettivista della funzione d'onda e della sua decoerenza è assolutamente aliena dalla interpretazione di Copenaghen (o di Bohr-Born-Heisenberg) della QM.

Il principio di località in matematica e fisica e la non-località quantistica

Per capirci intuitivamente. Ciò che caratterizza uno spazio geometrico è la *località* dei suoi punti che, p.es., rende possibile definire con esattezza le coordinate spazio-temporali di un punto nello spazio cartesiano. Tutta la *Teoria della Relatività* sia Generale che Speciale è basata su questo *principio di località* spazio-temporale degli eventi. Ciò come sappiamo è impossibile in uno stato quantico dello spazio degli stati della QM dove, se determiniamo l'energia *p*, la particella non può essere localizzata spazio-temporalmente in un punto *x*, ma può essere *simultaneamente ovunque entro un incompressibile volume* definito dalla relazione d'indeterminazione. I fenomeni quantistici sono dunque caratterizzati da un'intrinseca *non-località spazio-temporale*. Di qui l'indispensabile rappresentazione ondulatoria dello stato di moto di una particella quantistica che Bohr sintetizzò nel suo «principio di complementarità».

L'entanglement quantistico e la presunta violazione di *c*

La non-località quantistica era quindi ciò che dava particolarmente fastidio a un fisico del valore di Einstein perché sembrava violare l'assunto fondamentale della SR (e quindi della GR) e cioè che nessun segnale fisico causale può propagarsi ad una velocità maggiore di *c* era il conseguente fenomeno dell'*entanglement* quantistico. Nello specifico, della sua famosa polemica con Bohr, il fatto che due elettroni nel medesimo stato quantico in base al «principio di Pauli» necessariamente avessero *spin* opposti (cfr. § 2.6.4) quasi che ciascuno «sentisse» *istantaneamente* lo stato dell'altro mediante una qualche forma di segnale fisico violando dunque *c*.

Il paradosso EPR

Il fenomeno dell'*entanglement* legato alla non-località è evidenziato nel famoso paradosso, *il paradosso EPR*, così denotato in letteratura dalle iniziali dei nomi degli Autori che per primo lo hanno espresso, Albert Einstein, Boris Podolski e Nathan Rosen in un articolo del 1935. Esso era fondamentalmente mirato a mostrare, nell'intenzione dei suoi Autori, *l'incompletezza della teoria quantistica*. In altri termini, per questi tre Autori *l'entanglement* quantistico non aveva nulla di fisicamente fondamentale, era legato semplicemente all'impossibilità pratica di effettuare una misura indefinitamente precisa causa la relazione d'indeterminazione in fisica microscopica.

Da «esperimento di pensiero» a esperimento fisico

In sostanza l'articolo proponeva quello che al tempo in cui fu concepito dai loro Autori poteva essere solo «un esperimento di pensiero». Se immaginiamo che due particelle (p.es., due elettroni) abbiano interagito in modo *entangled* sulla brevissima distanza di uno stato quantico, per l'osservatore è impossibile effettuare misurazioni sullo stato delle due particelle con un'impresione minore di h , come il principio d'indeterminazione di Heisenberg insegna. Nulla dovrebbe impedire, però – e qui è il succo intuitivo dell'idea di EPR –, che quando le due particelle si siano allontanate a sufficienza *senza interagire con nient'altro*, sia possibile effettuare una misura con tutta la precisione che si desidera e di qui risalire indietro nello spazio-tempo, fino a ridefinire con precisione qual era *indipendentemente* lo stato di moto di ciascuna delle particelle al momento dell'interazione, senza dover sopporre alcun *entanglement* fra di esse che violasse c .

La definizione rigorosa dell'esperimento nelle disuguaglianze di Bell

Attraverso successivi lavori, negli anni '60 del secolo scorso, il fisico inglese J. S. Bell aveva definito in modo quantitativamente rigoroso qual era il fenomeno da misurare empiricamente (le famose «disuguaglianze di Bell») che riguardavano non lo *spin* degli elettroni ma la *polarizzazione* di due fotoni *entangled*), per vedere se EPR avevano ragione o no.

La realizzazione effettiva dell'esperimento e la confutazione di EPR

L'esperimento ebbe vari tentativi di realizzazione fra gli anni '70 e '80, sia con particelle dotate di massa che no, dove la difficoltà dell'esperimento consisteva essenzialmente nella capacità di creare condizioni di vuoto così spinto da evitare che si creasse una decoerenza della funzione d'onda che distruggesse *l'entanglement*. L'esperimento fu finalmente realizzato dal fisico francese Alain Aspect e dai suoi colleghi alla Sorbona di Parigi nel 1982 (Aspect, Grangier, & Roger, 1982) e quindi ripetuto diverse altre volte con risultati simili, mostrando in maniera sperimentalmente inconfutabile che EPR avevano torto. I due fotoni *entangled* rimanevano tali anche a (relativamente) grandi distanze. Per questo risultato Aspect è stato recentemente insignito nel 2022 del Premio Nobel per la Fisica, insieme con John Clauser e Anton Zeilinger per «esperimenti con fotoni *entangled*, stabilendo la violazione delle disuguaglianze di Bell e ponendo pionieristi-

camente le basi della scienza dell'informazione quantistica», il famoso *qubit*.

Oggetto: la permanenza dello stato entangled di due fotoni anche a distanza

L'esperimento in effetti riguardava lo stato di polarizzazione di due fotoni che si ritrovassero *entangled* nel medesimo stato quantico, tale cioè che lo stato di polarizzazione dell'uno determinasse istantaneamente quello dell'altro secondo le previsioni della QM. L'esperimento di Aspect mostrò sinteticamente che una *correlazione fra le funzioni d'onda* dei due fotoni, che una volta erano parte della stessa funzione d'onda di uno stato *entangled*, permaneva anche a grande distanza, prima che una delle due venisse misurata.

Rappresentazione in termini di funzione d'onda legata all'intrinseca non-località dei fenomeni quantistici

I rivelatori dello stato di polarizzazione di ciascun fotone emesso dalla sorgente erano posti a ben 13 metri l'uno dall'altro e il loro stato veniva aggiornato ogni 10 nanosecondi, ogni centomillesimo di secondo. Questo al fine di escludere che un qualsiasi segnale fisico potesse essere inviato dall'uno all'altro dei rivelatori, così che lo stato dell'uno, al passaggio del proprio fotone, influenzasse lo stato dell'altro. Alla velocità della luce, ovvero alla velocità massima concepibile per qualsiasi propagazione di evento fisico, infatti, un segnale fisico avrebbe impiegato, a quella distanza, ben 40 nanosecondi per arrivare! Ebbene anche a quella distanza, «enorme» per qualsiasi evento microfisico che avviene su scale dell'ordine del centomillesimo di centimetro (10^{-8} cm), lo stato di polarizzazione di ciascun fotone risulta correlato, *entangled*, dallo stato dell'altro, esattamente secondo le previsioni della QM.

Fotografia di un entanglement

Ciò appare anche visivamente evidente nella prima foto mai realizzata di due fotoni *entangled* secondo quattro polarità opposte, ottenuta recentemente (2019) in un laboratorio di ottica quantistica per la realizzazione di un computer ottico-quantistico.

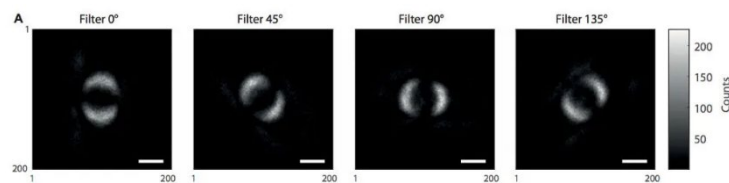


Figura 2-20. Riproduzione della prima foto mai realizzata in un laboratorio ottico-quantistico dell'*entanglement* di due fotoni secondo quattro polarità opposte a 0°, 45°, 90°, 135°. Da (Moreau, et al., 2019).

L'entanglement non suppone alcuna violazione di c

Siccome per come è concepito l'esperimento di Aspect, non esiste alcuna ragione per pensare ad una violazione di c nell'esperimento stesso (Ghirardi, 1997, pp. 236-361), bisogna rinunciare all'ipotesi di località spazio-temporale dei fenomeni quantistici. La rappresentabilità dei feno-

meni quantistici in termini di funzione d'onda appare così intrinsecamente legata a proprietà di non-località dello spazio-tempo a livello degli eventi microscopici e al fatto che il sistema quantistico osservato sia perfettamente «isolato» da interazioni col resto del mondo fisico (innanzitutto degli strumenti di misura), altrimenti avremmo una *decoerenza* della funzione d'onda (Tegmark & Wheeler, 2001). In particolare, il sistema dev'essere isolato da fluttuazioni termiche (cfr. **Figura 2-1**), il che ci fa capire perché, quando lavoriamo in esperimenti con coerenze di fase di funzioni d'onda di Schrödinger in QM per due elettroni sovrapposti nel medesimo stato quantico, come nei computer quantistici elettronici basati sulla QM, occorre lavorare a temperature prossime allo zero assoluto per minimizzare le fluttuazioni termiche.

Il concetto di
velocità di fase in
Relatività Speciale

In ogni caso, per comprendere l'indipendenza dell'*entanglement* quantistico da violazioni di c , e dunque far dormire sonni tranquilli ad Einstein, basta far riferimento alle equazioni della stessa SR (quindi in fisica classica dell'elettrodinamica di Maxwell, non quantistica), dove cioè c è definita. Ricordando che la QFT si distingue dalla QM precisamente per il fatto che introduciamo nei campi della QM la SR. Infatti, se ci domandiamo a quale velocità V la fase P , ovvero V_P , di una funzione d'onda *fisica* (quella elettromagnetica) si propaga nel vuoto, rispetto alla velocità $v < c$ di un qualsiasi segnale fisico causale, dalle equazioni della SR otteniamo che:

$$V_P = \frac{E}{p} = \frac{\gamma mc^2}{\gamma mv} = \frac{c^2}{v}$$

Entanglement,
coerenza di fase e
informazione
quantistica

Dove γ è la costante di Lorenz e p è la quantità di moto associata a una massa m e ad una velocità v . Da questo si evidenzia che l'*entanglement* quantistico, p.es., nel caso dell'atomo, alla base dell'informazione quantistica (si pensi al *qubit* dei computer quantistici elettronici), non implica alcuna violazione di c ma è semplicemente legato alla *coerenza di fase a lungo raggio* della funzione d'onda di un campo quantistico elettromagnetico di cui gli elettroni *entangled* sono quanti! Questo ci fa comprendere un altro ingrediente fondamentale della QFT (e del Modello Standard) alla base del famoso *Teorema di Goldstone* che riguarda proprio le *correlazioni a lungo raggio fra campi quantistici*, come vedremo più avanti (cfr. § 2.7.2).

Correlazioni a lungo
raggio fra campi
quantistici allo stato
fondamentale

L'esistenza, cioè, di *correlazioni a lungo raggio* fra campi quantistici al loro *stato fondamentale*, ovvero nel cosiddetto stato di *vuoto quantistico* (*Quantum Vacuum* QV: cfr. § 2.7). Il che di nuovo ci fa comprendere che per evitare assurdità quali quelle che legherebbero l'*entanglement* all'invio di segnali causali fisici a velocità superluminali fra particelle, basta ricordare l'enunciato ontologico fondamentale della fisica quantistica. In fisica quantistica l'entità fondamentale non è la particella-onda di Bohr, cui non è applicabile il *principio di individualità* della «identità degli indiscernibili» di Leibniz, ma il

campo e, più esattamente, gli *stati coerenti* (coerenze di fase) dei campi quantistici materiali.

La corretta interpretazione dell'esperimento di Aspect nella polemica sul paradosso EPR

Tutto questo, però, ci fa capire anche che – contrariamente a quanto si afferma correntemente – l'esperimento di Aspect non ha dato ragione all'*ontologia rappresentazionale* di Bohr nella cosiddetta *interpretazione di Copenhagen* della QM, contro il *realismo causale* di Einstein. Semplicemente, come ha evidenziato Preparata nel suo volumetto – pubblicato postumo originariamente in inglese nel 2002 –, in cui difende un'*interpretazione realista* della fisica quantistica basata sulla QFT e non sulla QM, il realismo di Einstein era “troppo ingenuo”. Non teneva conto, cioè, delle *correlazioni a lungo raggio* che caratterizzano i campi quantistici e le loro *coerenze di fase* a differenza di quelli classici (Preparata, 2023). Fra l'altro, il libro di Preparata appena citato era stato preceduto da un altro, fondamentale, in cui applicava il concetto di *coerenza di fase* ai campi quantistici elettromagnetici della *elettrodinamica quantistica* (*Quantum Electro-Dynamics*, QED) di Dirac (Preparata, 1995), contro cioè l'interpretazione della QED e quindi della QFT come “seconda quantizzazione” rispetto alla QM, proposta da Dirac stesso e che discuteremo fra poco

La polemica Bohr-Einstein e il paradosso EPR

Soffermiamoci un attimo, allora, sulla cosiddetta *interpretazione di Copenhagen* della QM (fu Heisenberg a definirla così nel 1930), sostenuta inizialmente da Niels Bohr e Werner Heisenberg ma che fu in seguito rafforzata dall'*interpretazione probabilistica* della funzione d'onda di Max Born (1882-1970). In particolare i due studiosi estesero l'*interpretazione probabilistica* della funzione d'onda quantistica proposta da Max Born, secondo la famosa *regola di Born*, uno dei postulati della QM, per cui la densità di probabilità di trovare il sistema in un dato stato, quando misurato, è proporzionale al quadrato dell'ampiezza della funzione d'onda a quello stato. Born e Heisenberg estesero tale principio considerando prive di significato domande sui valori delle grandezze di un sistema quantistico prima che esso venga misurato, in quanto il processo di misura estrae casualmente uno tra i valori permessi dalla funzione d'onda che descrive lo stato quantico del sistema (= *collasso della funzione d'onda*).

L'interpretazione epistemica della QM e “il gatto di Schrödinger”.

Tale interpretazione *epistemica* della QM ha ricevuto una formulazione meglio definita a partire dagli anni '50 del Novecento, soprattutto grazie a Wolfgang Pauli. A questo proposito il famoso «esperimento di pensiero» del *gatto di Schrödinger* – finché non viene “aperta la scatola” in cui il gatto è imprigionato (=effettuata un'operazione di misura) il gatto “è sia vivo che morto” nella scatola, e solo l'effettuazione della misura determina che è “vivo o morto” – contribuì non poco alla divulgazione di que-

sta interpretazione della QM, anche se spesso con qualche fraintendimento²⁹.

I punti fondamentali dell'interpretazione

In ogni caso, i punti generalmente accettati dell'interpretazione di Copenaghen sono i seguenti (Faye, 2019):

Indeterminismo

◆ La QM è intrinsecamente *indeterminista*.

Principio di corrispondenza

◆ Il *principio di corrispondenza* (espresso da Bohr nel 1920 riguardo il suo modello di atomo). La QM riproduce i risultati della fisica classica nel limite dell'uso di numeri quantici appropriatamente *grandi*. Cioè, per valori sufficientemente grandi delle orbite e delle energie, i calcoli quantistici corrispondono a quelli classici.

Regola di Born

◆ La *regola di Born*. La funzione d'onda di Schrödinger fornisce le probabilità (a priori) per i risultati (a posteriori) delle misure riguardo un dato sistema.

Complementarità particella-onda basata sulla preparazione dell'esperimento

◆ *Complementarità*. Certe proprietà di un sistema quantistico non possono essere osservate simultaneamente (p.es., p e q di una particella quantistica) per lo stesso sistema, ma richiedono differenti *preparazioni dell'esperimento* in laboratorio e quindi molteplici e mutualmente esclusive preparazioni sperimentali sono necessarie per caratterizzare un sistema quantistico in QM.

In particolare, (Omnès, 1994):

La QM riguarda oggetti individuali e non sistemi a n -corpi

◆ La QM si applica a *oggetti individuali* perché le probabilità calcolate usando la regola di Born non riguardano insiemi o collezioni di oggetti (sistemi quantistici a n -corpi).

Descrizione classica dello strumento di misura

◆ Lo strumento usato per effettuare le misurazioni deve essere descritto usando la *fisica classica*, mentre è il sistema sotto osservazione che richiede il trattamento in termini quantistici.

Collasso della funzione d'onda

◆ Durante un'osservazione, il sistema interagisce con lo strumento di misura. Il che determina il *collasso della funzione d'onda* che *riduce irreversibilmente* la funzione d'onda ad *uno degli autostati* del sistema (banalmente determina se “il gatto di Schrödinger è vivo o morto”).

²⁹ Effettivamente, in base all'interpretazione di Copenaghen, poiché la funzione d'onda esprime la nostra conoscenza del sistema, la funzione d'onda $(|morto\rangle + |vivo\rangle)/\sqrt{2}$ significa che, all'atto dell'osservazione (misurazione), abbiamo il 50% di possibilità che sia vivo e il 50% di possibilità che sia morto e *dopo* la misurazione è al 100% vivo o morto, non ha nessun senso affermare che il gatto *prima* dell'osservazione (misurazione) è simultaneamente vivo e morto. Proprio perché, in base a questa interpretazione, non esiste una realtà fisica al di là di quanto misurabile (Peres, 1993, p. 373s).

- Enunciati su quantità non misurate prive di significato
- ◆ Enunciati su misurazioni che non sono attualmente effettuate sono *privi di significato fisico*. Questo in particolare contro l'interpretazione di David Bohm (1917-1992) della QM che, per recuperare una *visione realista e determinista*, faceva riferimento alla nozione delle *variabili nascoste* da aggiungere al formalismo matematico delle funzioni d'onda.
- Carattere oggettivo delle misurazioni
- ◆ Le funzioni d'onda sono *oggettive* nel senso che non dipendono dalle convinzioni personali dell'osservatore che effettua la misura, contro un'interpretazione *soggettivista* della QM. Come spiega bene Heisenberg,

Naturalmente l'introduzione dell'osservatore non deve essere fraintesa nel senso che un qualche tipo di caratteristiche soggettive debbano essere introdotte nella descrizione della natura. L'osservatore ha, piuttosto, solo la funzione di registrare le decisioni, cioè i processi nello spazio e nel tempo, e non importa se l'osservatore è un apparato o un essere umano. Ma la registrazione, cioè la transizione dal "possibile" all'"attuale", è assolutamente necessaria qui e non può essere omessa dall'interpretazione della teoria quantistica (Heisenberg, 1958, p. 137).
- Negazione del principio di causalità per sistemi entangled
- Sempre nel medesimo libro, Heisenberg sottolinea che la QM, in quanto basata sull'*entanglement* nega il *principio di causalità* della SR in quanto, come sappiamo, in base al principio del "cono di luce causale" per cui la causa deve temporalmente precedere l'effetto (cfr. § 2.5.2 e Figura 2-11), bisogna necessariamente supporre un *principio di località* spazio-temporale degli eventi.
- Supposizione erronea che l'interpretazione realista di Einstein basata sul principio di causalità supponesse le variabili nascoste di Bohm
- Per questo molti studiosi pensarono erroneamente che un'interpretazione a variabili nascoste fosse quella che Einstein avrebbe fatto propria per la sua interpretazione realistica o *ontica* della QM in opposizione a quella *epistemica* di Bohr³⁰. Il primo a sostenere, sebbene indirettamente e senza far riferimento esplicito a Einstein, questa tesi su un'interpretazione realistica di Einstein della QM basata su "variabili nascoste", fu proprio Heisenberg in uno scritto del 1927 in cui per la prima volta criticava il *principio di causalità* nella interpretazione di Copenaghen della QM che egli aveva fatta sua.

³⁰ Fu Einstein stesso a suggerire indirettamente una connotazione di questo genere della senza usare il termine «epistemica» per l'interpretazione di Copenaghen della QM dicendo che, col suo riferimento necessario all'osservatore ultimamente era una riproposta dell'empirismo rappresentazionale radicale (il mondo esiste *solo* in quanto oggetto di rappresentazione) del filosofo settecentesco e vescovo George Berkeley (1685-1753), uno dei tre rappresentanti con Hume e Locke dell'empirismo inglese post-cartesiano. Diceva testualmente Einstein in una lettera a Besso del 1952: "L'attuale teoria quantistica non è in grado di fornire la descrizione di uno stato reale di fatti fisici, ma solo di una conoscenza (incompleta) di tali fatti. Inoltre, il concetto stesso di un vero stato fattuale è escluso dai teorici ortodossi. La situazione a cui si è arrivati corrisponde quasi esattamente a quella del buon vecchio vescovo Berkeley". Citato in (Jammer, 1982, pp. 73-74).

Poiché la natura statistica della teoria quantistica è così strettamente legata all'incertezza in tutte le osservazioni o percezioni, si potrebbe essere tentati di concludere che dietro il mondo statistico osservato è nascosto un mondo “reale”, in cui è applicabile la legge di causalità. Vogliamo dichiarare esplicitamente che riteniamo che tali speculazioni siano infruttuose e inutili. L'unico compito della fisica è quello di descrivere la relazione tra le osservazioni (Heisenberg, 1927).

Diffusione dell'interpretazione di Copenaghen

Abbiamo dedicato tanto spazio all'interpretazione di Copenaghen e alla (infruttuosa) critica di Einstein di questa interpretazione perché da un recente sondaggio del 2013 l'interpretazione di Copenaghen resta la più diffusa fra i fisici (Schlosshauer, Kofler, & Zeilinger, 2013).

Suo attuale ridimensionamento

Nondimeno, per i recenti sviluppi della cosmologia quanto-relativista l'interpretazione di Copenaghen sta subendo un forte ridimensionamento.

In cosmologia la decoerenza della funzione d'onda legata alle rotture di simmetria dei campi quantistici e non all'operazione di misura

In cosmologia, infatti, il meccanismo della decoerenza – effettivamente le rotture di simmetrie legate alle transizioni di fase fra campi quantistici nella QFT – acquisisce un ruolo fondazionale e non certo *legato all'interferenza degli strumenti di misura*, ma alle interazioni causali dei campi materiali e, semmai, alla condizione al contorno del progressivo raffreddamento dell'universo, come vedremo brevemente discutendo del ruolo della QFT e del principio di rottura di simmetria in cosmologia e quindi nella costituzione del Modello Standard delle particelle elementari e delle forze di interazione della fisica quantistica come fisica dei campi.

Le rotture di simmetria non riguardano singole particelle ma fenomeni collettivi non-lineari di coerenze di fase di sistemi a n -corpi

Inoltre, si tratta, contrariamente all'assunto fondamentale di Bohr, di una decoerenza non della funzione d'onda di una *singola particella* (o di n particelle linearmente sovrapposte grazie alla linearità della funzione di Schrödinger) ma che riguarda *fenomeni collettivi* di coerenza di fase di n particelle con i rispettivi campi materiali e di interazione (cfr. §§ 2.7.2-2.7.3, dove è la *non-linearità* della dinamica a n -corpi applicata ai campi quantistici a fornire il quadro di riferimento teorico (cfr. § 2.8).

Necessità di ridefinire la dualità particella-onda in termini di coerenza/decoerenza di n campi quantistici

Tutto questo porterà a una ridefinizione della *relazione di indeterminazione* e quindi della *dualità particella-onda* in termini della dualità fra *coerenza di fase* φ dei campi quantistici e delle relative particelle (quanti) – dove sono le proprietà *collettive* del sistema ad emergere come significative – e il numero n delle particelle (quanti) dei campi quando siamo in presenza di una *decoerenza* secondo la relazione di indeterminazione $\Delta\varphi\Delta n \geq K/2$ che illustreremo in § 2.8.3.

Entanglement e non-località dipendono dalle correlazioni a lungo raggio di campi quantistici del tutto coerenti col principio di causalità della SR perché non suppongono invio di segnali superluminali

Dal punto di vista ontologico, siccome in questa interpretazione l'*entanglement* e la *non-località* riguardano – indipendentemente dalla relazione con strumenti di misura – le *correlazioni a lungo raggio* fra campi quantistici al loro stato fondamentale (*Teorema di Goldstone*), ciò significa che l'inserimento sistematico della SR nella QFT soddisfa anche al *principio di causalità* del cono di luce proprio della SR (§ 2.5.2). Questo con fondamentali conseguenze nella cosmologia quanto-relativista e, più in generale, per la giustificazione di un'interpretazione realista dell'ontologia e della epistemologia della fisica quantistica che non sarebbe dispiaciuta ad Einstein nella sua sfortunata polemica con Bohr (Preparata, 2023). Vi torneremo nelle *Conclusioni* di questo capitolo (cfr. § 2.8) e più estesamente nei **Capitoli 4 e 6** di questo libro.

2.6.8 La meccanica delle matrici di Heisenberg e gli spazi di Hilbert

La meccanica delle matrici di Heisenberg

Finora, nel nostro resoconto sugli albori della QM e dell'interpretazione di Copenaghen che la caratterizza ci siamo interessati di un'unica formulazione di essa in *meccanica ondulatoria* legata alla funzione d'onda ψ di Schrödinger, in grado di rendere conto di quella che all'epoca era l'unica evidenza sperimentale. Cioè, la modellizzazione matematico-statistica degli spettri di emissione elettromagnetici dell'atomo di idrogeno H, legati ai livelli di energia quantizzati dell'unico elettrone di H. Tuttavia, alla fine degli anni '20 del XX secolo esisteva un'altra teoria che spiegava ugualmente bene come la *meccanica ondulatoria* di Schrödinger le linee spettrali emesse dall'atomo di idrogeno, la cosiddetta *meccanica delle matrici* di Werner Heisenberg. Sostanzialmente, essa si legava alla possibilità di rappresentare nel *calcolo algebrico delle matrici* per *spazi vettoriali* (= algebra lineare) le distribuzioni di probabilità sugli stati quantistici della nascente QM³¹.

Interpretazione algebrica dell'analisi matematica usando algebra delle matrici anticipata dal trattamento di Laplace del TLC ma realizzata dalla QM

Effettivamente, questa possibilità era già stata anticipata dalla genialità di Laplace con cui l'analisi matematica legata al *Teorema del Limite Centrale* (TLC) nella *forma binomiale di Laplace* (cfr. § A4.2 in **Appendice AA4.2A4.2A4.2A4.2A4.2A4.2A4.2A4.2A4.2**) passava dalla rappresentazione geometrica di Newton-Leibniz a quella algebrico-matriciale di Laplace. Tuttavia, fino alla *meccanica delle matrici* di Heisenberg in QM e all'unificazione di Von Neumann e Dirac col formalismo della *meccanica ondulatoria*, questa lettura matriciale e algebrica del calcolo in Meccanica Statistica e

³¹ Effettivamente, essa fu sviluppata, dopo l'iniziale lavoro di Heisenberg, in collaborazione con Pascual Jordan e Max Born che pubblicarono insieme con lui un fondamentale articolo nel 1925 (Born, Heisenberg, & Jordan, 1925). Torneremo fra poco sull'interessantissima storia della meccanica delle matrici di Heisenberg e sul ruolo-chiave avuto da Born e Jordan nel suo sviluppo.

quantistica non era stata molto usata, mentre oggi è diventata quella *standard*.

Calcolo delle matrici e spazi vettoriali nell'algebra lineare

Intuitivamente, il *calcolo delle matrici* è associato alla nozione di *spazio vettoriale* nell'ambito della cosiddetta *algebra lineare* che, come sappiamo, costituisce il modo moderno di rappresentare la geometria, da Descartes in poi, in particolare dopo la sua introduzione delle *coordinate* nella geometria euclidea. Ricordiamo i punti essenziali di questi passaggi.

Il passaggio dalla geometria euclidea all'algebra lineare

◆ *Innanzitutto, il passaggio dalla geometria euclidea all'algebra lineare.* Se nella geometria euclidea due punti, a , b identificano univocamente una retta, e *vettori di punti* possono essere usati per definire le inclinazioni di linee relativamente a un punto, nella *geometria cartesiana* dove i punti di una linea sono identificati nei termini delle loro coordinate numeriche (e/o di vettori di coordinate numeriche nel caso di punti su un piano), linee e piani sono rappresentati in termini di *equazioni lineari* e calcolare le loro intersezioni si riduce a risolvere sistemi di *equazioni lineari*³².

Gli spazi vettoriali in algebra lineare

◆ *Secondariamente, lo sviluppo della nozione di spazio vettoriale in algebra lineare.* Uno *spazio vettoriale* può essere definito come un insieme V i cui elementi sono *vettori* che possono essere *sommati* fra di loro e *moltiplicati* (“scalati”) per numeri o *scalari*, così da ottenere nuovi vettori in V .

³² Così in uno spazio a due dimensioni, l'equazione per le linee non-verticali ha la forma generale $y = mx + b$ dove m è l'inclinazione della linea, b è dove la linea intercetta l'asse y e x è la variabile indipendente della funzione $y = f(x)$. In uno spazio a tre dimensioni, i piani possono avere la loro naturale rappresentazione usando punti sul piano e vettori di punti e dunque di numeri su tre dimensioni per definirne posizione e inclinazione, ovvero definendo un punto sul piano e un *vettore* ortogonale (= vettore *normale*) al piano per indicare la sua inclinazione. Specificamente, sia \mathbf{r}_0 il vettore-posizione di un qualche punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e sia $\mathbf{n} = (a, b, c)$ un vettore diverso da zero. Il piano determinato da questo punto e da questo vettore consiste di quei punti P , con un vettore-posizione \mathbf{r} , tale che il vettore disegnato da P_0 a P sia *perpendicolare* a \mathbf{n} . Siccome due vettori sono perpendicolari se e solo se il loro prodotto scalare è nullo, ne segue che il piano desiderato può essere descritto come l'insieme di tutti i punti \mathbf{r} tale che $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$. Espandendo, otteniamo: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ che è la forma normale dell'equazione di un piano. Ma questa altro non è che l'equazione lineare: $ax + by + cz + d$ con $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$. Il che dimostra la nostra tesi.

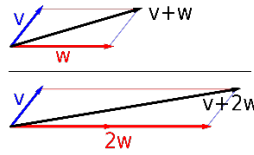


Figura 2-21. Rappresentazione grafica della addizione e della moltiplicazione scalare di due vettori $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$. Sopra: il vettore blu $\langle \mathbf{v} \rangle$ è aggiunto al vettore rosso $\langle \mathbf{w} \rangle$ così da ottenere il vettore somma $\langle \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle$. Sotto: $\langle \mathbf{w} \rangle$ è allungato di un fattore 2 (raddoppiato), così da ottenere il vettore somma $\langle \mathbf{v} + 2\mathbf{w} \rangle$.

Questi scalari possono essere definiti su \mathbb{R} (= “spazi vettoriali reali”) o su \mathbb{C} (= “spazi vettoriali complessi”), che specificano se geometricamente lavoriamo su spazi con *coordinate reali* o con *coordinate complesse*.

Definizione di uno spazio vettoriale su campi scalari con le relative operazioni

Più formalmente, uno *spazio vettoriale* V su un *campo scalare* F di numeri reali o complessi si definisce come un insieme non-vuoto V con le due *operazioni binarie* di *somma* e *moltiplicazione scalare* regolati da una serie di assiomi:

Gli assiomi per l'addizione vettoriale

1. Riguardo l'addizione vettoriale: associatività, $\langle \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \rangle$; commutatività, $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \rangle$; identità, $\langle \exists (0 \in V): (\mathbf{v} + 0 = \mathbf{v}) \forall (\mathbf{v} \in V) \rangle$; inversione $\langle \forall (\mathbf{v} \in V) \exists (-\mathbf{v} \in V): \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = 0 \rangle$.

Gli assiomi per la moltiplicazione scalare

2. Riguardo la moltiplicazione scalare: identità, $\langle 1\mathbf{v} = \mathbf{v} \rangle$; compatibilità rispetto alla moltiplicazione su campi numerici, $\langle \forall (a, b \in F): a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v} \rangle$; distributività della moltiplicazione scalare: (a) rispetto all'addizione vettoriale, $\langle \forall (a \in F): a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (a\mathbf{u} + a\mathbf{v}) \rangle$; (b) rispetto alla moltiplicazione su campi numerici, $\langle \forall (a, b \in F): (a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v} \rangle$.

Uso delle matrici per calcoli vettoriali

- ◆ In terzo luogo, la possibilità di usare per i calcoli sui campi vettoriali dell'algebra lineare tutta la potenza computazionale dei *calcoli su matrici*. Per intuire questo, basta ricordare che una *matrice* $m \times n$ è una *tabella* di m righe e n colonne generalmente di numeri definiti su un *campo numerico* F , p. es., di numeri reali o complessi. In tal modo le matrici senza ulteriori specificazioni rappresentano altrettante *mappe lineari*, f, g così che il *prodotto di due matrici* corrisponde alla *composizione* delle corrispondenti funzioni, mappe lineari $g \circ f$. Ed infatti un qualsiasi vettore $\mathbf{v} \in V$ definito su un campo numerico (scalare) F può essere rappresentato su una matrice a una *riga* $1 \times m$, oppure su una matrice a una *colonna* $n \times 1$.

Matrici quadrate, determinanti e autovalori di matrici e spazi vettoriali

A questo punto tutta una serie di trasformazioni lineari di uno spazio vettoriale V su se stesso (*endomorfismi* nel linguaggio della TC) possono essere rappresentate come operazioni su una *matrice quadrata* $n \times n$ con un numero uguale di righe e colonne, innanzitutto gli *autovalori* della matrice nel formalismo di Heisenberg della QM come *meccanica delle matrici*. Gli stessi che si possono ottenere dalla funzione di Schrödinger nel formalismo della QM come *meccanica ondulatoria*.

Risultati equivalenti della meccanica delle matrici e della meccanica ondulatoria in QM e il formalismo unificato degli spazi di Hilbert

Questa unificazione fra meccanica ondulatoria e meccanica delle matrici è diventata tangibile universalmente con il simbolismo unificato fra le due in QM e QFT introdotto da Dirac. In tale unificazione, il simbolismo del calcolo matriciale su *spazi vettoriali* viene esteso a quello delle *funzioni d'onda probabilistiche* della meccanica ondulatoria, una volta che, grazie al lavoro di Von Neumann mediante la nozione di *spazi vettoriali di Hilbert* fu dimostrata la sostanziale equivalenza fra meccanica delle matrici e meccanica ondulatoria in QM.

L'equivalenza fra i due formalismi esplicitato nel simbolismo unificato bar-ket di Dirac per la QM e la QFT

Infatti, nel calcolo algebrico delle matrici su spazi vettoriali – dove con V si indica uno spazio vettoriale e con \mathbf{m} e \mathbf{n} vettori (sequenze) di valori definiti su *righe e colonne* di una matrice $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$, intuitivamente corrispondenti ai valori numerici (reali o complessi) definiti sulle dimensioni perpendicolari di uno spazio vettoriale – può essere riscritto usando *parentesi lineari (bra)* $|x\rangle$ e *angolari (ket)* $\langle x|$ *alternate* per indicare *vettori di valori* posti su righe e colonne di una matrice: $\langle m|n\rangle$.

Il rapporto col formalismo unificato degli spazi di Hilbert in fisica quantistica

L'unificazione col simbolismo delle funzioni d'onda ψ, ϕ relativo alle grandezze coniugate p, q , una volta dimostrato il sostanziale isomorfismo fra le due rappresentazioni matriciale e ondulatoria della QM, consiste nell'estendere alla meccanica ondulatoria il simbolismo *bra-ket* della meccanica delle matrici. Generalmente nel calcolo delle matrici applicato agli spazi vettoriali il simbolismo $\langle m|n\rangle$ sta ad indicare un particolare stato in questi spazi, indicato univocamente dai valori m, n rispettivamente sulle righe e sulle colonne della matrice. Nel simbolismo unificato *bra-ket* introdotto da Dirac, l'espressione $\langle \psi|\phi\rangle$ sta a significare la commutatività di due funzioni d'onda di variabili coniugate della QM, inserito nel formalismo dei cosiddetti *spazi di Hilbert*, ovvero *spazi vettoriali complessi* che costituiscono il formalismo-base per la rappresentazione matematico-algebrica dei sistemi quantistici e dinamici in generale.

Valore unificante degli spazi di Hilbert per la formalizzazione della fisica classica e quantistica usando l'algebra degli operatori

Vale dunque la pena approfondire la nozione degli *spazi di Hilbert* – sicuramente una delle più alte espressioni del genio matematico di ogni tempo causa le innumerevoli implicazioni di tale nozione tutt'altro che esaurite. Essi, infatti, costituiscono non solo il cuore del formalismo della QM e della QFT come intuì colui che li ha per primo rigorosamente definiti, il grande matematico John Von Neumann (1903-1957) (cfr. il suo testo-base sul formalismo della QM: (Von Neumann, 1932)), ma possono essere applicati in generale alla Meccanica Statistica anche di sistemi classici (Landsman, 2017). Von Neumann, così, non ci finisce di strabiliare per il suo genio multiforme che ha spaziato nella prima metà del '900 dai Fondamenti della Matematica, alla Teoria degli Insiemi, alla Logica, alla Fisica, all'Informatica, avendoci lasciato tracce indelebili del suo genio in ciascuno di questi campi.

Il punto di partenza: il carattere coniugato delle variabili canoniche in QM e l'apparente impossibilità di usare il formalismo dello spazio delle fasi in quantistica

Il punto di partenza è, come al solito, il *carattere non-commutativo* delle variabili canoniche quantistiche, p e q , causa il principio d'indeterminazione in QM. Questa non-commutatività sembrava precludere in linea di principio all'uso di una rappresentazione geometrica (cinematica) della dinamica di un sistema quantistico mediante il formalismo dello spazio degli stati della Meccanica Classica che è basato sulla commutatività delle sue dimensioni p e q (cfr. § A1. in **Appendice A**). In effetti, nel suo famoso lavoro sui fondamenti della geometria *Grundlagen der Geometrie* (1899), David Hilbert, per la prima volta nella storia del pensiero, aveva fornito una versione assiomatica completa della *geometria euclidea*. In tale contesto, aveva dimostrato anche che gli spazi geometrici sono essenzialmente *varietà commutative* (Hilbert, 1899). Dove con «varietà» si intende uno *spazio topologico* che può assumere – cambiando gli assiomi che lo definiscono – diverse proprietà geometriche (p.es., quelle di uno spazio curvo, invece che quelle di uno spazio piano euclideo).

La soluzione suggerita da Hilbert

Tuttavia, Hilbert stesso suggerì in seguito la soluzione del problema per il nascente formalismo della fisica quantistica con i suoi successivi lavori *sull'analisi funzionale*. Con essa egli introdusse la nozione di *spazi euclidei infinito-dimensionali* applicati da Hilbert medesimo alla sua ulteriore scoperta della *teoria spettrale* nell'algebra delle matrici per spazi vettoriali infinito-dimensionali, gli *spazi di Hilbert*, appunto (Hilbert, 1902)³³.

³³ La *teoria spettrale in algebra lineare*, si basa sul cosiddetto *teorema spettrale* formulato da Hilbert per la prima volta per spazi infinito-dimensionali. Si tratta di un risultato che specifica quando un operatore lineare o matrice può essere *diagonalizzato* (ovvero rappresentato come una matrice diagonale su una qualche base), così da semplificare notevolmente i calcoli. Il concetto di diagonalizzazione di una matrice può essere eccezionalmente semplice quando si tratta di operatori che agiscono su spazi vettoriali finito-dimensionali, men-

Il suo sviluppo iniziale nel formalismo della meccanica delle matrici applicato all'oscillatore armonico quantistico

L'idea-base della meccanica delle matrici di Heisenberg

La FT applicata all'oscillatore quantistico

Poiché gli spettri geometrici astratti di Hilbert si applicano inaspettatamente molto bene anche allo studio degli spettri atomici osservati dell'atomo di idrogeno, questo portò Werner Heisenberg alla formulazione della QM come *meccanica delle matrici* nel 1925. Un'idea iniziale che fu nello stesso anno perfezionata grazie al contributo di altri due eminenti fisici dell'epoca, Max Born e Pasqual Jordan (cfr. (Heisenberg, 1925; Born & Jordan, 1925; Born, Heisenberg, & Jordan, 1925)).

Sostanzialmente il ragionamento di Heisenberg era il seguente. Quando prendiamo una particella classica che orbita attorno ad un qualche centro di massa come un elettrone attorno al nucleo (protone) di un atomo di idrogeno e la facciamo interagire con una qualche forma di radiazione elettromagnetica, essa emetterà a sua volta radiazione sotto forma di un *pattern* ondulatorio che si ripeterà regolarmente per ogni periodo dell'orbita. Essendo perciò la funzione $X(t)$ che mi dà la posizione x della particella periodica di periodo T , la sua FT analitica avrà frequenze solo della forma $2\pi n/T$. Quindi:

$$X(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n t/T} X_n$$

Dove i è l'unità immaginaria e i coefficienti X_n della FT sono numeri complessi. Ovvero quelli con frequenze negative devono essere *coniugati complessi*³⁴ di quelli con frequenze positive cosicché $X(t)$ sarà sempre reale dato che le parti immaginarie del coniugato complesso di un numero complesso si annullano (cfr. nota 34).

tre richiede ulteriore lavoro per applicarli su spazi infinito-dimensionali. Lavoro fatto per la prima volta da Hilbert che dimostrò sotto quali condizioni, anche nel caso infinito-dimensionale per sistemi lineari di equazioni, si può ottenere la rappresentazione di un operatore come somma di operatori più semplici (cfr. per una presentazione storico teoretica della teoria spettrale in algebra, prima e dopo Hilbert (Steen, 2011) e **Appendice C**).

³⁴ Il coniugato complesso di un numero complesso è un altro numero complesso con parte reale identica e parte immaginaria uguale in grandezza ma opposta nel segno. Cioè se a e b sono numeri reali, il coniugato complesso di $a + b_i$ è $a - b_i$. Geometricamente, il coniugato complesso di un numero complesso z è indicato con \bar{z} (dai matematici) oppure con z^* (dai fisici), essendo geometricamente il risultato della riflessione di z lungo l'asse reale.

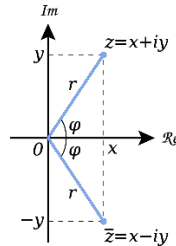


Figura 2-22. Rappresentazione geometrica di numero complesso z e del suo coniugato nel piano complesso. Il coniugato complesso z^* corrisponde alla riflessione di z lungo l'asse reale³⁵.

Ora una particella quantistica non emetterà radiazione in forma continua ma *quantizzata* (fotoni). Supponendo che una particella parta dall'orbitale n ed emetta un fotone, allora finirà nell'orbitale m , l'energia del fotone è $E_n - E_m$, con frequenza $(E_n - E_m/h)$ e quindi $E_n - E_m \approx \frac{h(n-m)}{T}$.

Poiché per definizione X_{nm} ha solo frequenze $(E_n - E_m/h)$ la sua evoluzione nel tempo è data semplicemente da:

$$X_{nm}(t) = e^{2\pi i(E_n - E_m)t/h} X_{nm}(0) = e^{i(E_n - E_m)t/h} X_{nm}(0)$$

Il passaggio di Heisenberg al formalismo degli spazi vettoriali

Il passaggio alla meccanica delle matrici dipende dal seguente ragionamento di Heisenberg. Dati due insiemi di valori X_{nm}, P_{nm} che descrivono sequenze (vettori) di valori di posizioni e quantità di moto delle nostre particelle, posti sulle righe e colonne di una matrice, e che quindi oscillano anch'essi con una data frequenza, essi potrebbero essere combinati insieme seguendo semplicemente Fourier. Infatti, poiché i coefficienti del prodotto di due quantità è dato dalla convoluzione dei coefficienti di Fourier di ciascuna separatamente, la loro corrispondenza con le serie di Fourier consentì a Heisenberg di dedurre la regola con cui possono essere moltiplicati: $(XP)_{mn} = \sum_{k=0}^{\infty} X_{mk}P_{kn}$.

Il passaggio di Born al calcolo matriciale

Fu Born a far notare ad Heisenberg che la regola da lui trovata è semplicemente la legge della *moltiplicazione fra matrici*. Ciò significa che la quantità di moto, la posizione, l'energia e gli altri *osservabili* in QM devono essere interpretati come *matrici*. Allo stesso tempo, poiché le frequenze nell'equazione quantistica del moto non sono tutte multiple di una stessa frequenza, ciò significa che gli elementi della matrice non possono essere definiti come coefficienti di Fourier di un'unica traiettoria classica ben de-

³⁵ Da Oleg Alexandrov, [Complex conjugate picture - Complex conjugate - Wikipedia](#).

finita, ma come una “nube” probabilistica di posizioni entro un volume definito, quello dato dalla *relazione di indeterminazione*.

La formulazione del principio di indeterminazione nella meccanica delle matrici

Quindi, la meccanica delle matrici lavora sulla supposizione che tutti gli osservabili sono dati da matrici i cui elementi sono indicizzati da diversi livelli discreti di energia. Tuttavia, causa il principio di indeterminazione, i prodotti delle due matrici non commutano: $XP \neq PX$, cioè $XP - PX \neq 0$. Di qui la formulazione del *principio di indeterminazione nella meccanica delle matrici*:

$$\sum_k (X_{nk}P_{km} - P_{nk}X_{km}) = i\hbar\delta_{nm} \quad (15)$$

Dove δ è la cosiddetta *delta di Kronecker*³⁶. L'equazione (15) significa che non vi sono stati che hanno simultaneamente una posizione e una quantità di moto definite. O, analogamente, che è impossibile determinare simultaneamente e con indefinita precisione posizione X ed energia E di un elettrone in un atomo, coerentemente al principio d'indeterminazione.

La possibilità di rendere commutative le variabili canoniche anche in quantistica...

D'altra parte le matrici di Heisenberg hanno una proprietà che è alla base della fondamentale definizione di *relazione canonica di commutazione* (*Canonical Commutation Relation, CCR*) e di *prodotto interno* (cfr. nota 79) in uno spazio di Hilbert che giocano un ruolo fondamentale nel formalismo della QM e della QFT, come vedremo subito.

Dimostrazione sistematica dell'equivalenza fra i due formalismi ottenuta da Von Neumann

Tuttavia, la dimostrazione matematica dell'equivalenza delle due formalizzazioni della QM in termini di meccanica delle matrici e della meccanica ondulatoria – grazie all'introduzione ad opera di Born nella meccanica delle matrici di Heisenberg dell'*operatore unitario*, come illustrato in **Appendice C** – fu ottenuta da John Von Neumann, all'epoca assistente di Hilbert a Gottinga. E questo lo portò a scrivere nel 1932 il suo famoso libro sui fondamenti del formalismo matematico della QM (Von Neumann, 1932) che resta a tutt'oggi il punto di partenza di qualsiasi esposizione della QM.

³⁶ Si tratta di una funzione a due variabili definita sugli interi non-negativi e che si usa nel calcolo delle matrici. Essa assume valore 1 se le variabili sono uguali, 0 altrimenti: $\delta_{i,j} \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$. P.es., $\delta_{1,2} = 0$; $\delta_{4,4} = 1$.

Comunque questo dipende dall'aver imposto alla meccanica delle matrici di Heisenberg la condizione dell'unitarietà, così che essa cessa di essere un'equazione di campo

Da questa condizione dipende il Teorema di Stone-Von Neumann per gli spazi Hilbert

Il cuore del formalismo degli spazi di Hilbert di Von Neumann

Come abbiamo visto, la chiave teorica di questa equivalenza fra la meccanica delle matrici di Heisenberg e quella ondulatoria di Schrödinger è stata l'introduzione nel formalismo delle matrici di Heisenberg da parte di Born del vettore di stato quantistico $|\psi\rangle$ e quindi di una condizione di *unitarietà* (la matrice unitaria e^{iHt}) rendendo così l'equazione di Heisenberg *indipendente dal tempo*. Essa cioè non è più un'equazione di campo il che significa, matematicamente, far perdere alle sue matrici la caratteristica fondamentale di una matrice hermitiana. Cioè, quella di avere valori *sempre definiti sui reali*. In altri termini, imponendo la condizione di unitarietà, “condanniamo” il calcolo delle matrici di Heisenberg a rappresentare transizioni di stato di *un unico sistema quantistico*, proprio come le funzioni d'onda di Schrödinger.

Infatti, mediante la rotazione della base unitaria possiamo dare n rappresentazioni (effettivamente n *spazi di Hilbert*) *unitariamente equivalenti* dello stesso sistema quantistico in QM. Il che è esattamente l'enunciato del fondamentale *Teorema di Stone-Von Neumann* in QM (Stone, 1930; 1932; Von Neumann, 1930; 1932) che è il cuore del formalismo della QM proposto da Von Neumann stesso nel suo libro, in quanto basato su una particolare versione della nozione di *spazio vettoriale di Hilbert*³⁷, come, appunto, formalismo unificato fra meccanica delle matrici e meccanica ondulatoria.

In questo formalismo, gli stati di un sistema di Meccanica Quantistica sono definiti come *vettori* di un determinato spazio euclideo, lo spazio di Hilbert, appunto, gli osservabili quantistici, p, x , sono gli *operatori hermitiani* del *prodotto interno* (cfr. nota 79) che caratterizza questo spazio, le *simmetrie* del sistema sono *operatori unitari* su questo spazio³⁸ e le *misurazioni* possono essere rappresentate come *proiezioni ortogonali* su una base di vettori. Intuitivamente, rappresentate come le proiezioni di un vettore su una base finita di dimensioni ortogonali fra di loro che, nel caso in cui sia definita una metrica unitaria, come è il caso del formalismo della QM, è definita come la *base ortonormale* di uno spazio di Hilbert finito-dimensionale. Dove vale la pena ricordare che siccome abbiamo sempre e comunque a che fare in quantistica con *spazi di probabilità*, tali dimensioni altro non sono che i *gradi di libertà* del suddetto spazio (cfr. § A4.3 in Appendice A).

³⁷ Generalmente, uno spazio di Hilbert si definisce come «uno spazio vettoriale reale o complesso dotato di un prodotto interno che definisce una funzione-distanza, per cui lo spazio è uno spazio metrico completo».

³⁸ Effettivamente, operatori (mappe) suriettivi (“molti ad uno”) che preservano il prodotto interno.

Dal concetto di operatore unitario a quello dell'isomorfismo fra uno spazio di Hilbert e quello dei suoi osservabili

Siccome il concetto di operatore unitario può essere usato anche per definire *isomorfismi* fra spazi di Hilbert, un'altra proprietà fondamentale degli spazi di Hilbert della QM e che ogni spazio di Hilbert \mathcal{H} definito sui *complessi*, i cui vettori rappresentano gli stati di un sistema quantistico è *dualmente isomorfo* con lo spazio di Hilbert \mathcal{H}^* dei suoi operatori hermitiani A^* di posizione e di energia, cioè $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}^*$. Essi, restituendoci sempre e comunque *valori reali* come quelli che si ottengono dalle misure (probabilistiche) effettivamente realizzate sono – ricordiamocelo sempre! – *gli unici osservabili* in QM.

Centralità del formalismo dell'algebra degli operatori in QM e QFT

Per i nostri scopi sistematici, è evidente che, con la meccanica delle matrici di Heisenberg e gli spazi di Hilbert che ne conseguono, il formalismo dell'*algebra degli operatori* ha assunto una rilevanza fondamentale in QM e in fisica e con essa il metalinguaggio della TC, come abbiamo anticipato fin dall'inizio di questo lavoro (cfr. (Landsman, 2017) per una dimostrazione). Una rilevanza ulteriormente accentuata dal fatto che *campi* (non le funzioni d'onda) e operatori sui *campi* sono gli oggetti fondamentali della QFT come Weinberg già ci ha ricordato (Weinberg, 2002).

Il concetto di relazione canonica di commutazione negli spazi di Hilbert

L'altra fondamentale conseguenza che l'introduzione degli spazi di Hilbert nel formalismo della fisica quantistica è che essi evidenziano la soluzione del problema di rendere commutative le *variabili canoniche* p, x di un sistema quantistico – che per il principio d'indeterminazione non commutano – e dunque la possibilità di rappresentare la sua dinamica mediante il formalismo tipico della Meccanica Classica, lo spazio degli stati (cfr. § A1. in **Appendice A**). Esso, nel caso della QM sarà *uno spazio vettoriale di Hilbert* definito sui numeri complessi con cui definire le *aspettative probabilistiche* con le quali trovare gli osservabili di un sistema quantistico in un determinato stato.

La gaussiana di una variabile canonica commuta con la FT della gaussiana dell'altra

In effetti, la possibilità di utilizzare spazi vettoriali di Hilbert che soddisfino la condizione di commutatività in QM, dipende dal fatto che la funzione d'onda (gaussiana) f di ogni variabile canonica, x o p , in QM *commuta* con la *trasformata di Fourier* della funzione d'onda (gaussiana) dell'altra variabile canonica, \hat{p}_x o \hat{x}_p , rispettivamente. Di qui deriva la nozione fondamentale in fisica quantistica della *relazione di commutazione canonica* (*Canonical Commutation Relation*, CCR), cioè la relazione

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar \mathbb{1} \quad (16)$$

Fra l'operatore di posizione x , l'operatore della quantità di moto p_x nella direzione di moto di x di una particella puntiforme in una dimensione, dove $[x, p_x] = xp_x - p_x x$ è il commutatore di x e p_x , i è l'unità immaginaria, \hbar è la costante di Planck *normalizzata* sulla circonferenza trigonometrica perché posta in relazione a delle frequenze: $h/2\pi$ e, infine, $\mathbb{1}$

è l'operatore unitario di Born. Invece, nella Meccanica Classica il commutatore sarebbe *nullo* e quindi $\{x, p\} = 1$ perché le variabili canoniche commutano senza residui legati all' \hbar di Planck.

Di per sé il formalismo degli spazi di Hilbert riguarda la dinamica di una sola particella

Da quanto illustrato in **Appendice C** discutendo della meccanica delle matrici di Heisenberg con l'aggiunta dell'operatore unitario di Born, è evidente che questa versione della CCR per la QM viene fatta giustamente risalire all'articolo congiunto di Born, Heisenberg, Jordan (Born, Heisenberg, & Jordan, 1925) che definirono in quel contesto la «condizione quantistica» (cfr. Eq. (16)). Anche se solo nel formalismo di Von Neumann basato sugli spazi di Hilbert acquista piena evidenza l'equivalenza con la meccanica ondulatoria di Schrödinger.

Il principio di sovrapposizione in QM

Infine, a causa del *principio di sovrapposizione* in QM, mentre uno stato *puro* riguardante la funzione d'onda statistica di una singola particella corrisponde a un *raggio* nello spazio di Hilbert, un *vettore* nello spazio di Hilbert corrisponde allo stato quantistico come *sovrapposizione di diverse funzioni d'onda*. Cioè, corrisponde a uno *stato misto*, rispetto a molte particelle anche di tipo diverso *sovrapposte* nello stesso stato quantistico e che sono comunque indistinguibili a causa del principio di indeterminazione.

L'importanza del calcolo dell'energia totale degli stati sovrapposti

Fin da adesso, comunque, anticipiamo che l'evidenza *teorica e sperimentale* di quante e quali siano le particelle sovrapposte è data dal valore *dell'energia totale* associato a quello stato quantistico, algebricamente corrispondente ai *coprodotti delle algebre di Hopf* nei calcoli sui reticoli di numeri quantici della QM o della QFT (cfr. § 2.8.4 e **Figura 2-34**).

Principio di sovrapposizione conseguenza dell'essenziale linearità della meccanica ondulatoria e delle matrici

Come sappiamo, la *sovrapposizione quantistica* è un principio fondamentale della QM che non ha corrispondenza nella Meccanica Classica e che si basa sulla *linearità* dell'equazione di Schrödinger. Afferma che due o più stati quantistici, in quanto rappresentati da funzioni d'onda statistiche, possono essere «sommati» o ψ -*sovrapposti* in modo da ottenere un altro stato quantistico valido. E, al contrario, ogni stato quantistico può essere rappresentato come una somma di due o più stati quantistici distinti. Ovviamente, si tratta di un'altra conseguenza delle interferenze «costruttive» o «distruttive» tra due o più forme d'onda della QM che rivelano il comportamento *ondulatorio* degli oggetti quantistici e che avevamo introdotto discutendo l'esperimento-base della «doppia fessura» in QM. Matematicamente, ripeto, il principio di sovrapposizione è una conseguenza della *linearità* dell'equazione di Schrödinger e della meccanica delle matrici di Heisenberg, per la quale ogni combinazione lineare (somma) di soluzioni di equazioni lineari sarà anch'essa una soluzione.

Necessità di estendere il formalismo degli spazi di Hilbert agli spazi di Fock

In ogni caso, per introdurre il principio di sovrapposizione nella QM, abbiamo bisogno di *estendere il formalismo di Von Neumann* riguardo gli spazi di Hilbert che in tale formalismo sono concepiti per rappresentare ciascuno lo spazio degli stati di *un'unica particella quantistica* (Von Neumann, 1932).

2.6.9 Il formalismo degli spazi di Fock e il principio di sovrapposizione

L'uso del principio di sovrapposizione suggerito da Dirac per estendere il formalismo della QM a rappresentare il comportamento di N particelle

Il principio di sovrapposizione è stato originariamente suggerito da Paul Dirac per estendere il formalismo QM per modellare il comportamento quantistico non solo di singole particelle, ma anche di molte particelle che “occupano” lo stesso stato quantistico, in modo da determinare una sorta di *spostamento ontologico* nella fisica quantistica dal considerare le particelle come oggetti fondamentali, al considerare *i campi oscillanti*, $f(x_n, t)$ cioè, diverse distribuzioni spaziali n variabili nel tempo t di N particelle come oggetto fondamentale di indagine.

L'idea dell'uso del principio di sovrapposizione come «seconda quantizzazione» rispetto alla QM

In questo quadro, le “particelle” devono essere considerate come *quantà* dei rispettivi campi oscillanti, come i fotoni sono quanti dei campi elettromagnetici. Lo stesso Dirac ha suggerito il nome di *Seconda Quantizzazione* (SQ) a questo approccio alla QM (Dirac, 1958), perché, nel caso di sistemi non relativistici in cui il numero di particelle è *fisso e finito*, ma troppo grande per usare la funzione d'onda di Schrödinger, fornisce un'alternativa formale per i calcoli in QM – effettivamente, in questo senso lo SQ è un «algoritmo». Nel caso della QM, infatti, l'approccio è immediatamente compatibile con *il numero finito dei gradi di libertà* della distribuzione di probabilità (spazio di Hilbert) dipendente dal Teorema di Stone Von-Neumann per la QM appena richiamato.

Problema che quando applicato alla QM relativistica o QFT difficoltà a mantenere la condizione di unitarietà

Tuttavia, quando inseriamo i campi quantistici nel contesto della SR, quando passiamo cioè nel regno della *teoria quantistica relativistica* dei campi (QFT), esiste il problema che *il numero dei gradi di libertà* del sistema non può essere considerato più finito, ma *in(de)finito*, e quindi richiede soluzioni diverse per questo problema. Infatti, quella di Dirac della SQ è di per sé insufficiente perché non vale più la condizione di unitarietà, se non *sotto ipotesi molto forti*, come vedremo subito.

In ogni caso, questa estensione della QM implica introduzione di nuovi concetti

Per i nostri obiettivi, seguendo la ricostruzione dell'approccio della SQ applicato sia alla QM che alla QFT (Becchi, 2010), è importante considerare *due nuovi concetti* introdotti di conseguenza da Dirac nel formalismo generale di QM e QFT e che, come tali, hanno un significato generale nella fisica quantistica ben oltre l'approccio della SQ. In effetti, Dirac sviluppò la costruzione di SQ originariamente per il trattamento della sovrapposizione tra un numero finito di *bosoni* identici (fotoni), fin dai suoi

primi lavori nel 1927 sull'emissione e l'assorbimento della radiazione elettromagnetica dall'atomo di idrogeno (Dirac, 1958), costruzione poi estesa ai *fermioni* (elettroni) da un successivo lavoro di Pascual Jordan e Eugene Wigner nel 1928. (Jordan & Wigner, 1928).

I due nuovi concetti introdotti, usando l'ulteriore contributo del matematico russo Vladimir Fock (1898-1974) alla loro formalizzazione matematica (Fock, 1932), sono:

Due nuovi concetti

1. Il concetto di spazio di Fock

◆ *Lo spazio di Fock*, inteso come un particolare tipo di spazio di Hilbert generato dal prodotto tensoriale di diversi spazi di Hilbert “a una particella” per soddisfare il principio di sovrapposizione a n particelle. Tale estensione introduce per la prima volta la nozione di *vuoto quantistico* (*Quantum Vacuum*, QV) come stato dello spazio di Fock occupato da 0-particelle.

2. Il concetto di operatori di creazione/annihilazione di particelle dal/nel vuoto quantistico

◆ *Gli operatori duali creazione-annichilazione* che agiscono sullo spazio di Fock. Essi sono generalmente indicati come, rispettivamente A, A^\dagger . In effetti, questi operatori non agiscono direttamente sullo stato di un unico spazio di Hilbert \mathcal{H} a N -particelle (bosoni e/o fermioni) ma per usarli correttamente abbiamo bisogno di estendere lo spazio degli stati (Hilbert) da \mathcal{H} a $\mathcal{H}_S^{(N)}$ – dove l'indice N è il numero degli spazi di Hilbert “a una particella” necessari e il pedice S indica il tipo di *simmetria* (bosonica o fermionica) che l'algebra deve soddisfare (vedi sotto). Ovvero, dobbiamo passare alla somma diretta di N spazi degli stati (di Fock), ognuno dei quali, a sua volta, è il prodotto tensoriale di N spazi di Hilbert a singola particella - in modo da costituire uno spazio di Fock $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ per N particelle. Intuitivamente, possiamo considerare lo spazio di Fock come un “libro”, le cui “pagine” sono “stati di Fock”, cioè spazi di Hilbert, ognuno dei quali è un prodotto tensoriale³⁹ di N spazi di Hilbert a una particella.

³⁹ Il prodotto *tensoriale* algebrico $V \otimes W$ tra due spazi vettoriali V e W definiti sullo stesso campo numerico, è esso stesso uno spazio vettoriale, dotato dell'operazione di *composizione bilineare* \otimes . Ovvero, di una mappa da coppie ordinate nel prodotto cartesiano $V \times W$ a $V \otimes W: V \times W \mapsto V \otimes W$, in modo da generalizzare ai tensori il cosiddetto *prodotto esterno* di una matrice. Una «mappa bilineare» è una funzione che combina elementi di due spazi vettoriali per produrre elementi di un terzo spazio vettoriale, ed è lineare in entrambi i suoi argomenti (bilineare). Invece, il «prodotto esterno» di due vettori di dimensioni n e m è una matrice $n \times m$. Nel caso di due tensori, il prodotto esterno è un altro tensore. Una proprietà fondamentale dei prodotti tensoriali tra spazi vettoriali a dimensione finita è che lo spazio vettoriale risultante ha dimensioni uguali al prodotto delle dimensioni dei due fattori: $\dim(V \otimes W) = \dim V \times \dim W$. Questo distingue il *prodotto tensoriale* dallo spazio vettoriale a *somma diretta*, la cui dimensione è la somma delle dimensioni delle due

In effetti, l'intuizione originale dietro l'approccio di Dirac dell'algoritmo SQ in QM è la stretta relazione esistente tra un sistema quantistico composto e il *prodotto tensoriale* (cfr. nota 39) dei relativi spazi di Hilbert (Dirac, 1958). In altre parole, «lo spazio degli stati di un insieme di sistemi (legati dal principio di sovrapposizione) è identificato con il prodotto tensoriale degli spazi degli stati di ciascun sistema» (Becchi, 2010).

Il carattere algoritmico del formalismo della SQ in QFT

A questo punto, sempre seguendo (Becchi, 2010), possiamo definire informalmente la nozione di «spazio di Fock» come la «somma» di un insieme di spazi di Hilbert che rappresentano stati quantistici a 0-particelle, stati a 1-particella, stati a 2-particelle e così via. Perciò – utilizzando il simbolismo bra-ket della matrice di Dirac per denotare la funzione d'onda di uno stato quantistico $|\psi\rangle$ – l'algoritmo SQ per N -particelle sovrapposte identiche funziona nel modo seguente.

Esplicitazione dell'algoritmo di SQ

Partiamo dallo stato di 1-particella, applichiamo l'*operatore di annichilazione* e otteniamo lo stato di 0-particella ovvero lo stato di *vuoto quantistico* (QV) denotato come $|0\rangle$. Poi applichiamo una volta, due, tre volte..., N -volte l'*operatore di creazione*, e otteniamo di nuovo lo stato di 1-particella, e quindi di 2-particelle, 3-particelle, ..., N -particelle, denotati rispettivamente, $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, \dots, |N\rangle$, dove N denota il *numero di occupazione* delle particelle di (ovvero quante particelle occupano) ciascuno stato dello spazio di Fock risultante.

Per la definizione di uno spazio di Fock

Su questa base - date le definizioni di «prodotto tensoriale» \otimes e di «somma diretta» \oplus tra spazi vettoriali date nella nota 39 – possiamo dare una caratterizzazione più formale dello *spazio di Fock* $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ come somma diretta dei prodotti tensoriali di N copie di spazi di Hilbert \mathcal{H} a singola particella. Cioè:

$$\mathcal{F}_v(\mathcal{H}) := \mathcal{H}^{(0)} \oplus \mathcal{H}^{(1)} \oplus_{N=2}^{\infty} \mathcal{H}_{S_v}^{(N)},$$

somme: $\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W$. Proprio come – per fare un altro esempio dell'operazione di somma diretta in algebra che conosciamo molto bene anche senza definirli – il *piano cartesiano (bidimensionale)* è una somma diretta $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, dove \mathbb{R} sono le coordinate del piano cartesiano definite sui numeri reali.

$$\text{dove: } \bigoplus_{N=2}^{\infty} \mathcal{H}_{S_v}^{(N)} := (S_v(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})) \oplus (S_v(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H})) \oplus \dots \quad (17)$$

Il problema del Teorema di Haag delle infinite rappresentazioni non-equivalenti (spazi di Hilbert) in QFT

Come vediamo nella formula, il numero degli spazi di Hilbert che compongono lo spazio di Fock per rappresentare stati quantistici sovrapposti può andare, in linea di principio, *all'infinito*, sottraendo con questa supposizione un valore algoritmico alla costruzione SQ di Dirac, visto che formalmente un algoritmo è per definizione un'operazione per sistemi a *stati finiti*. Tuttavia, come dimostra il *Teorema di Haag* (Haag, 1955), questo è vero nella QFT relativistica dove *di per sé non vale* il Teorema di Stone-Von Neumann che limita le rappresentazioni (spazi di Hilbert) ad *un solo sistema quantistico* (cfr. la condizione di unitarietà imposta da Born alle matrici di Heisenberg) e quindi a un numero comunque finito di rappresentazioni (spazi di Hilbert) unitariamente equivalenti. Viceversa, in QM, dove il Teorema di Stone-Von Neumann vale automaticamente, il carattere algoritmico matematico-astratto e senza un significato fisico preciso resta, e questo porta molti fisici quantistici senza competenze teoriche di alto livello a considerare anche il QV e il Teorema di Haag costrutti matematici utili per i calcoli, ma senza un preciso significato fisico.

Il ruolo dell'operatore S che rende simmetrico per i bosoni ed antisimmetrico per fermioni il prodotto tensoriale degli spazi di Hilbert in uno spazio di Fock

Inoltre, nella formula (17) che definisce la nozione di spazio di Fock, svolge un ruolo fondamentale l'operatore S_v . La sua funzione è rendere *simmetrico o antisimmetrico* il tensore, a seconda che lo spazio di Hilbert rappresenti N particelle obbedienti, o alla statistica *bosonica* ($v = +$) oppure *fermionica* ($v = -$). Infatti, come sappiamo (Cfr. § 2.6.4) il *principio di esclusione di Pauli* nella QM afferma che due o più *fermioni identici* non possono occupare lo stesso stato quantistico *contemporaneamente*. E questo è garantito dal carattere *opposto* del numero quantistico di spin semintero (con probabilità 0.5) dei fermioni o «quanti dei campi materiali» e che dunque soddisfano una relazione *asimmetrica*, $(\pm 1/2)$ per i fermioni. Questa asimmetria è alla base del fatto che nello stato di sovrapposizione i *fermioni allo stato fondamentale* del sistema cui appartengono si distribuiscono a coppie con spin opposto su livelli distinti di energia e quindi soddisfano la *statistica di Fermi-Dirac*, da cui il termine «fermione». Per intenderci, va ricordata la distribuzione «a scaffali» di diversa altezza dello stato fondamentale di energia di un sistema di Meccanica Statistica «al di là» della soglia stocastica di Boltzmann (quindi in QM) ricordato in § 2.3.2.

Infatti n bosoni a possono esistere sovrapposti in uno stato quantistico

Viceversa, i *bosoni* che sono «i quanti dei campi di interazione» delle tre forze fondamentali quantistiche, hanno spin intero, soddisfano dunque una relazione *simmetrica*, e perciò allo stato fondamentale un qualsiasi numero di bosoni si distribuiscono su *un unico stato sovrapposto di energia minima* allo stato fondamentale, soddisfacendo così la *statistica di Bose-Einstein*, da cui il nome «bosoni».

Invece per il principio di Pauli solo 2 fermioni a spin seminteri possono esistere sovrapposti in un unico stato quantistico

Una formulazione più rigorosa della medesima idea che si applica direttamente alla spiegazione del simbolo S_V in Eq. (17) è la seguente. La funzione d'onda totale è *antisimmetrica* (cioè, cambia di segno) se le particelle sovrapposte sono fermioni. Invece il segno rimane lo stesso se sono bosoni e quindi la funzione d'onda totale è *simmetrica*. Per questo si dice che i fermioni soddisfano *insiemi di relazioni canoniche anti-commutative* (*Canonical Anti-commutation Relations, CARs*), mentre i bosoni soddisfano *insiemi di relazioni canoniche commutative* (*Canonical Commutation Relations CCRs*).

2.7 Teoria quantistica dei campi e il Modello Standard delle particelle elementari

2.7.1 L'interpretazione di Dirac della Teoria Quantistica dei Campi

L'interpretazione di Dirac della QFT relativistica basata sul principio della SQ e il suo limite

Quando passiamo alla QFT relativistica, quando cioè consideriamo quanti di campi materiali (particelle, fermioni) e d'interazione (bosoni di gauge delle tre forze quantistiche fondamentali) che si propagano con velocità che si approssima a c o nel caso di bosoni senza massa (p.es., fotoni) uguale a c , la situazione cambia profondamente, perché la supposizione di unitarietà equivalente delle rappresentazioni (spazi di Hilbert) di un sistema quantistico e quindi l'interpretazione della SQ di Dirac in QFT non può essere accettata così direttamente come nel caso delle sovrapposizioni in QM.

L'estensione della SR alla quantistica implica che il numero delle particelle non sia fisso

Si deve in particolare al contributo di uno dei massimi fisici teorici del nostro tempo, il Premio Nobel S. Weinberg che già conosciamo, in un suo magistrale testo sulla QFT (Weinberg, 2002) l'evidenziazione che la piena riconciliazione fra la SR e la fisica quantistica non può basarsi sull'equazione di Dirac, sebbene sia in sé relativistica. Infatti, ogni possibile applicazione della SR alla quantistica implica che il *numero delle particelle non sia fissato* e, sottolinea Weinberg, ciò implica che l'oggetto proprio della QFT, differentemente dalla QM non siano le *funzioni d'onda* ma i *campi* e gli *operatori* relativi che agiscono sugli spazi di Hilbert. E tutto questo ci riporta agli operatori di creazione/annihilazione sul QV che abbiamo appena visto.

Lo stato di vuoto quantistico $|0\rangle$ come stato fondamentale di minima energia dei campi quantistici da cui n particelle possono essere create/annihilite

Infatti, in QFT, da un lato, lo spazio di Fock con la sua “scomposizione” (una sorta di fattorizzazione usando prodotti tensoriali) in un insieme di spazi di Hilbert componenti, acquistano un preciso significato fisico. Infatti, lo stato di QV $|0\rangle$ viene a corrispondere allo *stato fondamentale* (energia minima) dei campi quantistici del sistema considerato. In questo modo, la costruzione SQ di Dirac perde in una QFT pienamente relativistica il suo sapore puramente algoritmico per acquisire un preciso *sensu fisico*. D'altra parte, come sottolinea lo stesso Carlo Maria Becchi nella sua ricostruzione divulgativa del formalismo SQ a cui ci riferiamo qui (Becchi, 2010), in QFT ci troviamo sistematicamente di fronte al problema degli *infiniti gradi di libertà* che lo spazio di probabilità assume, perché, per usare le parole di Becchi in QFT relativistica, “le particelle sono prodotte e assorbite”, cioè continuamente “create” e “annichilate” da/nel QV usando il formalismo degli operatori di creazione/annihilazione di particelle da/nel $|0\rangle$ in uno spazio di Fock prima illustrato.

Necessario riferimento in QFT al principio di aumento relativistico della massa

Per rendercene conto, si pensi al fenomeno illustrato precedentemente in forma intuitiva nella **Figura 2-12** in § 2.5.2, dell' *aumento relativistico della massa* delle particelle elementari per velocità prossime a c quando abbiamo introdotto l'estensione alla teoria dei campi quantistici (QFT) dei principi della SR, in particolare dell' equivalenza relativistica $E = mc^2$.

Ciò significa che quando usiamo la SQ in QFT dobbiamo aggiungere ulteriori ipotesi

In termini più formali, tutto ciò significa che non possiamo supporre che il teorema di Stone-Von Neumann della QM valga anche nella QFT relativistica usando l'ipotesi della SQ della QM *senza ulteriori ipotesi aggiuntive*. Questa affermazione è il nucleo del cosiddetto Teorema di Haag (Haag, 1955) che afferma l'esistenza di *infiniti gradi di libertà*, o più precisamente, l'esistenza di *infinite rappresentazioni unitarie inequivalenti* nella modellizzazione dei sistemi quantistici nella QFT relativistica. In sintesi, se usiamo la condizione di unitarietà e il Teorema di Stone-Von Neumann stiamo considerando un sistema di QFT *in una sola fase* e quindi ci stiamo precludendo la possibilità di rappresentare il sistema sotto molteplici *transizioni fase* essendo per definizione una transizione di fase legata al *cambio di metrica* e quindi al decadere della condizione di unitarietà. È questo il senso fisico profondo del Teorema di Haag delle infinite rappresentazioni unitariamente *inequivalenti* in QFT che richiede, come vedremo, il passaggio da una QFT basata sulla statistica di Dirac, a quella di una QFT basata sulla statistica di Bogoliubov (cfr. § 2.8.2), come lo stessi Becchi afferma al termine del suo saggio sulla SQ (Becchi, 2010).

La soluzione suggerita da Dirac è quella di rappresentare un sistema a n particelle come sistema di n oscillatori quantistici nel vuoto

Il cuore dell'interpretazione di Dirac della QFT

Il modello della SQ consente di applicare alla QFT i metodi perturbativi

In ogni caso, la (parziale) soluzione proposta in primo luogo dallo stesso Dirac (Dirac, 1958) al problema sollevato da Haag, poi sviluppata nei cinquant'anni seguenti per mantenere comunque l'interpretazione della SQ anche nella QFT relativistica (Zuber & Itzykson, 1980) e sintetizzata in (Becchi, 2010), è quella di modellare i sistemi QFT come *liberamente oscillanti nel vuoto* in modo da poterli interpretare come sistemi *non interagenti* (cioè sistemi energeticamente chiusi).

Più semplicemente, mentre un sistema quantistico in QM può essere interpretato come un unico *oscillatore armonico quantistico* che oscilla nel vuoto secondo l'equazione di Schrödinger, nella QFT relativistica abbiamo a che fare con sistemi quantistici a *n-corpi* che però la QFT nella modellizzazione della SQ di Dirac interpreta come *n-oscillatori quantistici* che oscillano nel vuoto cui l'equazione di Schrödinger non si applica causa l'intrinseca *non-linearità* dei sistemi dinamici interagenti a *n-corpi* sia in fisica classica (Poincaré: cfr. § 2.4.2) che in fisica quantistica (cfr. § 2.8.1).

L'ipotesi di Dirac della SQ che assimila un sistema di QFT a *n-corpi* (dove cioè non vale la linearità del principio di sovrapposizione) come *n-oscillatori quantistici non-interagenti* perché *oscillano nel vuoto*, rende possibile interpretare anche i sistemi QFT a *n-corpi* nel quadro standard della *Meccanica Statistica* di sistemi che sono in *equilibrio* nella *condizione asintotica (limite infinito)*⁴⁰. Ciò significa, nel complesso, la possibilità di applicare anche in QFT (come in QM) i *metodi perturbativi* della Meccanica Statistica per modellare le interazioni di campo, avendo “tagliato” tutte le interazioni indesiderate, in modo da garantire che possiamo sempre usare la *rappresentazione Hamiltoniana canonica* – che vale solo per i sistemi *dinamici chiusi* – anche per la *dinamica* dei sistemi QFT a *n-corpi* per definire la loro *energia totale*.

⁴⁰ Intuitivamente, questa soluzione fu proposta per la prima volta nella *Mécanique Celeste* di Laplace per risolvere il problema dell'applicabilità dell'equazione gravitazionale di Newton anche nel caso di un'interazione fra più di due corpi celesti che renderebbe l'equazione non integrabile, perché la soluzione all'equilibrio non è più praticabile. Infatti, la linearità e quindi l'integrabilità dell'equazione di Newton è legata al fatto che nell'equazione si calcola l'interazione gravitazionale a due corpi, fra quello di massa maggiore e quello di massa minore. Nel caso del sistema solare, si calcola così l'interazione di ciascun pianeta col sole, poi, siccome la somma delle soluzioni di un sistema di n equazioni lineari fornisce la soluzione di un'ulteriore sistema lineare, nel nostro caso, sommando le soluzioni, otteniamo la soluzione dell'equazione gravitazionale dell'intero sistema solare. Il problema nasce, laddove realisticamente dobbiamo considerare un'interazione gravitazionale simultaneamente per n corpi celesti. La soluzione proposta da Laplace è di considerare questo “sistema a molti corpi” nella sua condizione *asintotica* ovvero a distanze spazio-temporali infinite. In tal modo il sistema totale può essere studiato all'equilibrio, così che le interazioni con altri corpi possono venire modellizzate come *perturbazioni* dello stato di equilibrio totale, visto che, appunto, si annullerebbero nella condizione asintotica (cfr. § 2.11.1) dove introdurremo alcuni principi fondamentali della Meccanica Statistica.

Applicazione di questa ipotesi alla modellizzazione di bosoni e fermioni nella QED	I due passi seguiti da Dirac e che lo portarono alla costruzione dell' <i>Elettrodinamica Quantistica</i> (QED), cioè la teoria quantistica delle interazioni elettromagnetiche negli atomi e nelle molecole, consiste nel modellare, in primo luogo campi bosonici (campi fotonici nella QED), e in secondo luogo campi fermionici (elettroni) come liberamente <i>oscillanti nel vuoto</i> .
Applicazione ai campi bosonici	Partendo dai <i>campi bosonici</i> , entrambi i problemi emergenti in tale modellazione della QFT possono essere sistematicamente risolti, supponendo il riferimento alla <i>conoscenza dell'Hamiltoniana del sistema</i> (Becchi, 2010). I due problemi sono: 1) il cosiddetto problema del <i>punto di energia zero</i> legato al principio di indeterminazione, e 2) la necessità di modellare campi quantistici oscillanti liberi usando non un solo oscillatore armonico quantistico come in QM, ma un numero infinito di essi, perché in questo caso <i>tutti gli infiniti modi di oscillazione</i> sono in linea di principio consentiti.
Soluzione di Dirac al problema dell'oscillazione di punto zero	Il “problema dell'energia di punto zero” dipende dal principio di indeterminazione per cui l'energia di un oscillatore armonico deve essere maggiore o uguale al suo valore di punto zero, che nel caso quantistico è la metà del prodotto della costante di Planck e della frequenza ν dell'oscillatore ($h\nu/2$) che in QM corrisponde all'energia dello stato di riposo dell'oscillatore. Nel caso di molti oscillatori indipendenti, l'energia dello stato fondamentale è la somma delle energie di punto zero di tutti gli oscillatori e, naturalmente, questa somma diverge. Tuttavia, poiché ci troviamo in un contesto relativistico slegato da interazioni (<i>unbounded</i>) per l'ipotesi dell'oscillazione nel vuoto, sia i campi elettromagnetici che quelli scalari sono invarianti di Lorentz (cfr. l'equazione relativistica di Lorentz in § 2.5.2). Questa invarianza richiede che l'energia e la quantità di moto allo stato fondamentale svaniscano. In questo modo, il problema dell'energia di punto zero viene risolto “sottraendo sistematicamente questo contributo dall'Hamiltoniana del sistema” (Becchi, 2010), ovvero alla sua <i>rappresentazione canonica</i> in dinamica (cfr. § A3.2 in Appendice A).
Soluzione di Dirac al problema del numero infinito degli oscillatori supponendo che conoscendo l'Hamiltoniana del sistema possiamo ridurli a un numero finito	Per quanto riguarda il secondo problema del numero infinito di oscillatori, il problema consiste nel fatto che ci troveremmo di fronte a un prodotto tensoriale infinito, cosicché diventa impossibile decidere quale spazio di Hilbert corrisponda al nostro sistema quantizzato. Tuttavia, poiché possiamo sempre supporre di conoscere l'Hamiltoniana del sistema, siamo giustificati nel considerare solo l'insieme degli stati di energia finita. In questo modo, il prodotto tensoriale diventa finito e lo spazio di Hilbert risultante ha una <i>base numerabile</i> (Becchi, 2010).

Considerazioni analoghe possono essere applicate anche ai campi fermionici sempre supponendo la definizione dell'Hamiltoniana e che quindi siamo in un sistema chiuso

Considerazioni simili possono essere usate per definire lo spazio di Fock per *i campi fermionici*, in modo che «nella situazione generale abbiamo uno spazio di Fock misto, bosonico e fermionico con un unico stato di vuoto» (Becchi, 2010). Inoltre, nel caso della QFT per i campi fermionici abbiamo l'ulteriore vantaggio, come Dirac notò per la prima volta per la teoria degli elettroni nell'atomo (Dirac, 1958), che i loro modi normali sono quelli la cui energia non è limitata “dal di sotto”. Infatti, nello stato fondamentale dell'atomo di tali modelli, per soddisfare il principio di esclusione di Pauli, i loro modi normali “sotto un certo livello di energia (il livello di Fermi a energia zero)” sono occupati, mentre quelli al di sopra di questo livello sono vuoti. Questo corrisponde all'immagine del “mare di Fermi”. Fra l'altro, questa condizione ha un immediato riscontro sperimentale nella QM (QFT) applicata alla fisica dei materiali (atomica e molecolare).

Ripetiamo che, anche alla luce di quanto affermato da Weinberg e riportato all'inizio di questa sottosezione la piena integrazione della SR nella QFT richiede di andare oltre l'equazione di Dirac. In particolare, ci soffermeremo sulla *trasformazione di Bogoliubov* che integra sistematicamente gli operatori di creazione/annihilazione per campi bosonici e fermionici nella QFT in un modo che l'equazione di Dirac non può sistematicamente garantire, facendo allo stesso tempo della QFT la Fisica Fondamentale della materia condensata (cfr. § 2.8.2)

2.7.2 Il Modello Standard delle particelle elementari: Gruppi di Simmetria e Teorema di Goldstone

Il Modello Standard delle Particelle Elementari: costanti, invarianti, simmetrie e leggi fisiche

Per introdurre la nozione di *Modello Standard* (MS) in fisica delle particelle fondamentali (cfr. (Mann, 2021) per un'ottima e aggiornata sintesi teorica e sperimentale sullo MS) dobbiamo introdurre un'ulteriore *formalismo algebrico* della matematica, quello relativo ai cosiddetti *gruppi di simmetria* con cui rappresentare le *simmetrie* e dunque gli *invarianti fondamentali* della Fisica che è il modo astratto di rappresentare una *Legge Fisica* nella scienza moderna, come Richard Feynman ha sintetizzato nel suo magistrale libro *La Legge Fisica*. Un libro che chiunque voglia capire davvero qualcosa di fisica matematica moderna dovrebbe leggere e che non per nulla è arrivato alla 20ª edizione! (Feynman, 1993). In pratica, ad ogni legge fisica corrisponde una (un gruppo di) *simmetria* e quindi la conservazione di una *grandezza invariante*.

Il concetto di gruppo di simmetria

Un *gruppo di simmetria* in fisica o in matematica è un gruppo di trasformazioni che conservano alcune proprietà fisiche o matematiche di un sistema. Ad esempio, un gruppo di simmetria può descrivere le *rotazioni* o

- le *riflessioni* che lasciano invariato un oggetto geometrico o le trasformazioni che conservano l'energia o la quantità di moto in un sistema fisico.
- Gruppo di simmetria della riflessione e della rotazione
- Un punto da chiarire subito è la differenza fra il gruppo di simmetria delle *rotazioni* e delle *riflessioni* che si vede bene in algebra delle matrici. Infatti, il *determinante* della matrice trasposta (quando invertito righe e colonne della matrice) per il gruppo delle rotazioni è 1, mentre per il gruppo delle riflessioni è -1 . Banalmente quando vedo un'immagine riflessa nello specchio devo invertire la direzione *verso destra* (*destrorsa*) con la *sinistra* (*sinistrorsa*).
- Gruppi di simmetria della SR e della GR
- Così, i gruppi di simmetria sono importanti in fisica perché possono rivelare *proprietà e leggi fondamentali della natura*. Ad esempio, il gruppo di simmetria della SR è il *gruppo di Poincaré*, che descrive come la velocità della luce sia costante e dunque un *invariante* in tutti i sistemi di riferimento. Il gruppo di simmetria della GR è il cosiddetto *gruppo del diffeomorfismo*⁴¹, che descrive come la forma delle leggi fisiche sia invariante sotto *trasformazioni di coordinate arbitrarie*.
- I campi di gauge delle tre forze di interazione fondamentali in fisica quantistica
- Adesso vedremo come i gruppi di simmetria possono anche essere usati per classificare le particelle elementari e le loro interazioni nel MS in base ai loro *numeri quantici* e ai *campi di gauge*. Ovvero, i campi delle tre forze di interazione quantistiche fra particelle elementari, l'*elettromagnetica* che già conosciamo e le due forze quantistiche *nucleari*, la *forte* e la *debole*, mediante cui interagiscono le particelle all'interno dei nuclei degli atomi. I campi di queste forze sono definiti in quantistica «campi di *gauge*», dove *gauge* in inglese significa «calibro» o «regolo di misura» perché legate ad un invariante che è il quanto (o i quanti) del relativo campo di forze, quanti che sono *bosoni* – seguono cioè la statistica di Bose-Einstein – e poiché sono i vettori della relativa forza di interazione sono definiti *bosoni di gauge*: il *fotone*, γ per la forza elettromagnetica, i *bosoni* W^\pm, Z^0 per la forza debole, i *gluoni* (ben 8, vedremo perché), g per la forza forte.
- Oltre i campi e i bosoni di gauge delle tre forze fondamentali ha un ruolo fondamentale nello SM il bosone di Higgs
- Nella seguente figura abbiamo lo schema dei *bosoni di gauge* delle tre forze quantistiche fondamentali con l'aggiunta del *bosone di Higgs* che non è il vettore di una forza ulteriore, ma il quanto del *campo di Higgs* che, come vedremo, gioca un ruolo fondamentale nella giustificazione del MS. Come si può vedere dalla figura, la massa dei bosoni usa una particolare unità di misura dell'energia l'*electron-volt* (eV) diviso c^2 , questo perché nella fisica sub-atomica (QFT relativistica) ciò che conta è la *massa relativistica* delle particelle (cfr. **Figura 2-12**). Per questo la loro massa m viene indi-

⁴¹ In topologia, un *diffeomorfismo* è una trasformazione biettiva fra due *varietà differenziabili* (se vogliamo un omomorfismo che nei due sensi della mappa mantiene la differenziabilità). In pratica è una *funzione invertibile* che mappa una varietà differenziabile in un'altra, tale che sia la funzione f che la sua inversa f^{-1} siano differenziabili.

cata con una misura di energia in rapporto al quadrato della velocità della luce c , in base alla relazione fondamentale $m = \frac{E}{c^2}$ che consegue immediatamente dall'equazione fondamentale della SR: $E = mc^2$. Nel caso delle particelle elementari la misura dell'energia usata è l'eV che corrisponde all'energia cinetica guadagnata da un singolo elettrone dallo stato di riposo, attraverso una differenza di potenziale elettrico di un volt nel vuoto. Il valore numerico di 1eV in joule J è equivalente al valore della carica di un elettrone espresso in coulombs C. In base alla ridefinizione del 2019 del SI di misura delle unità-base, $1eV = 1,602176634 \times 10^{-19}J$. Infine il simbolo G (giga) davanti a eV significa che parliamo di miliardi di eV.

Unified Electroweak spin = 1			Strong (color) spin = 1		
Name	Mass GeV/c ²	Electric charge	Name	Mass GeV/c ²	Electric charge
γ photon	0	0	g gluon	0	0
W^-	80.39	-1	Higgs Boson spin = 0		
W^+ W bosons	80.39	+1	Name	Mass GeV/c ²	Electric charge
Z^0 Z boson	91.188	0	H Higgs	126	0

Figura 2-23. Tabella riassuntiva dei bosoni di gauge delle tre forze fondamentali del MS con l'elettromagnetica e la debole unificate nella forza elettrodebole.

Le simmetrie di gauge delle tre forze come simmetrie locali rispetto alla simmetria globale dell'energia
Il meccanismo universale della rottura di simmetria all'origine delle simmetrie locali delle forze quantistiche

Tutte le *simmetrie di gauge* relative alle forze di interazione sono tutte definite *simmetrie locali*. Infatti, laddove l'energia nella Lagrangiana e dunque nell'intera fisica è un'invariante che si conserva sempre e quindi la sua simmetria è *globale*, le forme di energia e le quantità invarianti (*gauge*) relative alle tre forze quantistiche valgono solo *localmente* non per tutti i sistemi fisici e quindi si tratterà di *simmetrie locali*.

Come abbiamo visto dalla **Figura 2-23** i campi di *gauge* delle due forze elettromagnetica e debole, prima della loro separazione costituivano un unico campo di *gauge*, quello della forza elettrodebole. Dalla *rottura della simmetria locale* elettrodebole sono «emerse» le due simmetrie locali distinte del campo debole ed elettromagnetico, con i loro tipici *bosoni di gauge*. Come illustrato in § A4.4 in **Appendice A**, ogni *rottura di simmetria* con l'emergere di nuove simmetrie è legata ad un *cambio della metrica* del fenomeno osservato e quindi al meccanismo dinamico fondamentale di una *transizione di fase* nello spazio delle fasi del sistema di solito fisicamente dipendente dalla *condizione al contorno* di un *abbassamento della temperatura* e quindi da una temperatura critica T_c a cui la transizione di fase avviene.

Il modello cosmologico del Big-Bang caldo e le sue conferme sperimentali astrofisiche e negli acceleratori di particelle

Nell'universo primordiale una sola forma di energia

Campi quantistici materiali (fermioni) e campi quantistici di gauge di interazione (bosoni)

Due passi

1. Il Teorema di Goldstone

2. I Gruppi di Simmetria $U(1)$, $SU(2)$ e $SU(3)$ per le tre forze quantistiche

Così, dal punto di vista *cosmologico*, usando il modello del cosiddetto «big-bang caldissimo» (*hot big-bang hypothesis*) le rotture di simmetria legate all'emergere di nuovi campi di forze sono legate al *progressivo raffreddamento/espansione* dell'universo. Un'ipotesi che ha ricevuto fondamentali *conferme sperimentali* sia a livello *dell'osservazione cosmologica*, sia al livello degli *acceleratori di particelle* in cui si raggiungono energie e quindi temperature disponibili nell'universo in ere molto più antiche della nostra.

Questo quadro interpretativo significa che nell'universo delle origini *esisteva un'unica forma di energia*. Mediante successive *rotture di simmetria* conseguenti al raffreddamento/espansione dell'universo, abbiamo avuto prima la separazione del *campo della forza gravitazionale* – l'unico campo di forze non (ancora) quantizzato – da un *unico campo di forze quantistico*. Poi un successivo raffreddamento ha reso possibile la separazione del campo della *forza quantistica forte*, dal campo della *forza quantistica elettrodebole*, e infine un ulteriore raffreddamento ha reso possibile la rottura di simmetria della separazione del campo della forza elettrodebole nei campi delle forze quantistiche *elettromagnetica e debole*.

E questo ci porta al quadro generale dei *campi materiali* delle particelle fondamentali con i loro quanti (fermioni: quark, elettroni, neutrini) e dei *campi di gauge delle loro forze di interazione* con i loro quanti (bosoni di gauge) che va sotto il nome del MS delle particelle elementari. Torneremo nel II Volume su questo quadro d'insieme dell'attuale *cosmologia quanto-relativistica* e del suo schema evolutivo con la sua cronologia. Una sintesi la si può trovare in (Basti, 2020) che riassume in poche pagine una quantità di letteratura scientifica al riguardo. Qui ci interessa, invece, approfondire i fondamenti fisici e matematici del MS.

Per far questo, procederemo in due passi.

◆ Dapprima esaminiamo la relazione fra simmetria globale e locale dal punto di vista fisico della nozione di transizione di fase come rottura di simmetria del QV attraverso il *Teorema di Goldstone*.

◆ Come secondo passo esamineremo *i tre gruppi di simmetria di gauge* relativi alle tre forze quantistiche fondamentali del MS dal punto di vista matematico. Distingueremo così fra il *gruppo di simmetria abeliano* della forza elettromagnetica denotato con $U(1)$ e che – a meno del principio di quantizzazione – rende la trattazione quantistica della forza elettromagnetica del tutto simile a quella classica di Maxwell, e quindi fra *i gruppi di simmetria non-abeliani* delle forze nucleari debole e forte. I loro campi manifestano delle proprietà del tutto sconosciute alla fisica classica così che i loro gruppi di simmetria – rispettivamente $SU(2)$ e $SU(3)$ – sono definiti “speciali”. Finché ai fisici non fu

chiara la matematica delle *algebre non-abeliane* che sono alla loro base, il comportamento delle particelle sub-nucleari o “nucleoni” – protoni, neutroni, e la vera e propria folla di mesoni – nonché i loro componenti, i quark, risultavano del tutto incomprensibili se non direttamente assurde.

Il Teorema di Goldstone che modella le rotture di simmetria in QFT come transizioni di fase

Partiamo dal *Teorema di Goldstone* che modella tutte le rotture di simmetria relative ad altrettante transizioni di fase in fisica dei campi (p.es., quelle elencate in § A4.4 in **Appendice A** ma sono solo alcune), in quanto sebbene si manifestino in fisica dei materiali (macroscopica) hanno *tutte il loro fondamento al livello della teoria quantistica dei campi* (QFT) e quindi nel *Teorema di Goldstone*. Jeffrey Goldstone stesso (1933-) – ora emerito del MIT *Center of Theoretical Physics* – era partito per formulare il teorema dallo studio della transizione di fase *superconduttiva* di determinati materiali (Goldstone J. , 1961) per poi applicarlo insieme a Steven Weinberg (1933-2021) ed ad Abdus Salam (1926-1996) in QFT alla rottura di simmetria della forza elettrodebole grazie al cosiddetto “meccanismo di Higgs (Higgs, 1964), facendone un ingrediente fondamentale della fisica delle particelle elementari⁴². Salam e Weinberg per questo ottennero insieme a Sheldon Glashow (1932-) il Premio Nobel in Fisica nel 1979.

L'esempio della transizione di fase ferromagnetica

Per i nostri scopi introduttivi al Teorema di Goldstone, invece della transizione di fase superconduttiva, useremo quella di più facile comprensione della transizione tra la fase *ferromagnetica* e *paramagnetica* che ha nella temperatura di Curie, diversa per i diversi materiali, la sua temperatura critica T_c . Il suo collegamento con la fisica delle particelle dipende dal fatto che la forza associata al *campo magnetico* dipende dal cosiddetto *momento magnetico* degli atomi del materiale che ha la sua origine nel *momento angolare* legato agli *spin* degli elettroni di quell'atomo (cfr. **Figura 2-26**)⁴³. Sotto la temperatura di Curie i materiali magnetici passano alla fase magnetica mediante l'allineamento spontaneo in unica direzione (*coerenza di fase*) dei vettori di magnetizzazione creando così un *potenziale magnetico*, vettori che nella fase paramagnetica erano invece allineati *casualmente*. Viceversa, alla temperatura di Curie, un magnete perde la *coerenza di fase* dei vettori di magnetizzazione. Gran parte dei materiali magnetici possono però riacquistare la loro proprietà magnetica sotto l'azione di un campo magnetico esterno (= induzione magnetica).

⁴² D'altra parte, alla stessa conclusione era arrivato contemporaneamente a Goldstone un altro Premio Nobel della Fisica (2008), Yoichiro Nambu (1921-2015). Cfr. (Nambu & Jona-Lasinio, 1961a; 1961b).

⁴³ Il *momento angolare* è l'analogo, relativo alla velocità del moto rotatorio di una particella, del *momento cinetico* o «quantità di moto» mv relativo al moto rettilineo di una particella. Ed infatti ambedue i momenti si conservano per sistemi isolati e quindi sono parte dell'Hamiltoniana del sistema (cfr. § A3.2 in **Appendice A** ed Eq. (28)).

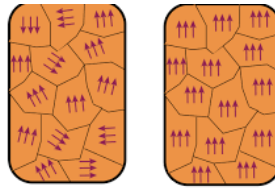


Figura 2-24. Rappresentazione intuitiva del processo di magnetizzazione spontanea dei magneti sotto la temperatura di Curie come transizione di fase (rottura spontanea di simmetria) dallo stato paramagnetico (sinistra) con i vettori di magnetizzazione allineati casualmente (simmetria del vuoto come stato disordinato) a quello ferromagnetico (destra) con relativa creazione di un potenziale magnetico B (stato ordinato) lungo l'unico asse di magnetizzazione. Nel senso inverso avremo di nuovo una transizione di fase (rottura di simmetria), quella alla fase paramagnetica sopra la temperatura di Curie.

Generalizzazione del concetto di transizione di fase mediante il Teorema di Goldstone

Quando confrontiamo la **Figura 2-24** relativa alla “creazione” di un potenziale magnetico con la **Figura 2-1** relativa alla “creazione” di un potenziale cinetico legato all’allineamento dei vettori del momento cinetico degli atomi in Meccanica Statistica (termodinamica) dei sistemi isolati, alla luce dell’analogia fra *momento angolare intrinseco* dello spin delle particelle elementari e del *momento cinetico* del loro moto rettilineo (cfr. nota 43) possiamo intuire il cuore del *Teorema di Goldstone* che modella la nozione di rottura di simmetria nella fisica dei campi delle particelle elementari.

Teorema di Goldstone e le infinite rotture spontanee di simmetria del vuoto

Tale Teorema, infatti, introduce in QFT e in cosmologia quanto-relativista il meccanismo universale delle *infinite rotture spontanee di simmetria (Spontaneous Symmetry Breakdowns, SSBs) del vuoto quantistico $|0\rangle$* , legato alle *irriducibili fluttuazioni dei campi quantistici al loro stato fondamentale*. Ricordando che lo “0” nel simbolo del QV significa che “0 particelle” occupano lo stato di vuoto, le fluttuazioni del vuoto è un altro modo per dire che continuamente dal/nel vuoto vengono create/annichilite particelle, secondo il meccanismo delle infinite SSBs del Teorema di Goldstone che per questo costituisce il cuore della QFT e in particolare del MS.

Il concetto di rottura spontanea di simmetria del QV

Le transizioni di fase legate alle rotture di simmetria del QV hanno intuitivamente la stessa struttura della transizione di fase *disordine (QV) / ordine (coerenza di fase)* della transizione di fase paramagnetica / magnetica, rispettivamente, con la proprietà che sono tutte rotture di simmetrie *spontanee*, senza cioè il bisogno di un campo *esterno* che induca la transizione, come, invece, nel caso dell’induzione magnetica dopo la transizione alla fase paramagnetica sopra la temperatura di Curie.

Perché non c'è alcun "esterno" possibile al QV né in fisica né in cosmologia

Non c'è infatti *cosmologicamente* nessun "esterno" possibile al QV inteso come l'insieme dei campi quantistici al loro stato fondamentale, o se vogliamo, come il sostrato dinamico comune del nostro universo – lo stesso campo gravitazionale o meglio il suo progenitore alle origini era quantizzato (è la cosiddetta *singolarità relativistica* della GR (Basti, 2020) – e, nel caso del *multiverso*, attraverso molteplici big-bang, di tutti gli universi possibili (Steinhardt & Turok, 2002).

Differenza fra QV e vuoto meccanico

Il vuoto diventa un ponte che collega tutti gli oggetti tra loro. Non può esistere alcun corpo isolato e l'attore fisico fondamentale non è più la particella, ma il campo, cioè le distribuzioni dello spazio delle particelle variabili nel tempo. Le particelle diventano i "quanti" di questo campo materiale, allo stesso modo in cui i fotoni sono i quanti del campo elettromagnetico (Del Giudice, Pulselli, & Tiezzi, 2009, p. 1786).

Il concetto di QV come sostrato dinamico delle infinite SSBs cui si riduce l'evoluzione del cosmo quantorelativista

Dal punto di vista metafisico la QFT con la nozione di QV e le sue infinite SSBs come sostrato dinamico "primario" di tutta la materia (massa-energia) dell'universo fisico segna dunque una profonda discontinuità dal *meccanicismo metafisico* di Democrito e di Newton che aveva appunto nel concetto di «vuoto meccanico» che isola i corpi fra di loro, che ha invece nella nozione di *materia prima* come *prote dynamis* di tutti gli enti fisici da cui le forme «emergono» sono edotte in base a principi puramente fisici (cfr. **Capitolo 5**). Per lo stesso motivo ha il suo corrispettivo teologico nella nozione *tohu wabou* dell'«abisso informe e vuoto» di *Gen. 1:2*, termine primo dell'atto creativo di Dio «prima del tempo», mentre la scansione temporale dei «6 giorni della creazione» comincia con le progressive «separazioni nel vuoto informe» di un «cosmo ordinato» attraverso l'azione ordinatrice» (informazione) della Parola Divina (cfr. **Capitolo 6**).

Il QV come stato di massima simmetria fra campi quantistici

Tralasciando per ora queste considerazioni ontologiche e teologiche, se i campi quantistici allo stato fondamentale del QV oscillano in maniera *disordinata* qualsiasi direzione proprio come, intuitivamente, i vettori del *momento cinetico* delle particelle in agitazione termica di **Figura 2-1** o i vettori del *momento magnetico* delle particelle dello stato paramagnetico di **Figura 2-24** questo stato disordinato corrisponde a uno stato globale di *massima simmetria* (= equivalenza degli in(de)finiti modi di oscillazione dei campi quantistici nello stato di vuoto o stato fondamentale).

Distinzione fra simmetria globale e simmetrie locali nel QV in base al Teorema di Goldstone

Ciò significa che esiste la possibilità che un numero indefinito di campi del vuoto "spontaneamente" si coerentizzino/decoerentizzino *localmente* in fase mediante *correlazioni a lungo raggio* fra n campi quantistici allo stato fondamentale. Esiste, cioè, la possibilità di un numero indefinito di SSBs del QV come il Teorema di Goldstone afferma, determinando così la *fluttuazione attorno allo 0* dello stato di occupazione del vuoto $|0\rangle$, ovvero la spontanea *creazione/annibillazione* di particelle da/nel vuoto. In questo

senso si dice che queste fluttuazioni corrispondono ad altrettanti *stati degeneri* del QV.

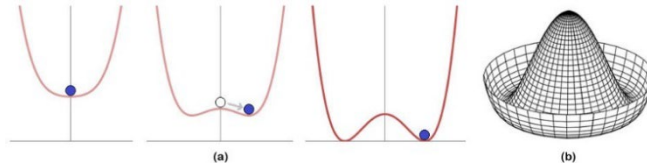


Figura 2-25. Rappresentazione intuitiva del teorema di Goldstone. (a) sinistra: lo stato fondamentale del sistema (minimo della funzione di energia potenziale) non è in equilibrio. **(a) centro:** Questo induce la possibilità che, nonostante la simmetria dell'energia "globalmente" sia conservata, il sistema (pallina blu) possa "oscillare" tra diversi (due, nell'esempio) stati, ognuno dei quali rompe "localmente" la simmetria. **(a) destra:** in effetti, il sistema rimane in uno di quelli disponibili allo stato fondamentale, in modo da determinare una SSB. **(b):** Ora, allo stato fondamentale del QV per le sue infinite fluttuazioni spontanee – coerentemente con il teorema di Haag – ci sono infinite SSBs possibili, in modo da determinare la classica rappresentazione "a sombrero" del potenziale - inadeguata ma che rende l'idea - del teorema di Goldstone.

Il Modello Standard delle particelle e delle forze di interazione in fisica quantistica

Introdotta così intuitivamente la relazione fra simmetrie *globali* e *locali* in quantistica attraverso il Teorema di Goldstone, passiamo al secondo passo ovvero alla fondazione matematica di questa relazione che dovrà aiutarci a capire la definizione di Modello Standard delle particelle elementari come

una teoria di gauge non-abeliana con gruppo di simmetria $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ con un totale di dodici bosoni di gauge: il fotone γ , tre bosoni della forza debole, W^\pm, Z^0 e otto gluoni g .

La distinzione fra gruppi di simmetria "globali" e "locali" o "di gauge" in QFT

Cerchiamo di intuire la differenza fra *gruppi di simmetria globali* e *gruppi di simmetria di gauge o locali* dal punto di vista matematico-algebrico. Fu Maxwell stesso nella sua formulazione classica (non-quantistica) della teoria del campo elettromagnetico nel 1864-65 ad accorgersi per primo che ogni campo vettoriale che può essere scritto come gradiente di una funzione a valori scalari, nel nostro caso quella relativa al *campo elettrico*⁴⁴, può essere sommato al vettore del potenziale senza influenzare il *campo magnetico*. Il risultato è mostrato nella seguente figura.

⁴⁴ Il gradiente ∇f di una funzione differenziabile a valori scalari con molte variabili è il campo vettoriale (o funzione a valori-vettori) il cui valore al punto p è quello della direzione con tasso d'incremento più alto. In parole povere, il gradiente di una funzione denota la direzione di incremento del valore scalare da quello più basso a quello più alto (nel caso del campo elettrico, la direzione del gradiente della forza elettrica è quella che va nella direzione dal punto più lontano a quello più vicino alla carica elettrica).

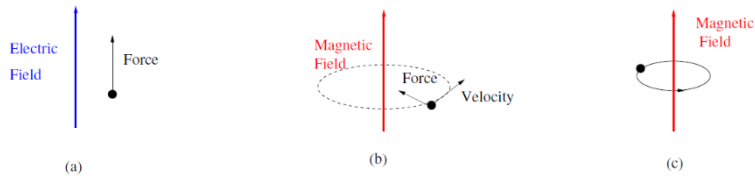


Figura 2-26. (a) Il campo scalare elettrico dell'elettrone con la forza elettrica che si propaga in modo rettilineo. (b) Il campo vettoriale magnetico legato al moto rotatorio (spin) dell'elettrone con il relativo momento angolare (forza magnetica: cfr. nota 43); c) il risultato è che l'elettrone si muoverà in modo rotatorio attorno all'asse di magnetizzazione determinando la forma elicoidale della propagazione dell'onda elettromagnetica come dalla figura seguente. Da (Maldacena, 2016, p. 3).

Il caso paradigmatico della quantizzazione della forza elettromagnetica

La conseguenza è che il campo elettromagnetico, come «somma» del campo elettrico e magnetico si propaga in forma *elicoidale* rendendo così il campo elettromagnetico capace di distinguere fra la *destra* e la *sinistra* del verso di rotazione del campo, da cui deriva la ben nota proprietà di *polarizzazione dell'onda luminosa* a livello macroscopico come mostrato dalla seguente figura.

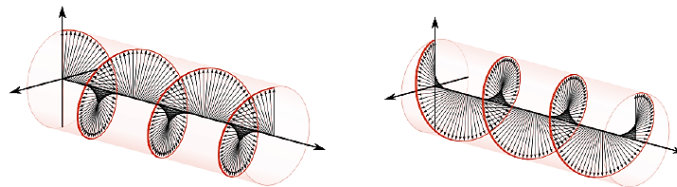


Figura 2-27. Propagazione elicoidale dell'onda elettromagnetica verso destra in ambedue i casi. Si noterà come il campo magnetico di propaga in modo ortogonale a quello elettrico. A destra abbiamo l'onda elettromagnetica polarizzata verso destra, a sinistra polarizzata verso sinistra perché il campo magnetico ruota con momenti angolari uguali in intensità ma con rotazioni opposte.

Simmetria di elicità e di parità nella forza elettromagnetica

La propagazione elicoidale dell'onda elettromagnetica è alla base della cosiddetta *simmetria di elicità* per questa forza: essa si conserva qualsiasi sia il senso di rotazione come si vede dalla figura. Di qui un'altra proprietà di simmetria della forza elettromagnetica e della sua propagazione elicoidale: la *simmetria di parità* legata alla riflessione dell'onda elettromagnetica. La *trasformazione di parità* \mathbf{P} è una trasformazione che inverte il segno delle coordinate spaziali e quindi trasforma un fenomeno meccanico nella sua immagine speculare: $\mathbf{P} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$. Nel caso delle nostre due

onde elettromagnetiche con polarità opposte ma uguale verso di propagazione verso destra, la trasformazione di parità per riflessione significa che l'elicità si conserva sia che l'onda elettromagnetica si propagasse *verso destra* che *verso sinistra*. In ambedue i casi, si invertono per riflessione sia il verso di propagazione che il verso dello spin, ovvero del moto di rotazione intorno al proprio asse della particella.

Quantizzazione della forza elettromagnetica come simmetria locale legata a una particella di gauge (fotone) come vettore di quella forza: definizione del gruppo di simmetria di gauge unitario $U(1)$

La scoperta di questa simmetria del campo elettromagnetico in base alle equazioni di Maxwell fu poi usata da Hermann Weyl (1885-1995), nel suo tentativo di unificare relatività generale ed elettromagnetismo, per congetturare che l'invarianza sotto *cambio di scala* ("gauge") poteva essere usata per definire una *simmetria locale* della GR, quella appunto relativa alla forza elettromagnetica. Così che dopo lo sviluppo della QM e la quantizzazione del campo elettromagnetico, lo stesso Weyl insieme a Fock e a London modificarono la nozione classica di gauge della loro simmetria *locale* rimpiazzando l'invarianza di scala con una grandezza complessa, cambiando così la trasformazione di scala in una *transizione di fase*. Questa è precisamente la *simmetria di gauge unitaria* denotata con $U(1)$ che modella l'effetto del campo elettromagnetico sulla *funzione d'onda* di una particella quantistica con carica elettromagnetica. Questo gruppo unitario di simmetria di gauge soddisfa la fondamentale nozione di *conservazione della parità* dell'equazione di Maxwell anche nella versione quantizzata del campo elettromagnetico.

Passaggio successivo fu l'introduzione di gruppi di simmetria di gauge non-abeliani per modellizzare la rottura della simmetria di parità nelle interazioni subnucleari

Il passaggio teorico successivo di immensa valenza teorica per la sua novità, si deve a Chen Ning Yang (1922-) e Robert Laurence Mills (1927-1999) i quali nel 1954 proposero una geniale soluzione al problema delle interazioni fra le particelle subnucleari o nucleoni (protoni, neutroni, mesoni) che manifestavano un'evidente *violazione della parità*. Tale soluzione era basata sull'esistenza di gruppi di simmetria di gauge *non-abeliani* (dove, cioè, i prodotti non-commutano, ovvero $(a * b) \neq (b * a)$), diversamente dal gruppo di simmetria di gauge *abeliano* unitario $U(1)$ del campo elettromagnetico quantizzato.

Consequente definizione dei gruppi di simmetria non-abeliani $SU(2)$ per la forza debole e $SU(3)$ per la forte

Essi proposero così un nuovo gruppo di simmetria di gauge con "un'unitarietà speciale" $SU(2)$, che risulterà essere poi quella del *campo della forza nucleare debole*. In seguito, un nuovo gruppo di simmetria di gauge non-abeliano con "unitarietà speciale" $SU(3)$ è stato definito per il campo della *forza nucleare forte*. A differenza della forza elettromagnetica, infatti, che ha una sola carica - e quindi della *elettrodinamica quantistica* (QED) che ha un solo bosone di gauge, vettore della forza elettromagnetica, il fotone - la forza forte è caratterizzata da *tre diverse cariche*, definite *cariche di colore*, cosicché la teoria quantistica del campo della forza forte si chiama *chromo-*

dinamica quantistica (QCD) e i suoi bosoni di gauge, i cosiddetti *gluoni*, i quanti della forza forte, saranno $2^3 = 8$.

Peculiarità non-commutativa di $SU(2)$: non-conservazione della parità per la forza debole

La peculiarità dei gruppi di simmetria non-abeliani è che, nel caso del gruppo di simmetria $SU(2)$, tale gruppo per il carattere non-commutativo (non-abeliano) delle sue algebre modella la *non-conservazione della parità* nelle interazioni nucleari deboli, che manifestano perciò una *simmetria di gauge di tipo chirale*, come vedremo fra poco.

Peculiarità non-commutativa di $SU(3)$: la forza forte cresce col quadrato delle distanze

Viceversa, nel caso della *forza forte* che di per sé conserva la parità, il carattere non-abeliano del gruppo di simmetria $SU(3)$, si manifesta nel fatto che la forza forte, a differenza di quella elettromagnetica e gravitazionale, non diminuisce ma *aumenta col quadrato delle distanze*. Ciò significa che per separare due particelle subnucleari che interagiscono mediante la forza forte (i quark e i loro composti, protoni, neutroni, mesoni) occorrerà *avvicinare e non distanziare* le particelle. Un po' come avviene con una molla, più la "stiriamo" (distanziamo i punti sulla molla) più deve aumentare la forza necessaria a distanziarli, e *viceversa*.

Separazione degli adroni (quark) soggetti alla forza forte che compongono protoni e neutroni "avvicinandoli" "comprimendoli" mediante processi di fissione e fusione nucleare

Questo può avvenire mediante i due processi: 1) di *fissione nucleare*, cioè, rompendo il nucleo dell'atomo di elementi fissili ad alto numero atomico come l'*uranio* e i suoi *isotopi*, "bombardandolo" con particelle ad alta energia; oppure 2) di *fusione nucleare*, cioè "fondendo" i nuclei di atomi leggeri, generalmente degli atomi di idrogeno e dei suoi isotopi (deuterio ^2H e trizio ^3H), in atomi più pesanti, generalmente atomi di elio (^4He), "comprimendo" e così avvicinando i nuclei degli atomi leggeri). In ambedue i processi di fissione e fusione nucleare – molto più nel secondo caso rispetto al primo – lo spezzare il legame della forza forte fra quark libera un'enorme quantità di energia, l'*energia nucleare*, appunto. Nel caso della fusione ciò è dovuto al fatto che la massa dell'atomo di elio è minore della somma delle masse dei due atomi di trizio e deuterio e ciò implica un forte rilascio di energia.

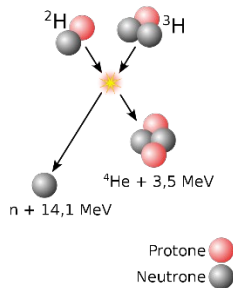


Figura 2-28. Schema della fusione dei nuclei di un atomo di deuterio e di trizio con formazione di un atomo di elio e rilascio di un neutrone e

di una forte quantità di energia in eccesso Da (Shultis & Faw, 2002, p. 151).

Questo sia sufficiente per caratterizzare la *forza forte* nel MS.

Rottura di simmetria della forza elettrodebole e non-conservazione della parità

Concentriamoci invece sui caratteri distintivi della *forza debole* perché è quella con le caratteristiche più originali rispetto alle altre tre forze fondamentali della natura e che possono essere riassunte in una proprietà fondamentale: la *non-conservazione della simmetria di parità* da parte della forza debole. Una proprietà che ha delle conseguenze fondamentali nella fisica delle particelle elementari e nella stessa cosmologia quanto-relativista.

Ruolo fondamentale del campo di Higgs col suo bosone di gauge nella rottura di simmetria elettrodebole

Già abbiamo ricordato che la rottura di simmetria della *forza elettrodebole* $U(1) \times SU(2)$ ha portato alla separazione fra forza elettromagnetica e forza debole, la prima caratterizzata dall'aver un solo bosone di gauge senza massa, il fotone, la seconda da ben tre bosoni di gauge, W^+ , W^- , Z^0 , due con cariche elettriche positiva e negativa, l'altro neutro, ma tutti e tre dotati di una massa enorme, dell'ordine di quella di atomi pesanti come il ferro. La domanda allora è: come si lega questo alla rottura della simmetria di elicità e quindi di parità che caratterizza la forza debole rispetto a quella elettromagnetica?

Per far questo torniamo alla conservazione dell'elicità e quindi della parità tipica della forza elettromagnetica sia nella versione classica che quantistica come illustrato e spiegato più sopra in relazione alla **Figura 2-27**.

Rottura della simmetria di elicità...

Dalla figura risulta evidente che si avrebbe una violazione della parità, se a una riflessione del verso di propagazione e quindi della *quantità di moto p* della particella non corrispondesse una riflessione o inversione del *verso dell'asse di rotazione o spin* della particella. In questo caso la violazione di elicità e quindi di parità significa che la particella non conserva la simmetria riflessiva della parità per il verso di propagazione e di rotazione.

...e rottura della simmetria di parità nella forza debole e la necessità che i bosoni di gauge della forza debole siano dotati di massa

Ora, esiste un esempio intuitivo di violazione della elicità e quindi della parità in meccanica quando pensiamo ad una palla di baseball lanciata con un *effetto-a-giro* dal lanciatore⁴⁵. Infatti, rispetto agli altri giocatori fermi sul campo di gioco la pallina soddisfa l'elicità: verso di propagazione e verso di rotazione di spin si conservano ambedue, sia se la pallina viene lanciata in una direzione che in quella opposta (= simmetria riflessiva). Tuttavia, per un *sistema di riferimento che si muovesse a velocità molto maggiore della pallina* essa sembrerebbe *muoversi in avanti, ma ruotare all'indietro*. La simmetria di

⁴⁵ Si pensi che in Giappone esiste una variante del baseball americano dal nome *gyro-ball* basata sul fatto che per enfatizzare l'effetto-giro nel lancio, il lanciatore invece della mano usa un particolare attrezzo che imprime alla pallina un effetto-giro maggiorato rendendo molto complessa la risposta del battitore con la mazza.

elicità sarebbe rotta e con essa quella di parità e la particella esibirebbe una (apparente) *simmetria chirale*. Questo fenomeno del cambio di sistema di riferimento è rilevante quando consideriamo l'elicità nel contesto della SR e della QFT, e quindi per sistemi di riferimento che si muovono alla velocità di c .

L'elicità è una costante del moto ma non è un'invariante di Lorenz

Per particelle non dotate di massa come il fotone, il gluone o (l'ipotetico) gravitone, elicità e chiralità non si distinguono, ma quando la particella fosse dotata di massa, la particella sembrerebbe ruotare all'indietro e quindi l'elicità sarebbe persa a favore della chiralità. In altri termini, l'elicità è una *costante del moto*, ma *non è un'invariante di Lorenz*. La chiralità è un'*invariante di Lorenz*, ma *non è una costante del moto*. Una particella massiva dotata di spin sinistrorso, quando si propagasse, evolverà in una dotata di spin destrorso, e viceversa.

Rottura della parità per verso destrorso e sinistrorso di propagazione per sistemi di riferimenti in moto alla velocità di c

In sintesi, *la parità non si conserva* se l'inversione del verso di propagazione dell'onda (= riflessione) da verso destra a verso sinistra significasse rompere l'elicità. Significasse, cioè, che mentre il verso di propagazione, della velocità e quindi della *quantità di moto p* della particella soddisfa l'inversione per riflessione non così per il *verso di spin S* . Nella direzione *verso destra* la parità si conserva, ma non così nella direzione *verso sinistra* come viene sintetizzato intuitivamente nella figura sottostante.

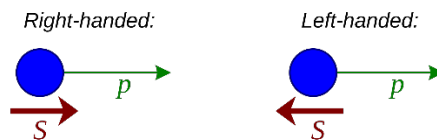


Figura 2-29. Rappresentazione intuitiva della violazione della simmetria di riflessione e quindi di parità per particelle «destrorse» e «sinistrorse» rispetto al verso di propagazione, dove p è la quantità di moto e S lo spin.

Per questo è fondamentale il meccanismo di Higgs mediante cui i bosoni della forza debole possano acquisire massa

A questo punto si intuisce il significato fisico del carattere *massivo* dei bosoni di gauge della forza debole. Abbiamo visto che un modo standard di violare l'elicità in dinamica è quello di considerare il moto di traslazione e di rotazione di una particella in moto, rispetto a un sistema di riferimento che si muova a velocità molto maggiore della particella. Ora, siccome le particelle non dotate di massa si muovono in QFT con una velocità dell'ordine di c , i bosoni di gauge della forza gravitazionale elettromagnetica e forte conservano la parità perché non hanno massa, come richiesto dal Teorema di Goldstone. Quindi i bosoni gauge della forza debole per violare la parità devono essere dotati di massa così da essere molto più lenti di c e quindi poter violare la parità, come l'esempio della pallina lanciata con effetto-a-giro ci ha fatto intuire. Siccome il carattere massivo dei bosoni di gauge è in aperta violazione del Teorema di Goldstone, l'acqui-

sto di massa di questi bosoni coinvolge il *campo di Higgs* che acquisisce così un ruolo fondamentale nella giustificazione del MS.

Furono Goldstone
Weinberg e Salam
a legare la rottura
della simmetria
elettrodebole al
meccanismo di
Higgs

Sono stati lo stesso Goldstone insieme a Weinberg e a Salam a rendersi conto per primi (Goldstone, Salam, & Weinberg, 1962) che il problema della rottura di simmetria della forza elettrodebole poteva avere la sua soluzione facendo riferimento al cosiddetto *bosone di Higgs* e al suo campo scalare, come lo stesso Peter Higgs – a quel tempo giovane ricercatore – più tardi ha affermato, facendo riferimento al succitato articolo di Goldstone e colleghi (Higgs, 1964). Infatti, il mistero della rottura di simmetria elettrodebole si risolve facendo riferimento al campo di Higgs, che agisce come una sorta di campo sottostante a tutti gli altri campi quantistici, in modo che i loro quanti (bosoni e fermioni) *possano acquisire massa* proporzionalmente al *loro grado di accoppiamento con il campo di Higgs*.

Spiegazione
intuitiva del
meccanismo di
Higgs

Intuitivamente, come l'attrito di un corpo in Meccanica Classica è proporzionale alla massa, così bosoni e fermioni possono acquisire massa proporzionalmente allo «attrito» che la loro interazione col campo di Higgs provoca. Perciò, mentre alcuni bosoni di gauge della forza elettrodebole interagiscono col campo di Higgs così da diventare i bosoni di gauge massivi W^\pm, Z^0 della forza debole che fa sì che essa si propaghi solo a breve distanza e che tale forza violi l'elicità e quindi la parità. Il fotone, invece, non interagisce con il campo di Higgs così da diventare il bosone di gauge della forza elettromagnetica che conserva la parità e si propaga a grandissime distanze anche di ordine cosmico. In tal modo, il campo di Higgs e il suo *bosone di gauge scalare* diventano la nozione chiave nella costruzione del MS.

Riconoscimento di
queste scoperte
teoriche e
sperimentali
mediante una serie
di Premi Nobel.

Ricordiamo che per la loro teoria unificata della forza elettrodebole Abdus Salam insieme a Sheldon Glashow e a Stephen Weinberg ottennero il Premio Nobel per la Fisica nel 1979. In seguito, Carlo Rubbia insieme a Simon van der Meer ottennero il Nobel per la Fisica nel 1984 per la scoperta sperimentale dell'esistenza dei bosoni W e Z all'acceleratore LEP (*Large Electron Positron Collider*) del CERN di Ginevra. Questi successi convinsero la comunità dei fisici a costruire l'acceleratore LHC (*Large Hadron Collider*) sempre al CERN di Ginevra in grado di raggiungere le energie necessarie a rivelare sperimentalmente l'esistenza del *bosone di Higgs*. Esso è stato osservato sperimentalmente nel 2012, così che nel 2013 il Premio Nobel per la Fisica fu assegnato a Peter Higgs e a François Englert, gli unici due sopravvissuti del gruppo di cinque fisici che negli anni '60 proposero di usare il «campo di Higgs» per risolvere l'enigma della rottura di simmetria elettrodebole (Higgs, 1964).

2.7.3 Il Modello Standard delle particelle elementari e la necessità del suo completamento

Alla luce di quanto detto nella sottosezione precedente possiamo almeno intuitivamente comprendere la definizione *matematica* del MS come

Una teoria di gauge non-abeliana con gruppo di simmetria $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ con un totale di dodici bosoni di gauge: il fotone γ , per la forza elettromagnetica, tre bosoni della forza debole, W^\pm, Z^0 e otto gluoni g per la forza forte.

Ruolo
fondamentale della
forza debole nelle
interazioni nucleari

Come già accennato, delle quattro forze fondamentali della natura (*gravitazionale, elettromagnetica, forte e debole*) le prime tre *soddisfano la parità* ed infatti commutano con l'Hamiltoniana del sistema, la quarta, la «forza debole» viola la parità. E che la forza debole giochi un ruolo fondamentale nel MS delle particelle elementari, nella fisica sub-nucleare e perciò nella cosmologia quanto-relativista, è testimoniato dal fatto – come per primo ipotizzò Enrico Fermi nel 1933 – che da essa dipende innanzitutto il cosiddetto *decadimento beta* – per intenderci quello del neutrone libero e della pleora di *mesoni*⁴⁶ – ipotizzati dal fisico giapponese Hideki Yukawa (1935) – e che si rivelarono sperimentalmente ai fisici quando per la prima volta a cavallo dell'ultima guerra mondiale ruppero il nucleo dell'atomo di uranio e/o dei suoi isotopi bombardandolo con neutroni ad alta energia.

Infatti, quando viene rotto il nucleo di un atomo, i neutroni *liberi* decadono velocemente secondo il decadimento-beta per effetto della forza debole, che trasforma il *neutrone* in un *protone*, un *elettrone* e in un *antineutrino* elettronico.

⁴⁶ Effettivamente essi si manifestano come altrettanti picchi risonanti dei campi quantistici della fisica subatomica. Nel successivo modello a quark, essi risultano formati da coppie di quark-antiquark e quindi hanno un diametro che è circa 0.6 volte quello degli altri nucleoni (protoni e neutroni) fatti di tre quark, ovvero con un diametro di un *femtometro* (pari a 10^{-15} m), fortemente instabili poiché quelli a vita più lunga durano pochi decimi di nanosecondo (10^{-9} s). I mesoni più pesanti decadono così immediatamente in mesoni più leggeri e quindi in particelle più stabili come elettroni, neutrini e fotoni.

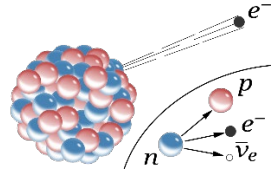


Figura 2-30. Rappresentazione del decadimento beta di un neutrone libero proveniente dal nucleo di un atomo ad alto numero atomico, p.es., l'atomo di uranio.

Tre cariche di colore come caratterizzanti la forza forte nella cromodinamica quantistica e necessità di otto tipi di gluoni come bosoni di gauge della forza forte

Per comprendere come questo avvenga, bisogna ricordare che i *quark* che compongono i «nucleoni» protoni, neutroni e mesoni nel nucleo di un atomo sono di *sei tipi diversi*, definiti dai fisici – evidentemente a corto di termini per definirli – «saporì» (*flavours*): *up, down, strange, charm, top, bottom*. Ora è la forza debole quella che rende i quark *q capaci di cambiare «sapore»* e quindi al neutrone di decadere in un protone. Infatti, il neutrone è costituito da due quark *down* (con massa di circa $4.7 \text{ MeV}/c^2$, carica elettrica $2/3$, spin $1/2$) e un quark *top* (con massa di circa $2.2 \text{ MeV}/c^2$, carica elettrica $-1/3$, spin $1/2$) così da essere elettricamente neutro. Il protone invece è costituito da un quark *down* e due quark *top*, così da essere «più leggero» del neutrone e con carica elettrica $+1$. Il decadimento del neutrone in un protone richiede dunque che l'interazione debole trasformi uno dei due quark *down* del neutrone in un quark *top* «pagando» l'eccesso di massa/energia in termini della produzione di un elettrone e di un anti-neutrino elettronico oltre che in energia elettromagnetica ad alta frequenza (raggi γ).

Ruolo fondamentale della forza debole nel cambio di «sapore» fra sei tipi di quark

Ugualmente la forza debole ha un ruolo nel cambio di sapore non solo dei quark ma anche di particelle molto più leggere dei quark e dei loro composti o *barioni*⁴⁷, i cosiddetti *leptoni* dotati di sola carica debole e che a differenza degli elettroni non hanno carica elettrica, ovvero i *neutrini*. Una proprietà che è stata solo recentemente dimostrata sperimentalmente motivando l'assegnazione del Premio Nobel per la Fisica 2015 ai loro scopritori, dimostrando allo stesso tempo che i neutrini sono *dotati di massa*, confutando così l'ipotesi originaria del MS. Vi torneremo fra poco.

E fra sei tipi di leptoni

In tal modo, nel MS oggi distinguiamo non solo 6 tipi di quark, ma anche 6 tipi di leptoni, 3 carichi elettricamente (*elettrone, muone, tau*) con carica -1 e spin $1/2$, e 3 elettricamente neutri o *neutrini* (*elettronico, muonico, tauonico*), sempre con spin $1/2$.

⁴⁷ I nucleoni, *protoni, neutroni e mesoni* sono i composti della prima generazione di quark (*top e down*) e quindi non esauriscono la classe dei barioni.

Infine, ruolo cosmologico della violazione CP (*charge-parity*) nella trasformazione fra particelle e antiparticelle che può spiegare la prevalenza della materia sull'antimateria

Infine, una terza forma di non-conservazione della parità in cui la forza debole deve giocare un ruolo nella cosiddetta *violazione della CP* (*charge-parity violation*). Tale violazione deve *ipoteticamente* giocare un ruolo, dato che sperimentalmente la sua osservazione richiede delle energie non raggiungibili dai nostri acceleratori. Cosmologicamente, infatti, parliamo di un'età molto antica dell'universo la cosiddetta *era dei quark* dove le energie/temperature, erano talmente alte che la materia esisteva solo sotto forma di un plasma di quark non ancora legati a formare altri barioni (protoni, neutroni, mesoni). Ora, la simmetria della **CP** è quella che governa la trasformazione delle *particelle* nelle loro *antiparticelle*, particelle, cioè che hanno le stesse proprietà delle prime, salvo avere carica elettrica *opposta*⁴⁸. Per questo per indicarli in fisica si usa lo stesso simbolo *negato* della particella, p.es., *e*, *p* per l'elettrone o il protone e \bar{e} , \bar{p} per l'anti-elettrone (o positrone), e per l'anti-protone. Proprietà fondamentale delle particelle di materia/antimateria è quella di annihilirsi reciprocamente quando si incontrano, trasformandosi in *fotoni* ad *altissima energia* o «raggi gamma» e/o in altre coppie di particelle di materia/antimateria di massa minore.

Ruolo cosmologico della violazione di CP

Ora, la trasformazione di particelle di materia in antimateria e viceversa è regolata dalla conservazione della simmetria **CP**, ovvero dell'*inversione per riflessione o parità* della carica e della posizione. Siccome si presume che nell'universo originario materia e antimateria esistessero in *uguale proporzione* l'attuale, evidente, prevalenza nel nostro universo della materia sull'antimateria suppone (nelle ere originarie dell'universo ad alta temperatura) *la violazione della simmetria CP* e di nuovo il ruolo della forza debole.

Quadro generale dello SM fatto di 18 fermioni e 13 bosoni di gauge incluso il bosone di Higgs

Abbiamo così completato l'elenco delle 18 particelle con spin semintero o *fermioni* del MS (9 quark e 9 leptoni) – con i loro partner di antimateria – che si vanno ad aggiungere alle 13 particelle con spin intero o *bosoni*. Ovvero: i 12 *bosoni di gauge* dei campi vettoriali delle tre forze quantistiche *forte, elettromagnetica, debole* più il *bosone scalare di Higgs* con carica elettrica nulla e spin nullo.

Carattere ipotetico del gravitone come bosone di gauge della forza gravitazionale

Nella seguente **Figura 2-31** presentiamo l'elenco completo delle particelle fondamentali, *fermioni* e *bosoni di gauge*, secondo il MS attuale. Ad essa bisognerebbe, infatti, aggiungere un ultimo bosone di gauge, quello del campo tensoriale della *forza gravitazionale*, il cosiddetto *gravitone* con massa e carica elettromagnetiche nulle e spin intero 2. Esso però per il momento è solo ipotetico perché, malgrado esistano diversi modelli matematici di *gravità quantistica*, manca l'evidenza sperimentale dell'esistenza del gravitone. Sebbene, ripetiamolo, la quantizzazione anche della quarta forza fondata-

⁴⁸ L'esistenza dell'*antimateria*, essenzialmente l'antielettrone, fu ipotizzata per primo da Dirac nel 1928 nella sua formulazione originaria della QFT come QED, e quindi dimostrata

tale della natura è un'esigenza non solo di coerenza delle leggi di natura e della loro origine *causale* nell'evoluzione dell'universo, ma anche una necessità che nasce dal fatto che alle origini dell'universo, quando esso aveva le dimensioni della *lunghezza di Planck* $\ell_P = 1,616199256 \times 10^{-35} m^{49}$, la *forza gravitazionale era quantizzata*, oltre che essere repulsiva invece che attrattiva.

Divisione dei fermioni in tre generazioni esistenti a livelli sempre più alti di energia nell'universo

Inoltre, i fermioni e i leptoni sono divisi in tre *generazioni* o *famiglie* a masse crescenti e dove quindi le due generazioni successive alla prima esistono o sono esistite in parti/momenti dell'universo a energie/temperature molto più alte di quella parte/momento dell'universo in cui esistiamo noi. La prima generazione, quella della colonna più a sinistra è perciò costituita da quark e leptoni della nostra materia ordinaria. Delle particelle delle altre due generazioni troviamo tracce o nei raggi cosmici provenienti da parti lontane nello spazio/tempo del nostro universo, o nei nostri acceleratori di particelle quando raggiungono energie sufficientemente alte compatibili con le masse di queste particelle. Infine, nell'elenco non sono citate le particelle di antimateria, ma solo supposte, vista la loro rarità.

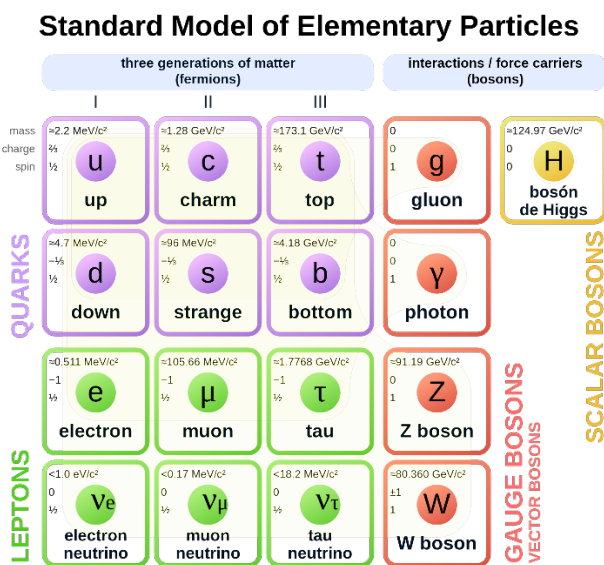


Figura 2-31. Rappresentazione schematica del MS delle particelle (o quanti dei relativi campi materiali fermionici e d'interazione bosonici)

⁴⁹ Essa nasce dal rapporto fra tre *costanti universali* della natura: l'*h* di Planck, la costante gravitazionale *G* e la velocità della luce. Si definisce perciò come: $\ell_P = \sqrt{\hbar G / c^3}$.

fondamentali. Di ogni particella è indicato il *simbolo*, la *massa*, la *carica elettrica* e lo *spin*⁵⁰.

Uso dei diagrammi di Feynman come strumento formale di rappresentazione e di calcolo fra i diversi tipi di interazione fra campi e particelle dello SM

Inoltre, un'esposizione per quanto elementare dei principi dello SM non sarebbe completa senza un accenno ai *diagrammi di Feynman* che costituiscono il *cuore matematico* dei calcoli all'interno del MS (cfr. (Feynman, 2014) per un'esposizione divulgativa). Generalmente, nelle esposizioni divulgative della QM si dice che le particelle (fermioni) interagiscono scambiandosi quanti delle relative forze d'interazione (bosoni di gauge), un po' come dei pattinatori su ghiaccio interagiscono avvicinandosi e allontanandosi scambiandosi un pallone da basket. Nei diagrammi di Feynman – che matematicamente costituiscono il miglior esempio di utilizzo dei metodi perturbativi della Meccanica Statistica in quantistica – i fermioni sono rappresentati da *linee continue* mentre i bosoni di gauge delle tre forze quantistiche da *linee ondulate*. I *vertici* dei diagrammi rappresentano le interazioni secondo i loro diversi tipi (forte, debole, elettromagnetica, elettrodebole) e i loro *angoli* sono misure dell'ampiezza di probabilità e quindi dell'intensità dell'interazione, come nella figura seguente.

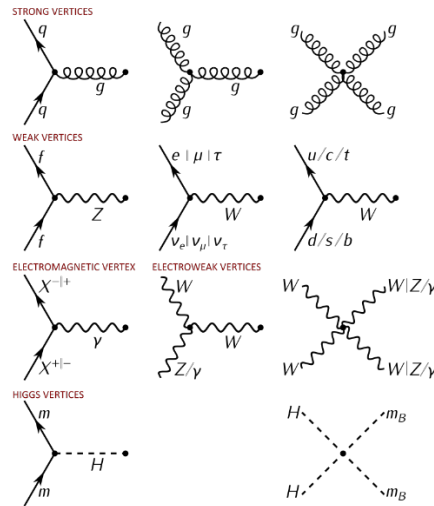


Figura 2-32. Interazioni nel modello standard. Tutti i diagrammi di Feynman nel modello sono costruiti da combinazioni di questi vertici, dove le frecce indicano le particelle in entrata e uscita dall'interazione. q è un quark qualsiasi, g è un gluone, X è una qualsiasi particella carica, γ è un fotone, f è un fermione, m è una qualsiasi particella con massa (con la possibile eccezione dei neutrini), m_B è un bosone con massa, H è un bosone di Higgs non rappresentato da una linea ondolata ma tratteg-

⁵⁰ L'immagine è fra quelle di pubblico utilizzo di *Wikipedia*.

giata perché il bosone di Higgs non è il vettore di una quarta forza quantistica. Nei diagrammi con più etichette di particelle separate da / viene scelta un'etichetta e quindi un tipo di particella. Nei diagrammi con etichette di particelle separate da | le etichette devono essere scelte nello stesso ordine. Ad esempio, nel caso dell'interazione elettrodebole di quattro bosoni, i diagrammi validi sono $WWWW$, $WWZZ$, $WW\gamma\gamma$, $WWZ\gamma$. È consentito anche il coniugato di ciascun vertice elencato (invertendo la direzione delle frecce e quindi dell'interazione)⁵¹.

Infine, esistono chiari *limiti* del MS che richiedono un suo completamento.

I limiti del MS: il carattere massivo del neutrino e la mancanza di una fisica adeguata del neutrino secondo il MS

Come la Commissione del Nobel ha certificato nella motivazione con cui assegnava il Premio Nobel per la Fisica 2015 ai fisici: Takaaki Kajita, dell'Università di Tokyo in Giappone e Arthur B. McDonald della Queen's University di Kingston in Canada, il MS nella sua attuale versione ha bisogno di un completamento. Il motivo dell'assegnazione di quel Nobel è stato infatti di aver dimostrato sperimentalmente che *il neutrino cambia "sapore"* – per esempio durante il viaggio dal sole alla terra dei miliardi e miliardi di neutrini prodotti ad ogni istante dalle reazioni nucleari che tengono “acceso” il sole mediante l'interazione debole. Un viaggio durante il quale essi perdono progressivamente energia, cambiando “sapore”. Il neutrino per cambiare sapore deve quindi essere *dotato di massa*, confutando in tal maniera l'ipotesi originaria del MS. Le parole usate dall'Accademia Reale Svedese nel comunicato stampa ufficiale sono infatti le seguenti:

Per la fisica delle particelle si tratta di una scoperta storica. Il suo Modello Standard dei più interni comportamenti della materia è stato incredibilmente di successo, poiché ha resistito a tutte le prove sperimentali per oltre vent'anni. Tuttavia, poiché esso richiede che i neutrini siano senza massa, le nuove osservazioni hanno mostrato chiaramente che il Modello Standard *non può essere la teoria completa dei costituenti fondamentali dell'universo*. (...) Ora gli esperimenti continuano e un'intensa attività è in corso in tutto il mondo, al fine di catturare neutrini ed esaminare le loro proprietà. Ci si attende che nuove scoperte sui loro più nascosti segreti cambino la nostra attuale comprensione della storia, della struttura e del destino futuro del nostro universo⁵².

Necessità di un'adeguata fisica del neutrino

In particolare, visto che i neutrini ad alta energia pervadono completamente lo spazio tutt'altro che “vuoto” dell'universo, tanto che si parla di una «radiazione cosmica di fondo *neutrinica*» (*cosmic neutrino background radiation* CNBR) oltre quella ben nota «elettromagnetica a microonde» (*cosmic microwave background radiation* CMBR) ci si aspetta da un'adeguata *fisica*

⁵¹ Citato in *Wikipedia* da (Lindon, 2020).

⁵² Cfr. http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2015/press.html

dei neutrini un contributo anche se parziale per risolvere quello che è il limite più eclatante dell'attuale MS. E cioè il fatto che attualmente esso “spiega” neanche il 5% della materia di cui è costituito il nostro universo, ovvero la cosiddetta *materia ordinaria* (4.9%). Essendo il resto (95.1%) della materia costituito:

Mancanza di una spiegazione della materia oscura

- ◆ Dalla cosiddetta *materia oscura* (26.8%), ovvero da una massa invisibile ai nostri telescopi necessaria a giustificare l'energia gravitazionale che tiene insieme le galassie e i cluster di galassie del nostro universo – e che essa sia costituita «in qualche modo» da neutrini è una delle ipotesi più plausibili.

Mancanza di una spiegazione dell'energia oscura

- ◆ E ben per il 68.3% dalla cosiddetta *energia oscura* necessaria a giustificare l'accelerazione dell'espansione del nostro universo cominciata circa in un'era relativamente “recente” del nostro universo, circa 20 milioni di anni fa' (cfr. **Figura 2-33**).

Mancanza di una teoria quantistica della gravitazione

Un altro limite del MS attuale è la mancanza dell'integrazione in esso della *forza gravitazionale* ovvero di una *teoria della gravitazione quantistica* non solo matematicamente consistente – ripeto, esistono diversi modelli matematici al riguardo – ma *sperimentalmente confermata* dalla dimostrazione dell'esistenza del *gravitone*. Recentemente è stata dimostrata sperimentalmente l'esistenza delle *onde gravitazionali* ovvero delle *fluttuazioni del campo gravitazionale* che costituisce il «tessuto dinamico» dello spazio-tempo in base ai principi della GR. Una scoperta avvenuta nel 2015 giusto un secolo dopo la previsione teorica della loro esistenza ad opera di Albert Einstein nel 1916 e che ha fruttato il Premio Nobel per la Fisica 2017 ai loro attuali scopritori. Ci si aspetta però di osservare i gravitoni non dall'osservazione cosmologica ma dalle misurazioni eccezionalmente precise oggi possibili dell'influenza della forza gravitazionale legata alla massa degli atomi sui *campi quantistici elettromagnetici* delle loro interazioni atomiche e subatomiche.

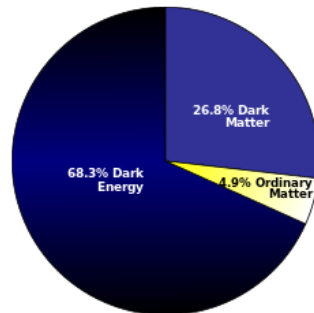


Figura 2-33. «Pizza cosmica», ovvero grafico a torta della materia che costituisce il nostro attuale universo.

Mancanza di una teoria adeguata della violazione di CP

Un ultimo necessario completamento dell'attuale MS riguarda il chiarimento definitivo della violazione della simmetria **CP** di cui abbiamo parlato, come giustificazione dell'assoluta prevalenza della *materia* sull'*antimateria* nel nostro attuale universo. Di questa spiegazione, per le altissime energie coinvolte esiste un'estrema difficoltà a cercare e trovare conferme sperimentali adeguate.

In sintesi...

In conclusione, rimangono fondamentalmente inesplicate nell'attuale versione del MS:

- ◆ La gravità
- ◆ La massa del neutrino
- ◆ La materia oscura
- ◆ L'energia oscura
- ◆ L'asimmetria materia/antimateria

Esiste infine tutta una serie di altri problemi teorici e sperimentali, difficili da spiegare nel nostro contesto cui il MS attuale, non offre soluzioni. Per questo talvolta si parla a livello divulgativo di «una fisica oltre il Modello Standard», anche se, molto più fondatamente, bisognerebbe parlare del *necessario completamento* dell'attuale versione del MS. Parlare di «andare oltre il MS» come se la Fisica Fondamentale potesse fare a meno di esso è quanto meno pretenzioso, se non direttamente sciocco, come ha evidenziato più volte uno dei padri del MS il Premio Nobel per la Fisica Gerard 'tHooft.

Per concludere, abbandoniamo ora, per un momento la fisica quantistica, per introdurre l'ultimo e più definitivo superamento del riduzionismo newtoniano che caratterizzò la fisica moderna alle sue origini, ovvero la *Teoria dei Sistemi Fisici Complessi* o *Teoria della Complessità* dal punto di vista *macroscopico* e *mesoscopico* della Meccanica Classica e Statistica. Dopo questo

necessario *excursus* (§ 2.4.1-2.4.2) torneremo alla fisica quantistica e, più specificatamente alla QFT, individuando nel principio della *foliazione del vuoto quantistico* il fondamento fisico *microscopico* della complessità (§ 2.8).

2.8 L'interpretazione della complessità nella QFT come Fisica Fondamentale

2.8.1 L'interpretazione termica del vuoto quantistico

La differenza fondamentale appena ricordata fra QFT e QM è che mentre i sistemi di QM sono essenzialmente *lineari* causa la *linearità dell'equazione di Schrödinger* e il conseguente uso sistematico del *principio di sovrapposizione* come “somma” delle funzioni d'onda associate alle particelle, questa supposizione di linearità e l'equazione di Schrödinger non si applicano ai sistemi di QFT che sono *intrinsecamente non-lineari* perché di fatto modellizzano *sistemi quantistici «a-molti-corpi»*, proprio come in Meccanica Classica il sistema di Poincaré che abbiamo appena discusso parlando del caos deterministico.

Tuttavia, nell'interpretazione di Dirac della QFT come «seconda quantizzazione» (SQ) che abbiamo discusso brevemente in § 2.7.1 il problema della non-linearità dei sistemi quantistici a *n-corpi* veniva risolto modellizzando il sistema come *n-oscillatori quantistici* che oscillano nel vuoto come fossero *sistemi isolati*, proprio come in QM il sistema è modellizzato come un solo oscillatore quantistico nel vuoto, così da mantenere la validità dei *metodi perturbativi* anche in QFT come il formalismo dei *diagrammi di Feynman* alla base del Modello Standard evidenzia (cfr. § 2.7.3 e **Figura 2-32**).

Infatti, citando (Becchi, 2010) che ci aveva aiutato nella ricostruzione del modello di Dirac della QFT, già avevamo anticipato che quando passiamo dalla QM alla QFT non vale più il Teorema di Stone-Von Neumann del numero finito di rappresentazioni unitariamente equivalenti (= spazi di Hilbert) del sistema perché quando consideriamo lo stato fondamentale dei campi quantistici in QFT – ovvero la cosiddetta condizione di QV dei campi quantistici – bisogna tener conto delle *ineliminabili fluttuazioni del vuoto*. Ovvero che dal vuoto si *creano e si annihilano continuamente* particelle (fermioni e bosoni) tramite i relativi operatori di creazione-annihilazione che conosciamo. È questa la ragione profonda dell'intrinseca *non-linearità* delle equazioni della QFT rispetto alla QM.

Tutto questo è ormai reso evidente anche al grande pubblico dal fatto che i computer quantistici basati sulla *coerenza della funzione d'onda di Schrödinger*

in QM per due elettroni sovrapposti in uno stato quantico, al fine di mantenere almeno per qualche frazione di secondo la coerenza della loro forma d'onda (*entanglement*) e su cui si basa il concetto di *qubit*, occorre far lavorare il sistema a temperatura molto vicine allo zero assoluto (-273°C) per cercare di minimizzare l'effetto delle fluttuazioni termiche del vuoto che ovviamente *decoerenziano* la funzione d'onda. E questo con tutte le implicazioni tecnologiche che questo *isolamento termodinamico* pressoché assoluto del sistema richiede.

Per usare la famosa metafora del *gatto di Schrödinger* lo stato di sovrapposizione di due elettroni $1/0$ su cui il qubit si basa – il fatto che «il gatto nella scatola» dello stato quantico è «simultaneamente vivo e morto» – «quando apriamo la scatola», ovvero effettuiamo un'operazione di misura, interferendo *dall'esterno* col sistema, decoerenziamo la funzione d'onda, determinando così «se il gatto è vivo o morto».

Il concetto di ineliminabile fluttuazione del vuoto in QFT, invece, ci fa comprendere che non esistono in QFT sistemi quantistici *realmente isolati* come la metafora del gatto di Schrödinger suppone, cosicché i fenomeni di decoerenza in quantistica non dipendono esclusivamente dall'interferenza col sistema di osservazione. Il che ci riporta immediatamente, come vedremo subito, all'enunciato del *III Principio della Termodinamica* – delle ineliminabili fluttuazioni termiche delle moli di materia allo stato fondamentale di energia minima – ma stavolta posto al cuore della QFT nella sua interpretazione *termica*, come vedremo subito.

L'evidenza di queste fluttuazioni del vuoto diviene particolarmente rilevante in misurazioni di ottica quantistica basati sull'interferometria ottica. P.es., è possibile usando dei contatori di fotoni (bosoni) sapere esattamente quanti fotoni entrano – diciamo n – in un interferometro dove avvengono i processi di sovrapposizione delle relative funzioni d'onda (*entanglement*) degli stati di polarizzazione di due fotoni: cfr. le foto di questi stati *entangled* di due fotoni per differenti direzioni di polarizzazione in **Figura 2-20**). Ebbene quando eseguiamo di nuovo il conteggio dei fotoni all'uscita dell'interferometro troviamo sempre $n \pm k$ fotoni, dove il numero k dei fotoni in eccesso/difetto è stato evidentemente «creato/annihilato» dal vuoto.

Tutto questo si enuncia teoricamente affermando, come già sappiamo, che per il Teorema di Haag (cfr. § 2.6.9), non vale generalmente la costruzione di Dirac in QFT senza ulteriori ipotesi aggiuntive perché, siccome in QFT un sistema isolato dalle fluttuazioni del vuoto non può esistere, per il fenomeno della decoerenza, il sistema passa *attraverso fasi differenti*. Più precisamente, il Teorema di Haag ha dimostrato che – nel limite del volume infinito dell'analisi funzionale – esiste un *numero infinito di rap-*

presentazioni unitariamente inequivalenti (spazi di Hilbert) delle relazioni di commutazione (per i bosoni) e di anti-commutazione (per i fermioni) *tutte compatibili* con lo stato fondamentale di minima energia dei campi quantistici, ovvero del *vuoto quantistico* $|0\rangle$. In altre parole, in QFT esiste una *non-corrispondenza* fra la *dinamica dei campi* (matrici di Heisenberg) e la sua *rappresentazione* (spazi di Hilbert) diversamente da quanto il Teorema di Stone-Von Neumann afferma per un sistema di QM nel formalismo di Von Neumann (cfr. § 2.6.8). Infatti,

la stessa dinamica (cioè, lo stesso insieme di equazioni di Heisenberg) può portare a soluzioni diverse quando rappresentazioni unitariamente inequivalenti (spazi di Hilbert degli stati fisici) sono usate nel calcolo degli elementi della matrice. *La scelta della rappresentazione per descrivere il nostro sistema è quindi di cruciale importanza* per risolvere le dinamiche: le stesse dinamiche possono essere realizzate in modi diversi (cioè, in diverse rappresentazioni unitariamente inequivalenti). La scelta della rappresentazione può essere considerata come una *condizione al contorno* in base alla quale le equazioni di Heisenberg devono essere risolte (Blasone, Jizba, & Vitiello, 2011, p. 55). Corsivi miei.

Questa “condizione al contorno” potrebbe essere *epistemologicamente* la supposizione che conosciamo l’Hamiltoniana del sistema, come ci ha insegnato Becchi nella sua ricostruzione dell’approccio SQ in QFT (vedi § 2.7.1). Ma potrebbe anche essere *fisicamente* il “bagno termico” con cui un sistema quantistico *non-isolato* scambia continuamente energia in modo *bilanciato* (a “somma-zero”) e quindi ad uno *stato fondamentale* di minima energia con $T > 0^\circ\text{K}$, in un’interpretazione dissipativa della QFT come “fisica a molti corpi” intrinsecamente e irriducibilmente *non-lineare*. In questa modellizzazione, infatti, l’Hamiltoniana del sistema viene definita dalla dinamica stessa introducendo in essa i gradi di libertà del *bagno termico*, secondo il potente principio del *raddoppio dei gradi di libertà* (*doubling of the degrees of freedom* (DDF)), con fondamentali conseguenze per una interpretazione *realistica* dell’ontologia e dell’epistemologia della fisica quantistica (cfr. § 2.8.4).

Questa lettura “termica” delle fluttuazioni del QV è diversa da quella generalmente usata nella QM e quindi in una QFT secondo il modello della SQ. Generalmente in questa lettura, si suppone il QV come lo stato fisico in cui tutti i campi quantistici al loro stato fondamentale hanno un’energia nulla senza introdurre alcun bilanciamento con l’ambiente come nella QFT sotto l’ipotesi dissipativa. In effetti, nell’interpretazione della QM del vuoto, i campi assumono valori casuali intorno allo zero, a causa del principio di indeterminazione. Tuttavia, queste fluttuazioni di campo “avvengono a brevi distanze”, mentre “nel vuoto, a lunga distanza sono in media pari a zero, in modo da recuperare il risultato classico in cui i campi sono tutti con valore nullo” (Maldacena, 2016). In altri termini, con una

tale costruzione matematica, non ci sarebbe alcuna distinzione definitiva tra il QV e il vuoto meccanico della meccanica classica e statistica, in cui nessun contributo energetico proviene dal vuoto e quindi il sistema può essere considerato *isolato* - cioè, i campi quantistici oscillano liberamente nel vuoto come richiesto dal modello di Dirac della SQ per la QFT.

Per semplificare anche troppo, in questo approccio stiamo considerando le inevitabili fluttuazioni del QV alla luce delle medie complessive dell'ipotesi del "caos molecolare" di Boltzmann in SM, e quindi alla luce del *II Principio della Termodinamica* per sistemi "chiusi" o "isolati" che abbiamo illustrato in § 2.3.2. Tuttavia, è possibile fare un passo avanti, considerando, più realisticamente, le inevitabili fluttuazioni del QV allo stato fondamentale alla luce del *III Principio della Termodinamica*. Questo passo avanti è stato fatto dal fisico giapponese Hi-roshi Umezawa durante gli anni '90 del XX sec., portandolo a interpretare la QFT come una *dinamica di campo termico* (*thermo-field dynamics*, TFD) (Umezawa, 1993; 1995). Questa interpretazione è stata originariamente sviluppata per modellizzare i sistemi fisici della materia condensata, e in particolare la neurodinamica del cervello interpretato come un "sistema dissipativo" o un sistema "aperto" sulla base di una interpretazione della QFT come *teoria di campo termico* (Ricciardi & Umezawa, 1967).

Infatti, come sappiamo dalla ricostruzione teorica della motivazione fisica profonda che portò Walter Nernst all'enunciazione della *III Legge della Termodinamica* (cfr. § 2.3.2) per evitare la «catastrofe termodinamica» che dato il rapporto $\Delta S/\Delta T$, l'entropia S del sistema acquisti un valore infinito quando $T = 0$ occorre supporre che in prossimità dello 0°K l'entropia S acquisti un valore costante, il che significa che T non raggiungerà mai il valore di 0°K, ovvero la materia allo stato fondamentale di minima energia non «cristallizzerà» mai in un'unica configurazione, ma comunque i campi materiali «fluttueranno» sempre. Nernst dimostrò quindi che per evitare la catastrofe termodinamica dobbiamo supporre che la *capacità termica* C di una qualsiasi mole di materia *non è affatto costante*, ma *svanisce*, nel limite $T \rightarrow 0$, in modo da rendere ΔS finito, come deve essere. Ciò significa tuttavia che vicino allo zero assoluto 0°K, c'è una discrepanza tra la variazione del contenuto di *energia interna* del sistema U e l'apporto di *energia libera* F dall'esterno. Possiamo evitare un tale paradosso – che violerebbe la *I Legge della Termodinamica* del bilancio energetico in qualsiasi sistema fisico – supponendo che questo misterioso *supplemento interno* di energia sia dato dal vuoto per qualsiasi sistema fisico.

Tutto ciò significa che alla luce della *III Legge della Termodinamica* il QV con le sue ineliminabili fluttuazioni in QFT va interpretato come una sorta di *riserva universale di energia* con una temperatura $T > 0^\circ\text{K}$. Ciò significa che

nessun sistema fisico – classico o quantistico – è concepibile come «isolato» o «energeticamente chiuso», poiché è necessariamente «aperto» alle inevitabili fluttuazioni del vuoto nel suo sfondo. Allo stesso tempo ciò significa che, nella QFT interpretata come Fisica Fondamentale, a qualsiasi livello di organizzazione «complessa» della materia (cfr. la nozione di «foliazione del vuoto» in § 2.8.4) il QV con le sue ineliminabili fluttuazioni corrisponderà allo stato fondamentale di minima energia con $T > 0^\circ\text{K}$ di un qualsiasi aggregato di campi materiali. La *conseguenza ontologica* per la Fisica Fondamentale è che non possiamo più concepire i sistemi fisici, né a livello microscopico, o mesoscopico, o macroscopico, come *isolati nel vuoto meccanico*, secondo la rappresentazione meccanicistica classica della fisica galileiano-newtoniana.

Il vuoto diventa un ponte che collega tutti gli oggetti tra loro. Nessun corpo isolato può esistere, e l'attore fisico fondamentale non è più la particella, ma il *campo*, cioè le distribuzioni spaziali di particelle che variano nel tempo. Le particelle diventano i «quanti» di questi campi materiali, allo stesso modo in cui i fotoni sono i quanti del campo elettromagnetico (Del Giudice, Pulselli, & Tiezzi, 2009, p. 1876).

Per completare questa ricostruzione storica, dobbiamo ricordare che l'interpretazione “termica” di Umezawa della QFT come fisica fondamentale dei sistemi biologici e neurali, non può giustificare un *meccanismo di memoria* adatto ai cervelli come sistemi dissipativi perché in questo approccio ogni nuovo *script* di memoria (coerenza di fase dei campi) sovrascrive quello precedente. Questo limite è superato dall'ulteriore formalizzazione da parte di Giuseppe Vitiello e del suo gruppo del principio della *foliazione del vuoto quantistico* basato sull'evidenza teorica – e sperimentale, prima di tutto nelle neuroscienze – che diverse e stabili coerenze di fase dei campi quantistici allo stesso stato fondamentale *bilanciato* col bagno termico (somma nulla delle energie in entrata e uscita dal sistema) con $T > 0$ *possono coesistere* in sistemi quantistici dissipativi, senza interferire tra loro. E anche *possono essere ordinati localmente* l'uno sull'altro, (gerarchizzati) essendo univocamente *indicizzati (labelled) dinamicamente*, in modo da diventare uno strumento efficace utilizzato dalla natura per costruire *sistemi complessi* in fisica e *memorie* effettive che non si sovrascrivono come nel modello di Umezawa, nei sistemi biologici e neurali (cfr. § 2.8.4). Torneremo a lungo su queste nozioni nel **Secondo Volume**, nei capitoli dedicati ai sistemi biologici e neurali, visto che l'esistenza di meccanismi fisici efficienti di memoria *a lungo termine* è alla base sia di una teoria dell'evoluzione biologica scientifica e non ideologica, sia delle stesse neuroscienze cognitive.

2.8.2 Il cuore della QFT come Fisica Fondamentale: la trasformata di Bogoliubov

Abbiamo visto come ogni sistema di QFT è sottoposto a continue *transizioni di fase* per le fluttuazioni del vuoto per la continua generazione/annihilazione di particelle, da cui l'enunciato del Teorema di Haag.

La modellizzazione matematica in QFT del processo di creazione/annihilazione dal QV di bosoni e fermioni come quanti dei loro relativi campi, è stata definita dal fisico e matematico russo Nikolay Bogoliubov nel 1958, originariamente sviluppata per modellizzare in QFT la *transizione di fase superconduttiva* di alcuni materiali (Bogoliubov, 1958; Bogoliubov, Tolmachev, & Shirkov, 1958). Egli dimostrò che, data una coppia di *relazioni canoniche di commutazione* (*canonical commutation relations*, CCRs: cfr. § 2.6.9) – matematicamente definite su una base di funzioni *iperboliche* – per una coppia di operatori di creazione/annihilazione dal vuoto di un *bosone* nello spazio di Hilbert – cioè, $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ – e un'altra coppia di operatori per un altro bosone – cioè $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$ – esiste una trasformazione (*la trasformazione di Bogoliubov*) che mappa la prima coppia di operatori nella seconda.

Lo stesso vale per una coppia di *relazioni canoniche di anti-commutazione* (*canonical anti-commutation relations*, CARs: cfr. § 2.6.9) per operatori di creazione/annihilazione di *fermioni* – cioè $\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} = 0$, $\{\hat{a}, \hat{a}\} = 1$, matematicamente definite su una base di funzioni *circolari*. Corollario del Teorema di Bogoliubov è la dimostrazione che esiste un *isomorfismo* sia delle algebre degli operatori per le CCRs, che delle algebre degli operatori per le CARs che costituiscono perciò due distinte *categorie* per esprimerci nel formalismo della TC. Si possono così modellizzare le differenti transizioni di fase fra campi quantistici bosonici e fermionici che danno luogo a diversi *stati degeneri del vuoto quantistico*, ovvero dei campi quantistici allo stato fondamentale, dando così un preciso significato *costruttivo* al Teorema di Haag in QFT. È in questo preciso senso fisico-matematico che Becchi parlava di una modellizzazione matematica alternativa della QFT da parte di Bogoliubov, rispetto a quella di Dirac della SQ che, viceversa, in qualche modo “subisce” ma non usa costruttivamente il Teorema di Haag.

2.8.3 Il Teorema di Goldstone e il ruolo dei bosoni di Nambu-Goldstone in QFT

Il Teorema di
Goldstone in QFT

È evidente che in questa modellizzazione acquista nuova luce il fondamentale Teorema di Goldstone che già conosciamo (cfr. § 2.7.2) per il ruolo svolto nella definizione del MS delle particelle fondamentali in

QFT, dove le infinite SSBs del QV includono anche gli infiniti “stati degeneri” del vuoto modellizzabili grazie a Bogoliubov.

Teorema di Goldstone, SSBs del QV e instaurazione spontanea di domini di coerenza di fase nei campi quantistici allo stato fondamentale: estensione della funzione d'onda a fenomeni collettivi

Per riassumere, la principale novità introdotta dal Teorema di Goldstone nella QFT relativistica è che ciascuno degli stati degeneri del QV costituisce una SSB del vuoto al suo stato fondamentale. Ogni SSB, a sua volta, corrisponde all'instaurazione “spontanea” – non indotta da un'azione fisica esterna – di *correlazioni a lungo raggio* tra campi quantistici al loro stato fondamentale che determina un *dominio di coerenza di fase* fra alcuni campi quantistici, che corrisponde a un particolare sistema quantistico (ad esempio, un atomo o una molecola) nella sua fondazione in base alla QFT e non alla QM. I domini di coerenza di fase dei campi quantistici mostrano quindi dei comportamenti *collettivi* (p.es., le proprietà fisiche di un dato atomo) che rendono privo di significato il loro trattamento in termini *individuali*, ovvero nei termini della dualità particella-onda secondo l'interpretazione di Copenaghen della QM (cfr. *sopra*, § 2.6.7).

Fondamentali conseguenze teoriche

Questo cambio di interpretazione sui fondamenti della fisica quantistica implica tre conseguenze dal punto di vista del *formalismo matematico* e dell'*ontologia* della fisica quantistica:

Ogni particella della QM corrisponde a un quanto dei campi materiali della QFT. Relazione con le teorie di stringa

◆ *In primo luogo*, tutto ciò significa che ogni “particella elementare” massiva o non massiva dello SM, sia *fermioni* (quark, neutrini ed elettroni) che *bosoni di gauge* (gluoni, fotoni, bosoni Z-W), così come il bosone di Higgs, devono essere considerati in QFT come *quanti dei rispettivi campi materiali e d'interazione*, rispettivamente. Questa posizione ontologica è coerente con il passaggio al formalismo matematico delle cosiddette *teorie di stringa*, dove una particella non è rappresentata da un “punto” e il suo moto come una “traiettoria unidirezionale” nello spazio delle fasi, ma è rappresentata come una *corda vibrante* o *stringa* e il suo moto come una *brana bidimensionale* – dove “brana” è un'abbreviazione della nozione intuitiva di “mem-brana” per indicare che si tratta di un oggetto bidimensionale come un “foglio” che oscilla, “vibra”. Dove l'intensità della vibrazione della corda è *proporzionale all'energia del campo associato* (per un'introduzione alla Teoria delle Stringhe e alle sue potenzialità cfr. (Greene, 2015)).

Ridefinizione della relazione di indeterminazione della QM in QFT

◆ *In secondo luogo*, in QFT vale una relazione di incertezza e quindi una dualità particella-onda, simile a quella di Heisenberg della QM relativa all'incertezza statistica tra posizione x e quantità di moto p_x e di una particella: $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$ (§ 2.6.3) Effettivamente, in QFT, alla luce del Teorema di Goldstone, l'incertezza e quindi la dualità particella-onda riguarda il *numero dei quanti di un campo*, n , rispetto alla *fase del campo*, φ ovvero (Cfr. (Preparata, 2023, p. 61) con l'elegante dimostrazione matematica di questa relazione):

$$\Delta n \Delta \varphi \geq K \tag{18}$$

Dove K è una costante di quantizzazione correlata al tipo di correlazione a lungo raggio coinvolta. Se $(\Delta n = 0)$, φ è indefinito, quindi ha senso trascurare l'aspetto della forma d'onda a favore del *comportamento individuale*, tipo-particella. Al contrario, $(\Delta \varphi = 0)$, n è indefinito perché un *numero estremamente elevato di quanti oscillano insieme* secondo una *fase ben definita*, cioè all'interno di un dato dominio di coerenza di fase. In questo caso, quindi, sarebbe assurdo descrivere il fenomeno in termini di comportamento delle singole particelle, poiché prevalgono *i modi collettivi del campo*.

Indicizzazione univoca dei modi coerenti collettivi dei campi mediante condensati di bosoni-NG

- ◆ *In terzo luogo*, “i modi collettivi dei campi” appartenenti ad un unico dominio di coerenza di fase possono essere *caratterizzati univocamente* (indicizzati) mediante un’ulteriore nozione unificante: un determinato condensato di *bosoni di Nambu-Goldstone* (NG). Essi appaiono in tutte le equazioni della QFT relative *all’instaurazione di correlazioni a lungo raggio* tra campi quantistici. In questo modo, è un’ulteriore conseguenza del teorema di Goldstone che ogni coerenza di fase a lungo raggio tra campi quantistici relativi a una SSB del QV al suo stato fondamentale ha la sua “impronta digitale” nell’unico valore numerico *finito* di un dato condensato di bosoni-NG.

Cambio nei condensati di bosoni-NG senza modifica dell’energia

Ora, nonostante *questi quanti di correlazione* fra campi quantistici siano particelle reali, osservabili con le stesse tecniche (diffusione, scattering, ecc.) delle altre particelle, tuttavia, poiché la loro massa è comunque trascurabile (o addirittura nulla), la loro condensazione *non implica un cambiamento dello stato energetico del sistema*. Ciò significa che, se il nuovo stato simmetrico della materia conseguente a una data SSB è un possibile stato fondamentale (uno stato di minima energia o un “vuoto” degenero di un sistema QFT), anche lo stato coerente, dopo la rottura della simmetria, rimane *uno stato di minima energia*, quindi stabile nel tempo.

Vediamo brevemente come si è arrivati a definire questo nuovo genere di “quasi-particelle” che vanno sotto il nome di “bosoni-NG”.

Bosoni-NG introdotti da Nambu nella modellizzazione di tutte le rotture di simmetria a cominciare dalla rottura della simmetria chirale nel MS

In particolare, rispetto a quanto già detto in § 2.7.2 per il ruolo del Teorema di Goldstone e del meccanismo di Higgs nella *rottura di simmetria elettro-debole* nella costruzione dello SM, bisogna aggiungere l’applicazione delle SSBs alla modellizzazione da parte del fisico giapponese-americano Yoichiro Nambu (1921-2015) della *rottura di simmetria chirale elettro-forte* (cfr. § 2.7.2 e **Figura 2-29**) nella *cromodinamica quantistica* (Nambu & Jona-Lasinio, 1961a; 1961b). Cioè, nella QFT della *forza forte* con le sue tre distinte *cariche di colore* per mezzo delle quali i quark interagiscono. Per questo suo fondamentale lavoro sul ruolo delle rotture di simmetria nella costru-

zione dello SM, Nambu fu insignito del Premio Nobel per la Fisica nel 2008, condiviso con altri due fisici giapponesi Makoto Kobayashi (1942-) e Toshihide Maskawa (1940-2021) per la loro “teoria sulla rottura di simmetria che predice l’esistenza in natura di almeno tre famiglie di quark” nello SM (cfr. §§ 2.7.2-2.7.3 e Figura 2-31).

Differenza fra i bosoni-NG e i bosoni di gauge del MS: sono senza massa e non sono vettori di energia perché quanti delle correlazioni a lungo raggio fra campi quantistici

Il riferimento al lavoro teorico di Nambu sulle rotture di simmetria in questo nostro contesto è fondamentale per il ruolo che egli assegnò ad una nuova classe di bosoni, *i bosoni-NG*, nella teoria delle rotture di simmetria in QFT e che egli per primo definì delle “quasi-particelle” per le loro strane proprietà (Nambu, 1960). Essi, infatti, sebbene appaiano in tutte le equazioni della QFT e obbediscano alla statistica di Bose-Einstein (sono, cioè, *bosoni*), tuttavia non sono *bosoni di gauge* ovvero “quanti di una delle quattro forze fondamentali di interazione” (*fotoni, bosoni Z-W, gluoni, gravitoni*) dello SM esteso alla gravità quantistica. Inoltre, i bosoni-NG non solo non sono quanti di energia, ma sono con massa — anche se sempre molto piccola (se la simmetria non è perfetta in spazi finiti) —, o *senza massa del tutto* (se la simmetria è perfetta, nel volume infinito dell’analisi funzionale). Essi sono infatti *quanti delle onde di correlazione a lungo raggio fra campi quantistici* propagantesi nel vuoto, che costituiscono il cuore del Teorema di Goldstone e del MS, così che i condensati di questi bosoni possono venire *sempre e univocamente* associati ai *differenti modi collettivi di oscillare in fase* dei campi quantistici come ciò che li *indicizzano univocamente*.

Indicizzazione delle coerenze di fase fra campi mediante condensati di bosoni NG

Ovvero, ogni coerenza di fase di campi quantistici è associata univocamente al condensato di un numero finito \mathcal{N} di bosoni-NG, così che ogni *transizione di fase* - e/o rottura di simmetria del QV - in QFT non è caratterizzata solo da un *parametro d’ordine* - una grandezza statistica la cui metrica cambia repentinamente nella transizione di fase - ma anche - con una terminologia presa dalla teoria dell’informazione - da un *parametro di controllo*.

Ruolo dei condensati dei bosoni-NG nella QFT dei sistemi biologici e neurali e quindi nella computazione quantistica basata sulla QFT a temperatura ambiente

In altri termini, il condensato di un numero \mathcal{N} di bosoni-NG dinamicamente *indicizza* ciascuna fase di campi quantistici, costituendo, nel caso dei sistemi biologici e neurali un vero e proprio *indirizzo di memoria* analogo a quello dei nostri calcolatori. In tal modo si pongono le basi per una teoria della computazione quantistica basata sulla QFT per $T \gg 0$ come in natura, e non sulla QM per $T \approx 0$ come nella tecnologia attuale, con tutte le complicazioni del caso (Basti, Capolupo, & Vitiello, 2017). In altri termini, è possibile progettare computer quantistici basati sulla QFT - in particolare in ottica quantistica - che lavorano a *temperatura ambiente* esattamente come accade in natura nei sistemi biologici e neurali.

Differenti
denominazioni dei
bosoni-NG nella
QFT della materia
condensata

D'altra parte, è stato Nambu stesso ad evidenziare la sostanziale analogia fra il ruolo dei bosoni-NG nella fisica sub-nucleare delle interazioni forti e nella fisica della materia condensata (Nambu & Jona-Lasinio, 1961a; 1961b), dove prendono diversi *nomi* in base alle differenti *fasi topologiche* della materia che essi indicizzano.

Nella fisica dello
stato solido
prendono il nome di
fononi

Ad esempio, nella *fisica dello stato solido*, i bosoni-NG sono chiamati *fononi*, perché sono i quanti dei *modi coerenti collettivi* di oscillazioni meccaniche (elastiche) delle molecole. In questo caso, infatti, la rottura della simmetria riguarda la *simmetria sferica galileiana* – quella per cui posso orientare in qualsiasi direzione gli assi cartesiani della funzione s/t che rappresenta il moto di un corpo lasciando invariante la funzione in meccanica – nella propagazione del moto vibrazionale meccanico delle molecole. Secondo questa simmetria quindi le vibrazioni meccaniche delle molecole si propagano casualmente (cioè, soddisfano una simmetria sferica) in qualsiasi direzione dello spazio 3D determinando macroscopicamente lo *stato gassoso* della materia. La rottura di tale simmetria *abbassando la temperatura* determina la loro oscillazione in fase lungo la direzione *longitudinale*, nord-sud, corrispondente macroscopicamente alla transizione di fase allo *stato liquido* del comportamento collettivo delle moli di una qualche sostanza (ad esempio, lo stato liquido di un flusso d'acqua)⁵³. Oppure, *abbassando ulteriormente la temperatura*, l'oscillazione in fase è anche lungo la direzione *trasversale* (est-ovest), corrispondente allo *stato solido*, così da “imprigionare” le molecole in un volume finito. Nel caso di un *reticolo cristallino rigido di atomi/molecole* oscillanti, i loro modi di oscillazione coerenti determinano *la distribuzione regolare secondo una legge periodica delle particelle nel reticolo*, in modo da determinare dinamicamente *la struttura geometrica regolare di un cristallo* – ad esempio, le belle geometrie dello stato ghiacciato dell'acqua in un fiocco di neve che ci hanno incantato fin da bambini! Come si vede è la dinamica che determina la geometria (cinematica) dei sistemi meccanici, non viceversa, una bella vittoria di Aristotele su Pitagora e Platone!

Nelle transizioni di
fase
ferromagnetiche
prendono il nome di
magnons
 (“magnoni”)

Un altro esempio è la più volte citata transizione alla *fase ferromagnetica* di un materiale (cfr. **Figura 2-24**), anche questa dipendente criticamente dalla *temperatura* (la “temperatura di Curie”), dove i relativi bosoni-NG sono denotati in letteratura come *magnons* – “magnoni” si direbbe in italiano, ma è un termine che non viene usato per ovvi motivi. In questo caso, infatti, la simmetria rotta è *la simmetria rotazionale del dipolo magnetico* degli elettroni. E il fenomeno macroscopico della *magnetizzazione* consiste

⁵³ Si pensi all'esperienza quotidiana dell'acqua che bolle, che esemplifica la continua variazione della lunghezza di correlazione dell'oscillazione in fase delle molecole d'acqua, e quindi il “confine dinamico” in continua evoluzione della transizione di fase vapore-liquido dell'acqua.

nella correlazione tra tutti (la maggior parte) degli spin degli elettroni, in modo che essi “scelgano”, tra tutte le direzioni possibili, quella propria del vettore di magnetizzazione rompendo l’ergodicità del sistema.

Nella materia organica e nell’acqua prendono il nome di polaroni

Infine, nella *materia organica* (composti del carbonio) e nell’acqua, in cui soltanto e non casualmente interagiscono le molecole organiche – “l’acqua *matrice della vita*”: questa è la ragione profonda per cui oltre l’80% del nostro corpo è fatto di acqua, e più del 90% delle nostre molecole sono di acqua –, i bosoni-NG sono chiamati *polaroni*. In effetti, la simmetria rotta in questo caso è la simmetria rotazionale dei *dipoli elettrici* che caratterizzano l’acqua e le molecole organiche. Le modalità coerenti di propagazione delle correnti di dipolo sono infatti il “segreto dinamico” per cui le biomolecole distanti “possono sentirsi l’un l’altra” (*entanglement*) nell’ambiente “acquoso” interno-esterno della cellula, tanto da costituire la *base fisica dei modi collettivi ordinati* in cui consistono in ultima analisi, sia le *strutture complesse* della materia biologica, sia le *sequenze ordinate di reazioni chimiche* di una funzione biologica (p.es., la digestione).

Il ruolo centrale dei domini di coerenza di fase dei campi di dipolo elettrico nell’acqua e quindi in biologia, in genetica e in neurofisiologia

Il meccanismo dinamico secondo il quale le molecole d’acqua, oltre una data soglia di densità, possono condensare in *domini di coerenza* (*coherence domain, CD*) di fase tra i loro campi di dipolo elettrico è oggi ben noto (cfr. (Brizhik, Del Giudice, Maric-Oehler, Popp, & Schlebusch, 2009) e (Ho, 2014) per una sintesi più recente con molti riferimenti bibliografici). Il nucleo di tale meccanismo è che in ogni CD d’acqua le molecole oscillano coerentemente tra due configurazioni delle loro nubi elettroniche, in modo da produrre un campo elettromagnetico oscillante con la stessa frequenza. Il CD d’acqua può, quindi, attrarre per risonanza un piccolo numero di molecole “ospiti” diverse dall’acqua, che condividono così l’energia immagazzinata nel CD. Abbiamo in questa maniera una modalità molto più efficiente dei cosiddetti *processi di diffusione* a base stocastica introdotti dall’ultimo lavoro di A. M. Turing poco prima della sua tragica fine, come metodo fondamentale per la modellizzazione della *morfogenesi* nella materia biologica (Turing, 1952). Un metodo che anche per queste sue nobili origini è ampiamente usato negli studi sperimentali in biofisica e biochimica, anche se i processi diffusivi per la loro casualità sono di principio molto inefficienti per rendere possibili che si verifichino reazioni chimiche altamente selettive, dato che le forze chimiche si propagano solo a brevi distanze, e invece qui abbiamo bisogno delle correlazioni a lungo raggio della QFT usando i campi di dipolo.

Ruolo dei CD e dei polaroni nella specializzazione cellulare

Ad esempio, questo dei CD è il nucleo dinamico della *specializzazione cellulare* in epigenetica, dove solo alcune sequenze del DNA che, ricordiamolo, è lo stesso per tutte le cellule di un dato organismo, sono attivate/disattivate, a causa della presenza/assenza delle molecole appropriate nell’ambiente circostante. In breve,

l'interazione tra chimica e campo elettromagnetico produce un'oscillazione collettiva di tutti i CD che, secondo il teorema generale di coerenza dell'elettrodinamica quantistica, dà origine a una coerenza estesa (Teorema di Goldstone, *N.d.R.*), dove i CD di acqua e le molecole “ospiti” diventano i componenti di “super-domini” molto più estesi che potrebbero essere solo i vari organi (Brizhik, Del Giudice, Maric-Oehler, Popp, & Schleich, 2009, p. 37).

Nella formazione di solitoni nell'elettrodinamica del DNA, nella dinamica delle proteine organiche e nei microtubuli delle cellule

Un altro fenomeno ben studiato strettamente legato ai CD di dipolo elettrico dell'acqua e delle molecole organiche è la formazione, la propagazione e la sincronizzazione reciproca dei cosiddetti *solitoni*, cioè di un'onda solitaria auto-rinforzante (un pacchetto d'onda o un impulso) che mantiene la sua forma mentre viaggia a velocità costante. I solitoni sono causati da una cancellazione degli effetti non-lineari e dispersivi nel mezzo in cui si propaga – esattamente l'opposto di un processo diffusivo. Per capirci, in fluidodinamica, la formazione di una *onda di tsunami* nel mare è un terribile esempio di “solitone marino”!⁵⁴ Nell'elettrodinamica della materia biologica, la presenza di solitoni è ben consolidata sperimentalmente sia nel DNA che nella dinamica delle proteine, mostrando un ruolo fondamentale per l'efficienza del metabolismo cellulare attraverso *i microtubuli cellulari* – i metaboliti, cioè, si propagano nei microtubuli della cellula per onde solitoniche, aumentando così enormemente l'efficienza del processo –, la cui rilevanza per un fondamento quantistico della biochimica e della neuro-dinamica è oggi ben riconosciuta. Vi torneremo nel **Secondo Volume** di questo lavoro.

Il ruolo logico dei CD della QFT per un'ontologia realistica a base dinamica della QFT

Per concludere, si noti ancora quest'altra conseguenza ontologica ed epistemologica su cui ritorneremo nel **Capitolo 4**. È come se la dinamica della materia attraverso le correlazioni a lungo raggio e le relative coerenze di fase dei campi quantistici al loro stato fondamentale, stesse definendo una nuova proprietà e / o funzione e / o predicato di un ente fisico: “essere liquido”, “essere solido”, “essere magnete”, “essere organico”, ecc. In un certo senso proprio – che emergerà chiaramente quando discuteremo brevemente nel **Capitolo 4**, la *semantica coalgebrica* su insiemi NWF, comune sia alla QFT in fisica, sia alla semantica modale dei modelli di Kripke in logica – siamo di fronte ad un'applicazione della interpretazione categoriale della *funzione-significato* per logiche modali booleane (Kupke, Kurz, & Venema, 2004). Una semantica, cioè, dove l'estensione di una funzione/predicato in logica è definita per *omomorfismo* sulla struttura di

⁵⁴ Sempre per fare riferimento all'esperienza ordinaria, chiunque è andato al mare in un giorno di mare agitato, sa bene che ogni onda particolarmente alta è preceduta e seguita da una serie di onde più basse e di forza minore. La presenza di queste onde di intensità minore fa sì che l'energia sia dispersa fra di esse e non concentrata in una sola onda. È esattamente ciò che non accade in un'onda di tsunami in cui tutta l'energia è concentrata in una sola onda (un solitone) di potenza terrificante, come sappiamo.

un'algebra complessa algebre-sottoalgebre, e non insiemi-sottoinsiemi come nella logica insiemistica.

Formalizzazione rigorosa di questa nozione in un'ontologia della QFT basata sulla Teoria delle Categorie

In altre parole, è come se una coerenza di fase fisica costituisse *dinamicamente* il dominio logico/matematico di una data funzione/predicato. Tutto questo può essere rigorosamente formalizzato in TC dove la costituzione del dominio/codomio di oggetti per un dato morfismo (funzione/predicato) dipende dal primitivo delle due mappe $\text{dom}(\cdot)/\text{cod}(\cdot)$ – quindi due *operazioni* che nel caso quantistico sono i processi fisici di costituzione di domini di coerenza di fase fra campi quantistici – e non sono presupposti come ultimamente già dati nella collezione \mathcal{V} come il primitivo del predicato \in dell'appartenenza insiemistica costringe a supporre nella semantica della TI. Torneremo su questi aspetti logico-formali dell'ontologia e dell'epistemologia della Fisica Fondamentale nel **Capitolo 3** e nel **Capitolo 4**, nonché nell' **Appendice C al Capitolo 3** completamente dedicata alla TC in confronto con la TI. Anche se accenneremo qualcosa nella *Conclusione* (§ 2.8) a questo capitolo sulla cosiddetta *interpretazione categoriale* della fisica quantistica, oggi particolarmente studiata (Abramsky & Coecke, A categorical semantics of quantum protocol, 2004; Chiribella, D'Ariano, & Perinotti, 2010; 2011; Coecke, New structures for physics. Lecture Notes in Physics, 813, 2011; Heunen & Kornell, 2022).

2.8.4 La nozione di foliazione del vuoto quantistico e la complessità

Il ruolo delle (bi)algebre di Hopf nei calcoli della QM e della QFT

Prima però di introdurci nella discussione del ruolo delle coalgebre nella logica della TC, occorre capire almeno intuitivamente il ruolo delle strutture coalgebriche nel formalismo della QFT. Per questo, dobbiamo prima comprendere il ruolo delle *algebre di Hopf* nelle computazioni su un reticolo di numeri quantici \mathbf{k} associati a determinate variabili – per esempio l'energia E o il momento J delle particelle – in QM e in QFT. Matematicamente, un'algebra di Hopf H è una *bi-algebra*, perché caratterizzata da due tipi di operazioni, cioè i *coprodotti* della *coalgebra*: $H \rightarrow H \times H$, e i *prodotti* dell'*algebra*: $H \times H \rightarrow H$.

Relazione fra prodotti (algebra) e coprodotti (coalgebra) nelle bialgebre di Hopf

Dove va subito ricordato che i *coprodotti* in algebra sono effettivamente delle *somme (unioni)* fra insiemi *disgiunti* (che non hanno elementi in comune) e questa operazione è fondamentale in logica formale per definire *classi* su *insiemi* come vedremo meglio nel **Capitolo 4**. Denotare le somme disgiunte col termine *coprodotto* nelle *coalgebre* rispetto ai *prodotti* nelle *algebre* è una convenzione in Algebra Universale per denotare strutture o opera-

zioni che sono *duali* o *opposte* fra di loro⁵⁵ dove con *dualità* si intende una relazione fra strutture caratterizzata da un'inversione delle *frece* o *morfismi* (da $f \rightarrow g$ a $g \rightarrow f$) e dell'*ordine delle composizioni di morfismi* (da $f \circ g$ a $g \circ f$).

Struttura autoduale di una bialgebra di Hopf

Ora, in una (bi-)algebra di Hopf H i coprodotti della coalgebra $H \rightarrow H \times H$ e i prodotti dell'algebra $H \times H \rightarrow H$ *commutano* fra di loro perché definiti su un *campo* K caratterizzato da una *mappa lineare* $S: H \rightarrow H$ o *antipode* che manda *dualmente* i coprodotti sui prodotti e le *counità* ε sulle *unità* η , e *viceversa*, cosicché il seguente diagramma che definisce una bialgebra di Hopf *commuta*.

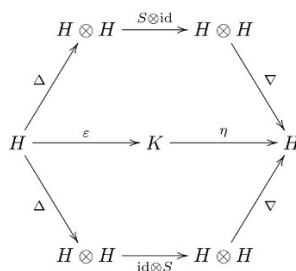


Figura 2-34. Diagramma commutativo che definisce una bialgebra di Hopf, dove la parte sinistra del diagramma definisce la struttura coalgebrica e quella destra la struttura algebrica e che sono assolutamente *simmetriche (dualmente isomorfe)*. Ovvero, una bialgebra di Hopf è una struttura algebrica *auto-duale*.

Il ruolo dei prodotti e dei coprodotti di Hopf nei calcoli quantistici

Il ruolo di una bialgebra di Hopf nei calcoli QM su un reticolo di numeri quantistici emerge immediatamente quando teniamo presente che la “metà algebrica” $H \times H \rightarrow H$ della bialgebra di Hopf si applica quando dobbiamo calcolare, ad esempio, l'energia E di una *singola* particella. Invece la “metà coalgebrica” si applica quando dobbiamo calcolare l'*energia totale* di due particelle (p.es., due *fermioni*) sovrapposte nello stesso stato quantico $E_{tot} = E_1 + E_2$ (i coprodotti sono effettivamente somme di disgiunti, come sappiamo). Nel caso della QM, la commutatività anche dei coprodotti ha senso, perché l'energia totale dello stato quantico di sovrapposizione fra due particelle non cambia scambiando di posto tra di loro le due particelle. E, d'altra parte, i coprodotti nei calcoli della QM e della QFT sono fondamentali, visto che la misura dell'energia totale di uno stato quantico è l'unico modo per sapere quali e quante particelle sono

⁵⁵ Infatti, in TI e in TC posso costruire insieme per *induzione* congiungendo (moltiplicando) insieme (p.es., ottenere l'insieme ab congiungendo l'insieme a con b , $a \wedge b$), ovvero decostruire insieme per *induzione* disgiungendo (dividendo) insieme (p.es., ottenere gli insieme a/b disgiungendoli dall'insieme ab , ovvero $a \vee b$).

sovrapposte in uno stato quantico, visto che come tali, per il principio di indeterminazione, le particelle non sono osservabili.

Carattere non-commutativo dei coprodotti e delle coalgebre di Hopf nella QFT di sistemi dissipativi in bilancio energetico con l'ambiente

Tuttavia, quando siamo in QFT sotto l'ipotesi *dissipativa*, o, più generalmente quando ci troviamo di fronte a sistemi quantistici energeticamente *aperti* la commutatività dei coprodotti dell'algebra di Hopf per calcolare l'energia totale non può più essere ammessa. Infatti, i termini (*sommandi*) dei coprodotti rappresentano qui, necessariamente in modo *non-intercambiabile* e quindi *non-commutativo*, il valore energetico dello *stato del sistema* e il valore energetico del *bagno termico* associato in un sistema in *bilancio energetico* col suo ambiente *fuori dall'equilibrio*. Essi, perciò, non possono essere *definiti sulla stessa base algebrica*.

Nozione di coalgebre di Hopf q -deformate e relazione con la Trasformata di Bogoliubov

In questo caso, lo strumento algebrico corretto da usare nei calcoli sono le cosiddette *coalgebre di Hopf q -deformate*, con *coprodotti non-commutativi*, strettamente correlati alla *trasformata di Bogoliubov* che già conosciamo (§ 2.8.2). Infatti, il *parametro di deformazione q* della coalgebra di Hopf è in questo caso un *parametro termico* corrispondente all'inverso dell'*angolo di miscelazione (mixing angle) θ* (intuitivamente, l'angolo della coerenza di fase per n campi quantistici che appartengono alla medesima fase) della trasformata di Bogoliubov. Per questo, il parametro di deformazione q viene definito talvolta uno *squeezing parameter* perché è come se “strizzasse” *allungandola* la perfetta simmetria sferica di una bialgebra di Hopf di **Figura 2-34** (intuitivamente, come quando comprimessimo un palloncino da due punti opposti dandogli così una forma oblunga) capace di tener conto delle non-linearità delle *correlazioni di fase a lungo raggio* fra i campi quantistici coinvolti (cfr. (Umezawa, 1995) e (Blasone, Jizba, & Vitiello, 2011, pp. 185-234) per ulteriori dettagli fisico-matematici)⁵⁶.

Semplificando al massimo, i coprodotti non-commutativi definiti su due diverse *basi algebriche*, una per lo stato del sistema a e l'altra per il corri-

⁵⁶ Il concetto di *squeezing* per connotare una coerenza di fase che si mantiene anche a lunghe distanze manifestando così una straordinaria robustezza al rumore è molto usato in *ottica quantistica*. Recentemente è balzato di nuovo agli onori della cronaca scientifica visto che lo *squeezing* della luce coerente prodotta da un laser è la chiave della possibilità di realizzare le famose *antenne gravitazionali* che si estendono per svariate centinaia di metri e che sono basate sull'interferenza – debolissima e che richiede una straordinaria precisione nelle misurazioni – fra un'onda (fluttuazione del campo) gravitazionale e un'onda elettromagnetica. Grazie a una sofisticata tecnologia di *squeezing*, necessaria a mantenere la coerenza di un'onda laser a grandi distanze, è stato possibile misurare nel 2015 per la prima volta la fluttuazione del campo gravitazionale, ipotizzata da Einstein giusto un secolo prima nel 1916 (Abbot, LIGO Collaboration, & VIRGO Collaboration, 2016; 2017). Il Premio Nobel per la Fisica 2017 è stato successivamente assegnato a Rainer Weiss, Kip Thorne e Barry Barish per il loro ruolo nella rilevazione diretta delle onde gravitazionali.

spondente stato del bagno termico \tilde{a} sono: $\Delta a_q := (a \times q + q^{-1} \times a) \equiv (a \times q + q^{-1} \times \tilde{a})$.

Necessità di definire i termini dei coprodotti relativi al sistema e al bagno termico implica la loro definizione su distinte basi algebriche e il conseguente "raddoppio delle algebre"

Il fatto che i termini dei coprodotti per un'algebra di Hopf q -deformata devono essere *necessariamente* definiti su due basi algebriche distinte implica il principio del *raddoppio delle algebre di Hopf*: $H \rightarrow (H, \tilde{H})$, cosicché la mappa coalgebrica dell'algebra di Hopf q -deformata non è più $H \rightarrow H \times H$, ma $H \rightarrow H \times \tilde{H}$. Tutto questo significa che dai coprodotti non-commutativi definiti su algebre di Hopf raddoppiate, una per il sistema e l'altra per il bagno termico, passiamo al *raddoppio degli operatori* relativi a queste algebre: $A \rightarrow A \times \tilde{A}$, al *raddoppio degli spazi di fase* su cui gli operatori agiscono: $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \times \tilde{\mathcal{F}}$ e, finalmente al *raddoppio degli spazi di Hilbert* relativi al sistema e al bagno termico: $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \times \tilde{\mathcal{H}}$ con cui rappresentarci un sistema della QFT sotto l'ipotesi dissipativa che stiamo illustrando che soddisfa la *rappresentazione canonica* Hamiltoniana per sistemi "chiusi". Avendo infatti inserito nella rappresentazione i gradi di libertà del bagno termico, il sistema risulta essere un sistema energeticamente chiuso.

Modello-base del raddoppio mediante due oscillatori quantistici che si smorzano reciprocamente

Il modello intuitivo per rappresentarci cosa significa tutto questo è dato da *due oscillatori armonici quantistici che si smorzano reciprocamente*, visto che rappresentano il sistema e il suo bagno termico *in bilancio energetico*. Dove, dunque, *l'energia totale* E_{tot} data dalla somma dell'*energia in entrata* dal bagno termico $+E_{in}$ e *l'energia in uscita* dal sistema $-E_{out}$ è nulla: $E_{in} - E_{out} = 0$. Ovvero, i *campi quantistici* del sistema totale si trovano allo *stato fondamentale* di energia minima per un sistema dissipativo per una temperatura $T \gg 0$ e quindi per un sistema *fuori dall'equilibrio*.

Mediante il raddoppio, recupero della forma canonica dell'Hamiltoniana

Ciò che è fondamentale sottolineare è che con tale raddoppio il sistema composto recupera la condizione essenziale di *unitarietà* propria dell'Hamiltoniana: infatti, ripeto, è globalmente un *sistema chiuso*. Di conseguenza, possiamo usare il raddoppio degli spazi di Hilbert $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \times \tilde{\mathcal{H}}$ per recuperare la *rappresentazione canonica o Hamiltoniana* di un sistema quantistico dissipativo.

Mediante il raddoppio che include nell'Hamiltoniana i gradi di libertà del bagno termico recupero del carattere globalmente "chiuso" del sistema

Ricordiamo, infatti, che la rappresentazione canonica di qualsiasi sistema dinamico, sia nella fisica classica che quantistica, è in termini della sua funzione hamiltoniana (cfr. § A3.2 in **Appendice A**). Essa, come sappiamo, fornisce l'energia totale del sistema dinamico in questione, perché è un'estensione dell'equazione di Lagrange allo studio dell'evoluzione nel tempo di un sistema dinamico. Poiché l'Hamiltoniana rappresenta canonicamente il sistema dinamico come energeticamente chiuso, ciò implica che, se vogliamo scrivere l'Hamiltoniana di un sistema dissipativo, dobbiamo includere in esso anche i gradi di libertà del bagno termico, per garantire che sia *globalmente energeticamente chiuso*. E questo è un formalismo standard

per rappresentare sistemi fisici, quantistici o meno, in condizioni *fuori dall'equilibrio* (cfr. per esempio (Hollands & Longo, 2016)).

Illustrazione del principio del raddoppio nella QFT per campi bosonici

Perciò, poiché noi siamo qui interessati al fenomeno della *complessità* nella fisica della materia condensata che ha nella QFT per sistemi aperti dei campi della forza elettromagnetica la sua Fisica Fondamentale, nel vedere come si applica la Trasformata di Bogoliubov fra *fasi diverse* dei campi quantistici nella modellizzazione di questi sistemi, ci possiamo limitare a illustrare questa trasformazione per le CCRs fra bosoni (fotoni, nel nostro caso), e non per le CARs fra fermioni, rilevanti invece nella QFT della fisica subnucleare (cfr. § 2.8.2).

Il ruolo della Trasformata di Bogoliubov in sistemi raddoppiati

Nel caso delle CCRs per bosoni – che operano su base iperbolica e non circolare, ricordiamolo! –, nella rappresentazione degli spazi di Hilbert raddoppiati, ciò che *commutano* infatti non sono gli stati raddoppiati (sistema/bagno termico), ma gli *operatori* associati $A(\theta)$, $\tilde{A}(\theta)$ – dove θ è l'angolo di fase della trasformata di Bogoliubov –, definiti secondo le seguenti relazioni (cfr., per una sintesi semplificata con la necessaria bibliografia (Basti, Capolupo, & Vitiello, 2017)):

$$A(\theta) = A \cosh \theta - \tilde{A}^\dagger \sinh \theta \quad (19)$$

$$\tilde{A}(\theta) = \tilde{A} \cosh \theta - A^\dagger \sinh \theta \quad (20)$$

Consequentemente le CCRs sono, rispettivamente:

$$[A(\theta), A(\theta)^\dagger] = 1; \quad [\tilde{A}(\theta), \tilde{A}(\theta)^\dagger] = 1 \quad (21)$$

Applicazione inversa della Trasformata di Bogoliubov fra gli operatori

Con tutti gli altri commutatori uguali a zero. Ora le equazioni (19) e (20) altro non sono che le *trasformazioni di Bogoliubov* per la coppia di operatori di creazione/annihilazione di particelle dal vuoto $\{A, \tilde{A}\}$ (cfr. § 2.8.2) applicata evidentemente in maniera *inversa* fra il sistema (Eq. (19)) e il suo bagno termico (Eq. (20)), per significare il *bilancio energetico* per una data temperatura $T > 0$ (= condizione al contorno) fra campi quantistici di un sistema dissipativo allo *stato fondamentale* (cioè, con $E_{tot} = 0$).

Il raddoppiamento applicato agli stati degeneri di vuoto del sistema e del bagno termico

In altri termini, il raddoppio degli stati implica la *sdoppiamento (splitting)* del vuoto: $|0\rangle \equiv |0\rangle \times |0\rangle$ come denotante il vuoto “annihilato” dagli operatori di Bogoliubov A, \tilde{A} : $A|0\rangle = 0 = \tilde{A}|0\rangle$, rispettivamente – e non dagli operatori $A(\theta), \tilde{A}(\theta)$ delle equazioni (19) e (20).

Indicizzazione degli stati degeneri di vuoto mediante condensati di bossoni-NG

Infatti, sintetizzando quanto spiegato in (Basti, Capolupo, & Vitiello, 2017) con maggiorie dovizia di particolari e con tutti i necessari riferimenti bibliografici, il vuoto annihilato dagli operatori di Bogoliubov A, \tilde{A} è:

$$|0(\theta)\rangle_{\mathcal{N}} = e^{i \sum_k \theta_k G_k} |0\rangle = \prod_k \frac{1}{\cos \theta_k} \exp(\tanh \theta_k A_k^\dagger \tilde{A}_k^\dagger) |0\rangle \quad (22)$$

Dove \mathbf{k} denota un insieme di numeri quantici $\{k\}$ e $G_{\mathbf{k}} \equiv -i(A_{\mathbf{k}}^\dagger \tilde{A}_{\mathbf{k}}^\dagger - A_{\mathbf{k}} \tilde{A}_{\mathbf{k}})$ è il *generatore* delle Trasformazioni di Bogoliubov per le equazioni (19) e (20), per un'intera famiglia (categoria) di spazi di Hilbert raddoppiati. Nella suddetta formula, l'indice \mathcal{N} denotante univocamente uno stato "degenerato" del vuoto $|0(\theta)\rangle_{\mathcal{N}}$ si riferisce a un *unico valore finito* del condensato di bosoni NG che allora lo *indicizza* univocamente come una sorta di "impronta digitale", mentre θ denota l'insieme $\{\theta_{\mathbf{k}}, \forall \mathbf{k}\}$ e ${}_{\mathcal{N}}\langle 0(\theta) | 0(\theta)\rangle_{\mathcal{N}} = 1$. Ovvero costituisce un unico stato degenerato del vuoto "raddoppiato" (*entangled*) fra il sistema e il suo ambiente, ambedue indicizzati dal medesimo valore di \mathcal{N} .

Un numero indefinitamente grande sebbene finito di stati degeneri del vuoto (coerenze di fase) indicizzati mediante i bosoni-NG possono coesistere nello stato fondamentale

Ciò che va enfatizzato in questa modellizzazione è che il concetto di "stato di vuoto degenerato" o *stato fondamentale di energia minima* dei campi quantistici (lo stato di vuoto per un sistema dissipativo bilanciato e dunque ad una $T \gg 0$ (p.es., tutti i sistemi biologici che esistono nel nostro universo con una temperatura $-50^\circ\text{C} < T < +50^\circ\text{C}$) appartengono a questa categoria), possono *coesistere stabilmente* al medesimo stato fondamentale come distinti *domini di coerenza di fase* dei campi quantistici *che non interferiscono fra di loro*. Come sappiamo, infatti, ogni fase in fisica è caratterizzata da un particolare *parametro d'ordine* il cui cambio di metrica su tempi più o meno brevi, caratterizza la *transizione di fase relativa*. In base a quanto detto finora, però, tutti i domini di coerenza di fase dei campi quantistici che coesistono al medesimo stato fondamentale dei campi di un sistema bilanciato $|0(\theta)\rangle_{\mathcal{N}}$ di Eq. (22), sono caratterizzati da un unico *parametro di controllo*, il valore \mathcal{N} di un condensato di bosoni-NG (cfr. § 2.8.3).

Il principio della "foliazione del vuoto"

Ora, siccome questi domini di coerenza di fase sono molto stabili nel tempo perché appartengono al *medesimo stato fondamentale di energia minima* possono essere "impilati" uno sull'altro e quindi *gerarchizzati* dando origine così al potente principio della *foliazione del vuoto quantistico (QV-foliation)* che è evidentemente un principio fisico alla base del concetto di *complessità* di un sistema fisico, in una QFT interpretata come *Fisica Fondamentale* della materia, a livello *microscopico, mesoscopico e macroscopico* (cfr. § 2.2). Infatti, l'instaurarsi di *correlazioni di fase a lungo raggio* fra campi quantistici al livello *microscopico* implica un naturale *cambio della metrica*, passando dal livello *microscopico* al livello *mesoscopico* o *macroscopico*.

Il principio di foliazione del vuoto come fondazione in QFT della nozione di sistema complesso e della nozione di memoria in sistemi biologici e neurali

Il che significa, allo stesso tempo, che un determinato fenomeno macroscopico (si pensi al più volte citato fenomeno della magnetizzazione o a quello della super-conduttività o della super-fluidità, etc.) ha la sua spiegazione propria a livello microscopico quantistico. Lo stesso dicasi per i fenomeni e i sistemi complessi che per definizione significano che un sistema è caratterizzato da *molteplici e distinti livelli di organizzazione (auto-organizzazione nei viventi) della materia*. La base fisica della complessità ha, insomma, nel concetto microscopico della *foliazione del vuoto* una sua possibile e coerente fondazione al livello della QFT interpretata come Fisica Fondamentale della materia condensata.

Il ruolo dei condensati dei bosoni-NG nella foliazione del vuoto

In altri termini, come sintetizzato nel saggio introduttivo sulla complessità in fisica, chimica e biologia (Mitchell, 2009), un sistema complesso *macroscopico* può essere descritto intuitivamente come un sistema caratterizzato da una *gerarchia di diversi livelli "emergenti" di organizzazione strutturale* della materia, ciascuno con il proprio "parametro d'ordine" perché questi livelli corrispondono *microscopicamente* ad altrettante "fasi coerenti" di campi quantistici materiali. Come sono ordinati e come emergono utilizzando un unico quadro di riferimento a livello di Fisica Fondamentale rimane inspiegabile senza fare riferimento alla *nozione di foliazione del vuoto* in QFT e al fatto che perciò esiste un unico "parametro di controllo" che indicizza univocamente i vari livelli di coerenza di fase dei campi di materia. Tale parametro corrisponde, lo ripetiamo, a un determinato valore \mathcal{N} *finito* del condensato di bosoni-NG, ovvero di quanti delle correlazioni a lungo raggio fra campi quantistici (cfr. § 2.8.3).

Stabilità di questi domini di coerenza di fase perché coesistono nel medesimo stato fondamentale di minima energia per $T > 0$

Dal punto di vista dinamico, ciò che bisogna evidenziare è che, nonostante "questi quanti di correlazione" fra campi quantistici siano *particelle reali*, osservabili con le stesse tecniche (diffusione, scattering, ecc.) delle altre particelle, tuttavia, poiché la loro massa è comunque trascurabile (o addirittura nulla), la loro condensazione *non implica un cambiamento dello stato energetico del sistema*. Ciò significa che, se anche lo stato coerente che un condensato di bosoni-NG indicizza univocamente è un possibile stato fondamentale del sistema, rimane cioè *uno stato di minima energia*, in modo da essere stabile nel tempo.

Foliazione del vuoto come fondamento quantistico della complessità

Infine, la nozione di *foliazione del vuoto quantistico* fornisce a livello di QFT un fondamento delle *molteplicità delle scale spazio-temporali* delle transizioni di fase in sistemi complessi con l'emergenza delle caratteristiche *invarianze di scala* già rilevate a livello della modellizzazione in SM come il cuore fisico-matematico della nozione di sistema complesso e sul quale ci siamo soffermati a lungo illustrando il lavoro di Giorgio Parisi in § 2.4.2.3. Sempre in questo ambito di una fondazione quantistica della complessità, è notevole il fatto che ciò che a livello mesoscopico nello studio dei sistemi com-

plessi si definiscono come *traiettorie caotiche* con la loro caratteristica *struttura frattale* all'interno del formalismo della SM a livello *mesoscopico*, corrispondono matematicamente alle traiettorie fra diverse transizioni di fase nello spazio delle fasi *microscopico* in QFT (Vitiello, 2007; 2012).

La foliazione del vuoto possibile soluzione del problema delle memorie a lungo termine nei sistemi neurali

Allo stesso tempo e per lo stesso motivo, il principio della foliazione del vuoto e della sua “indicizzazione” in \mathcal{N} fornisce alle *neuroscienze cognitive* un potente modello di soluzione basato sulla QFT dell'annoso problema della fondazione fisica e informazionale delle *memorie a lungo termine* nel cervello dei mammiferi e degli umani in particolare. Ma su questa applicazione particolare del principio, vi torneremo nella Sezione riservata alle neuroscienze cognitive nel *Secondo Volume* di questo libro.

2.8.5 Il raddoppio dei gradi di libertà e la sua rilevanza fisica, biologica e logica

La rilevanza fisica del principio RGL in QFT come soluzione dinamica del problema degli infiniti gradi di libertà in QFT

Da quanto detto finora, possiamo infine facilmente comprendere il potente principio del *raddoppio dei gradi di libertà* (RGL), nel formalismo della QFT per sistemi dissipativi e quindi per sistemi quantistici che passano *attraverso diverse fasi* coerentemente con il Teorema di Haag degli *infiniti gradi di libertà* per i sistemi della QFT. Ciò che è rilevante è che nel nostro caso, per definire il *numero finito* dei gradi di libertà che definiscono lo spazio di probabilità delle aspettative sugli stati del sistema che caratterizzano l'Hamiltoniana del sistema, non dobbiamo *supporre di conoscere* l'Hamiltoniana stessa come nel modello della SQ di Dirac.

Per il principio RGL i gradi di libertà ammessi sono quelli “bilanciati” ovvero con minimo dell'energia libera (massimo di entropia)

Grazie al principio del RGL, qui è la dinamica medesima che definisce il *numero finito dei gradi di libertà del sistema* – e quindi la *base ortonormale finita* del relativo spazio (vettoriale) di Hilbert. Infatti, la misura sperimentale del *minimo dell'energia libera* (o il massimo dell'entropia) può essere usata qui come criterio di scelta dinamica degli stati *entangled* sistema-ambiente ammissibili dello spazio di Hilbert raddoppiato di un sistema dissipativo. Essi, ovviamente, definiranno dinamicamente la *base ortonormale finita* dello spazio di Hilbert stesso, senza dover supporre – per avere il medesimo risultato di selezionare i gradi di libertà *significativi* per rappresentare il sistema – di conoscere l'Hamiltoniana del sistema stesso, come nell'approccio classico della SQ alla QFT (cfr. § 2.7.1).

Il principio RGL e la nozione di informazione semantica nei sistemi QFT

Dal punto di vista logico e informazionale, ciò significa che in questa architettura fisica è possibile implementare una *misura semantica di entropia informazionale* H . Infatti, solo quando lo stato del sistema e del suo ambiente si corrispondono (= *minimo* dell'energia libera), la misura di entropia informazionale H raggiungerà il suo massimo (cfr. (Basti, 2017; Basti, Capolupo, & Vitiello, 2020)).

Il concetto di qubit
semantico

Dal punto di vista della *computazione quantistica* ciò significa che possiamo implementare in questa architettura di sistema la nozione di *qubit semantico*. Cerchiamo di intuire il perché.

Il concetto di qubit
in QM

Infatti, nella computazione quantistica basata sulla QM, per il *principio di sovrapposizione* delle funzioni d'onda $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ di due fermioni (generalmente elettroni), il sistema invece di stare, o sullo stato 0 o sullo stato 1, come nei computer elettronici basati sulla meccanica classica, può stare in uno degli infiniti possibili stati (con coefficienti positivi definiti su \mathbb{R} : sono misure di probabilità) compresi fra 0 e 1, cioè $|0\rangle, |1\rangle$, secondo la classica rappresentazione della *sfera di Bloch* in \mathbb{R}^3 .

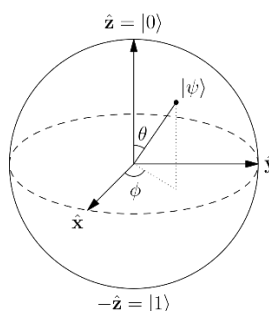


Figura 2-35. Rappresentazione del qubit sulla sfera di Bloch. Un qualsiasi stato ψ di q può essere scritto come la “sovrapposizione complessa di due vettori ket $|0\rangle, |1\rangle$ costituenti una base ortonormale dello spazio di Hilbert di q . Supponendo che il coefficiente di $|0\rangle$ sia reale e non-negativo, ogni ψ utile e di norma 1 può essere rappresentato come: $|\psi\rangle := \cos \theta/2|0\rangle + e^{i\phi} \sin \theta/2|1\rangle$, con $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$.

In base al principio
RGL raddoppio
degli stati del qubit
in QFT

In una computazione quantistica basata sulla QFT e sul principio del RGL, dobbiamo supporre uno spazio di Hilbert *composto* che include anche i gradi di libertà dell'ambiente \tilde{A} – cioè, dell'oggetto rappresentato nella computazione che sarà quindi *semantica* – ovvero: $\mathcal{H}_{A,\tilde{A}} := \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{\tilde{A}}$. Questo significa che per calcolare l'entropia statica e dinamica associata all'evoluzione generata dall'*energia libera* del sistema (logicamente, un *mismatch* input-output), cioè $|\phi(t)\rangle, |\psi(t)\rangle$, nello stato “misto” $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ del qubit, dobbiamo raddoppiare gli stati del qubit stesso introducendo gli stati-tilde dell'ambiente con cui il sistema è *entangled*, cioè, $|\tilde{0}\rangle, |\tilde{1}\rangle$. Applicando il principio RGL al qubit, avremo perciò, $|0\rangle \rightarrow |0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle$ e $|1\rangle \rightarrow |1\rangle \otimes |\tilde{1}\rangle$ che è una definizione intuitiva del *qubit semantico*.

Questa architettura di computazione consente la naturale implementazione della porta logica del CNOT

Tutto questo, in pratica, significa che questa classe di computer quantistici implementa naturalmente la porta logica del CNOT (o “NOT controllato”) che cambia $0 \rightarrow 1$ il valore del qubit, sotto la condizione *semantica* di un controllo *dinamico* e quindi *automatico* di un *matching* (*corrispondenza*) *input-output* che fisicamente corrisponderà al *minimo dell'energia libera*, ovvero al *massimo dell'entropia informazionale* H dell'*entanglement* sistema-ambiente in base al principio RGL (cfr. (Bruno, Capolupo, Kak, Raimondo, & Vitiello, 2011; Blasone, Jizba, & Vitiello, 2011, pp. 91-95) e, per una sintesi (Basti, Capolupo, & Vitiello, 2017; Basti, Capolupo, & Vitiello, 2020).

Dimostrazione del carattere universale dei calcoli di questa architettura computazionale

Poiché è dimostrato che è possibile calcolare in modo del tutto naturale in una siffatta architettura computazionale *la serie di Fibonacci* o “serie aurea”⁵⁷, questa architettura è un particolare tipo di implementazione quantistica (topologica) di una *Golden Machine*, ovvero di un *Computer Universale*, (cfr. (Basti, Capolupo, & Vitiello, 2017) per ulteriori dettagli con la bibliografia necessaria)⁵⁸.

Torneremo nel **Capitolo 4** sulle conseguenze ontologiche ed epistemologiche di una interpretazione *realistica* della fisica quantistica basata sul principio RGL e sulla sua interpretazione all'interno della TC, il cui formalismo sarà oggetto di una presentazione approfondita nel **Capitolo 3**.

⁵⁷ La successione di Fibonacci è una successione di numeri naturali, calcolabile ricorsivamente perché ogni numero è la somma dei due precedenti, a partire da 0 e 1. I primi numeri della serie sono dunque: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... Siccome, al crescere dei numeri di Fibonacci, il rapporto fra due di essi approssima sempre meglio la cosiddetta “sezione aurea” o “costante di Fidia” che corrisponde al numero irrazionale $\varphi = 1,6180339887...$ ottenuto geometricamente effettuando il rapporto fra due lunghezze disuguali delle quali la maggiore a è medio proporzionale fra la minore b e la somma delle due $(a + b)$. Ovvero: $\varphi := (a + b) : a = a : b$. I numeri di Fibonacci e la collegata “sezione aurea” hanno fondamentali proprietà matematiche (aritmetiche e geometriche) e appaiono ovunque non solo nelle arti (musica e arti figurative), ma anche nella natura, in chimica, in botanica, in biologia, ... e poi anche in economia, in informatica, etc.

⁵⁸ È interessante ricordare che un'implementazione topologica in QM di una *Golden Machine* è stata ottenuta usando il cosiddetto “effetto-Hall” per una particolare classe di quasiparticelle quantistiche i cosiddetti “anioni non-commutativi”, particelle che, sotto determinate condizioni si comportano come fermioni o come bosoni (Cfr. (Nayak, Simon, Stern, Freedman, & Das Sarma, 2008)). Si veda (Basti, Capolupo, & Vitiello, 2017) per un confronto fra queste due architetture di *Golden Machine*.

2.9 Conclusioni: fine del mito riduzionista e principio di causalità

Fine del
riduzionismo
meccanicista

In questo lungo, ma doveroso excursus sullo sviluppo della fisica moderna a partire dalle sue origini newtoniane il punto di partenza è stata in § 2.1 quella citazione presa dall'*Ottica* di Newton la cui parte finale vale la pena qui di riportare per intero:

... Derivare invece dai fenomeni due o tre *principi generali del movimento* e spiegare come poi da essi, quali presupposti chiari ed evidenti, debbano seguire tutte le proprietà e le manifestazioni di *tutte le cose materiali*, sarebbe già un importante progresso della conoscenza scientifica, anche se le *cause* di tali principi rimanessero a noi completamente sconosciute.

Punti salienti del
riduzionismo
newtoniano

Dal punto di vista logico-epistemologico, i punti salienti di questa posizione che esemplifica al meglio il *riduzionismo meccanicista* di Newton in cui reinterpretare il *metodo matematico-sperimentale* della fisica moderna di Galilei, sono:

Fenomenismo

◆ Il *fenomenismo*: ciò che è oggetto di conoscenza scientifica sono non gli enti ma i *fenomeni* della conoscenza sperimentale della natura da cui possono essere derivati quali “presupposti chiari ed evidenti” le *tre leggi della meccanica* di Newton.

Meccanicismo

◆ Il *riduzionismo meccanicista*: da queste tre “leggi del moto” possono essere derivate “*tutte le proprietà* e le manifestazioni di *tutte le cose materiali*”.

Non-ipotesicità

◆ Il conseguente *carattere incondizionato e non-ipotesico* (*hypotheses non fingo*) delle leggi matematiche del moto in opposizione al *realismo metafisico* basato sul *principio di causalità* della filosofia della natura aristotelica.

La critica del
riduzionismo
meccanicista
coincide con
l'estensione del
metodo ipotetico-
deduttivo anche alla
fisica

Tutto quanto abbiamo mostrato in questo capitolo ci ha aiutato a capire quanto ingenua al limite della pretenziosità fosse la posizione riduzionista del meccanicismo di Newton basata sul carattere *incondizionato* e quindi *non-ipotesico* o *apodittivo* delle sue Tre Leggi della Meccanica, necessarie e sufficienti per giustificare “*tutte le proprietà* e le manifestazioni di *tutte le cose materiali*”. E certamente lo sviluppo della *Teoria della Complessità* che abbiamo posto al termine di questo processo storico-teoretico di sviluppo della fisica moderna negli ultimi centocinquanta anni è – quasi per definizione – il punto di arrivo della critica al riduzionismo ingenuo che Newton esprimeva nel brano citato della sua *Ottica*.

Il metodo ipotetico-
deduttivo come il
metodo della
scienza

Non serve riassumere qui i vari passaggi di questo sviluppo che abbiamo già anticipato in § 2.2 introducendo i contenuti di questo capitolo. Esso sintetizza dal punto di vista logico-epistemologico l'applicazione del *metodo ipotetico-deduttivo* anche alle scienze fisiche e naturali dopo che nel **Capitolo 1** avevamo visto l'applicazione di questo metodo alle matematiche

con la nascita e lo sviluppo dell'assiomatizzazione delle matematiche conseguente alla nascita delle geometrie non-euclidee. Vedremo nel prossimo **Capitolo 3** che il metodo ipotetico-deduttivo riguarda i fondamenti stessi del pensiero logico-matematico, in quanto le antinomie logiche della TI di Cantor e della Teorie delle Classi di Frege nascono precisamente dalla supposizione del carattere *incondizionato* di queste Teorie dei Fondamenti. In una parola, il metodo ipotetico-deduttivo è *il metodo della conoscenza scientifica* contro qualsiasi strumentalizzazione ideologica di essa.

Compatibilità del principio di causalità con la QFT grazie all'interpretazione categoriale della QM e della QFT

Ciò che qui vorrei evidenziare a conclusione di questo capitolo è il fatto che – come Weinberg stesso suggerisce (Weinberg, 2002) e più esplicitamente Preparata afferma (Preparata, 2023) e Vitiello dimostra derivando la *freccia del tempo* dall'interno delle equazioni della QFT nell'ipotesi dissipativa (Blasone, Jizba, & Vitiello, 2011) – nell'ambito della QFT, dove l'*entanglement* è legato alle coerenze di fase fra campi quantistici, differentemente dall'interpretazione di Copenaghen della QM, è possibile coniugare la fisica quantistica con il *principio di causalità* della SR, visto che, fra l'altro, sia la SR che la QFT sono definite su uno spazio quadridimensionale di Minkowski, quello su cui si definisce il cono di luce del principio di causalità in fisica, come sappiamo (cfr. **Figura 2-11**).

Il postulato di causalità nell'interpretazione categoriale della teoria quantistica

Come già detto, la compatibilità fra principio di causalità della SR e QFT può avere formalmente un'elegante dimostrazione nella cosiddetta *interpretazione categoriale* della fisica quantistica, oggi particolarmente studiata (Abramsky & Coecke, A categorical semantics of quantum protocol, 2004; Chiribella, D'Ariano, & Perinotti, 2010; 2011; Coecke, New structures for physics. Lecture Notes in Physics, 813, 2011; Heunen & Kornell, 2022). Questa interpretazione è originariamente legata a una rilettura dei Fondamenti della Fisica Quantistica basata sulle *topologie* e quindi sull'*algebra degli operatori* e ultimamente all'uso sistematico della *teoria dei diagrammi di relazioni* nelle dimostrazioni della QM e della QFT. Questa modellizzazione fu inaugurata dal lavoro pionieristico di Giulio Chiribella e del suo gruppo di giovani fisici e informatici quantistici italiani allora al *Perimeter Institute for Theoretical Institute* di Waterloo (Ontario) in Canada (Chiribella, D'Ariano, & Perinotti, 2010; 2011) e da Bob Coecke e del suo gruppo del Dip. di Informatica dell'Università di Oxford (Coecke, New structures for physics. Lecture Notes in Physics, 813, 2011) nel quale, poi, Chiribella si è trasferito, e che va oggi sotto il nome di *interpretazione categoriale della fisica quantistica*. Ciò che è eccezionale nel modello di Chiribella è che egli abbia trasferito un precedente lavoro di Samson Abramsky e dello stesso Coecke sulla semantica categoriale dell'informazione nei sistemi (computer) quantistici (Abramsky & Coecke, A categorical semantics of quantum protocol, 2004) dalla TCS alla *fisica teorica*.

Cuore dell'approccio è la riscrittura della QM nel linguaggio diagrammatico della TC

Il cuore del lavoro di Chiribella è infatti la dimostrazione che tutti i risultati fondamentali della QM e della QFT usando le formule del calcolo matriciale su spazi di Hilbert, possono riottenersi in forma *operazionale* (matematico-sperimentale) usando i grafici commutativi del calcolo algebrico delle relazioni proprio della TC. Diagrammi che a loro volta possono essere usati direttamente per modellizzare i circuiti e le porte logiche di un computer quantistico. In tal modo, fra l'altro, egli dà un'interpretazione categoriale dell'intuizione di Feynman alla base di tutta la ricerca attuale sulla computazione quantistica che ogni sistema quantistico può essere modellato come un *computer quantistico* (Feynman, 1982; Deutsch, 1985).

Principio di purificazione degli stati quantistici in QM e principio del raddoppio in QFT

Ciò che è fondamentale per i nostri scopi è che l'idea-base del modello di Chiribella consiste nel *principio di purificazione di uno stato quantistico misto* (nell'interpretazione standard, un *vettore* dello spazio di Hilbert) in uno *stato quantistico puro* (un *vettore unitario* dello spazio di Hilbert) mediante il *raddoppio dello stato quantistico* medesimo. Un principio che altro non è che l'interpretazione categoriale del principio del RGL nel formalismo basato sugli spazi di Hilbert della QFT che già conosciamo bene (cfr. § 2.8.5). Infatti,

il principio di purificazione è equivalente all'esistenza di una realizzazione reversibile di un processo fisico, cioè il fatto che ogni processo fisico può essere considerato come *originantesi da un'interazione reversibile del sistema con un ambiente* che può essere eventualmente ignorata (Chiribella, D'Ariano, & Perinotti, 2010, p. 1)

Più esattamente, la versione “forte” del principio di purificazione degli stati quantistici afferma:

Per ogni sistema A esiste un *sistema coniugato* \hat{A} tale che ogni stato A di A ha una purificazione in $\hat{A}A$. Il coniugato di \hat{A} è A (*simmetria*), e il coniugato di un sistema composto AB è il sistema composto $\hat{A}\hat{B}$ (*regolarità sotto composizione*) (Chiribella, D'Ariano, & Perinotti, 2010, p. 3).

Centralità della categoria dei monoidi

Il che altro non è che una versione categoriale del principio RGL della QFT – ed infatti Coecke e Kissinger definiscono il “principio di purificazione” di Chiribella come il “principio del raddoppio” (Coecke & Kissinger, 2016, pp. 29-30) –, da cui emerge che la categoria fondamentale in fisica quantistica è quella dei *monoidi* (**Mon**) (Chiribella, D'Ariano, & Perinotti, 2010; Coecke, 2011). Ovvero strutture algebriche ad *un solo oggetto* (*monomorfismi*), in particolare la (sottocategoria) dei monoidi *strettamente simmetrici* risultanti da una *perfetta simmetria* dei morfismi fra i due oggetti che originariamente li costituivano, come vedremo meglio esaminando le nozioni fondamentali della TC nel **Capitolo 4** (Abramsky & Coecke, 2009). E questo sebbene Chiribella nei suoi due lavori citati, a differenza di Coecke, non usi di per sé il formalismo della TC, pur citandolo, ma solo grafici di circuiti, per rendere i suoi lavori di immediata fruibilità per gli informatici.

Principio di causalità della SR come postulato dell'interpretazione categoriale della quantistica

In ogni caso, per i nostri scopi, ciò che emerge dal formalismo grafico del modello di Chiribella è che *località* e *causalità* propri della fisica relativistica diventano anche caratteristica propria dei sistemi quantistici – contro l'interpretazione di Copenaghen della QM – perché in questa interpretazione categoriale della fisica quantistica, come nella QFT, l'*entanglement* quantistico viene limitato ai *domini di coerenza di fase* legati alle correlazioni di lungo raggio fra i campi quantistici, correlazioni che non implicano alcun invio di segnali a velocità superluminale come richiesto dalla SR. In sintesi,

Il messaggio del nostro lavoro è semplice: la maggior parte delle caratteristiche della teoria quantistica possono essere riassunte nell'enunciato fisico: *la teoria quantistica è una teoria causale con depurazione e discriminabilità locale* (Chiribella, D'Ariano, & Perinotti, 2010, p. 3)⁵⁹.

La nozione di monoide causale

Il fatto che l'interpretazione categoriale della teoria quantistica possa giustificare il principio di causalità della SR, contrariamente all'interpretazione di Copenaghen della QM, è il cuore anche di un ulteriore lavoro di Bob Coecke il cui titolo è tutto un programma: *Categorical Quantum Mechanics I: Causal Quantum Processes* (Coecke & Kissinger, 2016) che esplicitamente inserisce il linguaggio diagrammatico dell'approccio di Chiribella entro il formalismo della TC. In questo senso è particolarmente rilevante che *l'unico oggetto I* dei monoidi che caratterizzano gli stati quantici in una QFT compatibile col principio di causalità della SR devono venire categorialmente interpretati come *oggetti terminali* delle relative strutture algebriche. Di qui la definizione di *monoide causale* a partire dalla definizione di oggetto finale *terminale* di una categoria in TC:

Un oggetto T è detto *terminale* se per ogni oggetto A , esiste un *morfismo unico*: $!_T: A \rightarrow T$.

Oggetto terminale in TC e cono di luce in SR

Ritorniamo nel **Capitolo 3** quando presenteremo le nozioni fondamentali di TC su questa definizione. Essa, come si vede anche intuitivamente, è una definizione categoriale del cono di luce diretto verso il futuro del principio di causalità, dove ogni stato fisico A all'interno del cono di luce

⁵⁹ Il brano prosegue citando tutta una serie di proprietà dei sistemi quantistici che il modello di Chiribella è in grado di giustificare e che costituiscono uno schema riassuntivo del resto dell'articolo. Mi limito a citare quelli di più immediato interesse fisico-teorico tralasciando quelli di interesse più strettamente informatico: «Soprattutto, dal principio di purificazione deriviamo le seguenti proprietà quantistiche: nessun invio di informazione senza decoerenza, nessuna discriminazione congiunta e nessuna clonazione di stati puri, esistenza di stati *entangled* puri con correlazioni perfette, teletrasporto probabilistico, corrispondenza uno-a-uno fra trasformazioni e stati bipartiti, estensione dei processi fisici a interazioni con un ambiente, processi di interazione con un ambiente come come condizioni necessarie e sufficienti per la correzione degli errori,...

relativistico si relaziona a T come alla sua causa. Il brano citato perciò così continua:

È un esercizio immediato dimostrare che, se esiste un oggetto terminale, è unico (fino all'isomorfismo). Perciò una categoria monoidale è detta *causale* se l'oggetto unico I è un oggetto terminale. Il che equivale a dire che ogni morfismo nella categoria soddisfa il *postulato di causalità* (Coecke & Kissinger, 2016, p. 41).

Oggetto terminale e categoria delle coalgebre e oggetto iniziale nella categoria delle algebre

Come vedremo nel **Capitolo 3** in una logica e matematica categoriale, la categoria caratterizzata da un oggetto finale che è *terminale* è quella delle *coalgebre* che già abbiamo incontrato nella formalizzazione matematica della QFT (cfr. § 2.8.4). Essa è *duale* rispetto a quella delle algebre caratterizzata da un oggetto finale che è *iniziale*. Infatti:

Un oggetto I è detto *iniziale* se per ogni oggetto A , esiste un *morfismo unico*: $!_I: I \rightarrow A$.

Rilevanza per la soluzione del problema logico-ontologico della fondazione della verità delle ipotesi nella scienza galileiana moderna

Come vedremo nel **Capitolo 4**, è su questa dualità categoriale algebra-coalgebra (Venema, 2007) applicata alle logiche booleane che si fonda la modellizzazione categoriale delle algebre di Boole in logica, che ha la sua semantica negli *stati fisici* del sistema, modellizzati coalgebricamente, nel quale il calcolo logico booleano in questione è implementato (Rutten, 2000). È in questa dualità categoriale algebre-coalgebre in logica che si fonda il cuore del cosiddetto *realismo strutturale* (Ladyman, 2020) in *ontologia formale* – e quindi in *Filosofia della Natura* – ed in *epistemologia formale* – e quindi in *Filosofia della Scienza*.

La riproposizione categoriale della dualità sillogismo causale e sillogismo logico

Essa ripropone all'interno della *filosofia formale* basata sulla TC la dualità aristotelica fra *sillogismo causale* (*relazioni reali* dagli effetti alla causa: cfr. la nozione categoriale di *causa* oggetto *terminale*) e del sillogismo *dimostrativo* (*relazioni logiche* dalla premessa alle conclusioni: cfr. la nozione categoriale di *premissa* come oggetto *iniziale*). Un'ontologia ed un'epistemologia che, come già accennato nell'*Introduzione*, forniscono una soluzione logicamente consistente alla secolare problematica della *fondazione causale della verità* delle ipotesi nel ragionamento ipotetico-deduttivo delle scienze matematico-sperimentali moderne che da Galilei a Popper affligge l'epistemologia delle scienze naturali moderne (Basti & Ferrari, 2020a; 2020b; Basti, 2022).

Appendice A: alcuni elementi del formalismo matematico della fisica moderna

In questa Appendice sintetizziamo alcune nozioni fondamentali del formalismo matematico della fisica moderna supposte nel resto del Capitolo. Si consiglia quindi la lettura di questa Appendice, se si vogliono comprendere adeguatamente i contenuti del resto del capitolo.

A1. Lo spazio degli stati in Meccanica Classica e il «pendolo ideale»

Distinzione fra Cinematica e Dinamica in Meccanica Classica

Gli inizi galileiani-newtoniani della fisica moderna sono, come sappiamo, caratterizzati dalla *spiegazione geometrica* delle leggi del moto in Meccanica Classica che va sotto il nome di *Cinematica*, per distinguerla dalla *spiegazione dinamica* delle leggi medesime, in termini di *forze* che agiscono sul sistema e che va sotto il nome di *Dinamica*.

Caratterizzazione cinematica (geometrica) o "rappresentazione canonica" dei sistemi dinamici in uno spazio degli stati (fasi)

In Meccanica Classica, l'*evoluzione nel tempo* di un sistema composto di molte particelle è espressa nei termini di quelle che sono definite le *variabili canoniche* con cui definire gli stati fisici del sistema, ovvero la *posizione spazio-temporale* q e la *quantità di moto* (o *momento cinetico*) $p = mv$ che è una misura dell'energia cinetica $1/2mv^2$ dove m è la massa e v la velocità. Lo spazio degli stati con cui definire il *ritratto di fase*, ovvero le differenti fasi di quiete e di moto di un sistema meccanico sarà dunque un grafico bidimensionale (grafico cartesiano) avente come dimensioni la *posizione* q (proiettando su una sola dimensione uno spazio fisico tridimensionale) e la *quantità di moto o momento* p (velocità) del sistema di particelle. Ogni stato fisico del sistema sarà definito così come un *punto* definito dalle due coordinate (variabili) canoniche (posizione e momento) e l'evoluzione temporale del sistema nel ritratto di fase sarà definita da una *traiettoria unidimensionale* che unisce quei punti.

L'esempio del pendolo ideale

Come esempio prendiamo un *pendolo ideale* (= oscillatore armonico) che oscilla indefinitamente in maniera periodica perché si muove senza attriti, il cosiddetto «pendolo di Galilei». In questo caso (Cfr. **Figura 2-36**), possiamo esprimere la posizione del pendolo in termini dell'*angolo* θ di *oscillazione* del pendolo rispetto al proprio asse, e la *velocità* (= prima derivata del moto, o variazione della posizione) nei termini della *velocità angolare* $\dot{\theta}$ (=derivata prima di un moto oscillatorio). L'equazione del *moto armonico* del nostro pendolo ideale – in maniera congruente con la «legge di Galilei» sul moto dei gravi – sarà dunque la seguente:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad 60$$

Dove $\ddot{\theta}$ è l'accelerazione angolare (=derivata seconda), g è la costante gravitazionale, l è l'ampiezza dell'oscillazione e $\sin \theta$ è il seno dell'angolo θ .

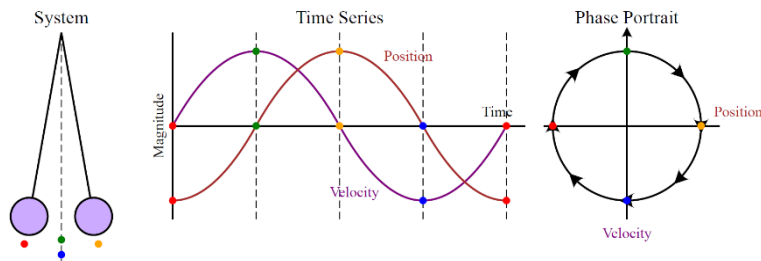


Figura 2-36. (Sinistra) rappresentazione del moto del pendolo in termini di variazione dell'angolo di oscillazione fra due posizioni «in quiete» (puntini rosso e giallo) con il massimo della velocità di «andata +» (puntino verde) e «ritorno -» (puntino blu) nell'intorno del proprio asse. (Centro) serie temporali, rispettivamente delle posizioni θ (curva superiore) e del gradiente delle velocità $\dot{\theta}$ (curva inferiore); (Destra) ritratto di fase della traiettoria nello spazio degli stati posizione/velocità (quantità di moto) che forma una curva chiusa, che è una circonferenza nel caso armonico (Cfr. Figura 2-37)⁶¹.

Funzione
sinusoidale

Matematicamente, infatti, la «serie temporale» descritta in **Figura 2-36** non è altro che un'implementazione in meccanica del grafico della *funzione trigonometrica* $y = \sin x$, è cioè la *funzione sinusoidale* di **Figura 2-37**. Per lo stesso motivo «il ritratto di fase» nella medesima figura altro non è che la corrispondente implementazione meccanica della variazione dell'angolo x spostando la semiretta \overline{OD} di un «angolo-giro» (360°) lungo tutta la circonferenza trigonometrica di raggio unitario e che perciò soddisfa l'equazione $x = 2\pi x$. Ovvero, facendo fare un giro completo della circonferenza trigonometrica si ritorna al punto di partenza. Nel caso fisico del pendolo il ciclo completo del suo comportamento oscillatorio in funzione del tempo t con cui ritorna alla posizione iniziale sarà definito come il periodo T dell'oscillazione.

⁶⁰ La «serie temporale» di **Figura 2-45** che descrive il moto del pendolo, cioè, non è altro che il grafico della *funzione trigonometrica* $y = \sin x$ (= *funzione sinusoidale*) e «il ritratto di fase» nella medesima figura altro non è che la corrispondente rappresentazione della variazione dell'angolo x lungo la circonferenza trigonometrica di raggio unitario di **Figura 2-46**.

⁶¹ Da: <https://gabrielebaldassarre.com/approfondimenti/spazio-degli-stati/>

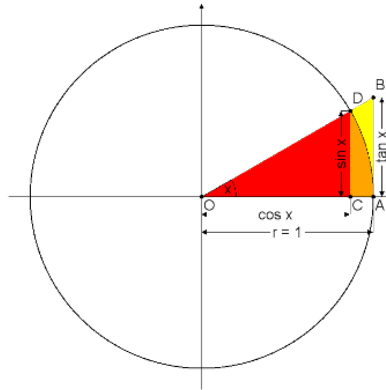


Figura 2-37. Rappresentazione della funzione trigonometrica $y = \sin x$ sulla circonferenza di raggio unitario sul piano cartesiano che soddisfa la definizione di «seno di un angolo acuto x » come il rapporto fra le lunghezze del cateto \overline{CD} opposto all'angolo x e dell'ipotenusa \overline{OD} del corrispondente triangolo rettangolo, e di «coseno di x » come il rapporto fra le lunghezze del cateto adiacente all'angolo x \overline{OC} e dell'ipotenusa \overline{OD} .

Oscillatori armonici classici e quantistici

Tutto questo ci aiuta a comprendere quelle che sono le *proprietà matematiche fondamentali* di un'onda periodica formalizzata in termini di una *funzione trigonometrica* (cfr. **Figura 2-37**) e quindi del *comportamento oscillatorio* di un sistema fisico sia classico (oscillatore armonico) che quantistico (oscillatore armonico quantistico).

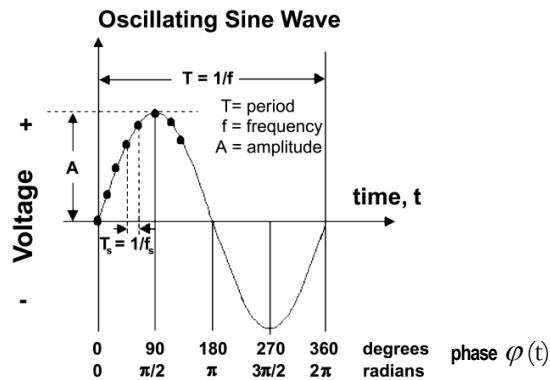


Figura 2-38. Rappresentazione di una funzione periodica F (oscillazione sinusoidale) nel caso specifico del voltaggio di una corrente elettrica (vedi testo per spiegazione).

Proprietà
fondamentali di un
moto oscillatorio

Come si vede dalla rappresentazione in **Figura 2-38** queste proprietà, nel caso di una *funzione periodica* F (un'onda sinusoidale nella nostra semplificazione) sono:

- ◆ Il *periodo* $T = 1/f$, ovvero il tempo t del ciclo completo dell'oscillazione;
- ◆ La *frequenza* f ovvero il numero di oscillazioni per unità di tempo, una grandezza che è inversamente proporzionale alla lunghezza d'onda λ , ovvero la distanza fra due picchi dell'onda (non mostrata in figura);
- ◆ L'*ampiezza* A , ovvero l'altezza del picco dell'onda.
- ◆ La *fase* $\varphi(t)$ dell'onda che è una misura angolare che può essere espressa sia in gradi che in radianti che rappresenta la frazione del ciclo coperta dall'oscillazione in un dato tempo (cfr. **Figura 2-39**).

Generalizzazione
della nozione di
spazio delle fasi
dalla meccanica alla
rappresentazione
canonica della
dinamica di
qualsiasi sistema
fisico.

Il fatto che la funzione periodica F mostrata in **Figura 2-38** riguardi la variazione nel tempo di una *misura della tensione della forza elettrica* o *voltaggio* – ovvero della capacità di un'energia (elettrica) di compiere un *lavoro* (elettrico) e che dipende da una *differenza di potenziale* (elettrico $+/-$) del *campo* associato a quella forza – ci fa capire la generalità della rappresentazione dell'*evoluzione dinamica* di un sistema fisico mediante *traiettorie* nell'associato «spazio degli stati (fasi)». Mentre in meccanica le due variabili che definiscono lo stato (fase) fisico del sistema sono la variazione della posizione spazio-temporale q e la variazione della forza associata p («cinetica» o «quantità di moto mv ») di un corpo in movimento, la rappresentazione può essere estesa alla variazione nel tempo di una qualsiasi variabile fisica x e l'associata variazione di una forza p da cui la dinamica del sistema dipende.

Distanza e
coerenza di fase fra
onde sinusoidali

Due altre nozioni che ci aiuteranno a comprendere il formalismo matematico soggiacente a quanto spieghiamo nel resto di questo capitolo, sia in *fisica classica e relativistica*, sia in *fisica quantistica* sono le nozioni di (Cfr. **Figura 2-39**):

- ◆ *Distanza di fase o sfasamento* $\Delta\varphi = \varphi - \varphi'$ come misura angolare della differenza di fase fra due onde sinusoidali.
- ◆ *Coerenza di fase* fra due onde sinusoidali nei due casi estremi:
 - a. Di due onde *in fase* con $\Delta\varphi = 0^\circ$ dove picchi e valli delle due onde si corrispondono esattamente così da dar luogo a un'*interferenza costruttiva* per cui l'onda risultante alla loro *sovrapposizione* avrà un'ampiezza che sarà la somma delle ampiezze delle due onde incidenti;

- b.** Di due onde *in controfase* con $\Delta\varphi = 180^\circ$ dove ai picchi dell'una corrispondono le valli dell'altra così da dar luogo a un'*interferenza distruttiva* per cui l'onda risultante alla loro *sovrapposizione* avrà un'ampiezza che sarà la differenza delle ampiezze delle due onde incidenti al limite annullandosi per ampiezze opposte.

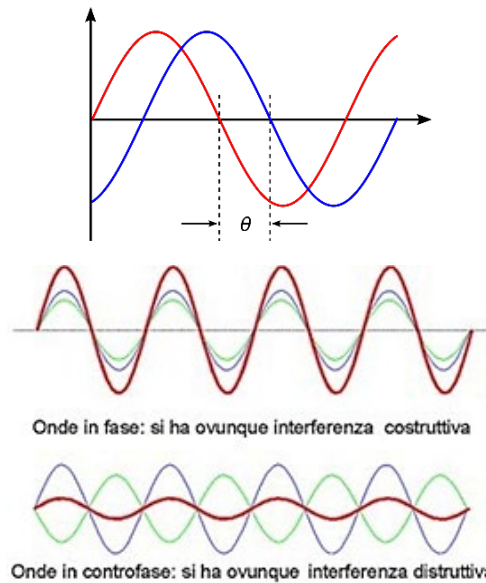


Figura 2-39. (Alto). Distanza di fase $\Delta\varphi$ rappresentata in termini dell'angolo di sfasamento θ di due onde sinusoidali. (Basso). Rappresentazione dell'interferenza di fase costruttiva (onda rossa) di due onde (blu e verde) di due onde in fase le cui ampiezze si sommano (sopra) e in interferenza distruttiva di due onde in controfase le cui ampiezze si sottraggono (sotto) e al limite si annullano se le loro ampiezze fossero le stesse.

La nozione di campo in matematica e fisica

Inoltre, il fatto di associare ad ogni punto dello spazio degli stati rappresentativo di una determinata dinamica il valore numerico variabile di una certa grandezza, ci aiuta a comprendere l'altra nozione fondamentale quella di *campo* sia in matematica che in fisica. Abbiamo così in matematica e fisica tre tipi di campi:

Campi scalari

- ◆ *Campi scalari.* Ovvero spazi in cui ad ogni punto dello spazio è associato un numero o *grandezza scalare*, in fisica il *modulo* di una forza. P.es., nel caso del campo elettrico prima esaminato la grandezza considerata è quella della forza associata a una carica elettrica che avrà un suo massimo lì dove è posizionata la carica e che scalerà nello spazio in funzione del quadrato della distanza da quel punto.

- Campi vettoriali
- ◆ *Campi vettoriali.* Ovvero spazi in cui ad ogni punto è associato un *vettore* o «freccia» o «morfismo» in algebra con una *direzione* e un *verso* (p.es., nello spazio tridimensionale) rispetto ad un altro vettore, vettori la cui lunghezza (modulo) è proporzionale alla grandezza della variabile (p.es., di una forza) in quel punto. In fisica, esempi tipici di campi vettoriali sono quelli che descrivono il moto e l'energia di una particella in un fluido (*fluidodinamica*) oppure i campi della forza *elettromagnetica*. Ricordando che la forza «magnetica» è generata dal moto di una carica elettrica e dove dunque la direzione e il verso del moto assumono un valore fondamentale. In tal senso, le variazioni di un *campo vettoriale*, generalizzato a spazi *n*-dimensionali, sono espresse *algebricamente* nei termini di una *matrice di valori* della grandezza considerata e dei relativi calcoli matriciali (funzioni lineari) per la *somma* o il *prodotto di vettori*. In vari settori della matematica e della fisica come l'*analisi funzionale* o la *Meccanica Quantistica* il concetto di spazio vettoriale è applicato agli *spazi di funzioni*, in cui i vettori sono *funzioni* come gli *spazi di Hilbert* e gli *spazi di Banach* in fisica quantistica (Cfr § 2.7).
- Campi tensoriali
- ◆ *Campi tensoriali.* Ovvero spazi in cui ad ogni punto viene associato non un solo vettore ma *n* vettori e/o *n* campi vettoriali opportunamente *indiciati* (ordinati). Per capire intuitivamente di cosa parliamo, pensiamo ai vettori che possiamo associare alla *tensione elastica* di una molla e che ovviamente variano in modulo, in verso e in direzione in funzione dei diversi valori della tensione elastica che si generano estendendo o comprimendo la molla. La teoria dei campi tensoriali e i relativi calcoli sono stati sviluppati innanzitutto da Albert Einstein, visto che i tensori sono ampiamente usati in GR per i calcoli rigorosi sullo spaziotempo come *varietà 4-dimensionale curva* (spaziotempo) legata al *campo gravitazionale* (Cfr. § 2.5.3).

A2. La centralità della Trasformata di Fourier

Le funzioni trigonometriche e la Trasformata di Fourier

Infine, per concludere questa parte sulle *funzioni trigonometriche* occorre ricordare uno dei più potenti strumenti di calcolo della matematica, della fisica e dell'ingegneria con applicazioni teoriche e sperimentali praticamente in tutti i campi della fisica classica, statistica e quantistica nonché in teoria dell'informazione. Si tratta della *trasformata di Fourier* (*Fourier Transform FT*) di una funzione $f(x)$. Dove con il termine “trasformata” si intende sia l'operazione (trasformazione: \mathcal{F}) che il risultato dell'operazione (trasformata: $\hat{f}(x)$).

A2.1 Lo sviluppo in serie di Fourier

Lo sviluppo in serie di Fourier di qualsiasi funzione dipendente dal tempo in fisica

Tale trasformazione si deve all'opera del matematico e fisico francese Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) e originariamente dipende dal suo famoso sviluppo in serie trigonometriche, la *serie di Fourier*, di funzioni dipendenti dal tempo $f(t)$. Di fatto esso consiste nella rappresentazione di una *funzione periodica* in una *combinazione lineare* o somma di *funzioni sinusoidali* e quindi di *frequenze*. Questo lavoro fu pubblicato nel 1822 applicando le serie alla soluzione dell'equazione di diffusione del calore nel libro *Théorie analytique de la chaleur*.

L'analogo musicale dello sviluppo in serie di Fourier

Più intuitivamente tale sviluppo è un analogo della scomposizione del suono di un *accordo musicale* nei termini delle sue *note musicali (armoniche) componenti*, – quella scomposizione che l'orecchio di un musicista esperto compie intuitivamente – dato che ad ogni nota musicale è associata una *frequenza fondamentale* (p.es., la frequenza della vibrazione meccanica associata al LA del diapason è quella dei 440Hz).

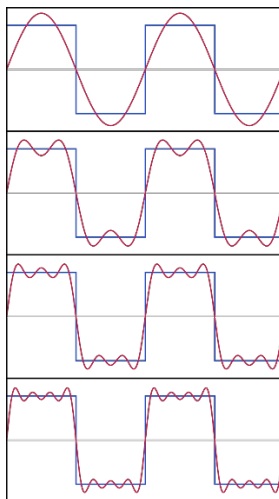


Figura 2-40. Rappresentazione delle prime quattro somme parziali di una serie di Fourier per un'onda quadra. Man mano che vengono aggiunte delle armoniche le somme parziali convergono (diventano sempre più simili) all'onda quadra di partenza.

Il passaggio all'analisi di Fourier

Fourier stesso estese il suo metodo delle serie trigonometriche dal dominio *finito* al dominio *infinito* dell'analisi matematica definendo una nuova branca dell'analisi matematica stessa che va sotto il nome di *analisi di Fourier*. Essa si basa sulla nozione di *trasformata di Fourier (Fourier Transform FT)* \mathcal{F} . Essa è una *trasformata integrale* – ovvero una applicazione generalmente *lineare* che mappa uno spazio di funzioni su un altro spazio di funzioni –

cioè un operatore che trasforma una funzione in un'altra funzione mediante un'integrazione.

A.2.2 L'analisi di Fourier⁶²

FT come rappresentazione di una funzione nel dominio delle frequenze

Sinteticamente, la *Trasformata di Fourier* (*Fourier Transform*, FT) è una trasformazione che converte una funzione $f(x)$ – generalmente ma non esclusivamente una funzione dipendente dal tempo $f(t)$ – in una forma che descrive le *frequenze* presenti (“nascoste”) nella funzione originale, ovvero in una funzione-frequenza a valori *complessi* – definita, cioè, sul campo dei numeri complessi \mathbb{C} , come vedremo subito. In questo senso, si dice che la trasformata di Fourier $\hat{f}(\xi)$ di una funzione $f(x)$ è la rappresentazione nel *dominio delle frequenze* ξ della funzione originale: $f(x) \xrightarrow{F} \hat{f}(\xi)$.

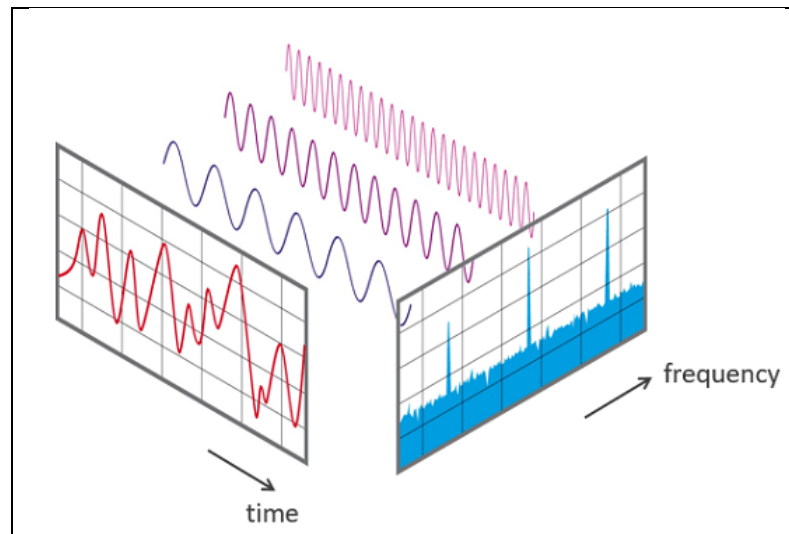


Figura 2-41. Rappresentazione intuitiva della trasformata di Fourier nel dominio delle frequenze $\hat{f}(\xi)$ di una funzione $f(x)$.

Per capire almeno intuitivamente la generalità della rappresentazione in una *somma lineare* di frequenze $\hat{f}(\xi)$ di una funzione $f(x)$ anche *non lineare* in cui consiste la FT è sufficiente passare dalla rappresentazione cinematica a quella dinamica di un sistema fisico come illustrata in **Figura 2-44** e **Figura 2-45** dove è evidenziato il comportamento oscillatorio «intrin-

⁶² Per tutta questa parte, rimando al bellissimo testo sull'analisi di Fourier (Stein & Shakarchi, 2003).

seco» nel tempo di sistemi dinamici lineari e non-lineari $f(t)$ in fisica. Questa intrinseca natura «oscillatoria» di un sistema dinamico ha la sua massima espressione in QM dove si parlerà, addirittura, di *meccanica ondulatoria* e di *dualità particella-onda* (cfr. § 2.6).

FT come estensione analitica dello sviluppo in serie di Fourier

Formalmente, la FT è un'estensione analitica della serie di Fourier, che nella sua forma più generale introduce l'uso di *funzioni esponenziali complesse*. Ad esempio, per una funzione $f(x)$, l'ampiezza e il periodo P di una componente di frequenza n/P con $n \in \mathbb{Z}$ è data dal *numero complesso*, composto cioè da una parte *reale* ed una *immaginaria*.

$$c_n = \frac{1}{P} \int_P f(x) e^{-i2\pi \frac{n}{P} x} dx$$

La formula della FT

Dove e è l'esponenziale e i è l'unità immaginaria. Questa estensione fornisce un continuo di componenti in frequenza ($\xi \in \mathbb{R}$), per cui usando un dominio infinito di integrazione, otteniamo la *formula della trasformazione di Fourier* $f \rightarrow \hat{f}$:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi \xi x} dx \quad (23)$$

E della sua inversa FT⁻¹, sul discreto

Siccome una funzione può essere recuperata dalla sua serie di Fourier sotto determinate condizioni, la serie di Fourier fornisce la sua *formula di inversione* sul discreto:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi \frac{n}{P} x}.$$

E sul continuo

Dove c_n sono i coefficienti (complessi) delle serie di Fourier di f ⁶³. Perciò, sotto determinate condizioni su f , la *formula dell'inversione della trasformazione di Fourier sul continuo* $\mathbb{R} \hat{f} \rightarrow f$ è:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i2\pi \xi x} d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

⁶³ Nel caso che $f(x)$ sia *periodica* con periodo P i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier della funzione originaria f possono essere usati per ricostruire esattamente la f originaria contenendo essi tutta l'informazione necessaria per farlo. È questa la base dell'algoritmo *LZW* di compressione "senza perdita" in informatica (più conosciuto come *Pkzip*) dove per ogni sequenza periodica di bit del file originario, vengono salvati nel file compresso solo i coefficienti della FT, ottenuti usando l'algoritmo della cosiddetta *DFFT* (*Discrete Fast Fourier Transform*). Applicandolo in maniera inversa è possibile così ricostruire dal file compresso esattamente il file originario. È un'altra delle innumerevoli applicazioni della FT, stavolta in *teoria dei segnali*.

FT come uno dei più significativi esempi di dualità in matematica

Una funzione $f(x)$ e la sua trasformata di Fourier $\hat{f}(\xi)$ sono così uno dei più significativi esempi di *dualità* in matematica, nozione che, è fondamentale in Teoria delle Categorie, come abbiamo accennato nel *Capitolo Introduttorio* di questo volume e approfondiremo nel **Capitolo 3**. Una dualità che è caratterizzata da una fondamentale *relazione di indeterminazione*: più è *concentrata* la funzione di partenza, più è *diffusa* (meno concentrata) la sua trasformata di Fourier, e viceversa. La stessa famosa *relazione di indeterminazione di Heisenberg in QM* è solo un caso particolare di questa relazione di indeterminazione dell'analisi di Fourier!

La relazione di indeterminazione implicita nella FT

In altri termini, possiamo considerare i due termini della trasformazione di Fourier, f, \hat{f} , in statistica come due *variabili coniugate* – ovvero che *non commutano fra di loro* – esattamente come la *posizione* q e la *quantità di moto* p in QM per il *principio di indeterminazione*. Intuitivamente, l'informazione che posso ottenere su *una delle due variabili canoniche coniugate* viene pagata in termini dell'informazione che posso ottenere dalla seconda e viceversa.

La relazione di indeterminazione della FT e la distribuzione normale in statistica

Questa *relazione di indeterminazione*, infatti, è particolarmente significativa quando applichiamo la trasformazione di Fourier a una *funzione gaussiana* in statistica. Ovvero, alla cosiddetta *distribuzione normale* che, come vedremo (cfr. *infra* § A4.2), gioca un ruolo fondamentale in Teoria della Probabilità e quindi, in fisica, nel formalismo della *Mechanica Statistica* e della *Mechanica Quantistica*. Infatti, nel caso che la $f(x)$ è una funzione gaussiana con varianza $\sigma^2/2\pi$, la sua trasformata di Fourier $\hat{f}(\xi)$ è un'altra funzione gaussiana con varianza «opposta» $\sigma^{-2}/2\pi$.

Di qui il vero significato matematico della relazione di indeterminazione della QM

Così, nello spazio delle fasi della QM, la posizione e la quantità di moto sono date da due *funzioni d'onda* (di probabilità) che sono coppie di trasformate di Fourier, all'interno del fattore di quantizzazione della *costante di Planck*. In questo senso la relazione che caratterizza una gaussiana e la sua trasformata di Fourier diventa di fatto l'enunciato del *principio di indeterminazione di Heisenberg* in QM nella sua radice matematica profonda (cfr. § 2.6.3 e (Stein & Shakarchi, 2003, p. 198)).

La relazione fra l'indeterminazione della FT e il formalismo degli spazi di Hilbert

La relazione con l'indeterminazione di Fourier applicata alle funzioni gaussiane delle distribuzioni di probabilità delle due variabili coniugate p e q dello spazio delle fasi in QM è così la chiave per capire le cosiddette *relazioni di commutazioni canoniche* (*Canonical Commutation Relations, CCR*) che sono alla base del formalismo matematico degli *spazi di Hilbert* della QM e della QFT. Intuitivamente, proprio perché (le gaussiane del) le variabili canoniche p e q non commutano fra di loro in quantistica, (la gaussiana di) ciascuna commuta con la FT (della gaussiana) dell'altra,

rendendo possibile una *rappresentazione geometrica euclidea* dello spazio degli stati (fasi) della dinamica di un sistema quantistico. Ogni spazio geometrico euclideo richiede infatti la commutatività delle sue dimensioni, dev'essere cioè una *varietà commutativa*, come Hilbert dimostrò nella sua assiomatizzazione della geometria euclidea (Hilbert, 1899). Nel caso della QM e della QFT si tratta Spazi euclidei *vettoriali* definiti sui numeri *complessi* dotati di *prodotto interno*, con delle proprietà matematiche affascinanti, quelle appunto degli «spazi di Hilbert» caratterizzati, come vedremo, da un'*intrinseca dualità*, quella, ripetiamo, della FT (cfr. § 2.6.8).

Per capire il senso dell'analisi in frequenza di una funzione operata dalla FT è fondamentale passare alla descrizione dinamica di un sistema meccanico

Per capire ora questa sorta di «psicanalisi in frequenza» che l'analisi di Fourier ci ha insegnato a fare di ogni funzione $f(t)$ che rappresenti l'evoluzione nel tempo di un sistema dinamico classico o statistico qualsiasi esso sia, occorre passare alla *caratterizzazione dinamica* di un sistema fisico come complementare a quella *cinematica* di cui ci siamo interessati finora. La Termodinamica Statistica e la Meccanica Statistica ci aiuteranno a mettere insieme le due prospettive, nel quadro metodologico unificante della *Teoria della Probabilità* e del concetto di *Spazio di Probabilità* come lo spazio geometrico in cui rappresentare l'evoluzione dinamica di un sistema nella sua base *matematico-sperimentale* (cfr. § A4.3).

A.3 Dalla cinematica alla dinamica⁶⁴

A3.1 Rappresentazione dinamica di un sistema meccanico

Origini cinematiche della fisica moderna

Come abbiamo visto, le origini della fisica moderna in Galilei e Newton coincidono con la *rappresentazione/spiegazione geometrica* dei moti di un sistema meccanico e delle sue proprietà/leggi o *cinematica* prescindendo dalle *cause* del movimento (forze). Di tutto questo abbiamo appena visto un esempio smagliante nella descrizione cinematica mediante *funzioni trigonometriche* del comportamento del pendolo ideale, e soprattutto nell'estensione analitica dello studio delle funzioni trigonometriche grazie all'*analisi di Fourier*.

La *vexata quaestio* della primalità fra cinematica e dinamica

Esiste però una altrettanto fondamentale *descrizione/spiegazione* dei moti di un sistema meccanico e delle sue proprietà/leggi nei termini *causali* delle *forze* che agiscono su di esso che va sotto il nome di *dinamica*. Se è la cinematica ad avere la primalità sulla dinamica o viceversa è una classica questione del «viene prima l'uovo o la gallina» che di per sé rimanda a due

⁶⁴ Le nozioni-base della Dinamica riportate in questo paragrafo, sono tolte dal manuale in formato e-book che consiglio vivamente di acquistare: (Sbranchella, Zungri, & Carichino, 2019).

impostazioni fondamentali sull'ontologia dell'ente fisico-matematico, *platonica* (cinematica), *aristotelica* (dinamica). Ovviamente, qui si propende per la seconda e questa scelta cercheremo di giustificarla in tutto questo libro.

Il concetto di forza e il carattere lineare della Seconda Legge di Newton

In ogni caso, il concetto di forza nel senso della *fisica moderna*, ovvero nel senso di una variabile matematicamente rappresentabile ed empiricamente misurabile, è stato introdotto da Newton con la sua *Seconda Legge della Dinamica* in Meccanica Classica che fa della forza una *grandezza vettoriale* dove cioè non solo il *modulo* (grandezza scalare corrispondente alla lunghezza del vettore) dell'intensità della forza F conta, ma anche il *verso* e la *direzio*ne del vettore, secondo la celeberrima formula:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

La relazione fra la Seconda Legge e il Calcolo

La «forza» come misura dell'interazione (causale) fra corpi è quindi una grandezza vettoriale che è *proporzionale* al prodotto della «massa» del corpo per un'altra grandezza vettoriale, l'«accelerazione». Questo è tipico di tutti i sistemi dinamici *lineari*, dove cioè il polinomio (binomio) dell'equazione della forza è di *primo grado*. Ovviamente, nel caso *non-lineare* – dove, cioè, il polinomio dell'equazione della forza è di grado superiore al primo, contiene cioè termini esponenziali – questa proporzionalità aritmetica viene a cadere e lo stato finale del sistema diventa generalmente *impredicibile*. Nel senso che piccole variazioni dello *stato iniziale* della dinamica (causa la presenza di un'esponenziale) possono produrre grandi variazioni nello *stato finale*, come vedremo.

Riferimento della Seconda Legge a sistemi di riferimento inerziali (Prima Legge)

Inoltre, ricordiamo sempre che la forza così definita vale solo per *sistemi di riferimento inerziali*, ovvero nei sistemi «in moto rettilineo uniforme» gli uni rispetto agli altri. Per sistemi di riferimento *in moto accelerato* la formula va corretta come si dimostra nella *Teoria della Relatività* (cfr. § 2.4).

Dal concetto e misura di una forza a quelli di un lavoro

In ogni caso, dal concetto e dalla misura⁶⁵ di una forza costante nel tempo deriva immediatamente in Dinamica il concetto di *lavoro* L di una forza che in Meccanica Classica sarà il *prodotto scalare* fra due *grandezze vettoriali*: la *forza* F e lo spostamento s (rettilineo):

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Dalla definizione dinamica a quella cinematica di un lavoro

Cinematicamente, il lavoro può essere definito in maniera equivalente come:

⁶⁵ Ricordiamo che l'unità di misura della forza nel *Sistema Internazionale* (SI) è il *newton* N che idealmente misura l'intensità della forza necessaria per spostare linearmente un corpo di massa di 1kg di moto uniformemente accelerato, con accelerazione costante di $1m/sec^2$. Quindi: $1N = \frac{(1kg) \cdot (1m)}{1sec^2}$.

$$L = Fs \cos \alpha$$

Dove, con $\cos \alpha$ si indica il coseno dell'angolo convesso α compreso fra i vettori \vec{F} , \vec{s} :

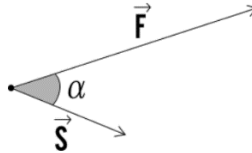


Figura 2-42. Lavoro di una forza costante espresso come prodotto scalare di due vettori (forza x spostamento)⁶⁶ (da: (Sbranchella, Zungri, & Carichino, 2019).

Nozione di lavoro totale per un sistema su cui agiscono n forze

Ovviamente, nel caso in cui su un corpo agiscono n forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ il lavoro va calcolato per ciascuna forza, per cui il *lavoro totale* è dato dalla somma dei singoli lavori trovati:

$$L_{tot} = L_{F_1} + L_{F_2} + \dots + L_{F_n}$$

Dal lavoro, all'energia al potenziale di una forza

Strettamente legato al concetto di lavoro in dinamica è la nozione di *energia* E ed il concetto di *potenziale* U di una forza. Il concetto di energia si definisce piuttosto genericamente come la «capacità di un corpo di compiere un lavoro a prescindere dal fatto che questo lavoro sia eseguito o meno».

Carattere conservativo dell'energia

L'aspetto fondamentale dell'energia è che *essa sempre si conserva* in ogni *trasformazione fra diverse forme di energia* che troviamo nelle diverse branche della Fisica (Meccanica, Termodinamica, Elettromagnetismo, Relatività, Quantistica).

Tre forme fondamentali di energia in Meccanica: cinetica, potenziale e meccanica

In Meccanica, le forme fondamentali di energia sono perciò:

- ◆ L'*energia cinetica* $T = K = \frac{1}{2} m v^2$ dove $m\vec{v}$ è la «quantità di moto» p che definisce una delle due dimensioni dello «spazio degli stati» della cinematica di un corpo;
- ◆ L'*energia potenziale* U_x che misura l'energia spesa da un corpo per eseguire un certo lavoro (spostamento). Essa, dunque, si misura come una *differenza di potenziale* $\Delta U_x = U_f - U_i = -L$, ovvero come la differenza fra il valore del *potenziale finale* U_f e quello del *potenziale iniziale* U_i che corrisponde *all'inverso del valore del lavoro* $-L$.

⁶⁶ L'unità di misura del lavoro nello SI è il *joule* J è data dal prodotto dei *newton* (forza) e dei *metri spostamento*. $1J = 1N \cdot 1m$

- ◆ *L'energia meccanica* che corrisponde alla somma dell'energia cinetica e potenziale.

A3.2 Sistemi dinamici conservativi e le equazioni canoniche di Lagrange e Hamilton

Carattere conservativo delle forze in meccanica, concetto di lavoro nullo e reversibilità rispetto al tempo

Per i nostri scopi, è fondamentale approfondire il rapporto che esiste in Meccanica fra l'energia potenziale di una forza e la forza stessa, tenuto presente che in Meccanica Classica abbiamo generalmente a che fare con *forze conservative*⁶⁷ (tipico esempio di forza non-conservativa è, invece, la *forza di attrito*). Ovvero, forze che sono definite su un *percorso chiuso* nello spazio degli stati fra stato iniziale e finale di una dinamica, nel senso che basta *invertire il verso* del vettore-forza per ritornare dallo stato (condizione) *finale* della dinamica allo stato (condizione) *iniziale*. Il che è un altro modo per dire che tutte le equazioni della Meccanica sono *reversibili rispetto al tempo*. Conseguenza del percorso chiuso nello spazio (topologico) degli stati è che il *lavoro totale* di una forza per operare uno spostamento reversibile stato iniziale-stato finale sarà sempre *nullo*.

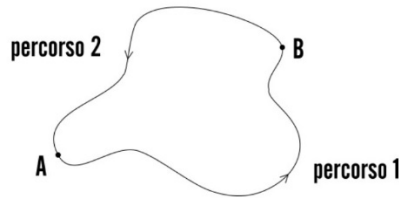


Figura 2-43. Rappresentazione topologica di un percorso chiuso di una forza conservativa con lavoro totale nullo: $L_{AB} + L_{BA} = 0$. I due percorsi rappresentano un caso classico di *omotopia* in uno spazio topologico (da: (Sbranchella, Zungri, & Carichino, 2019)).

⁶⁷ Tipici esempi di forze conservative in Meccanica sono quella legata all'energia cinetica (la forza-peso associata alla quantità di moto $m\vec{v}$) e quella legata alla *forza elastica* $F_e = -k\vec{x}$, p.es., quella legata all'*elongazione* (allungamento-compressione) di una molla su una dimensione x . Dove k è la *costante elastica* che definisce la rigidità della molla ed è per definizione sempre positiva e dove il segno meno associato al prodotto $k\vec{x}$ significa che il verso della forza elastica va sempre nella direzione opposta a quella dell'elongamento (allungamento-compressione) della molla. Il concetto di potenziale di una forza ha così un senso *solo per le forze conservative*, nel senso dell'energia potenziale che può essere accumulata in un corpo, il quale la può trasformare in un'altra forma diversa di energia. P. es., nel caso della molla di un flipper, la compressione della molla creerà un accumulo di energia potenziale *elastica* che, rilasciando la molla, si trasformerà nell'energia *cinetica* (velocità) che la molla trasferirà alla pallina del flipper.

Relazioni fra forze conservative e integrale del potenziale

Considerazioni matematico-topologiche a parte, ciò che è fondamentale è la possibilità di definire *l'integrale della variazione del potenziale* ΔU di una forza conservativa $F(x)$ per un corpo che si muove su una dimensione x da una posizione iniziale x_i ad una posizione finale x_f :

$$U_f - U_i = - \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx$$

Il che significa la possibilità di definire in Dinamica la relazione fra il carattere *monotono* (crescente o decrescente) di una forza F e l'energia potenziale mediante la relazione derivata dalla precedente che identifica il valore di una forza conservativa con la derivata della sua energia potenziale *cambiata di segno*:

$$F(x) = - \frac{dU}{dx}$$

Relazione fra valore nullo del potenziale e la Terza Legge di Newton

Tutto questo significa che la forza è *positiva* (crescente) quando la derivata del potenziale è *negativa* (decrescente), e viceversa. Di qui la possibilità di collegare il *Terzo Principio della Dinamica* di Newton allo *stato di equilibrio delle forze* di un corpo corrispondente al valore nullo dell'energia potenziale e/o il *minimo dell'energia interna* del sistema. Infatti, per il principio di azione-reazione la forza risultante (sommatoria degli n vettori-forza che agiscono su un punto) sarà nulla.

$$\vec{F}_{ris} = 0; \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = 0$$

Concetto di equilibrio statico e dinamico

Parleremo in questo caso *stato di equilibrio statico* (= corpo in quiete, p.es., lo stato finale di un pendolo smorzato). Conformemente al *Primo Principio della Dinamica* esiste però anche uno stato di equilibrio *dinamico* (= corpo in moto rettilineo uniforme perché sottoposto ad una forza (accelerazione) costante, p.es., pendolo di un orologio).

Grafico del potenziale per sistemi lineari all'equilibrio

Ciò che è fondamentale, è che il grafico dell'integrale del potenziale U_x (o "paesaggio dell'energia") di tutti i sistemi dinamici *lineari* ovvero *stabili all'equilibrio* statico o dinamico in Meccanica Classica – che seguono, cioè le Tre Leggi della Dinamica di Newton – hanno tutti la medesima forma.

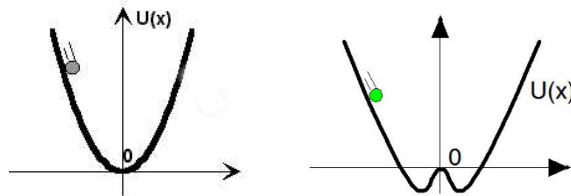


Figura 2-44. Grafici dell'integrale del potenziale $U(x)$ per sistemi lineari. (Sinistra) per un sistema stabile all'equilibrio statico (pendolo smor-

zato). (Destra) stabile all'equilibrio dinamico (pendolo oscillante fra due minimi dell'energia: sistema bi-lineare). La pallina all'interno dei due grafici rappresenta il sistema il cui stato finale sarà sempre il medesimo anche per condizioni (potenziali) iniziali diverse (diverse altezze della pallina). Per esempio, le diverse altezze/posizioni iniziali cui posso rilasciare un pendolo perché oscilli.

Linearità e predicibilità dei sistemi meccanici

Il che significa che sono tutti sistemi *predicibili* nel senso che lo stato finale è sempre predicibile (minimo dell'energia potenziale) anche per condizioni iniziali *diverse*, rappresentate nella figura precedente dalle diverse altezze in cui posso far cadere la pallina che rappresenta la dinamica del sistema e/o posso rilasciare un pendolo perché poi oscilli.

Grafico del potenziale per sistemi conservativi non-lineari

A questo punto, conviene disegnare anche il grafico del potenziale per *sistemi di forze non-lineari*. P.es., immaginiamo un pendolo metallico di un orologio che è costretto ad oscillare su un pavimento disseminato di magneti. Il caratteristico "paesaggio dell'energia potenziale" sarà così caratterizzato da *molti minimi* fra cui il pendolo oscillerà in maniera *impredicibile* "saltando" dall'uno all'altro ciclo di oscillazione. Il sistema manifesterà così un comportamento dinamico *complesso*, anche se molto elementare.

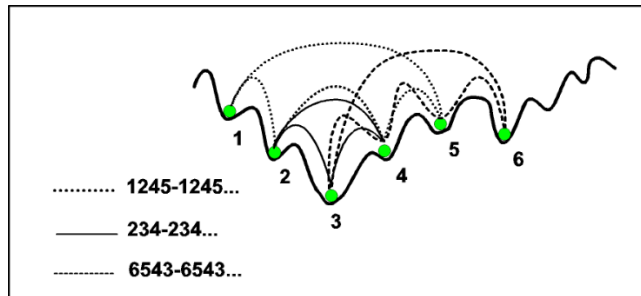


Figura 2-45. Rappresentazione intuitiva del paesaggio dell'energia di un sistema non-lineare. Le linee tratteggiate rappresentano i diversi cicli fra n minimi metastabili del potenziale, fra i quali il sistema potrà "saltare" dando luogo a un comportamento oscillatorio (ciclico) comportandosi quindi come un sistema stabile fuori-dall'equilibrio. Il numero dei cicli possibili sarà dunque uguale a 2^n . Matematicamente, sarà definito dall'insieme potenza dell'insieme a n elementi. Nella figura il minimo denotato da "3" sarà il punto di equilibrio (minimo assoluto).

Il rapporto fra dinamica e FT

In sintesi, le due figure precedenti, ci aiutano a comprendere il senso profondo della FT: $f(t) \rightarrow \hat{f}(\xi)$ discussa nella sottosezione precedente per la teoria dei sistemi dinamici, in quanto "svelano", anche se solo intuitivamente, il senso della rappresentazione in frequenza $\hat{f}(\xi)$ della dinamica di un sistema $f(t)$.

La Lagrangiana e l'Hamiltoniana

Per concludere questa parte dedicata ai sistemi conservativi, è bene discutere subito le *due funzioni fondamentali*, la *Lagrangiana* \mathcal{L} e l'*Hamiltoniana* \mathcal{H} della dinamica che ritorneranno sempre nel nostro testo.

La funzione di Eulero-Lagrange

◆ *La funzione di Eulero-Lagrange o Lagrangiana* \mathcal{L} è il modello dinamico base in Meccanica Classica, se vogliamo, essa è la “madre di tutte le equazioni della dinamica”. Fu introdotta da Eulero, ma sviluppata sistematicamente dal matematico italiano Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) che ne fece la base del suo trattato di *Mécanique Analytique* (1788), oggi, Meccanica Razionale. Quella di cui, per intenderci, Kant nella sua *Ragion Pura* fornisce la giustificazione epistemologica, chiamandola *Physica Pura o Physica Rationalis*.

Il concetto generalizzato di posizione e velocità nella Lagrangiana

In meccanica Lagrangiana le coordinate del *sistema dinamico* usate per identificare un punto materiale in movimento sono le sue *coordinate spaziali generalizzate*, ovvero definite per tutti gli elementi del sistema, $\mathbf{q} = (q_1, \dots)$ e le sue *velocità generalizzate* $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ dove il punto denota la *prima derivata totale* della posizione rispetto al tempo. In questo modo, il sistema dinamico costituito da un punto in movimento viene descritto da un'unica *funzione scalare*⁶⁸ detta *Lagrangiana*.

Definizione della Lagrangiana e l'equivalenza con il II Principio di Newton

$$\mathcal{L} := \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \tag{24}$$

anziché dalle forze componenti e dalle quantità di moto p come nella meccanica newtoniana. D'altra parte, il «Teorema Fondamentale di Lagrange» garantisce che le equazioni di Lagrange che, come abbiamo visto pongono in relazione posizione e velocità per ogni elemento del sistema, sono equivalenti al II Principio della Dinamica di Newton. Infatti, in coordinate cartesiane, se il moto è senza vincoli, la (24) può essere riscritta con l'equazione di Newton del II Principio:

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}} \tag{25}$$

dove i due puntini denotano la derivata seconda totale (accelerazione) rispetto al tempo.

L'equivalenza con la funzione di Eulero

Storicamente, la \mathcal{L} corrisponde alla equazione di Eulero per una funzione scalare $f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$:

⁶⁸ Una funzione scalare è una funzione definita sui reali da n argomenti a un solo valore nel codominio: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (26)$$

Presenza del solo termine di energia cinetica nella Lagrangiana

Dove ∂ è il simbolo della *derivata parziale*⁶⁹ e (x, \dot{x}) sono, rispettivamente, le coordinate generalizzate (x_1, x_2, x_3, \dots) della \mathcal{L} e le loro derivate rispetto al tempo (velocità). Il che ci fa comprendere immediatamente come nella Lagrangiana è presente solo il termine di *energia cinetica* K e non quella *potenziale* U che di per sé può includere anche altre forme di energia in grado di compiere un lavoro, p.es., l'energia elettromagnetica o l'energia gravitazionale. Ovvero:

$$\mathcal{L} = K - U$$

Il concetto di azione nella Lagrangiana

In questa forma, si può reinterpretare la \mathcal{L} nei termini del *calcolo variazionale*⁷⁰ di Eulero dove il funzionale della \mathcal{L} ha le dimensioni di *un'azione* S (energia nel tempo):

$$S = \int f_{\mathcal{L}}(t) dt \quad (27)$$

Il Principio di Minima Azione

I punti stazionari di questo funzionale (cfr. nota 70) sono *punti di minimo*; quindi, generalmente si dice che nella dinamica Lagrangiana vige il *Principio di Minima Azione* come principio a partire dal quale si definisce la dinamica di un sistema di Meccanica Classica. Tutto questo diverrà più chiaro nella *reformulazione hamiltoniana* della Meccanica Classica.

La funzione Hamiltoniana

◆ *La funzione di Hamilton o Hamiltoniana* III. Essa costituisce, per i motivi che vedremo, la *rappresentazione canonica* dei sistemi dinamici e, in fondo, tutto quanto abbiamo detto in questa sezione già la supposeva in qualche modo. La meccanica Hamiltoniana fu introdotta nel 1883 dal fisico e matematico irlandese William Rowan Hamilton (1805-1865) e consiste in una riformulazione della Meccanica Classica a partire dalla meccanica Lagrangiana. Questa modellizzazione dei sistemi dinamici è fondamentale perché non solo si applica alla Meccanica Classica, ma anche a quella Statistica e Quantistica, per cui a ben ragione viene definita la *rappresentazione canonica* dei sistemi dinamici. Cerchiamo di capirne il cuore teoretico.

Come abbiamo appena visto, l'equazione del moto della \mathcal{L} può essere riscritta nei termini di un calcolo variazionale di Eulero come:

⁶⁹ Una derivata *parziale* di una funzione di più variabili è la sua derivata rispetto a una di queste variabili, con le altre mantenute costanti (al contrario della derivata *totale*, in cui tutte le variabili possono variare).

⁷⁰ Il *calcolo delle variazioni* è un campo dell'analisi funzionale che si occupa della ricerca e delle proprietà dei *punti estremali* (i massimi e i minimi) di un *funzionale* ovvero di funzioni del *secondo ordine* il cui dominio, cioè, è *un insieme di funzioni*, ovvero parliamo di "funzioni di funzioni".

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}$$

Ridefinizione Hamiltoniana della Lagrangiana

La proposta di Hamilton fu di ri-esprimere l'equazione variazionale di Eulero che è del *secondo ordine* (cfr. nota 70) in due equazioni del *primo ordine* definendo le *quantità di moto* \mathbf{p} associate alle coordinate (posizioni) \mathbf{q} . Cioè, la quantità di moto della coordinata q_i di un corpo in moto diventa la *derivata parziale* della Lagrangiana rispetto alla coordinata della posizione successiva q_j , ovvero:

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \text{ e quindi generalizzando: } \mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$$

Rappresentazione della Lagrangiana nello spazio delle fasi

In tal modo, la Lagrangiana viene rappresentata in forma canonica nello *spazio delle fasi* del sistema (\mathbf{p}, \mathbf{q}) che definisce l'Hamiltoniana \mathbb{H} :

$$\mathbb{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (28)$$

Presenza nell'Hamiltoniana anche dell'energia potenziale

Con $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$. Quello che è particolarmente rilevante è che nel caso il sistema dinamico non dipenda da vincoli temporali, l'Hamiltoniana coincide con l'*energia totale* del sistema che comprende, cioè, il termine di *energia cinetica* K e di *energia potenziale* U , laddove nell'energia definita dalla Lagrangiana era presente solo il termine di energia cinetica. Ovvero:

$$\mathbb{H} = K + U \text{ mentre } \mathcal{L} = K - U.$$

Le equazioni di Hamilton

In tal modo, diviene possibile analizzare l'evoluzione temporale del sistema dinamico a partire da \mathbb{H} usando le *equazioni di Hamilton*:

$$\dot{\mathbf{p}} = - \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial \mathbf{q}}; \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial \mathbf{p}}$$

Definizione rigorosa di coordinate canoniche e di trasformazioni canoniche nella Hamiltoniana

Che è una riscrittura delle equazioni di Eulero-Lagrange. Proprietà fondamentale delle equazioni Hamiltoniane del moto è che esse sono *simmetriche* rispetto a \mathbf{p} e \mathbf{q} , cioè, scambiare $\pm \mathbf{q}$ con $\mp \mathbf{p}$ le lascia *invariate*. Questo ci fa comprendere perché vengono definite *coordinate canoniche* tutte le variabili generalizzate le cui trasformazioni, dette per questo *trasformazioni canoniche*, lasciano inalterata la forma delle equazioni Hamiltoniane. Per questo, ripetiamo, l'Hamiltoniana \mathbb{H} è definita la *rappresentazione canonica* dei sistemi dinamici che si applica sia in Meccanica Classica, che statistica e quantistica.

L'Hamiltoniana nella Meccanica Quantistica

In particolare, in QM – per i motivi che risultano più chiari illustrando il formalismo degli *spazi di Hilbert* (§ 2.6.8) – la funzione Hamiltoniana è definita *operatore hamiltoniano* perché ad essa si fa corrispondere l'*energia osservabile* di un sistema quantistico. E gli operatori (hermitiani) su uno spazio di Hilbert (che è definito sul campo dei numeri complessi \mathbb{C}) sono gli unici *osservabili* in quanto sono dei funzionali che restituiscono valori defi-

niti sul campo reale \mathbb{R} . Infatti, ogni misurazione probabilistica in fisica è definita su \mathbb{R} , come vedremo subito.

A4. Lo spazio di misura come spazio di probabilità

A4.1 Il carattere statistico delle misure sperimentali nella scienza moderna

Rappresentazione
astratta
(matematica) e
concreta
(sperimentale) dei
sistemi fisici

Tornando ora alla nostra rappresentazione cinematica (geometrica) dei sistemi dinamici, finora abbiamo considerato la cinematica come rappresentazione geometrica del moto in condizioni matematiche *astratte*, come nel caso del nostro pendolo ideale. Di fatto però quando siamo in fisica sperimentale abbiamo a che fare con rappresentazioni di sistemi, cioè, empiricamente rappresentabili mediante opportune *operazioni di misura* sulle grandezze fisiche coinvolte. Tutta la potenza della scienza moderna galileiana è infatti nel carattere matematico-sperimentale delle sue teorie

Il carattere statistico
delle
rappresentazioni
sperimentali

Ora è noto a chiunque abbia mai fatto una misura di laboratorio in vita sua che *mai la ripetizione della misura* anche in condizioni sperimentali praticamente identiche fornirà *esattamente* lo stesso risultato ma lo fornirà sempre con una certa *approssimazione*⁷¹. Il valore “puntiforme” che si segnerà sul grafico della rappresentazione *sperimentale* della funzione sarà dunque essenzialmente una *media ponderata* sul numero effettivo delle rilevazioni (misurazioni) sperimentali fatte, che dipenderà perciò dalla *frequenza* con cui determinati valori della misura si ripetono. In altri termini quei punti sperimentali saranno *punti di accumulazione* di determinati valori *statistici* di misura e la curva che li unisce sarà una *funzione di probabilità* «a posteriori» – più esattamente, come vedremo definendo rigorosamente la nozione di *spazio di probabilità* in § A4.3, una *funzione di densità di probabilità* «a posteriori».

⁷¹ Effettivamente, fino a pochi anni fa quando apparvero le prime bilance pesapersona elettroniche *digitali*, quindi dotate di un’alta precisione (di solito all’ettogrammo) rispetto a quelle tradizionali *analogiche* (di solito al chilo), tutti hanno avuto l’evidenza sperimentale che pesandosi più volte in successione nell’arco di pochi secondi, quindi per condizioni sperimentali molto simili, praticamente identiche, *mai* la bilancia dava due volte lo stesso valore numerico, ma esso “fluttuava” intorno a un determinato valore. Cioché, se avessimo voluto sapere “esattamente” quanto pesavamo, dovevamo pesarci almeno quattro cinque volte in successione e poi *fare la media* dei valori sperimentali diversi ottenuti. Le attuali bilance digitali, invece, questa statistica se la fanno automaticamente ripetendo la misura diverse volte nell’arco di qualche secondo. Infatti, dobbiamo aspettare un po’ di tempo per leggere il valore digitale “esatto” sul quadrante, ma se ripetiamo più volte la pesatura essa darà sempre lo stesso valore in maniera “stabile” senza alcuna fluttuazione.

Ricostruzione della curva sperimentale mediante interpolazione

In ogni caso, unendo i punti sperimentali ottenuti da successive misurazioni mediante le cosiddette *tecniche di interpolazione* si ricostruirà in tal modo la *curva sperimentale* (nel nostro caso la traiettoria nello spazio degli stati del sistema non astratta, ma ricostruita mediante misurazioni).

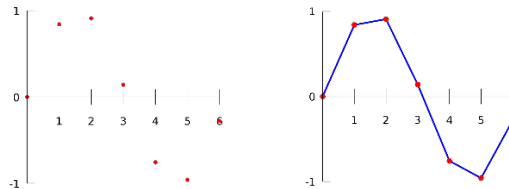


Figura 2-46. Rappresentazione intuitiva della ricostruzione di una *curva sperimentale* (a destra) che unisce i *punti sperimentali* (a sinistra) di operazioni di misura mediante la tecnica della cosiddetta *interpolazione lineare*. Essa è molto rozza ed esistono tecniche molto più raffinate di interpolazione che qui non interessano: basta capire il principio.

Essa corrisponderà alla *curva teorica* ovvero alla *funzione di densità di probabilità* «a priori» – quella del *modello matematico ipotetico* di partenza – entro una qualche *barra di errore* stabilita a priori dall'osservatore. Nel senso che, se la curva sperimentale corrisponderà (si sovrapporrà) a quella teorica entro quella barra di errore ritenuta accettabile, l'esperimento verrà considerato come *conferma del modello matematico astratto*. In questo senso si dice che la funzione di (densità di) probabilità *teorica* definisce i *valori aspettati* della funzione di (densità di) probabilità *sperimentale*, entro la *tolleranza* di un determinato valore di errore ammesso.

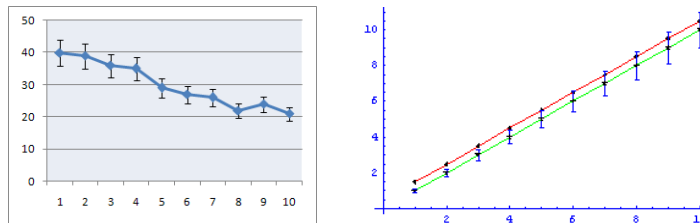


Figura 2-47. Rappresentazione di un grafico con barra di errore (sinistra) e di un'ottima sovrapposizione (destra) entro la predefinita barra di errore fra curva (traiettoria) teorica (verde) e sperimentale (rossa).

Indefinita precisione della misura in fisica classica e il concetto di limite in Teoria della Probabilità.

D'altra parte, il fatto che si parli di rappresentazioni puntiformi dei valori sperimentali, si basa sul presupposto della fisica classica dell'*indefinito incremento possibile della precisione statistica della misura* mediante la ripetizione della misura stessa, che è alla base della supposizione laplaciana del determinismo "analitico-geometrico" nell'interpretazione *meccanicista* della natura ricordata al **Capitolo 1** (cfr. § 1.4.2). Infatti, si deve a Laplace una prima

definizione rigorosa del *Teorema del Limite Centrale* mediante cui è possibile estendere il concetto di *limite* e quindi il calcolo analitico alla Teoria della Probabilità. In una parola, definire una *Teoria Analitica della Probabilità*, come vedremo subito.

Ogni funzione (distribuzione) di probabilità è dunque una funzione di «densità» di probabilità

Proprio perché si può definire un *limite* in senso analitico quindi un punto definito sui *numeri reali* di una misura probabilistica – intesa come limite della successione di un’infinità di misure – ha un senso *matematicamente corretto* rappresentare con un *punto* quello che in effetti è un accumulo di punti (quindi con una data *densità*) in un certo intorno. Per questo motivo, ogni «funzione (analitica) di probabilità» o «distribuzione di probabilità» è, matematicamente parlando, una *funzione di densità di probabilità* (*probability density function, PDF*). Praticamente, tale funzione, nella supposizione che la variabile casuale X sia continua, descrive la “densità” di probabilità nello spazio di campionamento. Ovvero, è una funzione il cui valore per ogni dato campione (o punto) dello spazio di campionamento fornisce una *relativa verosimiglianza* (*likelihood*) che il valore della variabile casuale sia uguale a quel campione⁷².

Natura necessariamente statistica delle rappresentazioni matematiche nella scienza moderna

Questi risultati hanno cambiato la storia della scienza moderna. Se è vero che senza il calcolo analitico di Leibniz e Newton la scienza galileiana matematico-sperimentale mai avrebbe avuto lo sviluppo che ha avuto, è altrettanto vero che tale sviluppo non avrebbe mai potuto compiersi se l’analisi matematica e il calcolo analitico non fossero stati estesi alla Teoria della Probabilità. E questo si deve innanzitutto all’opera di Laplace. In particolare, alla sua *Théorie Analytique de Probabilité* e alla sua formulazione in essa del *Teorema del Limite Centrale* di cui ci occuperemo subito.

⁷² Più precisamente una PDF è usata per specificare la probabilità che la variabile casuale ricada sotto un particolare dominio di valori, invece che assumere qualsiasi valore. Questa probabilità è data dall’*integrale* della PDF di questa variabile definita su quel dominio. Cioè, è data dall’area sottesa alla funzione di densità che è sopra l’asse orizzontale e compresa fra i valori minimo e massimo del dominio. Quindi la PDF è ovunque *non-negativa* (per questo è definita sui reali e non sui complessi) e l’area sottesa all’intera curva è uguale ad 1. Più formalmente, una variabile casuale continua X ha densità f_X – dove f_X è una funzione non-negativa integrabile di Lebesgue – se $\Pr[a \leq X \leq b] = \int_a^b f_X(x) dx$. Intuitivamente, uno può pensare a $f_X(x) dx$ come se fosse la probabilità di X di cadere entro l’intervallo infinitesimo $[x, x + dx]$. Quindi, se è data una variabile casuale X e la sua distribuzione ammette una PDF f , allora il valore atteso di X (se esiste) può essere calcolato come: $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$.

A4.2 Il cuore della statistica: il teorema del limite centrale e la distribuzione normale

La statistica come centro unificante di tutte le scienze matematiche, naturali e umane

Cerchiamo dunque di ricostruire per sommi capi i passaggi-chiave che hanno portato allo sviluppo moderno della *Teoria della Probabilità* che è il vero *centro metodologico unificante* di tutta la scienza moderna, sia delle *scienze naturali* (fisiche, chimiche, biologiche, neurali, ...), sia delle *scienze umane* (psicologiche, sociali, storiche, economiche, ...), sia delle *scienze dell'artificiale*, ovvero le varie forme di *ingegneria* applicate alle diverse discipline naturali e umane da cui il progresso moderno dipende.

Esistenza di leggi matematiche della casualità

Ebbene tutte queste discipline scientifiche, nella misura in cui si basano sul *controllo empirico* di modelli logici e matematici secondo il metodo galileiano devono usare la *Statistica* e dunque la *Teoria della Probabilità*. Ovvero, lo studio matematico delle *Leggi della Casualità*. Un'espressione che al senso comune risulta paradossale se non contraddittoria, ma che invece è la realtà: *caso e necessità* sono due facce della medesima medaglia, come già la Mitologia Greca aveva intuito con la dottrina del *Fato*.

La confusione ontologica fra «legge» e «causa» e le sue irritanti conseguenze nella modernità anche in metafisica e teologia

Naturalmente la nozione di «Fato» – che fa del determinismo della casualità una sorta di divinità – dipende dalla *confusione ontologica* fra «legge» e «causa» che – senza mitologizzazioni ma semplicemente perché la *necessità causale* viene ridotta (per il principio epistemologico di *evidenza*) alla *necessità logica*, ovvero alla necessità della *legge matematica* soggiacente – è tipica, purtroppo, anche degli inizi dell'epistemologia della scienza moderna da Leibniz e Kant in poi, come sappiamo. Di qui tutte le false contrapposizioni fra «Dio» e «Caso» come «cause ultime», ovviamente inconciliabili in questa luce (ma non è vero: *causalità* e *casualità* possono perfettamente convivere se non confondiamo necessità logica e causale) della realtà naturale – quella biologica, innanzitutto. Si pensi alle irritanti polemiche su «evoluzionismo» vs. «creazionismo» – su cui la modernità ha speso inutilmente perché ideologicamente – e continua a spendere purtroppo, soprattutto negli USA – una quantità ingiustificabile di tempo, inchiostro e carta... Ma lasciamo da parte le ideologie inutili ed irritanti frutto solo di ignoranza (colpevole o meno) logico-matematica e sforziamoci di capire il cuore della moderna Teoria Matematica della Probabilità, una delle più alte realizzazioni del genio umano!

Partiamo dunque dai due modelli più elementari di sistema probabilistico, ovvero il *lancio della moneta*, e il *lancio del dado*.

Probabilità attesa o teorica e probabilità effettiva o sperimentale e la Legge dei Grandi Numeri

È evidente a tutti che, se lanciamo una moneta o un dado poche volte, mai le due facce della moneta o i sei numeri sulle facce del dado mi usciranno con la loro probabilità a priori o *probabilità attesa* corrispondente alla loro media aritmetica μ . Essa nel caso della moneta sarà pari a 0.5, mentre nel caso del dado sarà:

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5$$

Il Teorema di Bernoulli

Tuttavia, per la *Legge dei Grandi Numeri* notata la prima volta nella modernità dal matematico svizzero Jacob Bernoulli (1655-1705) e pubblicata la prima volta nel 1713 nella sua *Ars Conjectandi* sotto forma del suo famoso “Teorema di Bernoulli”, se aumentiamo il numero dei lanci del dado la media dei loro valori approssimerà il valore aspettato 3.5 con una precisione che si incrementerà all’aumentare del numero dei lanci del dado. Più esattamente il Teorema di Bernoulli dimostra che per n eventi casuali (i lanci del dado) il valore medio misurato convergerà a quello aspettato per n che va all’infinito. Ovvero, data una successione di variabili casuali $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ indipendenti e identicamente distribuite con media μ (i nostri lanci del dado), data la *media campionaria*, ovvero la media sul campione statistico (gli n lanci effettivamente effettuati del dado): $\bar{X}_n = \frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}$ la legge (forte) dei grandi numeri afferma che, per n che tende all’infinito, la probabilità P sperimentale coinciderà esattamente con la probabilità attesa o teorica, ovvero:

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \mu\right) = 1 \quad (29)$$

Dalla Legge dei Grandi Numeri al Teorema del Limite Centrale

Scrivendo così la Legge dei Grandi Numeri già abbiamo usato il formalismo dell’analisi matematica applicato alla Teoria della Probabilità. Di fatto però la rigorosa definizione di limite per una successione casuale di eventi è legata alla dimostrazione di un fondamentale teorema che deriva immediatamente da quella legge. Ovvero, il fondamentale teorema della Teoria della Probabilità che va sotto il nome del *Teorema del Limite Centrale* (TLC).

Il Teorema del Limite Centrale da de Moivre, a Laplace, a Gauss, a Lyapunov.

Questo teorema ha una lunga storia che viene fatta risalire al matematico francese Abraham de Moivre (1667-1754) che nel 1733 pubblicò in inglese un trattato sulla Teoria della Probabilità dal titolo *Doctrine of Chances* in cui formulò una prima versione del teorema.

Il TLC e la distribuzione normale per variabili casuali discrete di Laplace

Normalmente però questo teorema va sotto la paternità del più volte citato Laplace che lo inserì come risultato fondamentale del suo monumentale lavoro *Théorie Analytique de Probabilité* pubblicato nel 1812 cui si deve l’inserimento del probabilismo (filosoficamente risalente a Hume) nel formalismo del calcolo e dell’analisi matematica, e quindi come fondamento matematico della scienza moderna, come appena ricordato. A Laplace si

deve infatti la prima dimostrazione analitica del Teorema, anche se limitata alla cosiddetta *distribuzione binomiale* per variabili casuali di tipo discreto, definite cioè sui naturali \mathbb{N} ⁷³.

Il TLC e la distribuzione normale per variabili casuali continue di Gauss e di Lyapunov

Mentre, dopo il fondamentale contributo di Carl Friedrich Gauss (1777-1835), si arriva nel 1818 alla rigorosa definizione formale della *distribuzione normale* per variabili casuali continue, definite, cioè, sui reali \mathbb{R} . In ogni caso, la formulazione e dimostrazione definitiva del teorema si deve al lavoro del grande matematico russo Alexandr Lyapunov (1857-1918) che nel 1901 spiegò formalmente l'esatto significato matematico del teorema. Di fatto, comunque, il termine «teorema del limite centrale» (TLC) fu usato per la prima volta da George Polya nel 1920 nel titolo di un suo articolo sull'argomento, dove affermava che «centrale» deriva dal ruolo fondamentale del teorema nel calcolo della probabilità, mentre, come afferma la scuola francese e in generale oggi tutti i matematici, «centrale» va inteso nel senso che «descrive il comportamento del centro di una distribuzione normale in opposizione alle sue code» (cfr. **Figura 2-49**).

Ma cosa afferma in sostanza il TLC?

L'enunciato informale del teorema

Esso afferma che per campioni statistici indipendenti, identicamente distribuiti (p.es., i lanci della moneta o del dado) la media campionaria tende all'aumentare del numero dei campioni verso la cosiddetta *distribuzione normale* anche se le variabili originali erano non erano distribuite in forma normale, o, comunque, avevano distribuzioni del tutto *ignote*.

La valenza intuitiva del teorema

Questo ci fa vedere il significato del TLC per la scienza moderna nella sua base osservativa. Supponiamo che un campione sperimentale qualsiasi contenga molte osservazioni, essendo ogni osservazione casualmente generata in un modo che *non dipende* dai valori di altre osservazioni (si tratta cioè di probabilità *incondizionate*), e che la *media aritmetica* dei valori osservati possa essere calcolata. Il TLC garantisce che, se la procedura è iterata

⁷³ La distribuzione binomiale con parametri n e p è la distribuzione di probabilità discreta del numero di successi di n esperimenti indipendenti, ognuno di risposta a una domanda «sì/no» e ognuno con la sua risposta valutata in forma booleana: *successo* (con probabilità p) o *fallimento* con probabilità $q = 1 - p$. La distribuzione binomiale viene usata perciò per modellizzare il numero di successi in un campione di dimensione n tratto da una popolazione di dimensione N . In generale, se la variabile casuale X segue la distribuzione binomiale B con parametri $n \in \mathbb{N}$ e $p \in [0,1]$, scriviamo $X \sim B(n, p)$. La probabilità di avere esattamente k successi in n tentativi indipendenti è data dalla cosiddetta *funzione di massa di probabilità* (*probability mass function*, PMF) definita su \mathbb{N} – per distinguerla dalla PDF definita su \mathbb{R} (cfr. nota 72): $f(k, n, p) = \Pr(k, n, p) = \Pr(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ per $k = 0, 1, 2, \dots, n$ dove $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, è esattamente la formula dei coefficienti binomiali di Newton su cui si basa il calcolo analitico da lui inventato!

La relazione fra
TLC e Legge dei
Grandi Numeri

molte volte, tendenzialmente un'*infinità di volte*, la distribuzione di probabilità della media *approssimerà sempre più da vicino* una distribuzione normale.

L'enorme valore del TLC sta nel fatto che la distribuzione normale nelle versioni successive a quelle di Laplace e Gauss, fino alla sua rigorosa giustificazione matematica in Lyapunov, sarà approssimata, sotto particolari condizioni, anche nel caso che le variabili casuali *non siano tutte identicamente distribuite* o che le osservazioni non siano tutte *assolutamente indipendenti*. In questo senso, il TLC si affranca dalla sua dipendenza iniziale dalla Legge dei Grandi Numeri per cui invece queste due condizioni sono imprescindibili.

Il significato del TLC
per il metodo
sperimentale della
scienza moderna

D'altra parte, siccome le quantità misurate nel *mondo reale* sono spesso il risultato (la somma bilanciata) di molti eventi casuali non osservati, il TLC fornisce una (parziale) spiegazione per la prevalenza della distribuzione normale di probabilità. Ma soprattutto giustifica l'approssimazione alla distribuzione normale solo se si usa una statistica basata su un *campione molto ampio* di osservazioni. Questo porta il fisico ad essere educato ad una sorta di «sano culto del dato sperimentale» direi quasi una vera e propria sacrosanta *venerazione* del dato sperimentale – un culto di cui Galilei è stato il primo “gran sacerdote” – basato su una *statistica molto alta* (dell'ordine di centinaia di migliaia di eventi sperimentali). Una venerazione spesso dimenticata o semplicemente assente perché impraticabile dagli studiosi di altre discipline scientifiche, innanzitutto nelle scienze umane, e che rendono altrettanto *inaffidabili* le loro conclusioni.

Alcune nozioni-
base di Teoria della
Probabilità

In ogni caso, per comprendere cos'è una *distribuzione normale* in Teoria della Probabilità occorre prima introdurre tre altre nozioni caratteristiche di qualsiasi distribuzione di probabilità, e cioè (cfr. **Figura 2-48**):

Moda, media e
mediana di una
distribuzione di
probabilità

- ◆ *La moda* di una distribuzione X , ovvero il valore che compare più frequentemente o con la *massima frequenza*.
- ◆ *La mediana* di una distribuzione X , ovvero il valore o l'insieme di valori che si trovano *nel mezzo* della distribuzione. La mediana è dunque un *indice di posizione* dei valori della distribuzione.
- ◆ *La media* di una distribuzione X , che è un singolo valore numerico che descrive sinteticamente un insieme di valori di dati statistici. Esistono vari tipi di medie. Le più comuni sono quelle cosiddette «pitagoriche» (aritmetica, geometrica, armonica). Generalmente, quando non specificato altrimenti, con media μ si intende la *media aritmetica* M_a che viene calcolata sommando tutti i valori a disposizione x_i e dividendoli per il numero complessivo dei dati n :

$$M_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

La seguente figura mostra sinteticamente le tre nozioni precedenti che caratterizzano una distribuzione di probabilità o più esattamente una PDF.

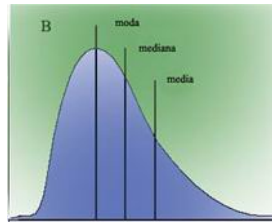


Figura 2-48. Moda, mediana e media di una distribuzione non-normale di probabilità.

A queste tre nozioni, per capire l'enunciato del TLC, va aggiunta una quarta, ovvero:

Varianza e deviazione standard di una distribuzione

- ◆ La *varianza* di una distribuzione X , ovvero la misura della distanza di determinati valori della distribuzione dal *valore medio*, la cosiddetta *deviazione standard* σ . Geometricamente, la varianza corrisponde a un'area sottesa alla curva della distribuzione e perciò si indica con σ^2 (cfr. **Figura 2-49**).

La formulazione-base del TLC

In altri termini, il TLC nella sua formulazione-base afferma che per campioni statistici indipendenti (p.es., i lanci della moneta o del dado) la media campionaria tende, all'aumentare del numero dei campioni, verso la cosiddetta *distribuzione normale* la cui PDF è data da:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{30}$$

Dove il parametro μ è la *media* o l'aspettativa della distribuzione (che nel caso della distribuzione normale coincide con la sua *mediana* e la sua *moda*), mentre il parametro σ è la *deviazione standard*.

Il caso più semplice di distribuzione normale è dato dalla distribuzione normale *standard* o distribuzione normale *unitaria*. Esso è un caso speciale con $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, la cui PDF è data da

$$\varphi(z) = \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

In questo caso la densità $\varphi(z)$ ha il suo picco in $1/\sqrt{2\pi}$ a $z = 0$ e i punti di inflessione a $z = +1$ e $z = -1$.

Comunque, graficamente, la distribuzione normale è una distribuzione di probabilità in cui *media, moda e mediana coincidono* (cfr. **Figura 2-48**), assumendo così la caratteristica forma della cosiddetta «campana di Gauss» (cfr. la seguente **Figura 2-49** dove il grafico della PDF della distribuzione normale per variabili casuali continue definite su \mathbb{R} , è confrontato con la PMF della distribuzione normale binomiale (cfr. nota 73) – quella del calcolo di Laplace – per variabili discrete definite su \mathbb{N}).

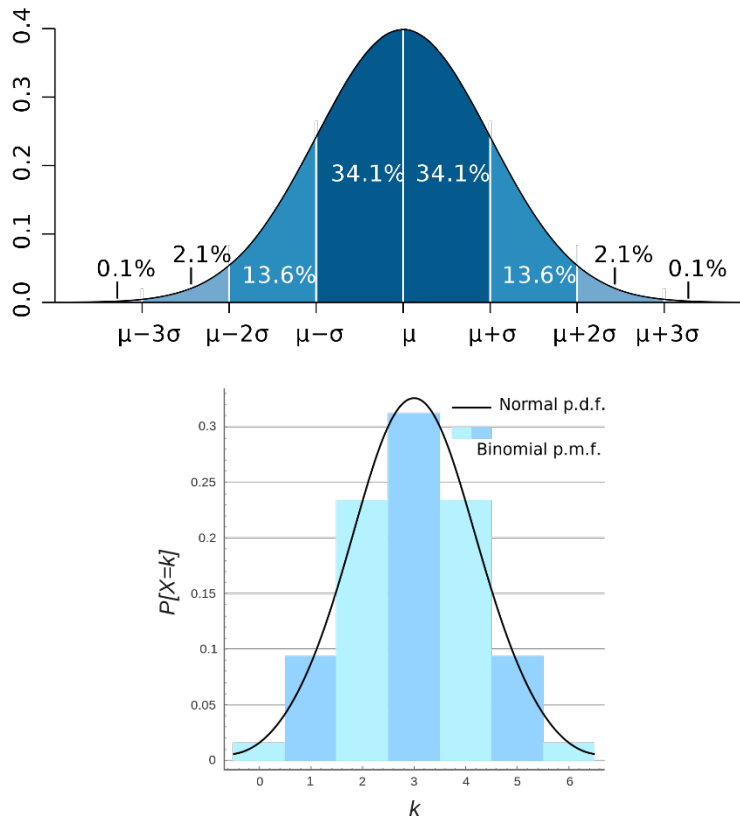


Figura 2-49. (Sopra). Per la distribuzione normale, i valori minori di una deviazione standard dalla media riguardano circa il 68.27% dell'insieme dei casi, mentre quelli minori di due deviazioni standard riguardano circa il 95.45% dei casi e quelli minori di tre deviazioni standard circa il

99.73% dell'insieme dei casi. (Sotto) confronto fra la PMF (Laplace) e la PDF (Gauss) di una distribuzione normale.

A4.3 La nozione di spazio di probabilità

Il concetto di spazio di probabilità

Il grande lavoro teorico sulla Teoria della Probabilità a partire dai contributi essenziali di Laplace, Gauss e Lyapunov appena ricordati è culminato nell'*assiomatizzazione della Teoria della Probabilità* e alla conseguente definizione formale della nozione di *spazio di probabilità* inteso come *spazio di misura*. Nozioni che oggi sono parte integrante del formalismo matematico-sperimentale della scienza moderna e, per i nostri scopi, sono fondamentali per capire in fisica il passaggio dalla *Meccanica Classica* alla *Meccanica Statistica e Quantistica*.

Nozione di spazio di probabilità all'interno della teoria assiomatica della probabilità

Si deve all'opera del grande matematico russo Andrej Kolmogorov (1903-1987) la formalizzazione della nozione di *spazio di probabilità* come *spazio di misura* che è la nozione-chiave della sua opera fondamentale *Foundations of Probability Theory* (Kolmogorov, 1950) che fornì per la prima volta una *assiomatizzazione* della Teoria della Probabilità, rendendola definitivamente *una scienza rigorosamente formale* nel senso moderno, assiomatico, del termine. Intuitivamente, uno spazio di probabilità è una costruzione matematica per definire modelli formali di un processo *casuale* o «esperimento».

Tre elementi:

Uno spazio di probabilità consiste infatti di *tre elementi principali*:

1. Spazio di campionamento

◆ *Uno spazio di campionamento* Ω che è l'insieme di tutti i possibili risultati cui un processo casuale può dar luogo (p.es., l'insieme dei sei numeri delle facce di un dado risultanti dal suo lancio $\{1,2,3,4,5,6\}$).

2. Spazio degli eventi

◆ *Uno spazio degli eventi* \mathcal{F} che è un sotto-insieme dei risultati nello spazio di campionamento (p.es., il sotto-insieme dei lanci che danno un numero pari $\{2,4,6\}$)

3. Funzione di probabilità

◆ *Una funzione di probabilità* P che assegna a ciascun evento nello spazio degli eventi una misura di probabilità compresa nell'intervallo dei reali fra 0 e 1 (p.es., nel caso più semplice, il valor medio e quindi nel nostro caso del lancio dei dadi la probabilità dell'evento $\{5\}$ è di $1/6$ mentre quella dell'evento $\{2,4,6\}$ è $3/6 = 1/2$).

Distinzione fra probabilità a priori e a posteriori

D'altra parte, sappiamo già che, quando facciamo l'esperimento del lancio dei dadi per un numero finito n di lanci, mai le diverse facce del dado usciranno con una frequenza che corrisponde a quella del modello matematico o *probabilità a priori* (p.es., lanciando 36 volte un dado non sarà mai che ciascuna delle facce mi apparirà 6 volte come la media aritmetica imporrebbe) ma mi appariranno con una *frequenza* (probabilità a posteriori)

che non sarà mai quella teorica del modello. Di qui la distinzione fondamentale in statistica fra (*funzione di*) *probabilità a priori* (quella del modello) e (*funzione di*) *probabilità a posteriori* (quella dell'esperimento). Nozioni che già abbiamo incontrato, informalmente, discutendo il *Teorema del Limite Centrale* e la *Distribuzione Normale*.

I tre assiomi di Kolmogorov

Adesso invece, una volta introdotto il concetto di «spazio di probabilità» accenniamo ai *tre assiomi fondamentali* nella formalizzazione di Kolmogorov della *Teoria della Probabilità*, che fanno dello spazio di probabilità uno *spazio di misura*. Infatti, in base a quanto abbiamo appena detto, formalmente (Kolmogorov) uno «spazio di probabilità» è una *terna* o «relazione triadica» (Ω, \mathcal{F}, P) fra uno spazio di campionamento Ω , uno spazio degli eventi \mathcal{F} e una funzione di probabilità P che definisce uno *spazio di misura* dove $P(E)$ è la probabilità di un qualche evento E , e $P(\Omega)=1$.

Definizione dei tre assiomi di Kolmogorov

Da questa fondamentale intuizione di Kolmogorov che dà un significato assiomatico rigoroso alla *natura statistica* empiricamente incontrovertibile di qualsiasi operazione sperimentale di misura su cui il moderno concetto (galileiano) di scienza si fonda, possiamo capire i *tre fondamentali assiomi* della Teoria della Probabilità di Kolmogorov che definiscono rigorosamente la nozione di «misura di probabilità»:

1. Finitarietà

◆ *Primo assioma (finitarietà):*

La probabilità di un evento è un *numero reale non-negativo*

$$P(E) \in \mathbb{R}, P(E) \geq 0 \quad \forall E \in \mathcal{F}$$

Da cui segue che $P(E)$ è sempre *finito* (gli esperimenti, infatti, possono essere ripetuti solo un numero finito di volte, come già si accorse Hume), in contrasto con quanto afferma in generale la «teoria della misura». Teorie della probabilità che ammettono probabilità *negative* fanno ovviamente cadere questo assioma.

2. Unitarietà

◆ *Secondo assioma (unitarietà):*

Questa è l'assunzione *dell'unità di misura*, ovvero l'assunzione che la probabilità che si darà almeno uno degli eventi elementari nell'intero spazio di campionamento è pari ad 1. Ovvero:

$$P(\Omega) = 1$$

3. Additività

◆ *Terzo assioma (additività):*

Questa è l'assunzione dell'*additività* (σ -*additività*) delle misure di probabilità, ovvero l'assunzione che ogni *sequenza numerabile* di eventi *mutualmente esclusivi* E_1, E_2, \dots (insiemi disgiunti di eventi) soddisfa l'uguaglianza:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_i P(E_i)$$

Distribuzioni di quasi-probabilità e le transizioni di fase

Le cosiddette *distribuzioni di quasi-probabilità* fanno cadere questa assunzione. Tali distribuzioni sono largamente usate in fisica per modellizzare *transizioni di fase* dove, cioè, eventi elementari mutualmente esclusivi prima della transizione diventano non più tali dopo la transizione e viceversa e sono quindi legati a un *cambio della metrica* dello spazio di campionamento. La più famosa di queste distribuzioni è certamente la *funzione di Wigner*, W che gioca un ruolo fondamentale in QM e QFT.

A4.4 La centralità della nozione di transizione di fase e dei gradi di libertà di uno spazio di probabilità

Nozione intuitiva di transizione di fase

Intuitivamente si pensi alla transizione di fase che va sotto il nome del meccanismo di «condensazione-rarefazione» delle molecole (moli) di un dato materiale in Fisica della Materia Condensata (p.es., la transizione di fase dallo *stato liquido* allo *stato solido* dell'acqua e viceversa) a livello fisico macroscopico (mesoscopico) e, più fondamentalmente, in QM e in QFT a livello microscopico⁷⁴.

Transizione di fase e parametro d'ordine

Ora, ogni transizione di fase in fisica è legata al *cambio della metrica* di un determinato parametro definito *parametro d'ordine* della transizione, p.es., una *densità relativa* delle moli di materia per unità di spazio nella transizione di fase stato liquido / stato solido dell'acqua dove lo stato solido è meno denso di quello liquido, motivo per cui il ghiaccio galleggia sull'acqua.

Transizioni di fase come rotture di simmetria.

Come discusso ampiamente in questo capitolo, ogni transizione di fase è legata alla *rottura di una simmetria precedente* e all'instaurazione di *una nuova simmetria* nel moto oscillatorio di una qualche grandezza fisica. P.es., nel caso della transizione di stato gas-liquido-solido la rottura di *simmetria meccanica* (detta anche “simmetria di Galilei”) del *moto vibrazionale* delle molecole di un materiale. Infatti, nello stato gassoso le molecole vibrano in

⁷⁴ Tipico esempio in QM di una distribuzione di quasi-probabilità è quella della *funzione di probabilità di Wigner* W rispetto alla funzione di *probabilità di Schrödinger* Ψ essendo la prima a differenza della seconda definita direttamente sullo *spazio delle fasi* di un sistema quantistico. Non casualmente la funzione W fornisce una spiegazione molto più fisicamente «realista» del fondamentale esperimento in QM della «doppia fessura» che è alla base della dimostrazione sperimentale del *comportamento ondulatorio* delle particelle quantistiche e quindi della «dualità particella-onda» in quantistica secondo il *modello di Copenaghen* (Bohr) della QM. Esso è opposto all'*interpretazione realista* della Fisica Quantistica basata non sulla *dualità di rappresentazione* particella-onda, ma sulle nozioni di *campo* e di *coerenza di fase dei campi* come oggetti quantistici fondamentali (cfr. § 2.9.5 e (Vitiello, 2007; Preparata, 2023)).

modo equivalente in qualsiasi direzione dello spazio tridimensionale determinando così una *simmetria sferica* o “simmetria di Galilei”.

Esempio della transizione di fase stato gassoso-liquido

Il passaggio allo stato liquido corrisponde alla *rottura della simmetria sferica* con l’instaurarsi di una *coerenza di fase* nelle vibrazioni meccaniche delle molecole lungo la *direzione longitudinale* “nord-sud”, vincolandosi le une con le altre nella medesima direzione. Si determina così la forma caratteristica di un *flusso continuo* o *stream* con cui un materiale allo stato liquido si muove come un tutto nello spazio fisico in un’unica direzione, p.es., verso il basso sotto l’azione della forza di gravità.

Esempio della transizione di fase stato liquido-solido

Il passaggio allo *stato solido* corrisponde a un’ulteriore rottura della simmetria sferica con l’instaurarsi di una coerenza di fase nel moto vibrazionale delle molecole anche lungo la *direzione trasversale* “est-ovest”, vincolandosi così le une alle altre anche in quest’altra direzione perpendicolare alla prima. Si determina così la forma caratteristica di *un unico volume tridimensionale compatto* con cui un materiale allo stato solido si muove come un tutto nello spazio p.es., sotto l’azione della forza di gravità, o di qualsiasi altra forza meccanica.

Transizioni di fase, temperatura, punto critico e rottura di una simmetria

Le transizioni di fase, di solito legate macroscopicamente ad una *variazione di temperatura*, e ad un *punto critico* legato a una temperatura critica T_c dove la transizione avviene, svolgono un ruolo fondamentale in fisica (Anderson, 1972). Ogni *transizione di fase* corrisponde, infatti a un cambio della geometria del sistema, ovvero a una *rottura di una simmetria* precedente, con l’emergere di una *nuova simmetria*.

Transizione di fase e parametro d’ordine

Tale cambio si riduce essenzialmente a un *cambio della metrica* di quello che per questo viene definito il *parametro d’ordine* della transizione di fase (generalmente una *densità*). Così, esempi notevoli di transizione di fase sono:

Transizioni di fase in Fisica della Materia Condensata

- ◆ A livello della fisica mesoscopica, cioè della Fisica della Materia Condensata sono alcuni esempi notevoli di transizione di fase sono:
 - Le transizioni fra le fasi *solida, liquida, gassosa* di un materiale a temperature critiche che variano per ciascun tipo di materiale;
 - Le transizioni fra le fasi *ferromagnetica* e *paramagnetica* dei materiali magnetici alla *Temperatura di Curie*;
 - Le transizioni alla fase *superconduttiva* delle correnti elettriche di determinati materiali (per tutti a temperature $T \approx 0^\circ\text{K}$; e per i superconduttori “caldi” a $T > 0^\circ\text{K}$).
 - Il *ripiegamento delle proteine* mediante cui esse acquisiscono la loro struttura tridimensionale alla base della loro capacità di *generare-immagazzinare informazione* nella fisica della materia vivente;

- In generale, le transizioni *ordine-disordine* nella *Teoria della Complessità*, poste al confine fra le transizioni di fase in fisica classica e quantistica, al livello cioè *mesoscopico* della fisica della materia condensata, intermedio fra quello *macroscopico* della fisica classica e *microscopico* della quantistica. Ci dedicheremo a lungo all'illustrazione di questi fenomeni e alla loro modellizzazione fisico-matematica in § 2.4.
- In particolare, nella fisica dei sistemi complessi, acquista una rilevanza particolare la distinzione generale fra *transizioni di fase del primo ordine*, che avvengono, cioè, *istantaneamente* (p.es., la transizione fra lo stato liquido-solido della materia) e le *transizioni di fase del secondo ordine* (p.es., la transizione di fase ferromagnetica) che *non sono istantanee*. I sistemi complessi sono infatti caratterizzati dal fatto che molteplici coerenze/transizioni di fase coesistono in essi su diverse scale spazio-temporali, determinando l'emergenza di *invarianze di scala* (=simmetrie) che costituiscono il cuore dell'*unità di struttura* di un sistema complesso in quanto tale (cfr. § 2.4.2).

Transizioni di fase
in Fisica
Fondamentale

- ◆ A livello della *Fisica Fondamentale* (tendenzialmente la QFT, come vedremo):
 - Le *transizioni di fase quantistiche* allo stato fondamentale dei sistemi quantistici (*minimo dell'energia* per $T \geq 0$: cfr. § 2.7).
 - Le *rotture di simmetria* delle forze di interazione e quindi delle leggi fisiche fondamentali che le riguardano in *cosmologia quanto-relativistica*, al raffreddarsi dell'universo durante le sue ere primordiali (cfr. § 2.7).
 - Le *rotture di simmetria del vuoto quantistico* che, alla luce del *Teorema di Goldstone*, che costituisce il quadro teorico di riferimento delle transizioni di fase in quantistica e che illustreremo brevemente in § 2.7.2 allorché parleremo del *Modello Standard* delle particelle elementari in fisica quantistica e specificamente in QFT.

Gradi di libertà
come dimensioni
dello spazio di
probabilità

Per lo studio matematico di tutti questi fenomeni, dal punto di vista formale della Teoria della Probabilità, assume una rilevanza fondamentale una nozione strettamente legata a quella di spazio di probabilità. Ovvero, la nozione dei *gradi di libertà* che definiscono le *dimensioni ortogonali* di uno spazio di probabilità. Definiscono, cioè, le dimensioni dello spazio entro cui una determinata *funzione di probabilità* può variare.

Gradi di libertà e
aggregazione delle
variabili

Si tratta di una nozione fondamentale perché con “grado di libertà” si definisce un principio di *aggregazione delle variabili* di un sistema complesso – il cui comportamento dipende cioè da molte variabili a diversi livelli di organizzazione della materia – che è fondamentale per capire il formalismo della *Termodinamica Statistica* di Boltzmann (cfr. §§ 2.3.2-2.3.3) e, più in generale della *Meccanica Statistica*, della *Fisica Quantistica* (QM e QFT: cfr. §§ 2.6-2.7) e, finalmente, della *Teoria della Complessità* (cfr. § 2.4). In sintesi, il meccanismo della rottura di simmetria con l’instaurarsi di nuove simmetrie (coerenze di fase) nello spazio delle fasi di un sistema consiste in un fondamentale *meccanismo dinamico di aggregazione delle variabili* e quindi di determinazione dei *gradi di libertà* di una PDF in fisica statistica.

Appendice B: Cinematica dell’evoluzione dinamica dei sistemi in meccanica statistica e sistemi caotici

B1. La nozione di attrattore in uno spazio di fase come spazio di probabilità

B1.1 Caratterizzazione cinematica di un sistema dinamico classico dal caso ideale al caso sperimentale

Per poter capire la nozione di *sistema caotico* in SM come modello-base per lo studio di un *sistema complesso*, introduciamo alcune nozioni fondamentali descrittive di *cinematica* applicata stavolta, non alla caratterizzazione geometrica del moto di un sistema meccanico conservativo astratto (cfr. il «pendolo ideale» di § A1. in **Appendice A**), ma al caso concreto del ritratto di fase definito sperimentalmente su uno *spazio di probabilità* (cfr. § A4.3 in **Appendice A**), relativo alle operazioni di misura che possiamo effettuare sul comportamento di un sistema meccanico classico e non-quantistico, anche se estendibile al comportamento di sistemi quantistici.

B1.2 Cinematica dei sistemi dinamici in uno spazio di probabilità

Per questo introduciamo brevemente la nozione fondamentale di *attrattore* in uno spazio delle fasi inteso come *spazio di probabilità*. Questa nozione è fondamentale perché, come vedremo, consente una rappresentazione *cinematica* dell’evoluzione nel tempo di un qualsiasi sistema dinamico, sistemi complessi inclusi. Come lo stesso nome suggerisce, infatti, esso fornisce una rappresentazione grafica delle aspettative, nel senso probabili-

stico del termine, in cui si andranno a concentrare i punti sperimentali rappresentativi dell'*evoluzione nel tempo* di un sistema dinamico nel suo spazio delle fasi (o degli stati). La nozione di attrattore è così sinteticamente ed efficacemente definita nell'*Enciclopedia Treccani*.

In fisica, *l'attrattore* è il luogo dei punti dello *spazio delle fasi* a cui tende nel tempo la traiettoria di un *sistema complesso*, quali che siano le *condizioni iniziali* (si dice, quindi, che il sistema è «attratto» da questo insieme di punti). Per es., per i *sistemi dissipativi*, che tendono a raggiungere uno stato di equilibrio ben determinato, l'attrattore è in generale costituito da un solo punto [= *attrattore di punto fisso*]; per i sistemi che hanno un moto periodico è invece costituito in genere da una curva chiusa che il sistema ripercorre all'infinito con la frequenza propria [= *attrattore di ciclo limite*]. L'*attrattore strano* è l'attrattore caratteristico di particolari sistemi, la cui traiettoria si aggroviglia, si ripiega su sé stessa, mescolandosi in modo estremamente confuso e caotico, *senza mai passare due volte per lo stesso punto* [= *condizione di instabilità*]. È stata la scoperta di questi attrattori (attraverso l'uso del calcolatore elettronico nella simulazione numerica della legge di evoluzione dei sistemi considerati) che ha fatto parlare per la prima volta di *caos deterministico*, mentre lo studio delle loro proprietà geometriche ha messo in evidenza che essi sono da considerarsi come *oggetti frattali*, con le caratteristiche proprietà di *autosomiglianza (auto-similarità)* e di *invarianza di scala*⁷⁵.

Se dunque in cinematica il pendolo ideale costituiva il modello astratto di riferimento di un sistema dinamico sottoposto a forze esclusivamente di tipo conservativo, senza attriti, quindi oscillante indefinitamente in forma sinusoidale fra due punti di minimo (cfr. **Figura 2-44**) e per questo il suo ritratto di fase poteva essere rappresentato sulla curva chiusa della circonferenza trigonometrica (cfr. **Figura 2-37**), la rappresentazione cinematica su uno spazio di probabilità del ritratto di fase della sua dinamica nel tempo mediante la nozione di attrattore, può essere estesa dal caso ideale a quello reale, *sperimentale*. Quindi a comportamenti più complessi, non conservativi, innanzitutto quelli che tengono conto anche degli attriti.

B1.3 Dal pendolo ideale a quello reale e la nozione di attrattore in cinematica

Attrattore di punto
fisso

Così, passando dal caso del pendolo ideale di § A1. in **Appendice A** come modello astratto di sistema dinamico, al caso concreto in cinematica, p.es., di un *pendolo smorzato* perché teniamo conto degli attriti, le aspettative sui diversi stati di moto che il pendolo assumerà nel tempo saranno rappresentati da altrettanti *punti sperimentali* che nello spazio (ritratto) di fase si disporranno sempre lungo *una traiettoria a forma di spirale*, a spire sempre più strette, che alla fine tenderà ad un punto che rappresenterà lo stato di quiete (= *stato di equilibrio* o stato di minimo assoluto dell'energia

⁷⁵ Cfr. <https://www.treccani.it/vocabolario/attrattore/>. Parentesi quadre mie.

libera: cfr. parte sinistra della **Figura 2-44**) a cui il pendolo necessariamente giungerà. Il punto finale in quiete, è un *punto fisso*, e poiché esso è come se attraesse a sé orbite che partono da punti (condizioni iniziali) diverse (p.es., si può far iniziare l'oscillazione del pendolo da altezze diverse, come la pallina in **Figura 2-44**) esso è definito come *attrattore di punto fisso* della dinamica (Cfr. **Figura 2-50**).

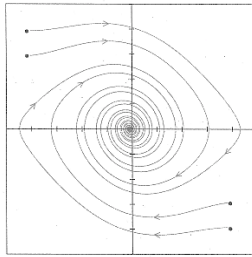


Figura 2-50. Attrattore di punto fisso. Come si vede, anche partendo da condizioni iniziali diverse (i punti di origine delle linee fuori della spirale, p.es., le diverse altezze/direzioni a cui posso rilasciare il pendolo), il sistema dopo un transitorio si stabilizza nello spazio (ritratto) di fase su un'unica traiettoria a spirale (oscillazioni sempre più piccole) con un unico stato finale di quiete.

Attrattore di ciclo
limite

Altri sistemi stabili, invece, nel lungo periodo, non tendono alla quiete, ma piuttosto a ripetere periodicamente un certo comportamento. Un esempio è costituito dal suddetto pendolo, quando l'energia che viene consumata dagli attriti viene reintegrata dal meccanismo a molla di un orologio a pendolo (= *pendolo accelerato*). In tal caso, lo stato finale, il comportamento-limite in cui il sistema si stabilizzerà, non è uno stato di quiete, ma un'*oscillazione periodica* (come nel caso del pendolo ideale). Geometricamente (cinematicamente) l'attrattore non sarà rappresentato da un punto fisso (stato di quiete), ma da una *curva chiusa* (il corrispettivo su uno spazio di probabilità astratto della circonferenza trigonometrica di **Figura 2-37**) ma il suo stato di equilibrio sarà rappresentato da un *ciclo limite* (moto periodico). Molti sistemi *stabili* esibiscono sul lungo periodo un comportamento simile. P.es., il battito del cuore dopo uno sforzo. Altrimenti saremmo di fronte ad una pericolosa disfunzione: «un'aritmia cardiaca». Vi torneremo.

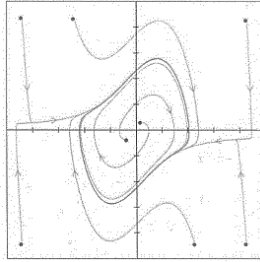


Figura 2-51. Attrattore di ciclo limite. Sebbene parta da condizioni iniziali molto diverse, il sistema nel lungo periodo, al limite, tenderà sempre a stabilizzarsi in un comportamento periodico, un ciclo, rappresentato nello spazio (ritratto) di fase da una curva chiusa (in grassetto).

Attrattore toroidale

Altri sistemi di tipo non-lineare si stabilizzano invece su comportamenti più complessi. Ovvero, si stabilizzano su ciclicità più complesse che nascono dalla combinazione di 2^n comportamenti oscillatori (pseudo-cicli), fra n minimi proprio come il sistema non-lineare con il paesaggio dell'energia rappresentato in **Figura 2-45**. In questo caso, l'attrattore non sarà costituito da una sola traiettoria chiusa unidimensionale, un ciclo-limite, ma da un *toro* (una sorta di ciambella) *bidimensionale* — ma ne possono esistere di n -dimensionali nello spazio di fase —, costituita dall'inviluppo di questi pseudo-cicli. Malgrado questa complessità di struttura, il sistema risulta però prevedibile, ovvero *stabile*. Esibirà un comportamento simile, per esempio, un pendolo metallico accelerato che oscilla sopra n magneti distribuiti regolarmente su una superficie. Esso salterà continuamente fra un numero comunque finito di n orbite periodiche *stabili*. Il paesaggio dell'energia di un sistema siffatto sarà dunque, ripetiamo, quello tipico dei sistemi dinamici non-lineari complessi a n minimi con 2^n possibili orbite descritto e discusso in § A3.2, in **Appendice A, Figura 2-45**). Lo stesso grafico che ci è servito per intuire la generalità della FT per la rappresentazione nel dominio delle frequenze di funzioni $f(t)$ e che qui abbiamo connesso con la nozione di spazio di probabilità.

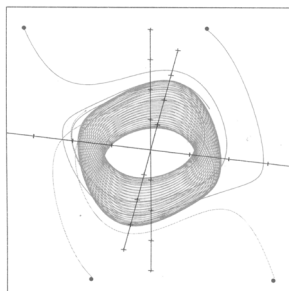


Figura 2-52. Attrattore toroidale nello spazio (ritratto) di fase di un sistema complesso non-lineare oscillante fra n minimi.

Anche se l'orbita non si ripete mai esattamente — altrimenti saremmo di fronte ad un ciclo-limite —, come accade quando le frequenze di un moto periodico non hanno lo stesso divisore, pur tuttavia orbite che cominciano vicine sul toro restano vicine. Siamo, cioè, sempre di fronte ad un sistema *stabile* perché la *metrica* del sistema resta *invariata*. Il sistema, cioè, *non passa attraverso transizioni di fase*. Algebricamente, tutti i sistemi stabili che abbiamo esaminato finora sono tali perché esibiscono una *stabilità strutturale* malgrado la loro complessità. Ovvero sono caratterizzati da un unico *paesaggio dell'energia* a n minimi.

Classicamente, lo studio degli attrattori terminava qui.

B.2 L'attrattore strano⁷⁶ per sistemi caotici e la meteorologia

Fino alla scoperta dei cosiddetti «attrattori strani» dei *sistemi caotici*, avvenuta nella seconda metà del XX sec. si pensava che la tipologia di attrattori nello spazio delle fasi dovesse esaurirsi a questi casi: punti fissi, cicli limite, tori, dunque a sistemi *stabili*. Sistemi, cioè, il cui *stato finale* era comunque *predicibile* perché le loro traiettorie nello spazio degli stati, anche se partivano da condizioni iniziali alquanto diverse, restavano comunque vicine e alla fine *convergevano* in un unico attrattore, in un unico *stato finale* come abbiamo appena visto.

B.2.1 L'attrattore di Lorenz in meteorologia

Attrattore di Lorenz

Storicamente, il primo esempio di comportamento *caotico* di un sistema dinamico *complesso* normalmente citato in letteratura è quello studiato dal

⁷⁶ Per un'introduzione divulgativa al concetto di «caos deterministico», è sempre da consigliare quello che è ormai un classico della divulgazione scientifica al riguardo, il testo di James Gleick che conta ormai anche svariate edizioni in lingua italiana (Gleick, 2018).

fisico americano Edward N. Lorenz del MIT di Boston nel 1963 (Lorenz, 1963). Tale sistema era stato da lui ideato come modello statistico di certi fenomeni di turbolenza dell'atmosfera e dunque di un *fluido*, in vista del miglioramento delle previsioni metereologiche sulla formazione dei tornado che distruttivamente si ripresentano soprattutto nella costa orientale degli Stati Uniti. Anche se oggi, con i drammatici mutamenti climatici di cui siamo testimoni, la formazione di cicloni e tornado è diventato un *fenomeno universale*. Addirittura, si formano non solo negli oceani ma anche in “mari chiusi” come il nostro Mediterraneo, rendendo la modellizzazione dei sistemi atmosferici come prototipo di *sistemi complessi* uno dei campi di ricerca teorica ed applicata più rilevanti. Tanto da meritare – come già ricordato – il conferimento del Premio Nobel per la Fisica 2021 a due meteorologi veri pionieri della complessità nello studio dei sistemi meteorologici e dei mutamenti climatici - Syukuro Manabe, Klaus Hasselmann – e a Giorgio Parisi per lo sviluppo della modellizzazione matematica dei sistemi complessi.

Definizione
matematica
dell'attrattore di
Lorenz

D'altra parte, fin dal 1999, proprio riguardo al sistema caotico studiato da Lorenz, Warwin Tucker dell'Università di Upsala ha fornito la dimostrazione matematica del comportamento caotico del sistema di equazioni studiato da Lorenz. In pratica, ha dimostrato *l'esistenza* in senso matematico dell'*attrattore strano* o *caotico* di Lorenz (cfr. **Figura 2-53**) con le sue strane proprietà di oggetto *frattale* (Tucker, 1999; Viana, 2000). Oggi, di fatto, la teoria dei sistemi caotici è divenuta una branca a sé della matematica anche perché, come cercheremo di comprendere adesso (cfr. § 2.4.2) essi costituiscono i *modelli-base (toy-models)* a livello *macroscopico* dei sistemi complessi.

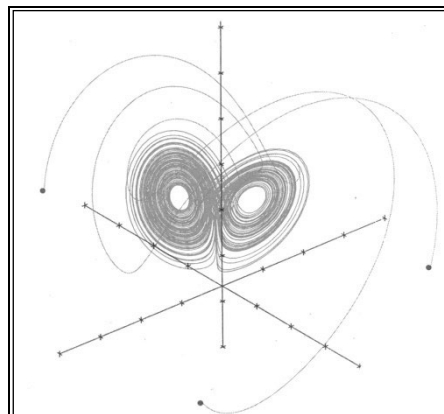


Figura 2-53. Attrattore caotico di Lorenz. Si noterà come il sistema di Lorenz abbia simulato al computer per la prima volta nella storia della meteorologia la formazione dei nuclei di due tornado

Questa dimostrazione fuga ogni dubbio — se mai vi fosse rimasto — che il caos deterministico non è una sorta d'invenzione del computer, derivato dal fatto che esso calcola *numericamente* l'evoluzione dinamica di un sistema, dunque con una precisione *finita* e quindi amplificando gli errori nella definizione delle condizioni iniziali del sistema. Al contrario, i modelli matematici dei sistemi caotici costituiscono una classe di enti matematici con la medesima dignità di altri e, sicuramente, molto più affascinanti e misteriosi di altri, perché sono oggi universalmente considerati come modelli-base (*toy-models*) estremamente ricchi dal punto di vista fenomenologico dei *sistemi complessi*. Proprio perché la *teoria dei sistemi complessi* non solo caotici è la chiave di volta per comprendere la struttura fisica dei sistemi complessi studiati dalla fisica della materia condensata e quindi dei sistemi chimici e biologici, torneremo anche all'inizio del **Secondo Volume** su una caratterizzazione più precisa dei sistemi caotici come modelli-base dal punto di vista dinamico dei sistemi complessi. Per il momento, soffermiamoci qui sulle caratteristiche fondamentali di sistema caotico, a partire dal modello di Lorenz.

Il sistema di equazioni dell'attrattore di Lorenz

Lorenz, per modellizzare matematicamente il comportamento di un fluido molto complesso quale l'atmosfera, era partito da equazioni del moto di un fluido *a tre soli gradi di libertà*. Ovvero, era partito da un sistema di *tre equazioni differenziali non-lineari* in funzione del tempo molto semplici:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma y - \sigma x, \\ \frac{dy}{dt} &= \rho x - xz - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z.\end{aligned}\tag{31}$$

Dove x, y, z definiscono lo stato del sistema su uno spazio tri-dimensionale, t è il tempo e σ, ρ, β sono i parametri del sistema.

Mediante la simulazione al computer di questo sistema Lorenz ha scoperto un comportamento di questo sistema non riportabile ad alcuna delle tipologie fino ad allora conosciute. Il sistema, infatti, esibiva chiaramente un comportamento aleatorio dovuto al fenomeno della *divergenza esponenziale delle traiettorie*. Fenomeno già studiato in fisica da uno dei più grandi matematici della fine dell'800, Henry Poincaré (1854-1912), riguardo il famoso «problema dei tre corpi» nella teoria newtoniana della gravitazione (Poincaré, 1890) e poi analiticamente confermato dal classico sistema dinamico instabile studiato dal matematico ebreo-russo Yakov Grigorevich Sinai (1935-) del biliardo con ostacoli convessi che aiuta a capire anche intuitivamente il fenomeno della *divergenza esponenziale* delle traiettorie in sistemi non-lineari di meccanica classica.

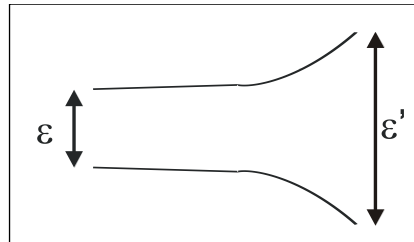


Figura 2-54. Divergenza esponenziale delle traiettorie nello spazio delle fasi in fenomeni d'instabilità dinamica. L' ε iniziale di imprecisione nella determinazione delle condizioni iniziali del sistema, è amplificato in ε' dalla dinamica medesima, così da rendere impossibile qualsiasi previsione nel lungo periodo.

Dopo pochi urti di due palline che partivano da condizioni iniziali differenti di un piccolo ε con una superficie curvata positivamente, l'amplificazione delle differenze iniziali ε' cresce così velocemente da rendere assolutamente imprevedibile lo stato finale (Ruelle 1984, 15). Più esattamente – e ancora più significativamente usando il modello di Sinai – si dimostra che dopo tre urti delle palline con ostacoli convessi è impossibile risalire univocamente alle loro condizioni iniziali di moto, è come se il sistema “si fosse dimenticato” le condizioni iniziali. È per questo che le pareti dei biliardi tradizionali sono rigorosamente rettilinee! In altri termini, un biliardo con pareti rigorosamente rettilinee è definito *biliardo di Newton* – è, cioè, un perfetto modello del *determinismo* di un sistema di Meccanica Classica – proprio per l'assoluta predicibilità degli effetti degli urti elastici delle palle in un biliardo siffatto, come qualsiasi giocatore esperto sa bene. Viceversa, possiamo dire che un «flipper» con i suoi ostacoli convessi disseminati sul piano su cui corre la pallina è un modello di senso comune del *biliardo di Sinai* (cfr. **Figura 2-55**).

Analogamente nell'attrattore di Lorenz, traiettorie che cominciavano vicine nel *breve periodo* non restano tali (sono generate da equazioni differenziali rispetto al tempo!), ma si allontanano rapidamente fra di loro cosicché il sistema nel *lungo periodo* risulta assolutamente *non-integrabile* e quindi *non-predicibile*. Nondimeno, simulando il sistema al computer e riportando su un grafico dello spazio di fase il suo comportamento di lungo periodo, esso non va a ricoprire tutto lo spazio di fase – formalmente, cioè, viola l'*ipotesi ergodica* diversamente dai modelli di Poincaré e Sinai di sistemi instabili (cfr. § 2.4.2) –, ma solo *un volume finito* di esso. Dà luogo, cioè, ad un *attrattore*, un attrattore però, ripetiamo, non riportabile a nessuno dei tipi fino allora studiati per i sistemi stabili e che per questo fu chiamato *attrattore strano* o *caotico*.

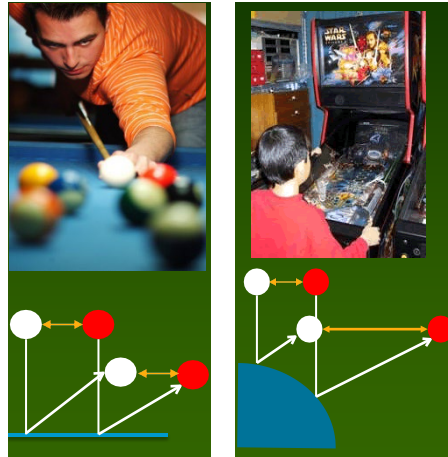


Figura 2-55. Rappresentazione intuitiva del «biliardo di Newton» (sinistra) e del «biliardo di Sinai» (destra), rispettivamente senza e con amplificazione dinamica delle differenze anche piccole nelle condizioni iniziali.

L'attrattore «strano» per sistemi caotici, infatti, ha delle proprietà peculiari che, come ci ricordava la definizione data all'inizio sono essenzialmente due e che ora possiamo definire meglio: *instabilità* e *frattalità*.

Instabilità

- ◆ *Instabilità.* Differentemente da tutti gli altri sistemi dinamici sia lineari (punto fisso e ciclo limite) che non-lineari (toro) visti finora il sistema *non passa mai due volte per lo stesso punto*. Il sistema, cioè, è *instabile*, almeno nel senso classico del termine. Ovvero, i suoi pseudo-cicli, differentemente da quelli dell'attrattore toroidale di **Figura 2-52**, non sono mai chiusi su se stessi (quindi non ripassano mai per dove sono passati) ma solo nelle vicinanze – a meno cioè di un certo ε – di dove erano passati prima.

Frattalità

- ◆ *Frattalità.* Per ciò stesso gli pseudo-cicli in questione manifestano una *struttura frattale*. Hanno la proprietà peculiare di essere oggetti geometrici caratterizzati da una struttura *auto-similare per invarianza di scala*. Ovvero, a qualsiasi scala lo si osservi, più grandi o più piccole, la struttura si ripete e quindi «non convergerà mai» su un'unica traiettoria ma su un «fascio» di traiettorie incompressibili ad una sola (Cfr. **Figura 2-57** e **Figura 2-58**).

Un pendolo accelerato che oscilla in un fluido come modello di sistema caotico

Ritornando al nostro pendolo – il *toy-model* di cui ci siamo serviti finora per illustrare le nozioni fondamentali di cinematica in tutto questo capitolo – anch'esso può esibire sperimentalmente un *comportamento non-lineare di tipo caotico*. Basta supporre che il nostro pendolo accelerato *oscilli in un*

fluido dotato di una certa densità, tipicamente in un contenitore riempito di olio di vasellina.

L'analogia col bagno termico di un sistema termodinamico dissipativo con cui il sistema scambia energia

Questa situazione fa sì che ci si trovi di fronte alla modellizzazione sperimentale di un *sistema dissipativo vincolato* dove da una parte il sistema *riceve energia* dal motore che lo forza comunque oscillare (p.es., il motore a molla molto potente di un orologio a pendolo), dall'altra *disperde energia* per gli attriti del fluido denso (olio di vasellina) in cui è immerso. Il fatto che sia vincolato ad oscillare in presenza di una *pompa di energia che fornisce/sottrae energia* al suo comportamento oscillatorio come fosse un *bagno termico* per un sistema termodinamico, vuol dire che non ci troviamo di fronte ad un *unico paesaggio dell'energia* come nel tipico caso non-dissipativo degli altri sistemi anche non-lineari ma *energeticamente chiusi* che abbiamo già incontrato (cfr. **Figura 2-45**) ma da un *numero indefinito* di questi paesaggi ciascuno con minimi distinti, sia per numero che per posizione reciproche.

Mancanza di stabilità strutturale nei sistemi caotici

In tal modo, il comportamento del pendolo da una parte è *instabile e imprevedibile* per la mancanza di un unico paesaggio dell'energia – non è, cioè, dotato di *stabilità strutturale* (Viana, 2000) non essendo un sistema conservativo ma dissipativo. D'altra parte, però *non è casuale* – altrimenti i punti di accumulo rappresentativi dei suoi stati potrebbero essere dovunque nello spazio delle fasi del sistema – soddisferebbero, cioè, l'*ipotesi ergodica* (cfr. § 2.4.2). Viceversa, i suoi comportamenti sono comunque definiti entro un *volume finito* dunque un *attrattore* dello spazio delle fasi anche se con proprietà del tutto «strane». Innanzitutto, l'*instabilità* intesa nel senso che la traiettoria nello spazio delle fasi di un sistema caotico non ripassi mai per dove è già passata, ma comunque nelle sue vicinanze, dando luogo alla proprietà della *frattalità* degli pseudo-cicli dell'attrattore caotico.

Tentativo di fornire una spiegazione almeno nel caso dissipativo dell'origine di un comportamento caotico con la «trasformazione del fornaio»

Così l'introduzione di un *bagno termico* e quindi di una *pompa di energia* ha suggerito una forma di modellizzazione per rendere conto delle due proprietà emergenti dei sistemi caotici appena ricordate, l'*instabilità* e la *frattalità*. Almeno per i sistemi caotici dissipativi, energeticamente «aperti», fra i più interessanti a studiarsi in chimica e biologia, dato che *tutti* i sistemi chimici e biologici sono sistemi «aperti». Cinematicamente, la presenza di una variabile dissipativa sotto forma dell'azione di una «pompa di energia» che continuamente «aggiunge» e «sottrae» energia al sistema (bagno termico) si può rappresentare con la cosiddetta *trasformazione del fornaio* (Prigogine, 1986). Affermando, cioè, che le traiettorie che *su due dimensioni divergono* e continuano sempre a divergere l'una rispetto all'altra, è come se si riavvicinassero l'una rispetto all'altra *su una terza dimensione*. Un po' come fa il fornaio quando impasta, p.es., due piccole quantità di cacao nel resto della pasta. Quando stira la pasta (*stretching*), due punti di cacao vicini si allontanano. Quando il fornaio ripiega su se stessa la pasta (*folding*), riavvicina questi punti, ma su una terza dimensione. Sulle prime due dimen-

sioni, i due punti continuano a divergere, ma sulla terza si riavvicinano a meno di un certo ε , piccolo, ma mai infinitesimo.

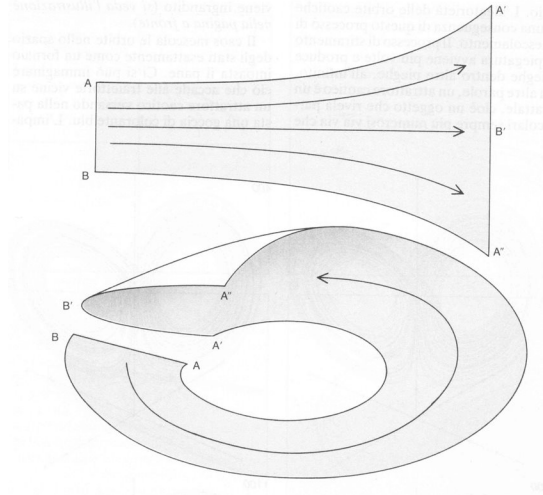


Figura 2-56. Il principio della «trasformazione del fornaio» legato alla modellizzazione di un sistema caotico come sistema dissipativo. **Sopra:** Quando nel sistema pompiano energia dal bagno termico è come se «stirassimo» (*stretching*) lo spazio delle fasi con conseguente divergenza delle traiettorie che non si richiuderanno mai su se stesse per formare un «ciclo» (cfr. i punti A' e A''). **Sotto:** Quando togliamo energia dal sistema è come se «ripiegassimo» (*folding*) lo spazio delle fasi su se stesso, riavvicinando su una terza dimensione le traiettorie divergenti su due, così da creare uno «pseudo-ciclo» che non si richiuderà mai perfettamente su se stesso ma lo farà a meno di un certa distanza ε piccola, ma non nulla (cfr. i punti A'' e A' riavvicinati ma mai sovrapposti).

Dinamiche caotiche caratterizzate da pseudo-cicli e comportamento quasi-periodico

Gli pseudo-cicli dell'attrattore caotico mai chiusi su se stessi (non-stazionarietà)

È come, insomma, se lo spazio di fase si ripiegasse su se stesso, dando luogo ad un comportamento *quasi-periodico* di pseudo-cicli che non si richiudono mai su se stessi. Le traiettorie pur continuando a divergere su due dimensioni ripasseranno vicine l'una all'altra sulla terza dimensione, entro un dato ε senza rinchiudersi mai perfettamente su se stesse.

Costituiranno così degli pseudo-cicli, molto diversi da quelli delle pseudo-ciclicità di un toro che sono comunque *stazionarie*, ripassano cioè sempre per dove sono passate. Infatti, nel caso caotico traiettorie che cominciano vicine sull'attrattore non restano affatto vicine. Data la sua *instabilità* e *non-stazionarietà*, il sistema può saltare in maniera imprevedibile fra uno pseudo-ciclo e l'altro, rimanendo su ciascuno per intervalli di tempo assolutamente irregolari e non predicibili. Di qui il comportamento,

«strano» dell'attrattore, apparentemente casuale, ma nient'affatto tale essendo dotato di *struttura frattale* (cfr. nota 77).

Carattere
deterministico ma
impredicibile dei
sistemi caotici

Infatti, tornando alla metafora della «trasformazione del fornaio», quando egli stira la pasta due punti vicini si allontanano, quando la ripiega si riavvicinano, ma in un modo sempre diverso da com'erano prima vicini, attraverso percorsi *irreversibili* e dunque assolutamente impredicibili, ma *ripetibili*. Ogni volta che implemento sul computer lo stesso sistema di equazioni non-lineari, p.es. di Lorenz con gli stessi valori delle condizioni iniziali, otterrò *esattamente* lo stesso attrattore. Il sistema di equazioni che lo governa è infatti costituito da *equazioni differenziali* dove, dunque, lo stato successivo dipende univocamente dallo stato precedente ed è solo nel *lungo periodo* che il sistema per il fenomeno della divergenza esponenziale delle traiettorie «dimentica» le condizioni iniziali diventando *impredicibile* e quindi *caotico*, ma *ripetibile* e quindi *deterministico*. Da qui la denotazione di questi sistemi col termine apparentemente contraddittorio di *caos deterministico*.

Il conseguente
carattere frattale
dell'attrattore
caotico

Attraverso il processo di dispiegamento–ripiegamento indefinito, di rimescolamento continuo delle traiettorie, di creazione di pseudo–ciclicità sempre più indefinitamente complesse, l'attrattore caotico acquista perciò la tipica struttura di un oggetto geometrico *frattale*, auto–similare. Una struttura che ripete indefinitamente se stessa, a qualsiasi risoluzione uno la guardi, senza collassare mai in un oggetto semplice, un punto o una linea uni–dimensionale (Cfr. **Figura 2-58**).

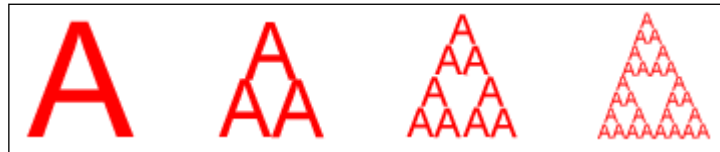


Figura 2-57. Classico esempio di oggetto frattale, caratterizzato da una proprietà di *auto–similarità*. P.es., se osservassimo con una lente d'ingrandimento la prima «A» della figura, non vedremmo tante piccole «A», ma semplicemente delle macchioline d'inchiostro che comunque convergono sulle tre linee unidimensionali che compongono la «A». A diverse risoluzioni l'oggetto non mantiene la stessa struttura, non è auto–similare. L'oggetto possiede una struttura, solo ad una data risoluzione. Viceversa, a qualsiasi risoluzione si guardi un oggetto frattale esso manifesta sempre una struttura che ripete indefinitamente se stessa. Nella figura, è questo il caso, della seconda, terza, quarta immagine della figura generabili dalla prima «A» attraverso un processo ricorsivo di costruzione, reiterabile indefinitamente a risoluzioni sempre maggiori. Cfr. anche la Figura **Figura 2-58**.

La caratterizzazione
di Auerbach di un
sistema caotico

Se queste due caratteristiche — *instabilità* e quindi pseudo-ciclicità, o quasi-periodicità complessa e *frattalità* — sono le proprietà emergenti di un attrattore caotico si comprende come, da un punto di vista sistematico, il tentativo più promettente di fornire una descrizione fisico-matematica nel suo insieme di un sistema caotico è quella di caratterizzarlo mediante uno sviluppo in serie di pseudo-cicli con periodicità sempre più lunghe⁷⁷, fino a coprire tutto l'attrattore caotico (Auerbach, Cvitanović, Eckmann, Gunaratne, & Procaccia, 1987).

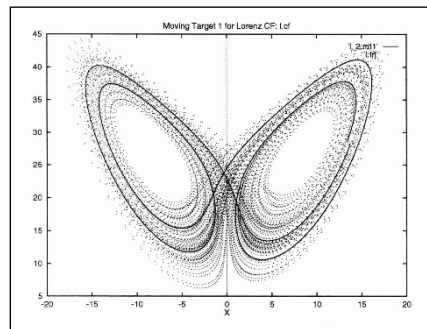


Figura 2-58. Tipico pseudo-ciclo dell'attrattore di Lorenz simulato al computer. Come si vede, non siamo di fronte ad una traiettoria chiusa su se stessa, ma il sistema ripassa sempre solo nelle vicinanze di un determinato punto, senza mai ripassarci esattamente

⁷⁷ P.es., la sequenza simbolica ABCD/ABCD/ABCD... ha periodicità 4, ogni quattro occorrenze si ripresenterà la medesima sotto-sequenza. Il tutto costituisce così un ciclo di ordine 4. Un caso simile è quello della sequenza ZBNP/ZBNP/ZBNP che sarà sempre un ciclo di ordine 4, ogni quattro lettere la sequenza si ripete. La sequenza XCGDXWQCOXUI/XCGDXWQCOXUI/ XCGDXWQCOXUI ha invece ordine periodicità 12, cioè ogni 12 lettere la sequenza si ripete. La sequenza: XCGDXWQCOXUI/YCGDXWQCOXUI/WCGDXWQCOXUI/ZCGDXWQCOXUI è costituita invece da pseudo-cicli di ordine 12. Infatti, all'inizio di ogni sotto-sequenza regolare indicata dalla lettera sottolineata, non c'è la medesima lettera X, ma lettere ad essa vicine nell'alfabeto internazionale, p.es.: Y, Z, W. Il ciclo ogni dodici passi non si richiude su se stesso, ma passa vicino al suo punto di partenza. Geometricamente, nello spazio delle fasi di questa dinamica simbolica, dovrebbe essere rappresentato da una curva aperta con estremità vicine ma non identiche: costituisce così uno pseudo-ciclo. Prendiamo ora lo pseudo-ciclo X(W)CGDXWQCOXUI e facciamo sì che pezzi diversi di esso si ripetano a intervalli diversi. XCGWRQTYZDFG/DXWQLKJHYUFP0/COXUINGFD/WCGDXCXD/WQCBVCFERTWPIU/OXUI costituisce così un tipico esempio di comportamento caotico del sistema, in cui il sistema «salta» con intervalli sempre diversi (erratici) fra pezzi di lunghezza diversa dello pseudo-ciclo di partenza (quelli con sottolineatura doppia). Intervalli che costituiscono a loro volta pezzi di altri pseudo-cicli. Il che vuol dire che topologicamente un sistema caotico è costituito da un insieme *denso* di questi pseudo cicli (Cfr. (Devaney, 2003) e *infra*). Ciò fa sì che, nel suo complesso, la sequenza appaia come una sequenza casuale, mentre effettivamente non lo è: ha una struttura frattale che si ripete.

sopra. Per questo si parla di pseudo-ciclo e, corrispondentemente, di comportamento quasi-periodico. Complessivamente, lo pseudo-ciclo ha una struttura frattale che si ripete indefinitamente uguale a se stessa (approssimativamente quella delle ali di una farfalla) a diverse risoluzioni (scale di grandezza) senza mai collapsare ad un'unica traiettoria unidimensionale.

Comportamento non-stazionario di un sistema caotico

In questo caso, il comportamento aleatorio del sistema sarebbe interpretabile nello spazio di fase come derivante dallo stazionamento del sistema, per un certo intervallo di tempo imprevedibile, su (un pezzo di) uno pseudo-ciclo (cfr. nota 77), per saltare repentinamente e senza alcuna prevedibilità sul pezzo di un altro, e così via indefinitamente, su tutti gli pseudo-cicli in cui è scomponibile l'attrattore.

Il fenomeno della «itineranza caotica» e non-stazionarietà dei sistemi caotici

Il risultato di questo comportamento *non-stazionario* di un sistema caotico rispetto alla sua prevedibilità è che, malgrado il sistema sia confinato sul volume finito dell'attrattore e dei suoi pseudo-cicli, se al momento t_1 esso si trova su un punto qualsiasi di una delle indefinite traiettorie quasi-periodiche (pseudo-ciclo) che compongono l'attrattore, al momento successivo t_2 potrebbe trovarsi in un altro punto qualsiasi dell'attrattore stesso, su un altro pseudo-ciclo, senza alcuna possibilità di predire a priori dove e quando il sistema si troverà su un dato punto dell'attrattore. È il cosiddetto fenomeno dell'*itineranza caotica*.

La non-stazionarietà della serie temporale di una dinamica caotica

L'incertezza iniziale, comunque piccola, è come se si fosse amplificata per tutta l'ampiezza dell'attrattore, senza alcuna possibilità di scorciatoie per prevedere esattamente il futuro. A differenza degli pseudo-cicli che caratterizzano un attrattore a forma di toro (cfr. **Figura 2-52**), infatti, qui le traiettorie sono tutt'altro che *stazionarie*. Cioè, la *varianza* statistica fra stati successivi della loro serie temporale non è sempre la stessa ma *cambia col tempo* in maniera non prevedibile, per cui punti successivi non rimangono vicini nella serie temporale. In qualsiasi momento essi possono essere «sparati» dalla dinamica in qualsiasi altra zona dell'attrattore anche se comunque sempre su uno degli pseudo-cicli in cui è scomponibile l'attrattore, per ritornare sullo pseudo-ciclo di partenza e quindi ricapitare «vicini» chissà come e chissà quando (= *non-stazionarietà* di una dinamica caotica).

B.2.2 Definizione topologica di sistema caotico

La definizione sintetica di Lorenz

Da quanto detto finora deriva l'estremamente efficace connotazione data Edward Lorenz stesso del caos deterministico:

Caos: dove il presente determina il futuro, ma dove il presente approssimato non approssima il futuro.

L'ubiquità delle dinamiche caotiche in sistemi fisici, biologici, sociali, artificiali, ... proprio perché sono un modello-base di sistema complesso

Come si può evincere dall'articolo di sintesi (Bishop, 2017) e dall'ampia bibliografia citata, il comportamento caotico esiste in molti *sistemi naturali*, tra cui la dinamica dei fluidi, le irregolarità del battito cardiaco, il tempo e il clima. Si verifica anche spontaneamente in alcuni *sistemi con componenti artificiali*, come il traffico stradale. Questo comportamento può essere studiato attraverso l'analisi di un modello matematico caotico, o attraverso tecniche analitiche come grafici di ricorrenza e mappe di Poincaré. La teoria del caos ha applicazioni in una *varietà di discipline*, tra cui non solo la meteorologia, ma anche l'antropologia, la sociologia, le scienze ambientali, l'informatica, l'ingegneria, l'economia, l'ecologia e, più recentemente, la gestione delle crisi pandemiche, quella del Covid-19 inclusa (Piotrowski, 2020). Ma soprattutto, la teoria ha costituito la base per campi di studio come la teoria dei sistemi dinamici complessi che è l'aspetto che qui maggiormente ci interessa.

Una definizione topologica di sistema caotico

Alla luce di quanto appena detto, ci sarà almeno intuitivamente chiaro perché da un punto di vista *matematico-formale* – e non della semplice caratterizzazione cinematica come fatto finora – la migliore *caratterizzazione matematica* di sistema caotico, come universalmente riconosciuto, è quella data in *topologia* dal matematico dell'Università di Boston Robert L. Devaney (Devaney, 2003). Un sistema per definirsi caotico deve soddisfare queste tre proprietà:

- ◆ Sensibilità alle condizioni iniziali
- ◆ Transitività topologica
- ◆ Densità delle sue orbite quasi-periodiche.

Discutiamole brevemente più in dettaglio.

1. Sensibilità alle condizioni iniziali

- ◆ *Sensibilità alle condizioni iniziali.* Si sta qui facendo riferimento al fenomeno della divergenza esponenziale delle traiettorie che già abbiamo discusso ampiamente. Un fenomeno sintetizzato dalla famosa espressione dovuta a Edward Lorenz e resa famosa dal film *Jurassic Park* del cosiddetto *effetto farfalla*. «il battito d'ali di una farfalla in Brasile può provocare un tornado in Texas». Un fenomeno che matematicamente viene espresso nei termini di «sensibilità alle condizioni iniziali» misurato nei termini della *divergenza esponenziale delle traiettorie* da condizioni iniziali perturbate (cfr. **Figura 2-54**). Più specificamente, date due traiettorie che nello spazio delle fasi hanno condizioni iniziali infinitesimamente vicine con una separazione iniziale $\delta \mathbf{Z}_0$, esse divergeranno esponenzialmente nel tempo ad un tasso pari a: $|\delta \mathbf{Z}_{(t)}| \approx e^{\lambda t} |\delta \mathbf{Z}_0|$, dove t è il tempo e λ è l'*esponente di Lyapunov positivo*, tenuto conto che il numero degli esponenti di Lyapunov è

uguale al numero delle dimensioni dello spazio di fase. In pratica c'è un esponente di Lyapunov per ogni dimensione, sebbene di solito ci si riferisce al maggiore di essi.

In tal senso il massimo esponente di Lyapunov fornisce una misura della predicibilità del sistema. Ovvero:

La misura del coefficiente di Lyapunov della divergenza esponenziale delle traiettorie

- ◆ Un sistema con λ *positivo* è *caotico* (il suo comportamento è imprevedibile nel lungo periodo).
- ◆ Un sistema con λ *negativo* è *deterministico* (le traiettorie convergono e dunque il sistema è *integrabile* e quindi predicibile);
- ◆ Un sistema con λ *nullo* è *stocastico* (le traiettorie non risentono delle fluttuazioni nelle condizioni iniziali e quindi soddisfano il *postulato dell'equiprobabilità* della meccanica statistica ed è quindi, di nuovo, predicibile).

2. Transitività topologica

- ◆ *Transitività topologica*. Come sappiamo, la condizione precedente implica la *non-periodicità* delle orbite che caratterizzano l'attrattore strano, le quali però, come esemplificato dalla «trasformazione del fornaio», manifestano il fenomeno della loro possibile *miscelazione topologica* (*topological mixing*) nel senso che le traiettorie evolvono in modo che ogni data regione o «insieme aperto» del suo spazio delle fasi può *sovrapporsi* a meno di un dato ε con ogni altra regione dando origine al fenomeno della *pseudo-periodicità* (pseudo-cicli) e quindi dalla *frattalità* dell'attrattore strano medesimo. Formalmente, la miscelazione delle traiettorie soddisfa in forma debole la condizione della *transitività topologica*, ovvero:

Una mappa $f: X \rightarrow X$ è detta *topologicamente transitiva* se per ogni coppia di *insiemi aperti non-vuoti* $U, V \subset X$ esiste un $k > 0$ tale che $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Intuitivamente, se una mappa è topologicamente transitiva allora, dato un punto x e una regione V , esiste un punto y vicino a x la cui orbita passa attraverso V .

3. Densità delle orbite (pseudo-) periodiche

- ◆ *Densità delle orbite periodiche*. Per un sistema caotico avere orbite periodiche *dense* significa che ogni punto nello spazio delle fasi può essere approssimato in modo *arbitrariamente vicino*, ovvero a meno di un dato ε comunque piccolo ma mai nullo, da orbite periodiche (= pseudo-periodicità). Per rendersene conto, basta guardare a quello che è forse il più semplice esempio di sistema caotico unidimensionale la cosiddetta *mappa logistica* per determinati valori di essa: $f: x \rightarrow 4x(1 - x)$, per questo indicata come l'esempio più sconvolgente di come un comportamento complesso caotico – in particolare il comportamento del distanziamento-ripiegamento delle traiettorie – può deri-

vare da equazioni dinamiche *non-lineari* molto semplici (cfr. per una sintesi: (May, 1976)).

Mappa logistica
come funzione
ricorsiva alle
differenze finite di
una curva
quadratica
(parabola)

Mi si permetta una digressione sulla costruzione matematica della mappa logistica in quanto fornisce ai non matematici la possibilità di intuire cosa significa il concetto di *simulazione al computer* di un determinato sistema. Più precisamente approssimare mediante un *calcolo ricorsivo numerico* alle *differenze finite* (definite sugli interi o sui razionali) una *funzione analitica* calcolata supponendo *differenze infinitesime* (definite sui reali). La mappa logistica è di per sé una funzione ricorsiva, costruita originariamente per modellizzare la dinamica di una popolazione in demografia, della forma:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

Dove:

- ◆ x_n è un numero razionale compreso fra 0 e 1 e rappresenta nel modello demografico il rapporto fra la popolazione esistente e quella massima in un anno n , e quindi x_0 rappresenta il rapporto fra la popolazione iniziale (all'anno 0) e quella massima.
- ◆ r è un numero positivo e rappresenta il tasso combinato di natalità e mortalità nella popolazione in oggetto.

Sensibilità alle
condizioni iniziali
per $r \approx 4$

Ora la mappa logistica manifesta un comportamento caotico per $r = 4$. Più precisamente, per r compreso fra 3,57 e 4, la mappa manifesta una grande sensibilità alle condizioni iniziali come si evince facilmente dalla figura seguente.

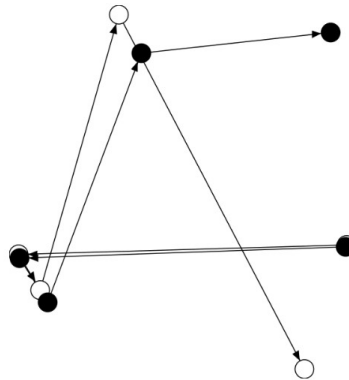


Figura 2-59. Sensibilità alle condizioni iniziali per la mappa logistica con $r = 4$. Le due serie (pallini bianchi e neri) differiscono fortemente dopo poche iterazioni a partire da una piccolissima differenza nel valore iniziale di x .

La «trasformazione del fornaio» nella mappa logistica per $r = 4$ e costruzione numerica di una parabola

La cosa notevole è che questa sensibilità alle condizioni iniziali per $r = 4$ è originata dal fatto che la mappa si ripiega e si allunga (cfr. la «trasformazione del fornaio») ripetutamente nello spazio di definizione così da approssimare in maniera sempre più precisa all'aumentare delle iterazioni, come appare nella **Figura 2-60** il grafico di una *curva quadratica* – l'equazione analitica della parabola $y = x^2$ – dell'equazione alle differenze. Forzando – ma non di troppo la modellizzazione, definendo cioè n come un tempo discreto t – possiamo dire che la parabola costituisce l'attrattore nello spazio degli stati del sistema caotico costituito dalla mappa logistica unidimensionale $f: x \rightarrow 4x(1 - x)$.

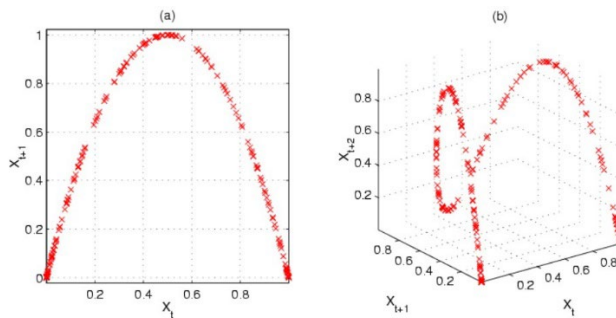


Figura 2-60. (a) Grafico della mappa logistica per $r = 4$ che mostra chiaramente la curva quadratica dell'equazione alle differenze. (b) Immergendo l'evoluzione della mappa in uno spazio tridimensionale appare evidente la struttura della mappa. Come, cioè, punti vicini cominciano a divergere in particolare in quelle regioni di x_t corrispondenti alle sezioni più ripide del tracciato.

A parte questo esempio matematico della definizione di un sistema caotico data più sopra vediamo alcuni significativi esempi di sistema caotico in biologia, fondamentali per la nostra sopravvivenza.

B.2.3 Rilevanza del comportamento caotico nei sistemi biologici

La rilevanza del comportamento caotico in cardiologia

Per capire un esempio di senso comune di comportamento caotico in biologia e la sua rilevanza fisiologica per la salute di tutti noi, il comportamento di un cuore *sano* che batte è tipicamente caotico e la salute del cuore è proprio legata alla sua *caoticità*. Apparentemente il battito di un cuore sano a riposo (non sotto sforzo) è quanto di più regolare esista nella nostra fisiologia, di solito per cuori normali (non particolarmente allenati o fortunati per un dono di natura con una frequenza basale ancora più bassa), compresa fra i 60 e 70 battiti al minuto.

Il comportamento complesso del muscolo cardiaco e il suo significato

Però, se abbiamo osservato in televisione una operazione a cuore aperto avremo notato che il battito regolare non è frutto di un comportamento ciclico che si ripete sempre uguale a se stesso come il comportamento del pistone di una qualsiasi pompa idraulica. Ma è il risultato di un comportamento estremamente complesso del muscolo cardiaco che fa sì che si «gonfino» e si «sgonfino» sempre parti diverse del muscolo cardiaco in modi che non si ripetono mai esattamente uguali a se stessi. È questo comportamento caotico è fondamentale per la salute del muscolo cardiaco.

Valore fisiologico del comportamento caotico del cuore

Se infatti fossero sempre le stesse parti del muscolo a pompare, il tessuto non farebbe in tempo a «rigenerarsi» fra un movimento e l'altro, il battito del cuore diverrebbe irregolare (aritmia) e persistendo in tale stato il cuore entrerebbe «in fibrillazione» e ben presto si produrrebbe un «infarto». Cioè, una ferita (di fatto una necrosi) di quella parte del muscolo cardiaco stimolata di continuo e che non aveva tempo di rigenerarsi. La scossa elettrica prodotta dal «defibrillatore», se chi rischia l'infarto è fortunato ad averne uno vicino e qualcuno che sappia usarlo, serve solo a «destabilizzare» il *ciclo regolare periodico* e dunque perverso («battimento» si chiama in teoria dei segnali) che si è istaurato, sperando che così si restauri quel comportamento «complesso» in cui consiste ultimamente la salute del cuore e la sua capacità di pompare sangue per le decine di anni della nostra vita, in media per più di 100.800 volte al giorno e per 36.792.000 volte l'anno!

Il comportamento caotico e la variabilità nell'ECG di un cuore sano

Sperimentalmente, infatti, si osservano continue fluttuazioni nell'intervallo R-R da un battito all'altro del tracciato elettrocardiografico (ECG: cfr. **Figura 2-61** (destra)) e molti studiosi hanno ipotizzato che il fenomeno possa essere trattato come una manifestazione di caos deterministico (Wagner & Persson, 1998). Ciò che è comunemente accettato è che la variabilità dell'intervallo R-R sia una prerogativa dei *soggetti sani* o che, piuttosto, in presenza di disturbi cardiaci, si osserva una *significativa riduzione* di tale variabilità. In generale la variabilità di un segnale può essere studiata anche attraverso un'analisi di Fourier, e anche in questo caso si osserva una diminuzione dello spettro del segnale al crescere dell'età e quindi al naturale peggioramento della funzionalità cardiaca (Mironyuk & Loskutov, 2006). Partendo da una serie temporale che rappresenta l'acquisizione completa di un ECG si può così applicare il teorema di Takens/Mané e ricostruire l'attrattore caotico del sistema nello spazio delle fasi.

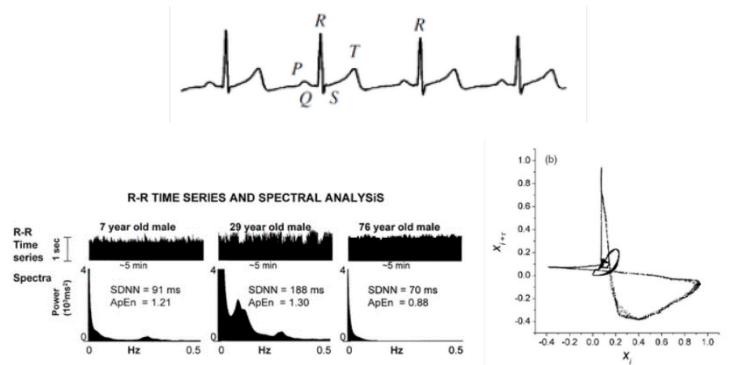


Figura 2-61. (Sopra) Fluttuazioni tipiche fra due battiti R-R nel tracciato di un ECG di un cuore sano (Da: (Mironyuk & Loskutov, 2006)). (Sotto Sinistra) Spettro della variabilità fra due battiti R-R in maschi sani in funzione dell'età (7, 29, 76 anni. Da (Pikkujämsä, et al., 1999)). (Sotto Destra) Ricostruzione dell'attrattore del tracciato dinamico di un ECG. Da (Paladini, 2013, p. 4).

Comportamento caotico del flusso ematico

Strettamente legato al carattere caotico delle dinamiche cardiache è il carattere caotico dei flussi ematici nelle *dinamiche della circolazione sanguigna*. Senza entrare in particolari, è facilmente intuibile che senza la forte dipendenza dalle condizioni iniziali del flusso ematico una piccola pompa come il cuore non sarebbe capace di pompare il sangue così tante volte al giorno, non solo e non tanto nei grandi condotti delle *arterie*, ma nei piccoli condotti delle *vene* e soprattutto degli innumerevoli *capillari* di cui il nostro sistema cardio-circolatorio è costituito (Belardinelli & Ceutti, 1993).

Il comportamento caotico delle dinamiche cerebrali

Lo stesso discorso vale per il cervello. Quando effettuiamo comportamenti ripetitivi che sono la gran parte dei nostri comportamenti – pensiamo per esempio all'azione del camminare – e/o di una qualsiasi delle nostre funzioni vitali che sono tipicamente cicliche (p.es., respirare) sono le stesse aree del cervello ad essere stimulate, ma *non gli stessi neuroni*. Per rendercene conto, basta ricordare che l'instaurazione di «battimenti», di regolarità anomale nel tracciato elettroencefalografico (EEG) è ciò che precede di solito un *attacco epilettico*! Altre ciclicità perverse auto-iniettanti che si instaurano nelle dinamiche di determinate regioni cerebrali sono quelle legate al *dolore patologico*, o alle diverse forme di *dipendenza da droga*, o alle forme patologiche di *depressione*. . . D'altra parte, esiste abbondante evidenza scientifica di tipo sperimentale di misurazioni del carattere «caotico» delle dinamiche cerebrali nel loro complesso per cervelli sani (cfr. (Freeman & Skarda, 1987; Freeman W. J., 2000; Robson, 2009)).

Torneremo nel **Secondo Volume** sul ruolo delle dinamiche caotiche in fisiologia e neurofisiologia.

Capacità delle
dinamiche caotiche
di generare
informazione

Per concludere questa disanima, da un punto di vista informativo, com'è stato giustamente notato,

Poiché nei sistemi non-caotici i punti vicini rimangono vicini durante l'evoluzione temporale, una misurazione fornisce una certa quantità d'informazione che *rimane costante nel tempo*. Questo è proprio il senso in cui questi sistemi sono prevedibili: le misurazioni contengono certe informazioni che possono essere sfruttate per prevederne il corso futuro. (...) L'operazione di stiramento ripiegatura *elimina invece sistematicamente l'informazione iniziale e la sostituisce con informazione nuova*: lo stiramento amplifica le indeterminazioni su piccola scala, la piegatura avvicina traiettorie molto lontane fra loro e cancella l'informazione su grande scala. Quindi gli attrattori caotici si comportano come una sorta di pompa: poiché portano a manifestazione macroscopica le fluttuazioni microscopiche. (...) Dopo un breve periodo di tempo, l'indeterminazione corrispondente alla misura iniziale copre tutto l'attrattore e tutta la capacità di previsione è perduta: *non vi è più legame causale fra passato e futuro* (Crutchfield, Farmer, Packard, & Shaw, 1991, p. 29).

Le basi fisiche dei
sistemi complessi in
QFT

Quale sia la rilevanza di tutto questo per la scienza e la filosofia della natura moderna, risulterà chiaro nel **Secondo Volume**, quando tratteremo i sistemi complessi in particolare all'interno delle scienze biologiche e cognitive. In questo volume invece, per completare la nostra disanima sui Fondamenti della Fisica alla luce delle rivoluzioni scientifiche del XX e di questo inizio del XXI secolo, concludiamo la nostra discussione sulla Teoria della Complessità esaminando le basi fisiche dei sistemi complessi dal punto di vista della Meccanica Statistica e della Teoria Quantistica dei Campi.

Problema: cosa
caratterizza la
struttura interna di
un sistema
complesso in
quanto tale

Infatti, i sistemi caotici che abbiamo discusso finora costituiscono un modello-base dei sistemi complessi da un punto di vista diremmo così *olistico*, da un punto di vista fenomenico di insieme, come sistemi di Fisica Classica, che evidenziano la fine di una visione *riduzionista* dei sistemi fisici tipica della Meccanica Newtoniana, ma che non ci dicono molto su ciò che caratterizza "dall'interno" la *struttura di relazioni* di un sistema complesso sia in senso fisico che matematico. Per far questo è utile introdurre alcuni elementi di Meccanica Statistica che finora sono rimasti un po' sullo sfondo di quanto abbiamo detto in questo capitolo.

Appendice C: il formalismo delle matrici di Heisenberg in fisica quantistica

Proprietà fondamentale delle matrici di Heisenberg nella loro versione iniziale è di essere matrici hermitiane

Le matrici di Heisenberg sono infatti *matrici hermitiane*. Ovvero sono matrici definite sui numeri complessi \mathbb{C} (coefficienti di Fourier) che sono uguali alle loro rispettive *coniugate trasposte* – cioè, l'elemento a nella i -ma colonna e j -ma riga della matrice A è uguale al *coniugato complesso* (cfr. **Figura 2-22**) dell'elemento a nella j -ma colonna e i -ma riga della matrice trasposta A^T , ovvero: $A^H \Leftrightarrow a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Dove $A^H = A^\dagger = A^*$ sono denotazioni equivalenti di una matrice hermitiana. Tuttavia, in QM è invalsa la convenzione di denotare con A^* il coniugato complesso e con A^\dagger il coniugato trasposto. E noi, d'ora in poi, useremo questa convenzione.

Ricordiamo qui che l'operazione di *trasposizione* fra matrici consiste nel *riflettere* una matrice lungo la sua diagonale così da invertire righe e colonne della matrice originale nella sua trasposta⁷⁸.

Proprietà delle matrici hermitiane: ritornare sempre un autovalore reale nella sua trasposta

Per questo l'operatore di trasposizione è definito un operatore *auto-aggiunto*, i valori della trasposta *auto-valori* e i corrispettivi vettori di valori *auto-vettori*. Nel caso di matrici hermitiane l'operatore in questione sarà un *operatore hermitiano* A^* ⁷⁹, per cui la proprietà fondamentale delle matrici hermitiane – notata per la prima volta dal matematico francese Charles Hermite nel 1855, da cui il nome – è che l'operazione di trasposizione in esse ritorna sempre auto-valori *reali*, appartenenti a \mathbb{R} (cfr. nota 34).

⁷⁸ P.es., data la matrice $A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ la sua trasposta A^T lungo la diagonale 1-4 sarà

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$. È evidente che applicando due volte la trasposizione riotteniamo la matrice originale, ovvero $(A^T)^T = A$.

⁷⁹ Nel formalismo dell'*algebra degli operatori*, una matrice è hermitiana se e solo se è uguale alla sua *aggiunta*, cioè se soddisfa la relazione $\langle A\mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w}, A^*\mathbf{v} \rangle$, per ogni coppia di vettori \mathbf{v}, \mathbf{w} , dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota l'operazione del *prodotto interno* in uno spazio euclideo. La precedente relazione definisce così anche la nozione di operatore hermitiano A^* come *operatore auto-aggiunto*. Infine, ricordiamo che con «prodotto interno», si denota l'operazione del *prodotto scalare* fra due vettori in uno spazio euclideo, ovvero l'operazione che, date due sequenze ordinate di numeri in due vettori, ritorna un solo valore numerico. Un'operazione largamente usata in geometria per definire il prodotto scalare delle coordinate cartesiane di due vettori, o in Meccanica Classica per definire il prodotto fra due vettori, quello che rappresenta il lavoro di una forza, e quello che rappresenta lo spostamento di un corpo.

Nel caso quantistico ciò significa fornire una descrizione equivalente a quella ondulatoria di Schrödinger

La rilevanza di tutto questo per la meccanica delle matrici di Heisenberg è quando lo applichiamo alla formalizzazione dell'atomo come *oscillatore armonico quantistico* in QM, ottenendone una descrizione equivalente a quella che Schrödinger ottenne in meccanica ondulatoria (cfr. § 2.6.6) in un articolo (Schrödinger, 1926) di per sé pubblicato un anno dopo quello di Heisenberg (Born, Heisenberg, & Jordan, 1925). Senza entrare in ulteriori particolari le matrici di Heisenberg per definire le componenti di Fourier di posizione $X(t)$ e quantità di moto $P(t)$ nel caso dell'oscillatore armonico quantistico, saranno due matrici hermitiane, A e A^\dagger rispettivamente, che nel caso non-commutativo della QM soddisferanno la relazione di indeterminazione in meccanica delle matrici ricordata più sopra (cfr. Eq. (15)), fornendo *le ampiezze di probabilità* con cui trovare i valori di X e P per i diversi livelli discreti di energia.

Ciò fu ottenuto da Born introducendo nella meccanica delle matrici il concetto di vettore di stato quantistico

Effettivamente, questa affermazione ha la sua piena giustificazione quando con Max Born introduciamo l'interpretazione (probabilistica) della meccanica delle matrici di Heisenberg entro la *Meccanica Statistica* e quindi introduciamo la nozione di *vettore di stato quantistico* $|\psi\rangle$ che è il vettore su cui la matrice A agisce. Senza questa nozione, infatti, non è chiaro quale tipo di moto l'equazione di Heisenberg stia descrivendo. Effettivamente il vettore di stato, le cui componenti sono scritte come ψ_m , sono interpretate da Born statisticamente. Sono il risultato *casuale* di una misura fisica della grandezza fisica corrispondente alla matrice A . Quindi il vettore di stato avrà un *valore medio*:

$$\sum_{mn} \psi_m^* A_{mn} \psi_n$$

Ciò significa che il vettore di stato ψ_n fornisce per un sistema quantistico *l'ampiezza di probabilità* (gaussiana) di essere nello stato energetico n .

Passaggio alla forma attuale della meccanica delle matrici

Una volta introdotto il vettore di stato quantistico nella forma suggerita da Born, le equazioni del moto usando le matrici di Heisenberg H assumono la forma-base con cui oggi sono presentate in diverse versioni e modalità e che si deve sostanzialmente a Dirac (Dirac, 1958):

$$A(t) = e^{iHT} A(0) e^{-iHT}.$$

Introduzione della nozione di matrice unitaria mediante rotazione della base del vettore di stato

Questa equazione come altre forme equivalenti per esprimerla vuol dire che $A(t) = A(0)$ mediante una rotazione della base (del vettore di stato) attraverso la *matrice unitaria* e^{iHt} . Complementariamente, ruotando la base per il vettore di stato ogni volta di e^{iHt} , la dipendenza dal tempo nelle matrici può essere disattivata. In altri termini, le matrici sono ora indipendenti dal tempo, ma il vettore di stato ruota. Ovvero:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi(0)\rangle, \quad \frac{d|\psi\rangle}{dt} = -iH|\psi\rangle$$

Possibilità di riottenere la rappresentazione di Schrödinger

Questa altro non è che l'equazione di Schrödinger per il vettore di stato e questo cambio indipendente dal tempo della base (rotazione) altro non è che una trasformazione tipica della rappresentazione di Schrödinger della QM, con $\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$.

Dimostrazione sistematica dell'equivalenza fra i due formalismi ottenuta da Von Neumann

Tuttavia, la dimostrazione matematica dell'equivalenza delle due formalizzazioni della QM in termini di meccanica delle matrici e della meccanica ondulatoria fu ottenuta da John Von Neumann – all'epoca assistente di Hilbert a Gottinga – e questo lo portò a scrivere nel 1932 il suo famoso libro sui fondamenti del formalismo matematico della QM (Von Neumann, 1932).

2.10 Sommario del Secondo Capitolo

Una visione sintetica delle rivoluzioni della fisica del XX secolo

Nel § 2.1 ci siamo soffermati su una visione sintetica delle scoperte più rivoluzionarie della «nuova fisica» del XX secolo. Tali scoperte hanno ridimensionato la pretesa di onnicomprensività e apoditticità della fisica newtoniana, limitandola allo studio dei sistemi meccanici *macroscopici*, quelli legati ai corpi della nostra esperienza ordinaria. In campo *mesoscopico* (aggregati molecolari) valgono i principi della termodinamica statistica, lineare e non-lineare. In campo *microscopico* (livello atomico e sub-atomico) valgono i principi della meccanica quantistica e della teoria della relatività speciale (elettrodinamica e cromodinamica quantistiche). A livello *megalo-scopico* (fenomeni su scala cosmica) valgono i principi della teoria della relatività generale. Ma la rivoluzione e il ridimensionamento più forte di una certa *filosofia riduzionista*, sia in senso *diacronico* (riduzione dello stato finale alle condizioni iniziali), sia in senso *sincronico* (riduzione del complesso al semplice), legata ai principi della meccanica newtoniana si è avuta negli ultimi trent'anni del XX secolo con la nascita della *fisica della complessità*.

Utilità di leggere l'Appendice A dove si illustra il formalismo matematico di base della fisica moderna: lo spazio delle fasi e la Trasformata di Fourier

Prima però di esaminare le rivoluzioni della Fisica Moderna a partire dalla fine del XIX secolo, abbiamo consigliato di leggere l'**Appendice A** a questo capitolo che contiene alcuni principi-base del formalismo matematico della Fisica Moderna, essenziale per una comprensione adeguata di tutto ciò che si dice in questo Capitolo. Innanzitutto, il concetto di *spazio degli stati o delle fasi* in Meccanica Classica usando il modello-base del *pendolo ideale* del moto oscillatorio (cfr. § A1.) fondamentale per una *rappresentazione frequentistica* della dinamica di un sistema classico dove giuoca un ruolo fondamentale per tutto il formalismo matematico della Fisica Classica e Statistica, Quantistica inclusa, la *Trasformata di Fourier* (cfr. § A2.).

Dalla cinematica alla dinamica e la nozione matematica di campo

Strettamente legato a questa evoluzione del formalismo matematico della Fisica Moderna è il passaggio dalla *cinematica* (= studio delle leggi geometriche della meccanica) alla *dinamica* (= studio della meccanica in base alle forze che agiscono sul sistema: cfr. § A.3) e, in questo ambito, al concetto di *campo* (scalare, vettoriale, tensoriale) che in dinamica consiste nell'associare ad ogni punto dello *spazio geometrico di rappresentazione* (spazio degli stati) di un sistema dinamico la grandezza fisica di una *forza*, o in termini *numerici* secondo una determinata *scala di grandezza* (*campo scalare*), o in termini *vettoriali* (*campo vettoriale*), o in termini *tensoriali* (*campo tensoriale*). Nell'ambito dei sistemi dinamici *conservativi* (non soggetti, cioè, a una *dissipazione* delle forze), assumono così un ruolo fondamentale le *Funzioni di Lagrange e di Hamilton* per la rappresentazione matematica *canonica* di questi sistemi in Meccanica Classica (cfr. § A3.2).

La centralità della statistica nella fisica moderna, la nozione di spazio di probabilità, quella di transizione di fase e quella di parametro d'ordine

Parallelamente a questa evoluzione del formalismo matematico della Meccanica Classica emerge il ruolo fondamentale della *Statistica* e della *Teoria della Probabilità* (cfr. § A4.) nel formalismo matematico della Fisica Moderna (galileiana), a partire dall'evidenza del carattere *necessariamente probabilistico* delle misure sperimentali in fisica. Tutto questo implica la necessità di una *formulazione probabilistica* delle ipotesi matematiche alla base del metodo galileiano della scienza moderna e il conseguente ruolo del *Teorema del Limite Centrale* e della *Distribuzione Normale* (gaussiana) nella Fisica Statistica (§ A4.2). Di qui la centralità della nozione matematica di *spazio di probabilità* in statistica (§ A4.3) che, quando applicata alla nozione fisica di *spazio delle fasi*, fa sì che quando si parla in fisica della nozione di *transizione di fase* nei sistemi fisici, essa sia matematicamente legata innanzitutto al *cambio della metrica* di una determinata grandezza fisica (detta per questo il *parametro d'ordine* di una transizione di fase) che caratterizza uno spazio di probabilità (§ A4.4).

La prima rivoluzione della fisica moderna rispetto alla Meccanica Classica: la Termodinamica e la Meccanica Statistica

La centralità del formalismo statistico nella Fisica Moderna si evince immediatamente quando teniamo presente che il primo ridimensionamento della pretesa onnicomprensività dei principi della meccanica classica newtoniana si ebbe in *Termodinamica* (§ 2.3) con la nascita della *Termodinamica Statistica* ad opera di L. Boltzmann che lega il *calore* all'energia cinetica del moto delle moli di materia che costituiscono il sistema (§ 2.3.2). Il *Secondo Principio della Termodinamica* nella sua interpretazione statistica, reintroduce così la *freccia del tempo* nello studio statistico dei sistemi fisici *mesoscopici* (aggregati molecolari), legandolo, nei sistemi *isolati* e a *bassa densità* (gas), all'aumento irreversibile *dell'entropia*. Viene così ridimensionato l'ambito di applicabilità del *principio di reversibilità temporale* delle equazioni del moto che è tipico delle equazioni della meccanica newtoniana (§ 2.3.3). Una rivoluzione ancora più profonda l'introdurrà lo studio dei sistemi termodinamici non-isolati o *dissipativi*, caratterizzati – a differenza dei sistemi

“chiusi” della termodinamica di Boltzmann – da una forte *non-linearità* e quindi di *impredicibilità*. Capaci, cioè, come nel caso dei sistemi *chimici* e soprattutto *biologici* di legare l’irreversibilità non solo ad un aumento del disordine (entropia), ma, grazie all’apporto di energia dall’ambiente, anche all’*auto-organizzazione* di strutture ordinate (*strutture dissipative*) assolutamente impredicibili dalle condizioni iniziali (= *sistemi caotici*) (cfr. §§ Errore. L’origine riferimento non è stata trovata.-0 e § 2.8.4 per la fondazione quantistica dei sistemi caotici). Ma questo è l’oggetto principale di studio della *fisica della complessità*.

La seconda rivoluzione: la Teoria della Relatività, e il carattere relativo dello spazio-tempo

Un’ulteriore rivoluzione rispetto alle concezioni della Meccanica Classica si è avuta con la *Teoria della Relatività* (Cfr. § 2.4). Nella concezione newtoniana dello spazio-tempo (§ 2.5.1), mancava, a differenza della meccanica antica, greca e medievale, un sistema di riferimento assoluto per i corpi in quiete (il cielo delle stelle fisse della meccanica tolemaica). Tuttavia, in base al cosiddetto principio di relatività galileiana, esistevano sistemi di riferimento assoluti per sistemi inerziali *in moto rettilineo uniforme* gli uni rispetto agli altri. In questo senso, esistevano misure assolute dello spazio e del tempo anche in Meccanica Classica. Newton li definiva *sensoria Dei* per giustificarne il loro valore assoluto, Kant molto più laicamente, *sensoria hominis* o forme “a priori” e quindi *assolute* della percezione auto-cosciente umana in base al principio cartesiano dell’*evidenza autocosciente*.

La velocità finita della luce e la Relatività Speciale

Tale assolutezza entrò in crisi quando si cominciò a considerare seriamente la *velocità finita della luce* (verità conosciuta fin dai tempi di Newton) e, soprattutto, il fatto che le equazioni di Maxwell dei sistemi elettromagnetici sembravano non rispettare il principio di relatività galileiano, principio la cui validità sembrava ridursi così ai soli sistemi meccanici. Il giovane Einstein (Cfr. § 2.5.2) propose invece, con la sua *Teoria della Relatività Speciale* (*Special Relativity*, SR) una teoria che, da una parte estendeva anche ai sistemi elettrodinamici il principio di relatività e quindi l’invarianza delle leggi della fisica, dall’altra manteneva il carattere *assoluto* della velocità della luce. Occorreva dunque sostituire alle trasformazioni di Galileo fra sistemi di riferimento inerziali, delle altre trasformazioni che correggessero le misure relative di spazio (contrazione dello spazio) e di tempo (dilatazione del tempo) a partire dal principio del *limite invalicabile della velocità finita della luce*. Tali trasformazioni erano quelle di Lorentz, definite inizialmente per rendere conto dell’esperimento di Michelson–Morley, col quale si pose ufficialmente fine all’ipotesi dell’esistenza dell’etere meccanico. Teoricamente ciò significava l’impossibilità di considerare in fisica spazio e tempo come grandezze *indipendenti* relative alla rappresentazione del sistema fisico come lo era per Newton (spazio-tempo assoluti come *sensoria Dei*) e per Kant (spazio-tempo assoluti come *forme a priori* della conoscenza empirica del mondo da parte dell’osservatore umano o *sensoria hominis*). In

particolare, per misure di grandezze spaziali su grandi distanze (in astrofisica relativistica: scala *megaloscopica*) e/o per misure di grandezze spaziali su corpi che si muovono a velocità prossime a quelle della luce (in QFT su scala *microscopica* e dunque in fisica della materia condensata, su scala *macroscopica*) se i segnali relativi agli strumenti di misura non possono viaggiare comunque a velocità superiori a quelle della luce, è inconcepibile considerare le misure spaziali indipendentemente da quelle temporali, e viceversa. Di qui il *principio di relatività* spazio-temporale in SR (ma anche in QFT) e la nozione di *cronotopo* (*tempo-spazio*) *einsteiniano* dove il tempo diviene la quarta, inscindibile dimensione dello spazio in quanto *realtà misurabili* e dunque fisiche nel senso galileiano del termine.

La reciproca trasformabilità massa-energia e l'aumento relativistico della massa per velocità prossime alla velocità della luce e il suo ruolo in quantistica

Ma queste modifiche paradossali a livello di rappresentazione della realtà fisica non sono le conseguenze più sconvolgenti della SR. Ancora più sconvolgente sono le ultime due relazioni — *l'aumento relativistico della massa* per corpi accelerati a velocità prossime a quelle della luce e la conseguente *reciproca trasformabilità* massa-energia in fisica quantistica relativistica (QFT) — non solo della massa in energia come già il primo uomo che accese un fuoco si accorse, ma anche dell'energia in massa — diretta conseguenza del fatto che la velocità della luce costituisce un limite superiore invalicabile per tutti i moti di enti fisici.

L'estensione del principio di relatività anche alla Teoria Gravitazionale e la Relatività Generale

In § 2.5.3, infine, abbiamo illustrato l'estensione dei principi della relatività anche ai sistemi gravitazionali. La relatività speciale aveva infatti reso invariante le leggi della fisica non solo per i sistemi meccanici — principio di relatività galileiana —, ma anche per i sistemi elettrodinamici che obbediscono alle equazioni di Maxwell. Restavano però fuori i *sistemi gravitazionali*. Infatti, il principio di relatività speciale sembrava contrastare con l'evidenza che gli effetti della gravitazione si trasmettono istantaneamente anche a grandi distanze. La geniale soluzione di Einstein fu di reinterpretare il ruolo della gravitazione, così da ampliare la Teoria della Relatività Speciale (o Ristretta) nella *Teoria della Relatività Generale* (*General Relativity*, GR). Secondo la reinterpretazione di Einstein, la gravitazione non è una forza che agisce direttamente sui corpi, ma modificando la struttura dello spazio-tempo fisico in cui essi si muovono perché lo spazio-tempo non è un'entità rappresentazionale (come per Newton, per Kant e per Bohr), ma è un'entità *dinamica* costituita dal *campo gravitazionale* e quindi costituita da un *tessuto di relazioni causali* (come per il realismo fisico aristotelico).

Il campo gravitazionale come tessuto dinamico dello spazio-tempo dell'universo

In breve, i corpi celesti percorrono traiettorie curve non perché la forza gravitazionale fra due corpi agisce direttamente su di essi “a distanza”, ma perché la massa del corpo celeste curva la struttura dinamica dello spazio-tempo (*campo gravitazionale*) e quindi la distanza più breve che unisce due punti su una superficie curva non è una retta, ma una geodetica. In tal maniera, per la prima volta nella storia del pensiero, la misteriosa forza di

gravità trovava una sua *spiegazione matematica*. Una spiegazione pagata al prezzo di sostituire, nella rappresentazione dei corpi soggetti alla forza gravitazionale e che quindi si muovono su distanze *megaloscopiche*, lo spazio piano euclideo della meccanica e della teoria della gravitazione classica (newtoniane), con lo spazio curvo della geometria di Riemann.

Il principio di
equivalenza nella
Relatività Generale

Così, come nella geometria dello spazio curvo, la geometria piana può essere considerata un infinitesimo a curvatura nulla, nella teoria della relatività generale vige il *principio di equivalenza*. In un campo gravitazionale di estensione molto piccola rispetto alla massa del corpo celeste (p.es., *all'interno* di un ascensore in caduta libera, “l'ascensore di Einstein”, o, concretamente, di una navicella spaziale al ritorno sulla terra) è come se la gravità terrestre non avesse effetto (gli oggetti “galleggiano” come quando la navicella era fuori dal campo gravitazionale terrestre), purché s'introduca al posto di un sistema di riferimento inerziale, un *sistema di riferimento accelerato* solidale con il corpo in caduta libera.

La terza rivoluzione
rispetto alla
Meccanica Classica
è lo sviluppo della
Meccanica
Quantistica

Il terzo ridimensionamento del dominio delle equazioni della meccanica newtoniana si ha con la nascita della *meccanica quantistica* (§ 2.6) nello studio dei sistemi fisici *microscopici*. In tale studio s'introducono una serie di principi incompatibili con quelli della meccanica classica (newtoniana): il *principio di quantizzazione* (§ 2.6.1) e il conseguente modello di atomo *a stati discreti* proposto da N. Bohr, mediante cui si dà per la prima volta una spiegazione fisica alla *tavola periodica degli elementi chimici* di Mendelejev (§ 2.6.2). In seguito, una serie di altri principi sono stati introdotti nella QM come il *principio d'indeterminazione* di Heisenberg (§ 2.6.3), quello di *esclusione* di Pauli (§ 2.6.4), il *principio di complementarità* di Bohr, particella-onda (§ 2.6.7), conseguente alla scoperta della natura intrinsecamente *ondulatoria* dei fenomeni quantistici, dapprima ad opera di De Broglie (§ 2.6.5), quindi mediante l'equazione della *funzione d'onda* di Schrödinger, che permette di prevedere con eccezionale esattezza gli stati energetici discreti dell'atomo d'idrogeno quando eccitato elettromagneticamente dall'esterno, così da modellizzarlo in base a Fourier (cfr. § A2. in **Appendice A**) come un *oscillatore armonico quantistico* (§ 2.6.6).

L'interpretazione
soggettivista della
QM di Bohr-
Heisenberg e la
discussione fra
Bohr e Einstein

Di qui, in base all'interpretazione *soggettivista* della QM di Bohr-Heisenberg-De Broglie-Schrödinger che ha a lungo dominato in forma incontrastata l'ontologia della QM (cfr. per una critica in nome di un'interpretazione realista della fisica quantistica (Preparata, 2023)), la necessità di leggere la dualità particella-onda del principio di complementarità di Bohr, come un aspetto fondamentale della natura a livello microscopico, con tutti gli interrogativi legati alla cosiddetta *riduzione (decoerenza) della funzione d'onda* (passaggio dalla descrizione ondulatoria a quella particellare) e alla sua dipendenza o meno dalla rappresentazione matematica ondulatoria (stato coerente) o particellare (decoerenza) dipendente *dall'atto della*

misurazione e della sua preparazione su un sistema quantistico. In questa luce, dato il carattere fondamentale dell'*entanglement* quantistico relativo alla famosa discussione Bohr-Einstein sul *paradosso EPR*, si basa la *negazione del principio di causalità* in quantistica, secondo l'interpretazione di Copenhagen. Data la centralità della *nozione di campo* e degli *stati coerenti* dei campi quantistici che sono le uniche entità alle quali applicare il *principio leibniziano dell'identità degli indiscernibili* come *principio di individualità* in fisica quantistica, l'ente quantistico fondamentale non solo in QFT (come è naturale) ma anche in QM, la visione convenzionalista della QM basata sulla dualità della *rappresentazione* fra particella e onda viene oggi criticata in nome di un'interpretazione *realista* della fisica quantistica, *principio di causalità*, incluso, come abbiamo accennato nelle *Conclusioni* di questo capitolo (cfr. § 2.8) e su cui ritorneremo nel **Capitolo 4**.

Una visione realista della QM si basa sull'individuazione del campo (e non della particella-onda) come oggetto fondamentale della quantistica: la QFT

Infatti, l'ulteriore passo in fisica quantistica si ha con la *Teoria Quantistica dei Campi* (QFT: cfr. § 2.7) che applica alla fisica quantistica i principi della SR e in particolare la *reciproca trasformabilità* massa-energia, facendo esplicitamente e definitivamente del *campo quantistico* (*campi materiali* in cui le "particelle" della QM diventano i *quanti*, e campi delle tre forze quantistiche di interazione *elettromagnetiche, nucleare forte e nucleare debole* con i loro quanti) l'entità fisica fondamentale. Tappa fondamentale di questo cammino è stata l'equazione di Dirac, che per la prima volta ha permesso d'inserire, parzialmente, il *principio di relatività speciale* (o ristretta) nelle equazioni quantistiche del campo elettromagnetico, trasformando la meccanica quantistica della forza elettromagnetica in *elettrodinamica quantistica* (§ 2.7.1).

La QFT e il Modello Standard delle particelle elementari

Grazie alle ulteriori applicazioni della QFT ai campi della forza *debole* e della *forza forte* (*cromodinamica quantistica*) è stato possibile definire il *Modello Standard* (SM) delle particelle elementari e delle forze quantistiche (effettivamente, dei campi quantistici materiali e dei campi quantistici delle loro forze d'interazione: cfr. § 2.7.2)). Esso però, nella sua forma attuale, non può essere la Fisica Fondamentale della materia perché necessita di un ulteriore *completamento*, innanzitutto, ma non solo, perché necessita della *quantizzazione della forza gravitazionale* («gravità quantistica») e soprattutto perché non è in grado di giustificare a livello cosmologico la *materia oscura* e l'*energia oscura* che costituiscono oltre il 95% della materia di cui è costituito il nostro universo (cfr. § 2.7.3).

La quarta e definitiva rivoluzione è quella legata ai sistemi complessi, sia in Meccanica Statistica che in QFT

L'ultima e più definitiva rivoluzione nell'ambito della fisica moderna rispetto alle sue origini newtoniane lo ha introdotto, però, lo studio dei sistemi fisici *complessi* cui è dedicata la parte finale di questo capitolo (cfr. § 2.4), dal punto di vista *descrittivo* della fisica classica (*sistemi caotici*: cfr. §§ 2.4.1-0) ed *esplicativo* della fisica quantistica, in particolare della QFT come *Fisica Fondamentale*. (§ 2.8). Per far questo, abbiamo avuto bisogno di introdurre alcune ulteriori nozioni di Meccanica Statistica, in particolare

la nozione di *instabilità dinamica* e l'*ipotesi ergodica*, essendo la *rottura dell'ergodicità* nella formalizzazione matematica della nozione di *sistema caotico* e di *sistema complesso* una nozione-chiave, tanto a livello descrittivo di sistema caotico, quanto a livello esplicativo della QFT. D'altra parte, la rottura dell'ergodicità è intrinsecamente legata alla nozione di *transizione di fase* su *diverse scale temporali* una delle nozioni-chiave di sistema complesso (§ 2.4.2).

In QFT contro la QM nella interpretazione di Bohr-Heisenberg vale il principio di causalità fisico del cono di luce relativistico

Le conseguenze teoriche per *l'ontologia e l'epistemologia* della Fisica Moderna le abbiamo sommariamente trattate nelle *Conclusioni* di questo capitolo (§ 2.8) dedicato alla fondazione fisica del *principio di causalità* anche in Fisica Quantistica, contro l'interpretazione di Copenaghen della QM, le cui conseguenze *epistemologiche, storiche e metafisiche* per la Filosofia della natura e della Scienza, saranno oggetto dei **Capitoli 4, 5, e 6**, rispettivamente, di questo volume. Il **Capitolo 3** sarà invece dedicato alla *Teoria dei Fondamenti* matematici e logici del *metodo ipotetico-deduttivo* della scienza moderna già introdotto, in matematica, al termine dell'*excursus* sulla Storia della Matematica nel **Capitolo 1** e, in fisica, per tutto quanto abbiamo detto in questo Capitolo.

Bibliografia del secondo capitolo



- Abbot, B. P., LIGO Collaboration, & VIRGO Collaboration. (2016). Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merge. *Phys. Rev. Lett.*, 116(6), 061102.
- Abbot, B. P., LIGO Collaboration, & VIRGO Collaboration. (2017). GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. *Phys. Rev. Lett.*, 119(16), 161101.
- Abramsky, S., & Coecke, B. (2004). A categorical semantics of quantum protocol. *Proceedings of the 19th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science, 13-17 July 2004* (pp. 415-425). IEEE-Publishing. doi:10.1109/LICS.2004.1319636
- Abramsky, S., & Coecke, B. (2009). Categorical quantum mechanics. In K. Engesser, D. M. Gabbay, & D. Lehmann (Eds.), *Handbook of quantum logic and quantum structures* (pp. 261-323). Amsterdam: Elsevier.
- Accademia Reale Svedese delle Scienze. (2021). *Scientific Background. "Groundbreaking contributions to our understanding of complex physical systems"*. Retrieved December 12, 2023, from The Nobel Prize in Physics 2021. Advanced Information:

<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2021/advanced-information/>

- Anderson, P. W. (1972). More is different. *Science*, 177(4047), 393-396.
- Aspect, A., Grangier, P., & Roger, G. (1982). Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, 49(2), 91-94.
- Atkins, P. (2010). *The Laws of Thermodynamics. A very short introduction*. Oxford: Oxford, UK.
- Auerbach, D., Cvitanović, P., Eckmann, J.-P., Gunaratne, G., & Procaccia, I. (1987). Exploring chaotic motion through periodic orbits. *Phys. Rev. Lett.*, 58, 2387-2390.
- Basti, G. (2017). The quantum field theory (QFT) dual paradigm in fundamental physics and the semantic information content and measure in cognitive sciences. In G. Dodig-Crnkovic, & R. Giovagnoli (Eds.), *Representation and Reality in Humans, Other Living Organisms, and Intelligent Machine* (pp. 177-210). Berlin, New York: Springer Verlag. doi:10.1007/978-3-319-43784
- Basti, G. (2020). Foreword: a chronology of the universe evolution. (G. Basti, & F. M. Ferrari, A cura di) *Aquinas. Special Issue on: "Logos and Cosmos. Physics, Philosophy, and Theology in an Age of Change"*, LXIII(1-2), 33-52.
- Basti, G. (2022). The Philosophy of Nature of the Natural Realism. The Operator Algebra from Physics to Logic. *Philosophies*, 7(6), 1-50. doi:10.3390/philosophies7060121
- Basti, G., & Ferrari, F. M. (2020a). The dual paradigm in quantum physics and its ontology. I Part: mathematics and physics. (G. Basti, & F. M. Ferrari, Eds.) *Aquinas. Special issue on: "Cosmos & Logos. Physics, Philosophy, and Theology in an Age of Change"*, LXIII(1-2), 117-162.
- Basti, G., & Ferrari, F. M. (2020b). The dual paradigm in quantum physics and its ontology. II Part: logic and ontology. (G. Basti, & F. M. Ferrari, Eds.) *Aquinas. Special Issue on: "Cosmos & Logos. Physics, Philosophy, and Theology in an Age of Change"*, LXIII(1-2), 163-194.
- Basti, G., Capolupo, A., & Vitiello, G. (2017). Quantum Field Theory and Coalgebraic Logic in Theoretical Computer Science. *Prog. in Bioph. & Mol. Biol. Special Issue, Quantum information models in biology: from molecular biology to cognition*, 130(Part A), 39-52.

- Basti, G., Capolupo, A., & Vitiello, G. (2017). Quantum Field Theory and Coalgebraic Logic in Theoretical Computer Science. *Prog. in Bioph. & Mol. Biol. Special Issue: Quantum information models in biology, from molecular biology to cognition*, 130, 39-52. Retrieved from arXiv:1701.00527v1 [quant-ph] 29 Dec 2016: arXiv:1701.00527v1 [quant-ph] 29 Dec 2016 (preprint)
- Basti, G., Capolupo, A., & Vitiello, G. (2020). The doubling of the Degrees of Freedom in Quantum Dissipative Systems, and the Semantic Information Notion and Measure in Biosemiotics. *Proceedings*, 47(69), 1-7. doi:doi:10.3390/proceedings47010069
- Becchi, C. M. (2010). Second quantization. *Scholarpedia*, 5(6), 7902. Retrieved from http://www.scholarpedia.org/article/Second_quantization#haag
- Belardinelli, E., & Ceutti, S. (Eds.). (1993). *Biosistemi e complessità*. Bologna: Patron.
- Benzi, R., Parisi, G., Sutera, A., & Vulpiani, A. (1982). Stochastic resonance in climate change. *Tellus*, 34(1), 10-15.
- Bishop, R. (2017). *Chaos*. Retrieved June 22, 2023, from The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.): <https://plato.stanford.edu/archives/spr2017/entries/chaos/>
- Blasone, M., Jizba, P., & Vitiello, G. (2011). *Quantum field theory and its macroscopic manifestations. Boson condensation, ordered patterns and topological defects*. London: Imperial College Press.
- Bogoliubov, N. N. (1958). On a new method in the theory of superconductivity. *Nuovo Cimento*, 7(6), 794-805.
- Bogoliubov, N. N., Tolmachev, V. V., & Shirkov, D. V. (1958). A new method in the theory of superconductivity. *Fortsch. Phys.*, 6, 605-682.
- Born, M., & Jordan, P. (1925). Zur Quantenmechanik. *Zeitschrift für Physik*, 34, 858-888.
- Born, M., Heisenberg, W., & Jordan, P. (1925). Zur Quantenmechanik II. *Zeitschrift für Physik*, 35, 557-615.
- Born, M., Heisenberg, W., & Jordan, P. (1925). Zur Quantenmechanik II. *Zeitschr. für Phys.*, 35, 557-615.
- Boyer, C. B. (1982). *Storia della matematica*. Milano: Mondadori.

- Brizhik, L., Del Giudice, E., Maric-Oehler, W., Popp, F.-A., & Schlebusch, K.-P. (2009). On the dynamics of self-organization in living organisms. *Electromagn. Biol. Medic.* 28(1), 28-40 (2009); DOI; 28(1), 28-40. doi:10.1080/15368370802708272
- Bruno, A., Capolupo, A., Kak, S., Raimondo, G., & Vitiello, G. (2011). Geometric phase and gauge theory structure in quantum computing. *J. of Phys. Conf. Series*, 306, 012065.
- Castiglione, P., Basti, G., Fusi, S., & Perrone, A. L. (1992). A net for automatic detection of minimal correlation order in contextual pattern recognition. *Proceedings of IEEE/INNS International Joint Conference on Neural Networks IJCNN-Baltimore'92, Baltimore, June 11-16, 1992. Volume 2* (pp. 1192-1198). Baltimore: IEEE Press.
- Chiribella, G., D'Ariano, G. M., & Perinotti, P. (2010). Probabilistic theory with purification. *J. Phys. A*, 81, 062348.
- Chiribella, G., D'Ariano, G. M., & Perinotti, P. (2011). Informational derivation of quantum theory. *J. Phys. A*, 84, 012311.
- Coecke, B. (A cura di). (2011). *New structures for physics. Lecture Notes in Physics, 813*. Berlin-New York: Springer.
- Coecke, B., & Kissinger, A. (2016, May 27). *Categorical Quantum Mechanics I: Causal Quantum Processes*. Retrieved from arXiv.org: <https://arxiv.org/pdf/1510.05468.pdf>
- Corwin, I. (2011). *The Kadat-Parisi-Zhang equation and universality class*. Retrieved 12 20, 2023, from ArXiv:1106.1596v4: <https://arxiv.org/pdf/1106.1596v4>
- Crutchfield, J., Farmer, D. J., Packard, N., & Shaw, R. (1991). Il caos. In: Ca-sati G. (1991), pp. 22-33. In G. Casati, *Le leggi del disordine* (p. 22-33). Milano: Le Scienze Ed.
- Del Giudice, E., Pulselli, R., & Tiezzi, E. (2009). Thermodynamics of irreversible processes and quantum field theory: an interplay for understanding of ecosystem dynamics. *Ecological Modelling*, 220, 1874-1879.
- Deutsch, D. (1985). Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 400, 97-117.
- Devaney, R. (2003). *An introduction to chaotic dynamic systems. Second Edition*. Boca Raton (USA): CRC Press.

- Dirac, P. A. (1958). *Principles of quantum mechanics. Fourth Edition*. Oxford, UK: Clarendon Press.
- Drake, S. (1990). *Galileo Galilei, pioniere della scienza*. Padova: Muzzio.
- Edwards, S., & Anderson, P. (1975). Theory of spin glasses. *J. of Phys. F: Metal Phys.*, 5(5), 965–974.
- Faye, J. (2019). *Copenhagen Interpretation of Quantum Mechanics*. Tratto da The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2019 Edition), Edward N. Zalta (ed.): <https://plato.stanford.edu/archives/win2019/entries/qm-copenhagen/>
- Feynman, R. (1982). Simulating physics with computers. *Int. J. Theor. Phys.*, 21, 467–488.
- Feynman, R. (1993). *La legge fisica. 20° Edizione*. Milano: Bollati Boringhieri.
- Feynman, R. (2014). *QED: The Strange Theory of Light and Matter (Princeton Science Library, 90) Revised Edition*. Princeton NJ, USA: Princeton UP.
- Fock, V. A. (1932). Konfigurationsraum und zweite quantelung. *Zeit. f. Phys.*, 75, 622.
- Freeman, W. J. (2000). A proposed name for aperiodic brain activity: stochastic chaos. *Neur. Netw.*, 13, 11-13.
- Freeman, W., & Skarda, C. A. (1987). How brains make chaos in order to make sense of the world. *Behav. Brain Sc.*, 10(2), 161-173.
- Ghirardi, G. (1997). *Un'occhiata alle carte di Dio. Gli interrogativi che la scienza moderna pone all'uomo*. Milano: Il Saggiatore.
- Gleick, J. (2018). *Caos. La nascita di una nuova scienza*. Milano: Rizzoli.
- Goldstone, J. (1961). Field Theories with Superconductor Solutions. *Nuovo Cimento*, 19, 154–164. doi:10.1007/BF02812722
- Goldstone, J., Salam, A., & Weinberg, S. (1962). Broken Symmetries. *Physical Review*, 127, 965–970. doi:10.1103/PhysRev.127.965
- Greene, B. (2015). *L'universo elegante. Superstringhe, dimensioni nascoste e la ricerca della teoria ultima*. (L. Civalieri, & C. Bartocci, Trad.) Torino: Einaudi.
- Guerra, F., & Toninelli, F. L. (2002). The thermodynamic limit in mean field spin glass models. *Comm. in Math. Phys.*, 230(1), 71–79.

- Haag, R. (1955). On quantum field theories. *Matematisk-fysiske Meddelelser*, 29(12), 1-37.
- Hairer, M. (2013). Solving the KPZ equation. *Ann. Math.*, 178, 559-664.
- Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (2021). *Fundamentals of Physics. 12th Edition*. Hoboken NJ, USA: Wiley & Sons.
- Heisenberg, W. (1925). Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen. *Zeitschrift für Physik*, 33, 879-893.
- Heisenberg, W. (1927). Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. *Z. Phys.*, 43, 172-198.
- Heisenberg, W. (1958). *Physics and philosophy*. New York: Harper.
- Heunen, C., & Kornell, A. (2022). Axioms for the category of Hilbert spaces. *Proc. Nat. Ac. Sc.*, 119(9), e2117024119.
- Higgs, P. (1964). Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 13, 508-509. doi:10.1103/PhysRev.127.965
- Hilbert, D. (1899). *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig: Teubner Verlag.
- Hilbert, D. (1902). Mathematical Problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 8(10), 437-479.
- Ho, M.-W. (2014). Illuminating Water and Life. *Entropy*, 16(9), 4874-4891. doi:10.3390/e16094874
- Hollands, S., & Longo, R. (2016, September 9). *Non Equilibrium Thermodynamics in Conformal Field Theory*. Retrieved from arXiv:1605.01581v1 [hep-th] 5 May 2016: <http://www.arxiv.org>
- Jammer, M. (1982). Einstein and quantum physics. In G. Holton, & Y. Elkana (Eds.), *Albert Einstein: Historical and Cultural Perspectives; the Centennial Symposium in Jerusalem* (pp. 59-76). Princeton NJ: Princeton UP.
- Jordan, P., & Wigner, E. (1928). Über Paulisches Äquivalenzverbot. *Zeit. f. Phys.*, 47, 631.
- Kardar, M., Parisi, G., & Zhang, Y. (1986). Dynamic scaling of growing interfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 56, 889.
- Kolmogorov, A. (1950). *Foundations of probability theory*. New York: Chelsea Pub.

- Koyré, A. (1983). *Studi newtoniani*. Torino: Einaudi.
- Kupke, C., Kurz, A., & Venema, Y. (2004). Stone coalgebras. *Theoretical computer science*, 327, 109-134.
- Ladyman, J. (2020). *Structural Realism*. (E. N. Zalta, Ed.) Retrieved January 30, 2022, from The Stanford Encyclopedia of Philosophy (2020 Winter Edition): <https://plato.stanford.edu/archives/win2020/entries/structural-realism/>
- Landsman, K. N. (2017). *Foundations of Quantum Theory. From Classical Concepts to Operator Algebra*. Berlin-New York: Springer.
- Lindon, J. (2020, October 30). *Particle Collider Probes of Dark Energy, Dark Matter and Generic Beyond Standard Model Signatures in Events With an Energetic Jet and Large Missing Transverse Momentum Using the ATLAS Detector at the LHC*. Retrieved from CERN-Birmingham Univ. PhD Thesis: <https://cds.cern.ch/record/2746537/>
- Livi, R., Pettini, M., Ruffo, S., Sparpaglione, M., & Vulpiani, A. (1985). Equipartition threshold in nonlinear large Hamiltonian systems: The Fermi-Pasta-Ulam model. *Phys. Rev. A*, 31(2), 1039-1045.
- Lorenz, E. N. (1963). Deterministic non-periodic flow, 20:130-141. *J. Atmosph. Sc.*, 20, 130-141.
- Lyre, H. (2011). Structural Invariants, structural kinds, structural laws. In D. Dieks, W. J. Gonzalez, S. Hartmann, M. Stöltzner, & M. Weber (Eds.), *Probabilities, laws, and structures* (pp. 169-181). Dordrecht: Springer.
- Maldacena, J. (2016). The symmetry and simplicity of the laws of physics and the Higgs boson. *Eur. J. Phys.*, 1, 015802.
- Mann, R. (2021). *An introduction to particle physics and the standard model*. Boca Raton FL: CRC Press-Taylor & Francis Group.
- May, R. M. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261(5560), 459-467.
- Mezard, M., Parisi, G., & Virasoro, M. A. (1987). *Spin glass theory and beyond*. Singapore: World Scientific.
- Ming, Y., Hu, H., Li, H.-M., Ding, Z.-J., & Ren, J. (2023). Universal Kardar-Parisi-Zhang transient diffusion in nonequilibrium anharmonic chains. *Phys. Rev. E*, 1, 014204.

- Mironyuk, O. Y., & Loskutov, A. Y. (2006). Detection of Cardiac Pathologies Using Dimensional Characteristics of RR Intervals in Electrocardiograms. *Compl. Syst. Bioph.*, 51(1), 115-119.
- Mitchell, M. (2009). *Complexity: A Guided Tour*. Oxford, UK: Oxford UK.
- Moreau, P.-A., Toninelli, E., Gregory, T., Aspden, R. S., Morris, P. A., & Padgett, M. J. (2019). Imaging Bell-type nonlocal behavior. *Sciences Advances*, 5(7), 2563.
- Nambu, Y. (1960). Quasiparticles and Gauge Invariance in the Theory of Superconductivity. *Physical Review*, 117, 648–663.
- Nambu, Y., & Jona-Lasinio, G. (1961a). Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I. *Phys. Rev.*, 122(1), 345-358.
- Nambu, Y., & Jona-Lasinio, G. (1961b). Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. II. *Phys. Rev.*, 124(1), 246-254.
- Nayak, C., Simon, S. H., Stern, A., Freedman, M., & Das Sarma, S. (2008). Non-Abelian Anyons and Topological Quantum Computation. *Rev. Mod. Phys.*, 80, 1083.
- Omnès, R. (1994). *The interpretation of quantum mechanics*. Princeton NJ, USA: Princeton UP.
- Paladini, S. (2013). *Cuore e caos*. Retrieved from Insight. Scienza e Tecnologia nella vita di tutti i giorni: <https://insight.stefanopaladini.net/it/cuore-e-caos/4/>
- Parisi, G. (1980). The order parameter for spin glasses: a function on the interval 0-1. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 13(3), 1101–1112.
- Parisi, G. (2005). Brownian motion. *Nature*, 433, 221.
- Parisi, G. (2021). *In un volo di stormi*. Milano: Rizzoli.
- Parisi, G. (2023). Thoughts on complex systems: an interview with Giorgio Parisi. *J. Phys. Complex.*, 3(040201).
- Parisi, G., & Ramaurti, S. (1988). Statistical Field Theory. *Phys. Today*, 41(12), 110.
- Peres, A. (1993). *Quantum theory. Concepts and methods*. Amsterdam: Kluwer.
- Pikkujämsä, S. M., Mäkikallio, T. H., Sourander, L. B., Räihä, ,, Puukka, P., Skyttä, J., . . . Huikuri, H. V. (1999). Cardiac Interbeat Interval Dynamics From Childhood to Senescence. Comparison of

- Conventional and New Measures Based on Fractals and Chaos Theory. *Circulation*, 100(4), 393-399.
- Piotrowski, C. (2020). Covid-19 pandemic and chaos theory. Applications based on a bibliometric analysis. *J. Project. Psychol.*, 27(2), 1-5.
- Poincaré, H. (1890). Poincaré, H. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Math.*, 13, 1–270.
- Preparata, G. (1995). *QED coherence in matter*. Singapore: World Scientific.
- Preparata, G. (2023). *Introduzione a una fisica quantistica realistica. Traduzione italiana a cura di Francesco Panizzoli, con Introduzione di Giuseppe Vitiello*. Roma: Aracne Ed.
- Prigogine, I. (1986). *Essere e divenire*. Torino: Einaudi.
- Prigogine, I. (2003). *Le leggi del caos*. Roma-Bari: Laterza.
- Prigogine, I., & Stengers, I. (1999). *La nuova alleanza. Metamorfosi nella Scienza*. Torino: Einaudi.
- Ricciardi, L. M., & Umezawa, H. (1967). Brain physics and many-body problem. *Kybernetik*, 4, 44-48.
- Robson, D. (2009). Disorderly genius: how chaos drives the brain. *New Scient.*, 2714, 7-15.
- Ruelle, D. (1991). Determinismo e predicibilità. In G. Casati, *Le leggi del disordine* (pp. 13-21). Milano: Le Scienze.
- Rutten, J. J. (2000). Universal coalgebra: a theory of systems. *Theoretical computer science*, 249(1), 3-80.
- Sbranchella, F., Zungri, S., & Carichino, G. (2019). *Dinamica, voll.1-2*. Retrieved from www.youmath.it/ebook-e-libri/https://www.youmath.it/ebook-e-libri/prodotto/35-ebook-dinamica-teoria-volume-1.html
- Schlosshauer, M., Kofler, J., & Zeilinger, A. (2013). A Snapshot of Foundational Attitudes Toward Quantum Mechanics. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 44(3), p. 222-230.
- Schrödinger, E. (1926). An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules. *Physical Review*, 28(6), 1049-1070.
- Schrödinger, E. (1944). *What is life*. Cambridge, UK: Cambridge UP.

- Schwarz, G. E. (1978). Estimating the dimension of a model. *Ann. Stat.*, 6(2), 461-464.
- Shannon, C. (1948). A mathematical theory of communication. *Bell Syst. Techn. J.*, 27, 379-423; 623-656.
- Shayeghi, A., Rieser, P., A., Richter, G., & et al. (2020). Matter-wave interference of a native polypeptide. *Nature Communications*, 11, 1447. doi:<https://doi.org/10.1038/s41467-020-15280-2>
- Sherrington, D., & Kirkpatrick, S. (1975). Solvable model of a spin-glass. *Phys. Rev. Lett.*, 35(26), 1792-1796.
- Shultis, J. K., & Faw, R. (2002). *Fundamentals of nuclear science and engineering*. New York: CRC Press.
- Skagerstam, B.-S., Eriksson, K.-E., & Rekda, P. K. (2019, March 30). *Causality in quantum field theory with classical sources*. Retrieved from <https://arxiv.org/pdf/1801.09947.pdf>
- Steen, L. A. (2011). Highlights in the history of spectral theory. In M. Anderson, V. Katz, & R. Wilson (Eds.), *Who gave you the epsilon? And other tales of mathematical history* (pp. 359-381). Cambridge, UK: Cambridge UP.
- Stein, E., & Shakarchi, R. (2003). *Fourier Analysis: An Introduction*. Princeton, NJ: Princeton UP.
- Steinhardt, P., & Turok, P. J. (2002). Cosmic Evolution in a Cyclic Universe. *Phys. Rev. D*, 65(12), 126003.
- Stone, M. H. (1930). Linear Transformations in Hilbert Space. III. Operational Methods and Group Theory. *Proc. of Nat. Acad. of Science*, 16(2), 172-175.
- Stone, M. H. (1932). On one-parameter unitary groups in Hilbert Space. *Annals of Mathematics*, 33(3), 643-648.
- Tegmark, M., & Wheeler, J. A. (2001). 100 years of quantum mysteries. *Scient. Am.*, 284(2), 68-75.
- The Royal Swedish Academy of Sciences. (2021a, October 1). *Popular Science Background*. Retrieved March 14, 2023, from The 2021 Nobel Prize in Physics: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2021/popular-information/>
- Tucker, W. (1999). The Lorenz attractor exists. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 328(1), 1197-1202.

- Turing, A. M. (1952). The chemical basis of morphogenesis. *Phil. Trans. Royal Soc. Series B, Biol. Sc.*, 237(641), 37-72.
- Umezawa, H. (1993). *Advanced field theory: micro, macro and thermal concepts*. New York: American Institute of Physics.
- Umezawa, H. (1995). Development in concepts in quantum field theory in half century. *Math. Japonica*, 41, 109-124.
- Venema, Y. (2007). Algebras and co-algebras. In P. Blackburn, F. J. van Benthem, & F. Wolter (A cura di), *Handbook of modal logic* (p. 331-426). Amsterdam, North Holland: Elsevier.
- Viana, M. (2000). What's new on Lorenz strange attractors. *Mathem. Intell.*, 22, 6-19.
- Vitiello, G. (2007). Links. Relating different physical systems through the common QFT algebraic structure. *Lecture Notes in Physics*, 718, 165-205.
- Vitiello, G. (2012). Fractals, coherent states and self-similarity induced noncommutative geometry. *Phys. Lett. A*, 376, 2527-2532.
- Von Neumann, J. (1930). Linear Transformations in Hilbert Space. III. Operational Methods and Group Theory. *Proc. of the Nat. Acad. of Sciences*, 16(2), 172-175.
- Von Neumann, J. (1932). *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Berlin: Springer.
- Von Neumann, J. (1932). Ueber Einen Satz Von Herrn M. H. Stone. *Annals of Mathematics*, 33(3), 567-573.
- Wagner, C. D., & Persson, P. B. (1998). Chaos in the cardiovascular system: an update. *Cardiov. Res.*, 40, 257-264.
- Watson, J. D., & Crick, F. (1953). Molecular Structure of Nucleic Acids: A Structure for Deoxyribose Nucleic Acid. *Nature*, 171(4356), 737-738.
- Weinberg, S. (2002). *The theory of quantum fields*. Cambridge, UK: Cambridge UP.
- Weinberg, S. (2021). *Foundations of Modern Physics*. Cambridge, UK: Cambridge UP.
- Wilson, K. G. (1971a). Renormalization group and critical phenomena. I. Renormalization group and the Kadanoff scaling picture. *Phys. Rev. Lett.*, B, 4(3174).

- Wilson, K. G. (1971b). Renormalization group and critical phenomena. II. Phase-space cell analysis of critical behavior. *Phys. Rev. Lett.* *B*, *4*(3184).
- Ye, B., Machado, F., Kemp, J., Hutson, R. B., & Yao, N. Y. (2022). Universal Kardar-Parisi-Zhang Dynamics in Integrable Quantum Systems. *Phys. Rev. Lett.*, *129*, 230602.
- Zuber, J.-B., & Itzykson, C. (1980). *Quantum Field Theory*. Berlin: Dover Publication.