NÉHÁNY SZEMÉLYES ÉS MATEMATIKAI EMLÉKEM KALMÁR LÁSZLÓRÓL

ERDŐS PÁL

Remélem, az olvasó megbocsátja, hogy néhány, Kalmárral kapcsolatos személyes élményemről fogok beszámolni, és egy meg nem jelent közös cikkünk tartalmát röviden ismertetem. Talán az olvasó azt is megbocsátja egy nagyon öreg embernek, kinek felgyógyulása (az élet gyígyíthatatlan betegségéből) talán már nincs oly messze, hogy néhány személyes emlékéről is beszámol. Sajnos, már nem vagyunk oly sokan a régi baráti körből, kikkel a harmincas évek elején együtt voltunk, s mire sor kerül, hogy rólam emlékezzenek meg, talán már senki se lesz, aki emlékezne.

1931 márciusában találtam egyszerű bizonyításomat Csebisev ismert tételére, miszerint minden $n>1$-re n és $2n$ között mindig van prímszám. Bizonyításom pontatlan fogalmazásom miatt nehezen volt érthető (pl. nem tettem különbséget $\frac{n}{k}$ és $\left[\frac{n}{k}\right]$ között — ami persze az olvasó helyzetét nem könnyítette meg). Bizonyításom különben úgy keletkezett, hogy néhány héttel korábban bebizonyítottam, hogy n és n^2 között mindig van prímszám és ezt a bizonyítást előadtam Fejér szemináriumában — első előadásom nem volt éppen könnyen érthető, de folytatva az előadásban kifejtett módszereket, bebizonyítottam Csebisev tételét.

1931 őszén Grünwald Géza és Lázár Dezső Szegedre utaztak, ugyanis ott felvették őket az egyetemre (talán a mai olvasó már nem tud az úgynevezett numerus claususról: a zsidó hallgatók arányszáma nem lehetett nagyobb 5%-nál). Kérésemre odaadták Kalmárnak rosszul és pontatlanul fogalmazott kéziratomat, aki nem sajnálta a nem csekély fáradságot, hogy a bizonyítást „tisztába rakja" és a ki nem mondott lemmákat megfogalmazta. Pl. tőle ered a következő lemma: Ha $p^{\alpha}\left|\binom{n}{k}\right.$, akkor $p^{\alpha}\leqq n$.

1931 novemberében Szegedre utaztam egy hétre — első matematikai utazásom, s első távollétem otthonról. Mondanom se kell, hogy Kalmár nagyon kedvesen fogadott. Megismerkedtem Rieszszel, Haarral, Kerékjártóval, Nagy Gyulával és Vincze Istvánnal — ha jól emlékszem, Nagy Bélával csak később találkoztam.

Engem a prímszámok már 1923 óta nagyon érdekelnek, amikor is édesapámtól (szüleim matematikusok voltak) megtanultam Euklidesz bizonyítását arra, hogy végtelen sok prímszám van és azt a tételt, hogy minden k-ra van k egymás után következő összetett szám. Akkor 1931—34 között sokat foglalkoztam a prímszámtétellel és számtani sorokban levő prímszámokkal. Erről szól disszertációm is, amelyet különben szintén Kalmár fogalmazott meg és írt le jól érthető formában.

1937-ben csináltuk említett, publikálatlan közös munkánkat. Általában akkoriban az volt a hiedelem számelméleti körökben, hogy elemi bizonyítás a prímszámtételre lehetetlen, de minden $\varepsilon>0$-ra konstruálható oly elemi bizonyítás Csebisev és Sylvester szellemében, mely kimutatná, hogy ha $x > x_0(\varepsilon)$, akkor

$$(1) \qquad (1-\varepsilon)\frac{x}{\log x} < \pi(x) < (1+\varepsilon)\frac{x}{\log x},$$

ahol $\pi(x)$ az x-nél kisebb prímszámok számát jelöli.

Ez utóbbi véleményt igazoltuk Kalmárral. Vizsgáltuk a következő szorzatot:

$$(2) \qquad \prod_{k=1}^{t}\left(\left[\frac{n}{k}\right]!\right)^{\mu(k)}\left(\left[n\sum_{k=1}^{t}\frac{\mu(k)}{k}\right]!\right)^{-1}.$$

A (2) alatti szorzat prímfaktorainak teljesen elemi vizsgálatával kimutattuk, hogy ha

$$(3) \qquad \left|\sum_{k=1}^{s}\mu(k)\right| < \eta s$$

elegendő sok s-re fennáll, akkor (1) következik — teljesen explicit és könnyen áttekinthető egyenlőtlenséget nyertünk (1)-re. Kalmár ide vonatkozó nekem írt levele biztosan megvan nekem, csak nem lenne egészen könnyű megtalálni, talán Kalmár hagyatékából valami előkerül. Ezzel célunkat elértük, mert a prímszámtételből tudjuk, hogy (3) minden $s > s_0(\eta)$-ra igaz. Tehát az a furcsa jelenség áll elő, hogy ha a prímszámtétel igaz, akkor tudunk rá elemi bizonyítást csinálni, de csak azért tudjuk, hogy (1)-re a bizonyítás minden $\varepsilon > 0$-ra sikerül, mert tudjuk, hogy a prímszámtétel igaz. Talán nem érdektelen, hogy ez a furcsa jelenség egy ilyen természetesen adódó problémánál előfordul.

Hogy történt, hogy e cikket nem publikáltuk? 1939 márciusában az amerikai matematikai társulat Duke Universityben tartott összejövetelén megismerkedtem Barkley Rosserrel; beszélgetésünk közben kiderült, hogy ő is megcsinálta, amit mi Kalmárral csináltunk, sőt, ő ugyanezt megcsinálta számtani sorokban előforduló prímszámpárokra is — azaz, ha $\pi(x; a, d)$ jelenti a $p < x$, $p \equiv a \pmod d$, $(a, d) = 1$ prímszámok számát, akkor elemi úton bebizonyítható, hogy

$$(1-\varepsilon)\frac{x}{\varphi(d)\log x} < \pi(x; a, d) < (1+\varepsilon)\frac{x}{\varphi(d)\log x},$$

de megint csak azért tudjuk, hogy a bizonyítás sikerül, mert tudjuk, hogy a számtani sorra való prímszámtétel igaz. Rosser bizonyítása meglehetősen hasonlított a mi bizonyításunkra. Rossernek ekkor már készen volt a bizonyítás kézirata, s így Kalmárral úgy határoztunk, hogy cikkünket nem publikáljuk. Rosser cikkében hivatkozott arra, amit mi csináltunk.

Rosser cikkét elküldte a Transactions of the Amer. Math. Soc.-nak. Minthogy ő főleg logikai vizsgálatai miatt volt ismert, a cikket egy logikusnak küldték el lektorálni — a lektor a cikket nem teljesen értette és sok apróbb dolgot kifogásolt. Rossert ez elkedvetlenítette s a cikket sohase publikálta, ami talán kár volt, mert úgy vettem észre, hogy e jelenség, mely itt természetes módon fordul elő, általában érdekelte a matematikusokat.

Marad még az a kérdés, hogy e Csebisev-módszer alkalmas lehetne-e a prímszámtétel elemi bizonyítására. Azaz, legyen $f(x)$ növekvő függvény és

$$(4) \qquad \sum_{k=1}^{x} f\left(\frac{x}{k}\right) = x\log x + cx + o(x).$$

Következik-e (4)-ből, hogy $f(x)=x+o(x)$? Ingham ezt bebizonyította, de bizonyítása nem elemi, és így az a kérdés, hogy vajon a prímszámtétel bizonyítható-e olyan elemi úton, mely nem használja Selberg formuláját, egyelőre nyitva marad.

1939 tavaszán Kalmár és én egymástól függetlenül észrevettük, hogy $\prod_{p \leqq n} p < 4^n$ indukcióval, egy sorban bizonyítható. E bizonyítás több könyvben megjelent, s így ezt itt nem kell részleteznem.

Kalmártól különösen az 1932—34-es időkből több hosszú és érdekes levelem van. Kalmár, aki néhány évvel idősebb volt, mint mi (Turán, Szekeres, Klein Eszter, Wachsberger Márta), úgy beszélt rólunk, hogy a „kicsinyek" — ez nem lekicsinylés volt, hanem a korkülönbségre vonatkozott, mely akkor jelentős volt.

Egy levelére jól emlékszem (a levelek mind megvannak, csak nem könnyű hozzájuk jutni). Még 1932-ben kérdeztem: jelölje A_n azon determináns maximális értékét, melynek minden eleme 0 vagy 1. Mekkora A_n? Szekeres és Turán is belekapcsolódott e kérdésekbe, s ők a maximumot a négyzetes középpel helyettesítették. Hamarosan észrevettem az ortogonális ± 1-es mátrixokkal való kapcsolatot, s akkor azt sejtettem, hogy ilyen mátrix csak $n=2^k$-ra van. Kalmár azonban egyik hosszú levelében megadta az ide vonatkozó irodalmat, s elmondta, hogy a helyes sejtés $n=4k$ — e gyönyörű kérdéssel sajnos nem boldogultam.

НЕКОТОРЫЕ ЛИЧНЫЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОСПОМИНАНИЯ О ЛАСЛО КАЛМАРЕ

ПАЛ ЕРДЁШ

MY PERSONAL AND MATHEMATICAL REMINISCENCES OF LÁSZLÓ KALMÁR

P. ERDŐS