Investigación y Ciencia
ISSN: 1665-4412
revistaiyc@correo.uaa.mx
Universidad Autónoma de Aguascalientes
México

Macías Díaz, Jorge Eduardo
Sobre una versión categórica de un criterio de proyectividad generalizada para módulos sobre dominios
Investigación y Ciencia, vol. 19, núm. 53, septiembre-diciembre, 2011, pp. 56-60
Universidad Autónoma de Aguascalientes
Aguascalientes, México

INVESTIGACIÓN y CIENCIA
DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE AGUASCALIENTES
Número 53, (56-60) Septiembre-Diciembre 2011

Sobre una versión categórica de un criterio de proyectividad generalizada para módulos sobre dominios

On a categorical version of a generalized projectivity criterion for modules over domains

Jorge Eduardo Macías Díaz[1]

Artículo de revisión

Macías Díaz, J. E., Sobre una versión categórica de un criterio de proyectividad generalizada para módulos sobre dominios, *Investigación y Ciencia de la Universidad Autónoma de Aguascalientes*. 53, 56-60, 2011.

RESUMEN

En el presente trabajo se establece una generalización del Criterio de Hill a categorías $\mathcal{M}$ de módulos sin torsión, que son cerradas con respecto a sumas directas, y en las que cada objeto puede ser descompuesto como la suma directa de módulos en $\mathcal{M}$ de rango menor o igual a un número cardinal límite fijo κ. El resultado principal de esta nota estipula que un módulo M pertenece a la categoría $\mathcal{M}$ si es la unión de una cadena ascendente, bien ordenada y continua de longitud κ, que consiste de objetos de $\mathcal{M}$, que son puros en M.

ABSTRACT

In this work, we establish a generalization of Hill's Criterion of freeness of abelian group theory, to categories $\mathcal{M}$ of torsion-free modules over integral domains, which are closed with respect to the formation of direct sums, and in which every member can be decomposed into direct sums of modules of $\mathcal{M}$ of rank at most a fix limit cardinal number κ. Our main result states that a module belongs to $\mathcal{M}$ if it is the union of a continuous, well-ordered, ascending chain of length κ, consisting of pure submodules which belong in .

Palabras claves: categorías de módulos, cadenas ascendentes de módulos, módulos sin torsión, Criterio de Hill, submódulos puros, dominios enteros.
Key words: module categories, ascending chains of modules, torsion-free modules, Hill's Criterion, pure submodules, integral domains.

Recibido: 10 de Diciembre de 2010, aceptado: 14 de Junio de 2011

[1] Departamento de Matemáticas y Física, Centro de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma de Aguascalientes, jemacias@correo.uaa.mx.

INTRODUCCIÓN

El punto de partida de la presente nota es el Teorema de Hill para la identificación de grupos abelianos libres, el cual enuncia que un grupo conmutativo G es libre si es la unión de una sucesión ascendente de subgrupos de G, en la que cada uno de los subgrupos es libre y puro en G (ver Fuchs, 1973 o Hill, 1970 para mayores detalles); aquí, decimos que un subgrupo de un grupo es *puro* si todo sistema de ecuaciones en el subgrupo con coeficientes en los enteros es soluble en el subgrupo cuando sea soluble en el grupo. Históricamente, el Criterio de Hill generaliza el Teorema de Pontryagin –el cual es válido para grupos de cardinalidad contable (Pontryagin, 1934)– y proporciona una herramienta muy útil para determinar si un grupo abeliano posee la estructura simple de un grupo libre. Naturalmente, surge la pregunta de si dicho resultado puede ser extendido a la condición de libertad de módulos sobre dominios.

Hay que afirmar que, en fechas recientes, los avances en materia de Álgebra abstracta y Teoría de Conjuntos han permitido extender el Criterio de Hill a varias propiedades de módulos que generalizan la condición de libertad. Más precisamente, la Teoría de Módulos sobre dominios enteros ha sido el escenario principal en donde se han presentado las generalizaciones más relevantes del Teorema de Hill. Por ejemplo, dicho resultado ha encontrado extensiones para módulos proyectivos (Macías Díaz, 2010), módulos completamente factorizables y módulos separables (Fuchs y Macías Díaz, 2010), módulos proyectivos balanceados (Macías Díaz, 2011a), módulos que son isomorfos a sumas directas de ideales de dominios de Prüfer *h*-locales (Macías Díaz, 2011b) y módulos de Butler (Rangaswamy, 1998).

En vista de la amplia gama de generalizaciones del Criterio de Hill a condiciones generalizadas de libertad de módulos, una nueva pregunta surge respecto a la Teoría de Categorías: ¿es posible proporcionar una generalización ulterior del Criterio de Hill que englobe, digamos, aquellos teoremas concernientes a las condiciones de libertad, proyectividad, factorizabilidad completa y separabilidad de módulos? Más precisamente, ¿es posible encontrar condiciones categóricas para subcategorías completas de la categoría de todos los módulos, en donde se satisfaga la cerradura bajo uniones de sucesiones ascendentes de submódulos puros?

La respuesta a esta interrogante será proporcionada en este trabajo, el cual está seccionado de la siguiente forma: primero se presentarán algunos conceptos y resultados preliminares sobre el tema central de nuestra discusión, es decir, las κ-categorías; también se introducirán los conceptos de pureza de módulos y de categorías proyectivas, y se enunciará el resultado principal. Después citaremos algunos resultados técnicos de suma utilidad en esta investigación, mientras que el penúltimo apartado proporcionará un bosquejo de la demostración del resultado principal de este trabajo; asimismo, se facilitarán algunas consecuencias relevantes para nuestros propósitos. Finalmente, se añade una sección de conclusiones y discusiones sobre el tema de investigación.

Preliminares

En esta breve nota, supondremos siempre que *R* representa un dominio entero (esto es, un anillo conmutativo, con identidad para la multiplicación y sin divisores de cero), y supondremos que κ es un número cardinal infinito arbitrario. En todo momento, el lector puede remitirse a Fuchs y Salce (2001) para aclaraciones sobre la terminología estándar, así como los resultados elementales sobre la Teoría de Módulos que serán empleados.

En este contexto, una *κ-categoría* es una categoría completa $\mathcal{M}$ de módulos sin torsión, la cual es cerrada con respecto a la formación de sumas directas, y en la que cada objeto puede ser expresado como la suma directa de módulos en $\mathcal{M}$ de rango menor o igual a κ. Un famoso resultado de I. Kaplansky (1968) –a saber, que todo sumando directo de un módulo que es la suma directa de módulos de rango contable, es también una suma directa de módulos de rango contable– proporciona una amplia gama de $\aleph_0$-categorías, como lo demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. *Todas las siguientes clases de R-módulos forman $\aleph_0$-categorías en virtud de la versión del Teorema de Kaplansky para el rango (ver Theorem 1 en Kaplansky, 1968): los módulos libres, los módulos proyectivos, los módulos completamente factorizables, los módulos proyectivos balanceados y las sumas directas de ideales de R.*

Sea *N* un submódulo del *R*-módulo *M*. Recuérdese que *N* es *puro* en *M* si cada sistema de ecuaciones en *N* con coeficientes en *R* *tiene solución en N* siempre que tenga solución en *M*. Esta definición es, evidentemente, una generalización del concepto de pureza de la Teoría de Grupos Abelianos; además, todo submódulo *N* de *M* es *relativamente divisible* en *M*, es decir, toda ecuación de la forma $rx = a$, con a perteneciente a *N* y r en *R*, es soluble en *N* siempre que es soluble en *M*. Como ejemplo, todo sumando directo es tanto un submódulo puro como un submódulo relativamente divisible. El lector podrá encontrar más propiedades sobre pureza y divisibilidad relativa en las Secciones I.7 e I.8 de Fuchs y Salce (2001).

El siguiente es el resultado más relevante de esta nota:

Teorema 1. *Sea $\mathcal{M}$ una κ-categoría. Un módulo sin torsión M pertenece a $\mathcal{M}$ si existe una cadena ascendente, bien ordenada y continua.*

(1) $0 = M_0 < M_1 < \ldots < M_v < \ldots \; (v < \kappa)$
de submódulos de M, tales que:

a) *cada M_v es puro en $M_{v+1,}$*
b) *cada M_v pertenece a $\mathcal{M}$, y*
c) *M es la unión de los módulos de la cadena* (1).

Aquí es menester recordar que una cadena (1) es *continua* si M_v es la unión de sus predecesores, para cada ordinal límite $v < \kappa$.

INVESTIGACIÓN y CIENCIA
DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE AGUASCALIENTES
Número 53, (56-60) Septiembre-Diciembre 2011

Como consecuencia, las *κ-categorías* son cerradas bajo la formación de uniones de cadenas ascendentes, bien ordenadas y continuas de longitud menor o igual a κ, en las que cada objeto es puro en su sucesor. Como se verá oportunamente, esta propiedad de las *κ-categorías* es válida en las categorías denominadas 'categorías proyectivas', las cuales se introducirán a continuación.

Si $\mathcal{M}$ es una *κ-categoría*, su *categoría proyectiva* asociada es la subcategoría completa $\mathcal{M}^p$ de la categoría de *R*-módulos, cuyos objetos son todos los sumandos directos de módulos en $\mathcal{M}$. Evidentemente, la categoría proyectiva de una *κ-categoría* $\mathcal{M}$ es cerrada bajo la formación de sumas directas, y es una supercategoría de $\mathcal{M}$. Ambos conceptos, el de *κ-categoría* y el de categoría proyectiva, son términos nuevos, empleados en este trabajo para propósitos de simplificación y comodidad.

Lemas

En esta breve sección se tomarán algunos resultados técnicos de la literatura especializada, los cuales serán útiles en la demostración del resultado principal. Los conceptos teóricos de la Teoría de Conjuntos pueden ser revisados en cualquier libro de texto de la materia, como por ejemplo, Jech (2003).

Lema 3. *Un módulo M pertenece a la κ-categoría $\mathcal{M}$ si existe una cadena ascendente, bien ordenada y continua*.

(2) $0 = N_0 < N_1 < \ldots < N_\rho < N_{\rho+1} < \ldots \ (\rho < \sigma)$
de submódulos de M, tal que:

a) cada N_ρ es un sumando directo de $N_{\rho+1}$,
b) cada módulo factor $N_{\rho+1}/N_\rho$ pertenece a $\mathcal{M}$, y
c) M es la unión de los módulos de la cadena (2).

Demostración. El módulo *M* es la suma directa de todos los módulos factores $N_{\rho+1}/N_\rho$. En consecuencia, *M* es un objeto de $\mathcal{M}$.

Recuerde que una *G*(*κ*)*-familia* de un módulo *M* es un conjunto $\mathcal{B}$ de submódulos de *M* con las siguientes propiedades:

1. 0 y *M* pertenecen a $\mathcal{B}$,
2. $\mathcal{B}$ es cerrado con respecto a la unión de cadenas ascendentes, y
3. para cada subconjunto *H* de *M* de cardinalidad a lo más κ y para cada miembro A_0 de $\mathcal{B}$ existe un miembro *A* de $\mathcal{B}$ que contiene tanto a *H* como a A_0, tal que A/A_0 tiene rango menor o igual a κ.

Todo módulo *M* en una *κ-categoría* $\mathcal{M}$ tiene una $G(\kappa)^*$-familia que consiste de submódulos puros que pertenecen a $\mathcal{M}$, a saber, la colección de sumas directas parciales en una descomposición fija de *M* como una suma directa de objetos de $\mathcal{M}$ de rango menor o igual a κ.

Los siguientes lemas son cruciales en este estudio. Remítase a la Sección XVI de Fuchs y Salce (2001) para las demostraciones.

Lema 4. *Sea M un R-módulo sin torsión, para el cual existe una cadena ascendente, bien ordenada y continua (1) de submódulos que satisfacen las siguientes propiedades:*

a) cada M_ν es puro en $M_{\nu+1}$,
b) cada M_ν posee una $G(\kappa)^*$-familia $\mathcal{B}_\nu$ que consiste de submódulos puros, y
c) M es la unión de los módulos de la cadena (1).

Entonces, existe una cadena ascendente, bien ordenada y continua

(3) $0 = A_0 < A_1 < \ldots < A_\alpha < \ldots \ (\alpha < \tau)$
de submódulos de *M*, tal que

a) para cada $\alpha<\tau$, A_α es puro en $A_{\alpha+1}$,
b) para cada $\alpha<\tau$ y cada $\nu<\kappa$, $A_\alpha \cap M_\nu$ pertenece a $\mathcal{B}_\nu$,
c) para cada $\alpha<\tau$, el módulo factor $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ tiene rango menor o igual a κ,
d) para cada $\alpha<\tau$ y cada $\nu<\kappa$, $(A_\alpha \cap M_{\nu+1})+(A_{\alpha+1} \cap M_\nu)$ pertenece a $\mathcal{B}_{\nu+1}$, y
e) M es la unión de los módulos de la cadena (3).

Siguiendo la notación de este lema, la colección bien ordenada bajo inclusión, de los módulos $A_\alpha+(A_{\alpha+1} \cap M_\nu)$, con $\alpha < \tau$ y $\nu < \kappa$, son los módulos N_ρ en el siguiente resultado.

Lema 5. *Sea M un R-módulo sin torsión, para el que existe una cadena ascendente, bien ordenada y continua (1) de submódulos, que satisfacen las* *propiedades (a), (b) y (c) del Lema 4. Entonces, existe una cadena ascendente, bien ordenada y continua* (2) *de submódulos de M, tal que:*

a) *cada* N_ρ *es puro en* $N_{\rho+1}$,
b) *cada módulo factor* $N_{\rho+1}/N_\rho$ *tiene rango menor o igual a* κ,
c) *cada módulo factor* $N_{\rho+1}/N_\rho$ *es isomorfo a un módulo factor A/B, donde A y B pertenecen a alguna familia* $\mathcal{B}_\nu$, *y B es submódulo de A, y*
d) *M es la unión de los módulos en la cadena* (2).

Demostración y consecuencias

Por comodidad, se reproduce a continuación el resultado principal de este trabajo.

Teorema. *Sea* $\mathcal{M}$ *una* κ*-categoría. Un módulo sin torsión M pertenece a* $\mathcal{M}$ *si existe una cadena ascendente, bien ordenada y continua.*

$0 = M_0 < M_1 < \ldots < M_\nu < \ldots$ $(\nu < \kappa)$
de submódulos de M, tales que:

a) *cada* M_ν *es puro en* $M_{\nu+1}$,
b) *cada* M_ν *pertenece a* $\mathcal{M}$ *, y*
c) *M es la unión de los módulos de la cadena* (1).

Demostración. Para cada $\nu<\kappa$, sea $\mathcal{B}_\nu$ la $G(\kappa)^*$-familia de todas las sumas directas parciales en una descomposición fija de M_ν como una suma directa de módulos en $\mathcal{M}$, de rango menor o igual a κ. Cada $\mathcal{B}_\nu$ es una familia de submódulos puros de M_ν. Por los Lemas 4 y 5 existe una cadena ascendente, bien ordenada y continua (3) de submódulos de M, que satisfacen las siguientes propiedades, para cada $\alpha<\tau$ y cada $\nu<\kappa$:

1. $A_\alpha \cap M_\nu$ pertenece a $\mathcal{B}_\nu$,
2. $(A_\alpha \cap M_{\nu+1})+(A_{\alpha+1} \cap M_\nu)$ pertenece a $\mathcal{B}_{\nu+1}$, y
3. $[A_\alpha+(A_{\alpha+1} \cap M_{\nu+1})]/[A_\alpha+(A_{\alpha+1} \cap M_\nu)]$ es isomorfo a $(A_{\alpha+1} \cap M_{\nu+1})/[(A_\alpha \cap M_{\nu+1})+(A_{\alpha+1} \cap M_\nu)]$.
4. *Adicionalmente,* M es la unión de los módulos A_α, con $\alpha<\tau$.

Como consecuencia, el módulo $A_\alpha+(A_{\alpha+1} \cap M_{\nu+1})$ es isomorfo a la suma directa de los módulos $A_\alpha+(A_{\alpha+1} \cap M_\nu)$ y $[A_\alpha+(A_{\alpha+1} \cap M_{\nu+1})]/[A_\alpha+(A_{\alpha+1} \cap M_\nu)]$. De la observación que precede al Lema 5, los módulos $A_\alpha+(A_{\alpha+1} \cap M_\nu)$, bien ordenados bajo la relación de inclusión, forman una cadena ascendente y continua (2) que satisface las propiedades del Lema 5. Particularmente, (2) es una cadena de submódulos de M que satisface las hipótesis del Lema 3, de donde se sigue la conclusión del teorema.

Nuestro siguiente resultado es válido si $\wp$ denota cualquiera de las siguientes categorías completas de *R*-módulos: módulos libres, módulos completamente factorizables, y módulos que son (salvo isomorfismo) sumas directas de ideales de *R*. Su demostración es una consecuencia inmediata del teorema anterior.

Corolario 7. *Un R-módulo P pertenece a* $\wp$ *si existe una sucesión ascendente*

(4) $\quad 0 = P_0 < P_1 < \ldots < P_n < \ldots$ $(n < \omega)$
de submódulos de P, tal que

a) *cada* P_n *es puro en* P_{n+1},
b) *cada* P_n *pertenece a* $\wp$ *, y*
c) *P es la unión de los módulos de la sucesión* (4).

Nuestro último resultado es una generalización de la versión del rango del Teorema de Kaplansky. Su demostración también es inmediata.

Corolario 8. *La categoría proyectiva asociada a una* κ*-categoría es una* κ*-categoría*.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El Teorema 1 de esta nota generaliza las versiones conocidas hasta el momento del Teorema de Hill para condiciones de proyectividad generalizada de módulos sobre dominios enteros. Evidentemente, la pregunta de si dicho resultado, así como los resultados particulares que motivaron este estudio –es decir, Fuchs y Macías Díaz (2010), Macías Díaz (2010, 2011a, 2011b)– pueden ser generalizados para módulos sobre anillos no necesariamente conmutativos, es un tema de investigación que queda abierto aún. La idea de explotar tal brecha de estudio es atractiva; sin embargo, el reto es por demás interesante, en vista de que las técnicas que se tendrían que emplear serían completamente distintas para el caso no conmutativo.

Finalmente, es interesante hacer notar que el resultado principal presentado en este trabajo, efectivamente, generaliza todos los trabajos anteriores. Particularmente, es interesante men-

INVESTIGACIÓN y CIENCIA
DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE AGUASCALIENTES
Número 53, (56-60) Septiembre-Diciembre 2011

cionar que el presente trabajo prescinde de hipótesis irrelevantes usadas, por ejemplo, en Fuchs y Macías Díaz (2010), Macías Díaz (2010, 2011b) y Rangaswamy (1998). Adicionalmente, el teorema principal de este trabajo es una generalización genuina del resultado principal propuesto en Macías Díaz (2011), en el cual se emplea una técnica similar para el estudio de la propiedad de proyectividad balanceada.

LITERATURA CITADA

- FUCHS, L., *Infinite Abelian Groups Vol* 2. Estados Unidos de América: Academic Press, 1973.
- FUCHS, L.; MACÍAS DÍAZ, J.E., On completely decomposable and separable modules over Prüfer domains. *Journal of Commutative Algebra*. 2: 159-176, 2010.
- FUCHS, L.; SALCE, L., *Modules over Non-Noetherian Domains*. Estados Unidos de América: American Mathematical Society, 2001.
- HILL, P., On the freeness of abelian groups. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 76: 1118-1120, 1970.
- JECH, T., *Set Theory*. Alemania: Springer-Verlag, 2003.
- KAPLANSKY, I., Projective modules. *Annals of Mathematics.* 68: 372-377, 1968.
- MACÍAS DÍAZ, J.E., A generalization of the Pontryagin-Hill theorems to projective modules over Prüfer domains. *Pacific Journal of Mathematics.* 246: 391-405, 2010.
- MACÍAS DÍAZ, J.E., On some criteria for the balanced-projectivity of modules over integral domains. *International Journal of Algebra*. 5: 57-64, 2011a.
- MACÍAS DÍAZ, J.E., On the union of ascending chains of direct sums of ideals of *h*-local Prüfer domains, *Algebra Colloquium*. 18: 1-8, 2011b.
- PONTRYAGIN, L., The theory of topological commutative groups. *Annals of Mathematics.* 35: 361-388, 1934.
- RANGASWAMY, K.M., A criterion for complete decomposability and Butler modules over valuation domains. *Journal of Algebra.* 205: 105-118, 1998.