

波动光学 MTF 计算误差估计 和新的计算方法

余 荣 辉

(杭州照相机机械研究所)

提 要

用数理统计方法,推导出波动光学 MTF 数值计算的误差估计式,它适用于对不同的数值计算方法进行自相关积分所求得的 MTF 值进行误差估计。本文根据波动光学的基本性质,提出了新的 MTF 数值计算方法,它具有较高的数值精度,更可观的计算量大大减少。

关键词: 光学传递函数; 调制传递函数; 数值计算; 误差估计。

一、引 言

用光学传递函数 OTF 来评价光学系统成像质量,已广泛地应用于光学设计之中。由于光学传递函数计算复杂,已有许多文献对不同的计算方法进行了研究和讨论^[1~4]。由于方法不同得到了不同的计算结果^[5,6]。而产生误差的原因有两个:(1)光学传递函数公式本身的理论精度问题^[4,7](本文不作讨论)(2)由数值计算所产生的误差。

对所采用的数值计算方法得到的结果进行误差估计,以确保其计算结果的精度和考核方法的好坏是必要的。并用它验证本文提供的新的方法具有较高数值精度。在确保精度的前提下提高运算速度正是新方法的特点。

二、MTF 数值计算误差的估计

光学传递函数计算的经典公式为

$$D\left(\frac{\sigma}{\lambda R_0}, \frac{\tau}{\lambda R_0}\right) = \frac{1}{S^*} \iint_{S^*} \exp\left\{ik\left[W^*\left(y + \frac{\sigma}{2}, z + \frac{\tau}{2}\right) - W^*\left(y - \frac{\sigma}{2}, z - \frac{\tau}{2}\right)\right]\right\} dy dz, \quad (1)$$

其中 S^* 光瞳面积 S'' 光瞳错位 (σ, τ) 后的重叠区域; W^* 波像差函数, R_0 参考光瞳球面半径, λ 为波长; $k = (2\pi/\lambda)$ 。从(1)式中可看出调制传递函数计算误差主要产生于:

- (1) 通过数值逼近方法得到的波像差函数 $W(y, z)$ 有误差;
- (2) 积分区域即渐晕光瞳形状描述产生误差;
- (3) 自相失积分所用的数值方法产生误差。

1. 波像差函数误差的影响

用 n 样条点光线可求得逼近的波像差函数 W 及其所产生的波像差误差函数 $\delta(y, z)$ 分别为

$$W = W(y, z), \quad (1)$$

$$\delta(y, z) = W(y, z) - W^*(y, z), \quad (2)$$

式中 W^* 是实际波像差函数。为考察 W 对 W^* 的逼近程度, 可加密选择 N 条均匀分布于有效光瞳内的光线, 进行计算后求得每条光线的波像差误差值

$$\delta_i = \delta(y_i, z_i) = W(y_i, z_i) - W^*(y_i, z_i), \quad (i=1, 2 \dots N). \quad (3)$$

设误差的数学期望值为 a , 当 N 充分大时, 根据概率论中辛钦大数定理^[8], 其平均值 $\bar{\delta}$ 以概率 P 收敛于 a , 即

$$\bar{\delta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_i \xrightarrow{P} a. \quad (4)$$

以 $|\delta(y, z) - \bar{\delta}|$ 作为被积函数, 按蒙特卡洛求积方法^[9], 可得

$$\iint_S |\delta(y, z) - \bar{\delta}| dy dz \approx S \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\delta_i - \bar{\delta}|. \quad (5)$$

这样, 由 W 所产生的调制传递函数值误差估计式可由下面的推导得出

$$\begin{aligned} |\text{MTF} - \text{MTF}^*| &= \frac{1}{S} \left| \iint_S \exp(ik\Delta W) dy dz - \iint_S \exp(ik\Delta W^*) dy dz \right| \\ &\leq \frac{1}{S} \iint_S |\exp[ik(\Delta W - \Delta W^*)] - 1| dy dz, \\ \Delta W &= W\left(y + \frac{\sigma}{2}, z + \frac{\tau}{2}\right) - W\left(y - \frac{\sigma}{2}, z - \frac{\tau}{2}\right), \\ \Delta W^* &= W^*\left(y + \frac{\sigma}{2}, z + \frac{\tau}{2}\right) - W^*\left(y - \frac{\sigma}{2}, z - \frac{\tau}{2}\right), \end{aligned} \quad (6)$$

令 $\xi = k(\Delta W - \Delta W^*) = k(\delta^+ - \delta^-)$, 则

$$\begin{aligned} |\text{MTF} - \text{MTF}^*| &\leq \frac{1}{S} \iint_S |\exp(i\xi) - 1| dy dz \\ &= \frac{2}{S} \iint_S \left| \sin \frac{\xi}{2} \right| dy dz \leq \frac{k}{S} \iint_S |\delta^+ - \delta^-| dy dz \\ &\leq \frac{k}{S} \iint_S |\delta^+ - \bar{\delta}| - |\delta^- - \bar{\delta}| dy dz \\ &\leq \frac{2k}{S} \iint_S |\delta - \bar{\delta}| dy dz. \end{aligned} \quad (7)$$

将(5)式代入, 得估计式

$$|\text{MTF} - \text{MTF}^*| \leq 2k \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\delta_i - \bar{\delta}| = \varepsilon_1. \quad (8)$$

(8)式可判断波像差函数逼近方法是否合理, 以及可能产生的最大误差。

2. 光瞳形状误差的影响

如图 1 所示, s 和 s^* 分别表示逼近的光瞳形状和实际光瞳形状。设 s 和 s^* 的面积为 S

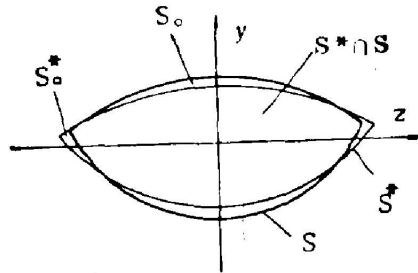


Fig. 1 Approaching to the optical pupil

和 S^* , 其相对误差为 ε_0 , 则有

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{S^*} &= \frac{1 + \varepsilon_0}{S}, \\ S &= s^* \cap s + S_0, \\ S^* &= s^* \cap s + S_0^* = S + S_0^* - S_0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

于是得到

$$\begin{aligned} \text{MTF}^* &= \frac{1}{S^*} \left| \iint_{s^*} \exp(ik\Delta W^*) dy dz \right| \\ &= \frac{1}{S'} \left| \iint_{s'} + \iint_{s''} - \iint_{s_0} \exp(ik\Delta W^*) dy dz \right| \\ &\quad + \frac{\varepsilon_0}{S'} \left| \iint_{s_0^*} \exp(ik\Delta W^*) dy dz \right|, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{MTF} = \frac{1}{S} \left| \iint_{s'} \exp(ik\Delta W) dy dz \right|, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} |\text{MTF} - \text{MTF}^*| &\leq \frac{1}{S} \left| \iint_{s'} \exp(ik\Delta W) - \exp(ik\Delta W^*) dy dz \right| \\ &\quad + \frac{|\varepsilon_0|}{S} \left| \iint_{s_0^*} \exp(ik\Delta W^*) dy dz \right| + \frac{1}{S} \left| \iint_{s_0^*} \right. \\ &\quad \left. - \iint_{s_0} \exp(ik\Delta W^*) dy dz \right| \\ &= I_1 + I_2 + I_3, \\ I_2 &\leq |\varepsilon_0| = \varepsilon_2, \\ I_3 &\leq \frac{1}{S} \left(\iint_{s_0^*} dy dz + \iint_{s_0} dy dz \right) \leq \frac{S_0^* + S_0}{S} = \varepsilon_3, \end{aligned} \quad (12)$$

式中 I_1 即为上节中所讲的波象差所产生的误差。由 l 条边界光线所求得的光瞳形状 S , 对 MTF 精度的影响可用 ε_2 和 ε_3 来估计。按上节所述方法, 通过用 i 条边光线加密插值, 不难求出 ε_2 和 ε_3 。

3. 数值积分误差分析

二重数值积分计算误差估计是一个复杂问题。对所采用的积分方法应有这样的要求: 在原有插值点的基础上, 通过加密插值点的方法积分值收敛, 原积分值与收敛积分值之差 ε_4 , 就是由积分引起的误差。

4. MTF 数值计算误差估计的讨论

综合上述,最终可给出 MTF 计算误差的估计式

$$|\text{MTF} - \text{MTF}^*| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = \varepsilon, \quad (13)$$

式中均 ε_i 可通过增加插值点的方法求得具体值。从推导过程中可以看出, ε 是可能产生的最大误差,且与频率无关。一个合理的,高精度的数值计算方法,对于各种类型的光学系统计算中都应有一个较小的 ε 值。

三、数值计算新方法

1. 通过波阵面逼近求波像差函数

如图 2 所示,由物点发出的光通过光学系统后,在像方光瞳参考球面 S 附近可形成一个等光程 r_0 的波阵面 S^* 。

从基尔霍夫衍射积分公式^[3,4]

$$u(P') = \iint_{S^*} \frac{ic}{\lambda r_0 r} \exp[ik(r_0 + r)] (1 + \cos x) dS^*, \quad (14)$$

可以看出,像面上任一点 P' 的复合振幅是由 S^* 所确定的。式中 c 为常数, r 是 S^* 上任一点 M 到 P' 的距离, x 是 S^* 上 M 点的法向与 $\overrightarrow{MP'}$ 的夹角。

由(14)式通过近似可导出公式(1)。而 $W^* = R^* - R_0$, 也就是说 W^* 可由 S^* 求得。

设 S^* 满足方程 $F_{S^*}(x, y, z) = 0$ 。根据波动光学中的一个基本性质,通过 M 点的几何光线的方向余弦 $\alpha_M(\alpha, \beta, \nu)_M^T$ 与 S^* 上任一点 $M = (x_m, y_m, z_m)$ 的法向矢量 N_M 重合,即

$$\left. \begin{aligned} \alpha_M &= k_M N_M, \\ N_M &= \left(\frac{\partial F_{S^*}}{\partial x}, \frac{\partial F_{S^*}}{\partial y}, \frac{\partial F_{S^*}}{\partial z} \right)_M^T, \quad k_M = \pm |N_M|^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

S^* 用可表达的曲面 S' 来逼近,不妨设 S' 满足

$$F_{S'}(x, y, z) = f(x) + g(y, z) = 0, \quad (16)$$

式中 $g(y, z)$ 为一个有 K 个系数的二元多项式, $f(x)$ 为一个给定的初等函数。这样曲面 S' 的法向 N' 可表示成

$$N' = \left(\frac{df(x)}{dx}, \frac{\partial g(y, z)}{\partial y}, \frac{\partial g(y, z)}{\partial z} \right)^T. \quad (17)$$

通过计算等光程 r_0 的 n 条光线,可得已知条件

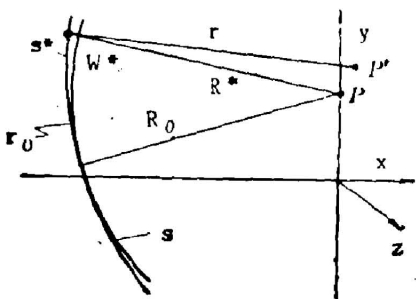


Fig. 2 Optical imaging

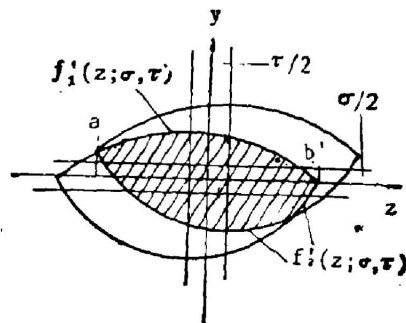


Fig. 3 Integrating range

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{X}_i &= (x_i, y_i, z_i)^T, \\ \alpha_i &= (\alpha_i, \beta_i, \nu_i)^T. \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (18)$$

从而建立下列方程组

$$\left. \begin{aligned} f(x_i) &= -g(y_i, z_i), \quad k_i \alpha_i = f'(x_i), \\ k_i \beta_i &= g'_y(y_i, z_i), \quad k_i \nu_i = g'_z(y_i, z_i). \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (19)$$

解出

$$\left. \begin{aligned} f(x_i) &= -g(y_i, z_i), \\ f'(x_i) \beta_i / \alpha_i &= g'_y(y_i, z_i), \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ f'(x_i) \nu_i / \alpha_i &= g'_z(y_i, z_i) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

用最小二乘法, 可得到 g 的 K 个系数, 求得表达式。

按通常方法, 一条光线只建立一个方程, 这里建立了三个方程(20)式, 这样新方法只要用 $1/3'$ 左右光线样点, 就能确定相同个数的多项式系数, 从而大大地减少了计算量。

应注意到这里所求得的 S 是与参考球半径 R_0 无关的表达式。若像点 P 的坐标为 $(x_0, y_0, 0)$, 则 S' 上的点 (x, y, z) (其中 $x = f^{-1}[-g(y, z)]$), 关于 P 点的距离 $R(y, z)$ 及其波像差函数 $W(y, z)$ 分别为

$$\left. \begin{aligned} R(y, z) &= \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}, \\ W(y, z) &= R(y, z) - R_0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

可见在有多个离焦情况下, 不用再求解系数矩阵, 计算量的减少是明显的。

2. 用上下椭圆法逼近光瞳

对于有 NR 个面的光学系统, 若轴上拦光产生在第 I 面上, 则轴外光瞳形状上边缘线拦光由 $I \sim NR$ 面产生, 下边缘线由 $1 \sim I$ 面产生。将 l 条边光线中由 $I \sim NR$ 产生拦光的光线逼近求得上椭圆 $y = f_1(z)$, 同理求得下椭圆 $y = f_2(z)$ 。

通常的最适椭圆方法^[2], 在自相关积分时有其优越的一面, 但上下椭圆法具有较高的精度, 并能方便地解出交错后的积分区域。

3. 二重高斯-勒让德积分公式

在固定插值节点数 m 的情况下, 不等距的高斯型求积公式具有 $(2m-1)$ 的代数精度, 比等距插值积分优越。

如图 3 所示, 由上节给出的上下椭圆方程可解出错位 (σ, τ) 后的积分区域 z 方向的 a, b 点及上曲线 $y = f'_1(z; \sigma, \tau)$ 和下曲线

$$y = f'_2(z; \sigma, \tau)。$$

这样 MTF 值可由下式得到

$$\left. \begin{aligned} \text{MTF} &= \frac{b-a}{S} \left| \sum_{k=1}^m A_k [f'_1(z_k; \sigma, \tau) - f'_2(z_k; \sigma, \tau)] \times \sum_{j=1}^m B_j \right. \\ &\quad \times \exp \left\{ iK \left[W \left(y_{kj} + \frac{\sigma}{2}, z_k + \frac{\tau}{2} \right) - W \left(y_{kj} - \frac{\sigma}{2}, z_k - \frac{\tau}{2} \right) \right] \right\} \left. \right|, \\ z_k &= \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x_k, \\ y_{kj} &= \frac{f'_1(z_k; \sigma, \tau) + f'_2(z_k; \sigma, \tau)}{2} + \frac{f'_1(z_k; \sigma, \tau) - f'_2(z_k; \sigma, \tau)}{2} x_j, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

式中 A_k, B_j 均为权系数, (A_k, x_k) 和 (B_j, x_j) 可在高斯-勒让德求积公式系数和节点表中得到。

四、实例计算和数据分析

为了便于对照选择了文献[5]中的五组元 24" f/6 镜头作为计算实例。按上述的方法, 样点光线轴上 $n=4$, 轴外 $n=21$ (其中包括边缘 $l=11$), 取

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x, \\ g(y, z) &= \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^{10-2i} c_{ij} y^i z^{2j}, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

(23)式中 g 共有系数 $K=36$ 。解出系数 c_{ij} 后, 在瞳内加密插值点 $N=173$ 考查波像差逼近程度(见表 1)。

边缘用 11 条光线, 每条光线在叠代 1~4 次后, 可达到这样的精度

$$\left| \frac{r-r^*}{r^*} \right| < 10^{-7}, \quad (24)$$

式中 r^* 为拦光面的孔径半径, r 为逼近点到光轴的距离。由上下椭圆方法逼近光瞳的情况见表 2。

Table 1 The error analyzing for wave aberration

field of vision	$\bar{\delta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_i$	$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_i - \bar{\delta} $	$\text{Max}_{1 \leq i \leq N} \delta_i - \bar{\delta} $	$2K \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_i - \bar{\delta} $
0°	0.196×10^{-8}	0.285×10^{-8}	0.908×10^{-8}	0.0000608
10.4°	0.453×10^{-9}	0.158×10^{-8}	0.589×10^{-8}	0.0000337
14.7°	0.128×10^{-9}	0.992×10^{-9}	0.446×10^{-8}	0.0000212

Table 2 The error analyzing for pupil shape

field of vision	$\frac{ \delta - S^* }{S}$	$\frac{S_0 + S_0^*}{R}$	$e_2 + e_3$
10.4°	0.0000122	0.000182	0.0001942
14.7°	0.000296	0.000796	0.001092

表 3 考查了高斯积分的收敛情况。选择插值节点 12×12 , 16×16 , 20×20 , 24×24 , 列出了各插值方式与 24×24 方式结果的最大误差, (程序一般计算固定为 16×16 。根据对称性实际计算节点数为 6×6 , 8×8 , 10×10 , 12×12)。

新方法结果与文献[5]中美国罗彻斯特大学的 TA 程序计算结果作比较, 列于表 4。由表 4, 可见新方法的结果与 TA 结果接近, 这说明方法是可行的。根据第二节的误差估计式, 从表 1、表 2、表 3 的数据分析, 新方法在数值计算过程中只产生了较小的误差, 可确保 MTF 值具有 3 位精度。

Table 3 The convergence analyzing for Gauss integrating

direction of vision field	$ MTF_{12} - MTF_{24} $	$ MTF_{16} - MTF_{24} $	$ MTF_{10} - MTF_{24} $
0°	≤ 0.0006	≤ 0.0001	0
10.4° meridian	≤ 0.0001	≤ 0.0001	0
10.4° sagitta of arc	≤ 0.0008	≤ 0.0003	≤ 0.0001
14.7° meridian	0	0	0
14.7° sagitta of arc	≤ 0.0017	≤ 0.0004	≤ 0.0001

Table 4 The calculation results and comparison of the MTF at 0, 10.4° and 14.7° field for the five-element lens

frequency l/mm	0° field of vision		10.4° field of vision			
			meridian		sagitta	
	MTF_{24}	$MTF_{24} - TA$	MTF_{24}	$MTF_{24} - TA$	MTF_{24}	$MTF_{24} - TA$
10	0.8919	0.0019	0.8883	0.0083	0.7515	0.0115
20	0.7281	0.0181	0.7219	-0.0081	0.3224	-0.0276
30	0.5526	0.0326	0.5675	-0.0025	0.0429	-0.0171
40	0.3989	0.0189	0.4525	0.0025	0.0024	0.0024
50	0.2873	0.0073	0.3728	0.0028	0.0607	0.0007
60	0.2201	0.0001	0.3163	-0.0037	0.1146	0.0046
70	0.1905	-0.0095	0.2727	0.0027	0.1307	0.0007
80	0.1894	-0.0106	0.2352	-0.0048	0.1241	-0.0059
90	0.2055	0.0055	0.1986	-0.0014	0.1112	0.0012
100	0.2262	0.0062	0.1605	0.0005	0.1000	0

frequency l/m	14.7° field of vision			
	meridian		sagitta of arc	
	MTF_{24}	$MTF_{24} - TA$	MTF_{24}	$MTF_{24} - TA$
10	0.9042	0.0242	0.7462	0.0062
20	0.7930	0.0330	0.5756	0.0056
30	0.6918	0.0418	0.4309	0.0109
40	0.6065	0.0365	0.3010	0.0010
50	0.5345	0.0345	0.1968	0.0068
60	0.4712	0.0412	0.1248	-0.0052
70	0.4132	0.0332	0.0837	0.0037
80	0.3580	0.0280	0.0656	0.0056
90	0.3044	0.0244	0.0601	0.0001
100	0.2526	0.0226	0.0593	-0.0007

五、结 束 语

(1) 关于最佳离焦位置,本程序也作了处理,限于篇幅不在此叙述。

(2) 成像点 P 的选择对子午的 MTF 值也会产生影响, 本程序所选择的像点是通过参加计算的色光所有插值点进行最佳选择的点。

(3) 在同一计算机(日本日立 M-240D)上, 新的程序与原有的 OTF 计算程序在运算时间上作了比较。在对文献[5]中五组元结构进行计算中, 前者只用了后者的三分之一计算时间。

参 考 文 献

- [1] J. Macdonald; *Opt. Acta*, 1971, 18, No. 4 (Aug), 269~290.
- [2] 王 琦:《光学学报》, 1982, 2, No. 2 (Jan), 28~37.
- [3] M. J. Kidger; *Opt. Acta*, 1978, 25, No. 8 (Aug), 665~680.
- [4] Y. Matsui, S. Minami, *et al.*; *Opt. Acta*, 1976, Vol. 23, No. 5 (Oct), 389~411.
- [5] R. E. Hopkins, D. Dutton; *AD 71 0.633*.
- [6] J. Macdonald; *Proceeding of SPIE*, 1974, Vol. 46, 45~48.
- [7] 王 琦:《光学学报》, 1982, 2, No. 4 (Jul), 301~306.
- [8] 复旦大学:《概率论》, (吴立德, 人民教育出版社, 1979), 272~274.

The error estimation for MTF calculation in wave optics and a new computation method

YU RONGHUI

(Hangzhou Photographic Machinery Research Institute)

(Received 17 April 1987; revised 19 June 1987)

Abstract

The error estimation formula for numerical calculation of wave optics MTF has been derived with mathematical statistics method. It is suitable for error estimation of MTF values obtained from different numerical computational methods, which are used for the self-correlation integrating. Based on the fundamental property of wave optics, a new numerical computational method for MTF was developed. This method not only has higher numerical accuracy but also can reduce the computational amount in great deal.

Key words: optical transfer function; modulation transfer function; numerical calculation; error estimation.