



# Aplicación de la integración numérica para obtener la rigidez elástica de barras con sección variable

F. Monroy-Miranda  
*Facultad de Ingeniería, UNAM*  
E-mail: [fmonroy@prodigy.net.mx](mailto:fmonroy@prodigy.net.mx)

(recibido: septiembre de 2001; aceptado: mayo de 2002)

## Resumen

El análisis estructural de sistemas de barras, en donde algunas de ellas presentan sección transversal variable, ha merecido cierta atención por parte de los especialistas en la materia. Desde hace varias décadas, pocos son los profesionales que han dedicado parte de su esfuerzo en la representación analítica del modelado de miembros de sección variable; a lo sumo, se han propuesto métodos prácticos que en la mayoría de los casos resultan ser bastante burdos, debido a las simplificaciones que han involucrado, quizá, con la única justificación de poder utilizar los programas de computo comúnmente conocidos, los cuales incluyen mayormente en sus librerías elementos de sección constante.

En la actualidad, sólo unos cuantos programas comerciales incluyen el tratamiento de barras de sección variable, pese a que, desde hace varios años, existe una formulación adecuada basada en la teoría de vigas, con la aplicación del método de las flexibilidades, para obtener los coeficientes de rigidez de barras elásticas tridimensionales de sección variable, y el método de la viga conjugada, para obtener los giros de fijación y momentos de empotramiento. En dicha formulación se establece la necesidad de realizar la integración algebraica a lo largo de toda la barra, la cual puede resultar bastante complicada o tediosa cuando la sección transversal de la misma presenta variaciones en sus dimensiones.

A partir de los coeficientes de flexibilidad, se pueden obtener los coeficientes de rigidez, junto con los momentos de empotramiento en de barras de sección variable, lo que permite aplicar la integración numérica.

En este artículo se presentan los resultados de aplicar el método de las flexibilidades para obtener esos coeficientes de flexibilidad, y la aplicación de la regla de Simpson de 1/3, para la evaluación numérica de las integrales. Se desarrolló un programa de computadora que incorpora la integración numérica para obtener, tanto los coeficientes de flexibilidad, como las rigideces elásticas y momentos de empotramiento de barras tridimensionales de sección variable. Con el programa se resolvieron varios ejemplos, cuyos resultados se compararon con una solución publicada que utiliza otras herramientas y criterios de uso común en el medio del análisis estructural.

Descriptores: integración numérica, rigidez elástica, sección variable, flexibilidad, momentos de empotramiento, análisis tridimensional, barra, análisis estructural.

### Abstract

*The Analyze of variable cross-section bars systems has deserved certain attention for the specialists in this matter.*

*Since several years ago, there has been a few professionals who have been done some effort about the analytic representation of the variable cross-section members modeling. Only they have proposed and they have used practical methods that sometimes are quite coarse due to the simplifications they have involved, this, maybe for having a justification for using some of the computer programs that are very well-known, which include constant cross-section bars in their bookstores.*

*Nowadays, there are only a few commercial programs which have the treatment of cases of variable cross-section bars, even though, since many years ago, an appropriate formulation has been presented based on the beams theory, with the application of flexibilities method for obtaining rigidity coefficients of three-dimensional elastic variable cross-section bars, and that conjugated beam for obtaining fixation turns and fixed-end moments.*

*In this formulation it is established the need of carrying out the algebraic integration through out the whole bar, this can be quite complicated or tedious if the cross-section of the bar has some variations in its dimensions.*

*Taking the flexibility coefficients, and the rigidity coefficients with the fixed-end moments in variable cross-section bars, it could be an example for the numeric integration application.*

*Because of this, in this paper I show, in summary, the results of the flexibilities method applied for obtaining those flexibility coefficients, and the application of Simpson rule (1/3) for the numeric evaluation of the integral.*

*With practical purposes I developed a computer program that incorporates the numeric integration for obtaining, the flexibility coefficients, the elastic rigidities and fixed-end moments of three-dimensional variable cross-section bars, all of those are very important and useful for an Structural Analysis for this kind of bars, using this program we were able to solve some examples whose results were compared with other solutions that used another criteria and tools, there are commonly used in these researches. Some of these examples are included in this report.*

*Keywords: variable cross-section, flexibilities method, flexibility coefficients, rigidity coefficients, three-dimensional variable cross-section bars, conjugated beam, fixation turns, fixed-end moments, numeric integration, Simpson rule (1/3).*

### Introducción

Han aparecido varios intentos por resolver, con cierto grado de aproximación, el análisis de barras de sección variable (Figura 1). Uno de ellos, quizá el más conocido en el medio, generó las tablas de rigideces y momentos de empotramiento de elementos de sección variable (Portland Cement Association, 1958). También existe, en numerosos textos sobre análisis estructural, la solución de algunos tipos de problemas, en donde intervienen barras de sección transversal variable; sin embargo, algunos investigadores proponen métodos bastante aproximados, por ejemplo, dividir a la

barra de sección variable en sólo unos cuantos segmentos prismáticos, y utilizar las propiedades geométricas medias de cada segmento para poder emplear un programa de análisis estructural que únicamente permita incluir elementos elásticos prismáticos, lo que resulta ser una tendencia muy generalizada.

En la mayoría de las formulaciones, las simplificaciones utilizadas (no considerar deformación axial, ni por cortante) pueden conducir a resultados que incluyen errores significativos en la determinación de la rigidez, como lo señalan Mezaini y colaboradores (1991), Tena (1997) y otros.



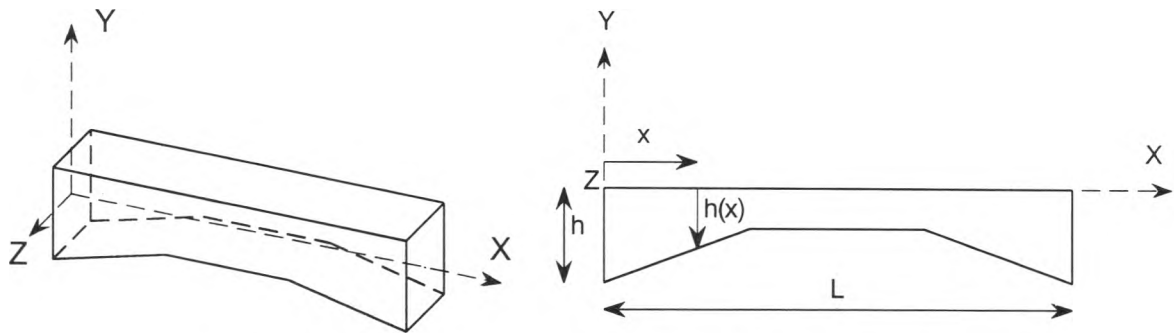


Figura 1. Barra con sección variable (cartelas en sus extremos)

Varios son los autores que proponen procedimientos teóricos bien fundamentados, por ejemplo, Just (1977), Shreyer (1978), Medwadowski (1984), Brown (1984), Yang y Yau (1987), Takabatake (1990), Rajasekaran (1994) y en nuestro país, parece ser que desde la década de los 70's, el Ing. Julio E. Damy Ríos (q.e.p.d.) incluyó en su cátedra de análisis estructural, tanto a nivel licenciatura como en el posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, los fundamentos teóricos para el análisis de barras de sección variable.

Aunque existe teoría bien fundamentada para la solución de este tipo de problemas, todavía no se incorpora totalmente en la mayoría de los programas comerciales para análisis y diseño estructural, ya que algunos de ellos sólo manejan unos cuantos casos de barras con sección variable, y otros permiten introducir como datos los coeficientes de rigidez de las barras. Parece ser que las únicas opciones viables de esos programas para el usuario, son discretizar a la barra con sección variable en un conjunto de elementos prismáticos, o utilizar los factores proporcionados en las tablas de la PCA, o bien, recurrir a tablas y soluciones cerradas que propone Tena (1997) para algunos casos de sección variable. Sin embargo, esta última opción (Tena y Zaldo, 1994); (Tena, 1997) tiene el inconveniente de que las soluciones propuestas, incluyan sección transversal variable cuadrada, rectangular o circular; las tablas y gráficas sólo presentan secciones T e I acarteladas (con variación lineal), y se obtienen sólo las rigideces debidas a flexión, sin presentar

soluciones para la rigidez torsional ni axial, ni las rigideces angulares alrededor del eje perpendicular al eje principal de flexión. Todas ellas son necesarias para realizar análisis tridimensional y, respecto a los momentos de empotramiento, sólo los presenta para carga concentrada y uniforme en todo el claro.

El propósito de este trabajo, es presentar la aplicación de reglas de integración numérica para evaluar los elementos de las matrices elásticas de rigidez bidimensionales y tridimensionales de barras de sección variable. Además, se desarrolló un programa de computadora que permite evaluar esos elementos, para algunos tipos de variación de propiedades y formas típicas de la sección transversal de la barra.

### Matrices de rigidez y momentos de empotramiento de barras con sección transversal variable

Desde hace ya varios años, Damy (1982), basándose en la teoría clásica de vigas, aplicó el método de las flexibilidades para obtener los coeficientes de flexibilidad de elementos de sección variable, que resultó ser un formato sencillo para su evaluación directa o para su programación por computadora. Tena (1997) hizo una presentación completa del método, en donde con pequeños cambios los resultados sirven como base a este trabajo y se reproducen a continuación.

En la figura 2 se muestra el significado de algunos términos de la matriz de flexibilidad para

elementos barra bidimensionales. Las expresiones (2) a (5) permiten calcular esos términos.

La matriz de flexibilidades  $[f]$  queda expresada como:

$$[f] = \begin{bmatrix} f_{11} & 0 & 0 \\ 0 & f_{22} & f_{23} \\ 0 & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$f_{11} = \int_0^L \frac{dx}{EA(x)} \quad (2)$$

$$f_{22} = \int_0^L \frac{x^2 dx}{EI_z(x)} + \int_0^L \frac{dx}{GA_{cy}(x)} \quad (3)$$

$$f_{23} = \int_0^L \frac{xdx}{EI_z(x)} = f_{32} \quad (4)$$

$$f_{33} = \int_0^L \frac{dx}{EI_z(x)} \quad (5)$$

En la figura 3 se muestra el significado de algunos términos de la matriz de flexibilidad para elementos barra tridimensional, y las expresiones (7) a (16) permiten evaluar los términos involucrados.

$$[f] = \begin{bmatrix} f_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_{22} & 0 & 0 & 0 & f_{26} \\ 0 & 0 & f_{33} & 0 & -f_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f_{53} & 0 & f_{55} & 0 \\ 0 & f_{62} & 0 & 0 & 0 & f_{66} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$f_{11} = \int_0^L \frac{dx}{EA(x)} \quad (7)$$

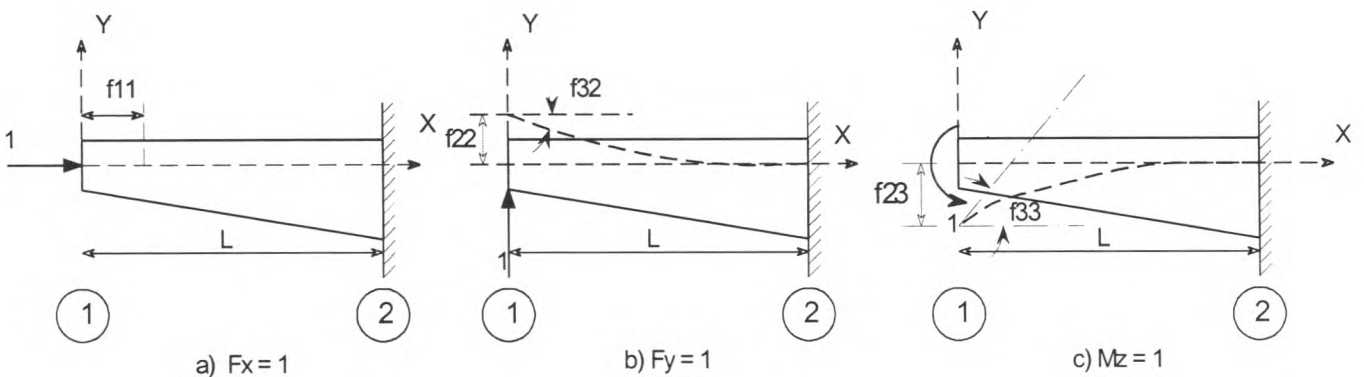


Figura 2. Términos de la matriz de flexibilidad de una barra bidimensional

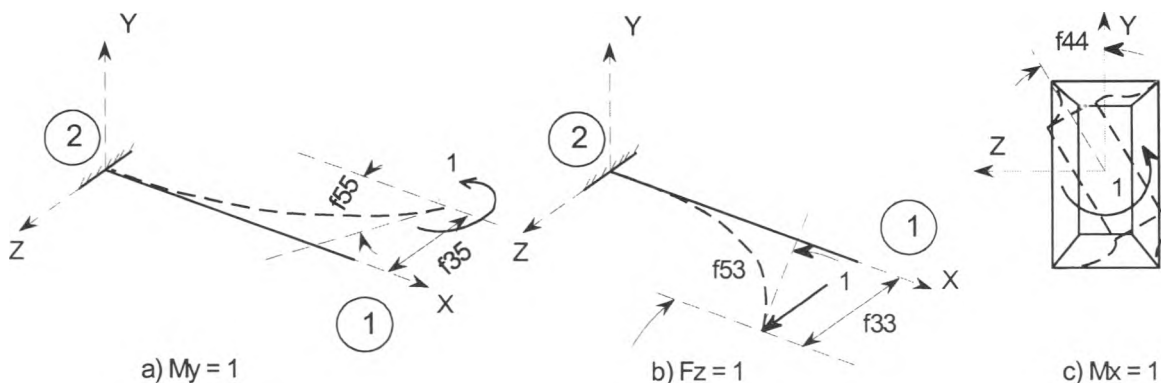


Figura 3. Algunos términos de la matriz de flexibilidad de una barra tridimensional

$$f_{22} = \int_0^L \frac{x^2 dx}{EI_z(x)} + \int_0^L \frac{dx}{GA_{cy}(x)} \quad (8)$$

ecuación anterior se expresan de la siguiente manera:

$$f_{26} = \int_0^L \frac{x dx}{EI_z(x)} \quad (9)$$

$$[k_{11}] = \begin{bmatrix} r_{ax} & 0 & 0 \\ 0 & r_{aa} & r_{ab} \\ 0 & r_{ab} & r_{11} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$f_{33} = \int_0^L \frac{x^2 dx}{EI_y(x)} + \int_0^L \frac{dx}{GA_{cz}(x)} \quad (10)$$

$$[k_{12}] = \begin{bmatrix} -r_{ax} & 0 & 0 \\ 0 & -r_{aa} & r_{ba} \\ 0 & -r_{ab} & r_{12} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$f_{35} = \int_0^L \frac{x dx}{EI_y(x)} \quad (11)$$

$$[k_{22}] = \begin{bmatrix} r_{ax} & 0 & 0 \\ 0 & r_{aa} & -r_{ba} \\ 0 & -r_{ab} & r_{22} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$f_{44} = \int_0^L \frac{dx}{GJ(x)} \quad (12)$$

$$[k_{21}] = [k_{12}]^T \quad (21)$$

$$f_{55} = \int_0^L \frac{dx}{EI_y(x)} \quad (13)$$

Donde, para la evaluación de los elementos de las ecuaciones anteriores se pueden utilizar:

$$f_{66} = \int_0^L \frac{dx}{EI_z(x)} \quad (14)$$

$$r_{ax} = \frac{1}{f_{11}} \quad (22)$$

$$f_{53} = f_{35} \quad (15)$$

$$Det = f_{22}f_{33} - f_{23}^2 \quad (23)$$

$$f_{62} = f_{26} \quad (16)$$

$$r_{11} = \frac{f_{22}}{Det} \quad (24)$$

Una vez evaluada la matriz de flexibilidades, y aprovechando su porosidad, la de rigidez se puede obtener al invertir las submatrices de aquella. Para un elemento barra de dos extremos (nudos 1 y 2), la matriz de rigidez global referida al sistema de coordenadas locales ( $x$ ,  $y$  y  $z$ ) del elemento se expresa como:

$$[K] = \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$r_{12} = \frac{f_{23}L - f_{22}}{Det} \quad (25)$$

$$r_{22} = \frac{f_{33}L^2 - 2f_{23}L + f_{22}}{Det} \quad (26)$$

Concretamente, para un problema en dos dimensiones, las submatrices de rigidez de la

$$r_{aa} = \frac{r_{11}r_{22} + 2r_{12}}{L^2} \quad (27)$$



$$r_{ab} = \frac{r_{11} + r_{12}}{L} \quad (28)$$

$$r_{ba} = \frac{r_{22} + r_{12}}{L} \quad (29)$$

Ahora, para el caso tridimensional, las submatrices de rigidez de la ecuación 17 contienen los siguientes términos:

$$[k_{11}] = \begin{bmatrix} r_{ax} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{aaz} & 0 & 0 & 0 & r_{abz} \\ 0 & 0 & r_{aay} & 0 & -r_{aby} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_{aby} & 0 & r_{11y} & 0 \\ 0 & r_{abz} & 0 & 0 & 0 & r_{11z} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$[k_{12}] = \begin{bmatrix} r_{ax} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_{aaz} & 0 & 0 & 0 & r_{baz} \\ 0 & 0 & -r_{aay} & 0 & -r_{bay} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{aby} & 0 & r_{12y} & 0 \\ 0 & -r_{abz} & 0 & 0 & 0 & r_{12z} \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$[k_{22}] = \begin{bmatrix} r_{ax} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{aaz} & 0 & 0 & 0 & -r_{baz} \\ 0 & 0 & r_{aay} & 0 & r_{bay} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{bay} & 0 & r_{22y} & 0 \\ 0 & -r_{baz} & 0 & 0 & 0 & r_{22z} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$[k_{21}] = [k_{12}]^T \quad (33)$$

Para la evaluación de los elementos de las ecuaciones anteriores se pueden utilizar:

$$r_{ax} = \frac{1}{f_{11}} \quad (34)$$

$$r_j = \frac{1}{f_{44}} \quad (35)$$

$$Det_z = f_{22}f_{66} - f_{26}^2 \quad (36)$$

$$r_{11z} = \frac{f_{22}}{Det_z} \quad (37)$$

$$r_{12z} = \frac{f_{26}L - f_{22}}{Det_z} \quad (38)$$

$$r_{22z} = \frac{f_{66}L^2 - 2f_{26}L + f_{22}}{Det_z} \quad (39)$$

$$r_{aaz} = \frac{r_{11z} + r_{22z} + 2r_{12z}}{L^2} \quad (40)$$

$$r_{abz} = \frac{r_{11z} + r_{12z}}{L} \quad (41)$$

$$r_{baz} = \frac{r_{22z} + r_{12z}}{L} \quad (42)$$

$$Det_y = f_{33}f_{55} - f_{35}^2 \quad (43)$$

$$r_{11y} = \frac{f_{33}}{Det_y} \quad (44)$$

$$r_{12y} = \frac{f_{35}L - f_{33}}{Det_y} \quad (45)$$

$$r_{22y} = \frac{f_{55}L^2 - 2f_{35}L + f_{33}}{Det_y} \quad (46)$$

$$r_{aay} = \frac{r_{11y} + r_{22y} + 2r_{12y}}{L^2} \quad (47)$$

$$r_{aby} = \frac{r_{11y} + r_{12y}}{L} \quad (48)$$

$$r_{bay} = \frac{r_{22y} + r_{12y}}{L} \quad (49)$$

$$\theta_{2z} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{xM_{0z}}{EI_z(x)} dx + \int_0^L \frac{V_{0y}}{GA_{cy}(x)} dx \quad (50)$$

$$\theta_{1z} = \int_0^L \frac{M_{0z}}{EI_z(x)} dx - \theta_{2z} \quad (51)$$

En el análisis y diseño estructural, se acepta que la variación de las propiedades geométricas y elásticas de la barra, produzcan también la modificación de los momentos y fuerzas de fijación (Figura 4), con respecto a los resultantes para barras prismáticas.

Las expresiones siguientes (Tena 1997) proporcionan los giros de fijación (Figura 5) para una barra de sección transversal variable doblemente empotrada, sujeta a una condición de carga general contenida en su plano principal de flexión.

En las ecuaciones anteriores,  $M_{0z}$  y  $V_{0y}$  son las funciones de momento flexionante y fuerza cortante respectivamente, ambas producidas por el sistema de cargas actuante sobre la viga simplemente apoyada.

Con los giros de fijación obtenidos, los momentos de empotramiento correspondientes al sistema de carga actuante (Figura 6) se pueden obtener mediante las expresiones siguientes

$$M_{1z} = r_{11z}\theta_{1z} - r_{12z}\theta_{2z} \quad (52)$$

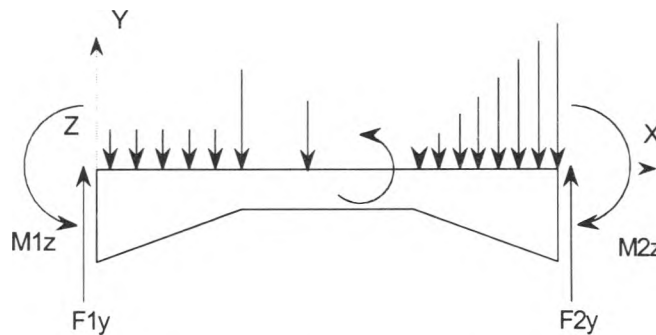


Figura 4. Fuerzas y momentos de fijación

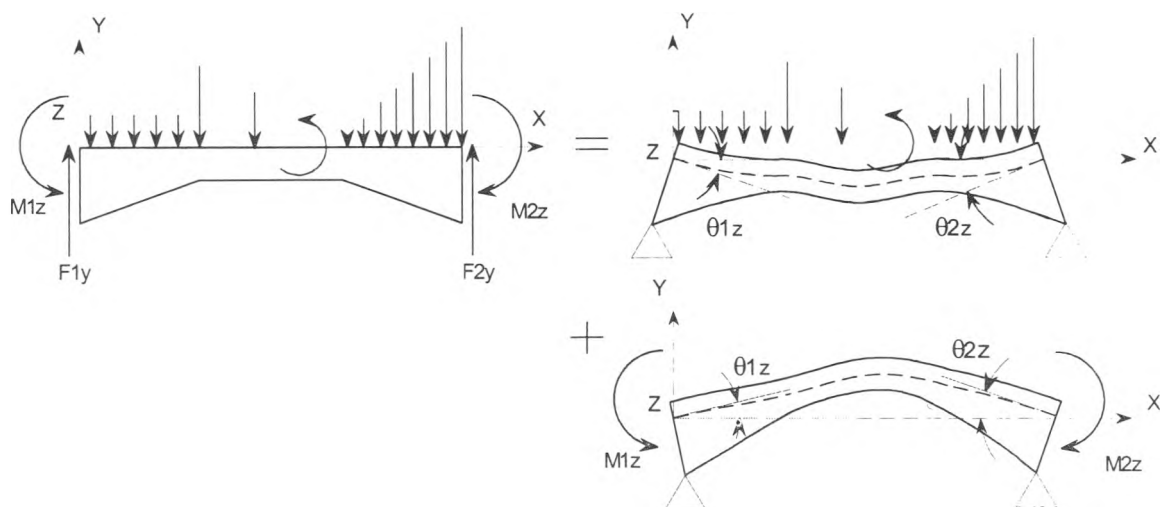


Figura 5. Giros de fijación

$$M_{2z} = r_{22z}\theta_{2z} - r_{12z}\theta_{1z} \tag{53}$$

### Aplicación de reglas de integración numérica

La evaluación de los elementos de las matrices de flexibilidades, así como los giros de fijación definidos en el punto anterior, requiere del proceso matemático de integración. Para elementos de sección variable, realizar la integración analítica resulta bastante tedioso y poco práctico, por lo que es más adecuado recurrir a la integración numérica, también sugerida por Damy (1986).

Las fórmulas de integración de Newton-Cotes son los esquemas de integración numérica más comunes (Chapra y Canale, 1999); éstas buscan reemplazar una función complicada o datos tabulados por una función aproximada que sea fácil de integrar.

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_n(x)dx$$

donde

$f(x)$  = función a integrar

$f_n(x)$  = polinomio de la forma  $f_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$

$n$  = orden del polinomio

De estas fórmulas, las que tienen aplicación a este problema son las cerradas, ya que se conocen los datos (valor de la función) al inicio y al final del intervalo de integración. Como es de suponerse, al

reemplazar la función original por otra, se produce un error en el resultado (evaluación de la integral). Una forma de mejorar la exactitud de las reglas de integración, es dividir el intervalo de integración en un número de segmentos y aplicar el método a cada uno de ellos, dando como resultado ecuaciones llamadas fórmulas de integración de múltiple aplicación o compuestas.

Por conveniencia y sencillez, si los datos están uniformemente espaciados (segmentos en que se divide el intervalo de integración del mismo tamaño), la regla trapecial puede ser la primera de las fórmulas de integración cerrada aplicable al problema por resolver; esta regla utiliza un polinomio de primer orden como función, el cual reemplaza a la que se va a integrar (Figura 7a). Para obtener una estimación más exacta de una integral, se recurre a una segmentación más fina (segmentos de menor tamaño); la otra, es usar polinomios de orden superior para conectar los puntos. Esta última conduce a las conocidas fórmulas de Simpson; la de 1/3 y 3/8, cuando se utilizan polinomios de segundo (Figura 7b) y tercer grado, respectivamente.

La regla de Simpson de 1/3 es, a menudo, el método de preferencia (Chapra y Canale, 1999), ya que alcanza una exactitud de tercer orden con sólo tres puntos, en comparación con los cuatro puntos requeridos por la de 3/8, es por ello que se utilizó en este trabajo, para evaluar numéricamente las expresiones relativas a los coeficientes de flexibilidad, razón por la cual se reproduce a continuación.

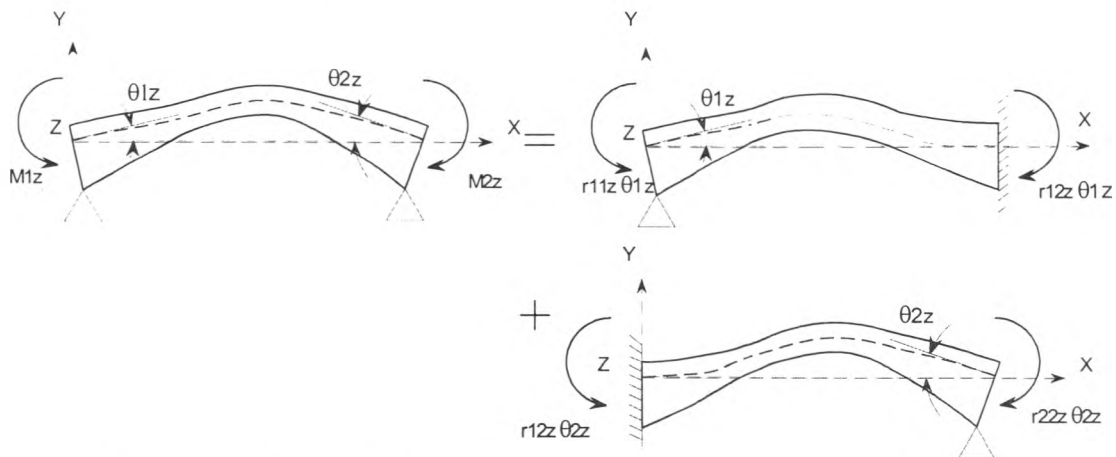


Figura 6. Momentos de empotramiento en función de los giros de fijación



Para ajustar tres puntos de ordenadas  $f_0$ ,  $f_1$  y  $f_2$  (Figura 8) igualmente espaciados en  $\Delta x$  a una ecuación de 2<sup>do.</sup> grado, cuya forma general es

$$y = ax^2 + bx + c \quad (54)$$

Se determina el valor de  $a$ ,  $b$ , y  $c$  para que la función se satisfaga, por ejemplo, en  $0$ ,  $\Delta x$  y  $2\Delta x$  a  $f_0$ ,  $f_1$  y  $f_2$  respectivamente, es decir:

$$y(0) = y_0 = f_0 = a(0)^2 + b(0) + c \quad (55)$$

por lo que:

$$C = f_0 \quad (56)$$

$$y(\Delta x) = f_1 = a(\Delta x)^2 + b(\Delta x) + f_0 \quad (57)$$

$$y(2\Delta x) = f_2 = a(2\Delta x)^2 + b(2\Delta x) + f_0 \quad (58)$$

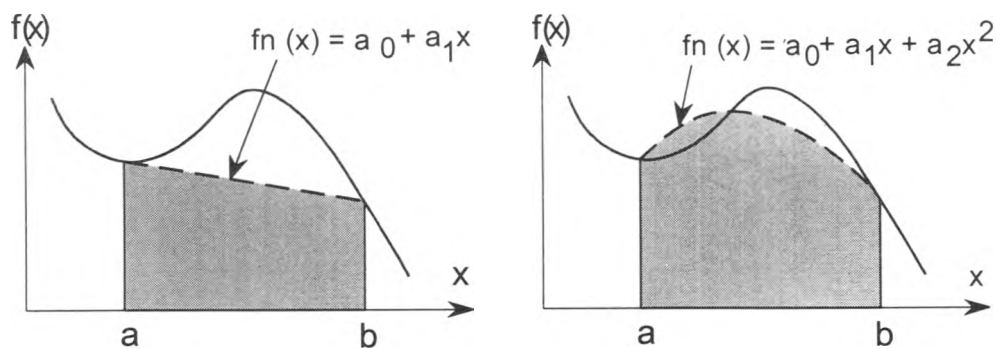
De las dos ecuaciones anteriores se obtiene:

$$a = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2(\Delta x)^2} \quad (59)$$

$$b = \frac{1}{2\Delta x} (4f_1 - f_2 - 3f_0) \quad (60)$$

Por lo que la ecuación (54) finalmente queda:

$$y = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2(\Delta x)^2} x^2 + \frac{1}{2\Delta x} (4f_1 - f_2 - 3f_0)x + f_0 \quad (61)$$



a) Aproximación lineal

b) Aproximación cuadrática

Figura 7. Funciones de aproximación  $f_n(x)$  a la función  $f(x)$

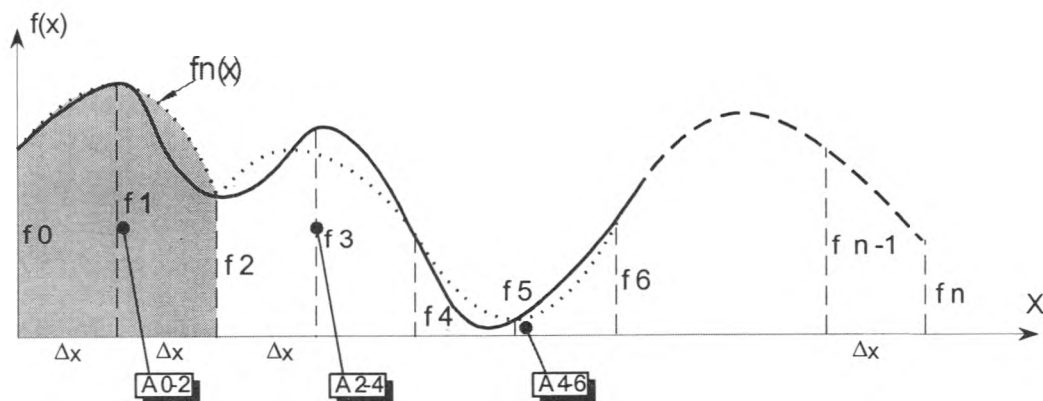


Figura 8. Aplicación de la integración compuesta

Ahora, el área bajo la curva limitada por las ordenadas  $f_0$  y  $f_2$  se obtiene al integrar la función anterior (ec. 61) y en el intervalo 0 a  $2\Delta x$

$$A_{0-2} = \int_0^{2\Delta x} y dx = \left[ \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{6(\Delta x)^2} x^3 + \frac{1}{4\Delta x} (4f_1 - f_2 - 3f_0)x^2 + f_0 x \right]_0^{2\Delta x} \quad (62)$$

$$A_{0-2} = \frac{1}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2) \Delta x \quad (63)$$

Para los siguientes tres puntos de ordenadas  $f_2$ ,  $f_3$  y  $f_4$ , (Figura 8)

$$A_{2-4} = \frac{1}{3} (f_2 + 4f_3 + f_4) \Delta x \quad (64)$$

Enseguida, el área entre las ordenadas  $f_4$ ,  $f_5$  y  $f_6$ , es:

$$A_{4-6} = \frac{1}{3} (f_4 + 4f_5 + f_6) \quad (65)$$

El área total comprendida entre los puntos igualmente espaciados de ordenadas  $f_0$  a  $f_6$  es:

$$A_{0-6} = A_{0-2} + A_{2-4} + A_{4-6} \quad (66)$$

$$A_{0-6} = \frac{1}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2 + f_2 + 4f_3 + f_4 + f_4 + 4f_5 + f_6) \Delta x \quad (67)$$

$$A_{0-6} = \frac{1}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + f_6) \Delta x \quad (68)$$

Extendiendo la expresión anterior para  $n$  puntos, finalmente se obtiene:

$$A = \frac{1}{3} (f_0 + 4 \sum f_{\text{no pares}} + 2 \sum f_{\text{pares}(n-2)} + f_n) \Delta x \quad (69)$$

donde  $n$  = número puntos, múltiplo de 2 (más la ordenada inicial  $f_0$ )

Para la obtención de los giros de fijación y momentos de empotramiento mediante integración numérica, son necesarios los valores de las funciones de elementos mecánicos como datos (fuerza cortante  $\mathbf{V}$  y momento flexionante  $\mathbf{M}$ ), así, lo más conveniente es utilizar las funciones de singularidad (función escalón y función rampa, ver figura 9).

Para una carga concentrada  $\mathbf{P}$  aplicada a una distancia  $\mathbf{a}$ , una uniforme  $\mathbf{w}$  entre los puntos  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  (medidos a partir del extremo izquierdo de la barra), y un momento concentrado  $\mathbf{M}$  aplicado a una distancia  $\mathbf{d}$  (medida también a partir del extremo izquierdo de la barra (Figura 10) las funciones de singularidad conducen a las siguientes expresiones para la obtención de la fuerza cortante  $\mathbf{V}(x)$  y el momento flexionante  $\mathbf{M}(x)$ .

$$V < x > = P < x - c >^0 + w < x - a >^1 - w < x - b >^1 \quad (70)$$

$$M < x > = P < x - c >^1 + 0.5w < x - b >^2 - 0.5w < x - a >^2 + M < x - d >^0 \quad (71)$$

En las ecuaciones anteriores, el término  $< x - a >$ ,  $< x - b >$ ,  $< x - c >$  o  $< x - d >$  es cero cuando  $x$  es menor que  $a$ ,  $b$ ,  $c$  o  $d$  respectivamente, e igual a  $(x - a)$ ,  $(x - b)$ ,  $(x - c)$  o  $(x - d)$  en caso contrario. Cuando sobre la viga actúan varias fuerzas, las ecuaciones 70 y 71 se aplicarán repetidamente.

## Desarrollo del programa

Se desarrolló el programa **SECVAR5** en lenguaje **QUICK-BASIC** versión 4.0 que maneja a la barra como una serie de segmentos (Figura 11), cada uno de ellos con diferente forma en su sección transversal. El programa SECVAR5 acepta segmentos de sección transversal: "I", "T", rectangular, trapecial, circular, rectangular hueca, trapecial hueca y circular hueca (Figura 12); con ancho y peralte constante o con variación lineal o parabólica entre sus extremos (Figura 13).

El programa resultó bastante compacto y se puede solicitar al Departamento de Estructuras de

la DICTyG de la Facultad de Ingeniería de la UNAM o a la siguiente dirección electrónica: fmonroy@correo.unam.mx

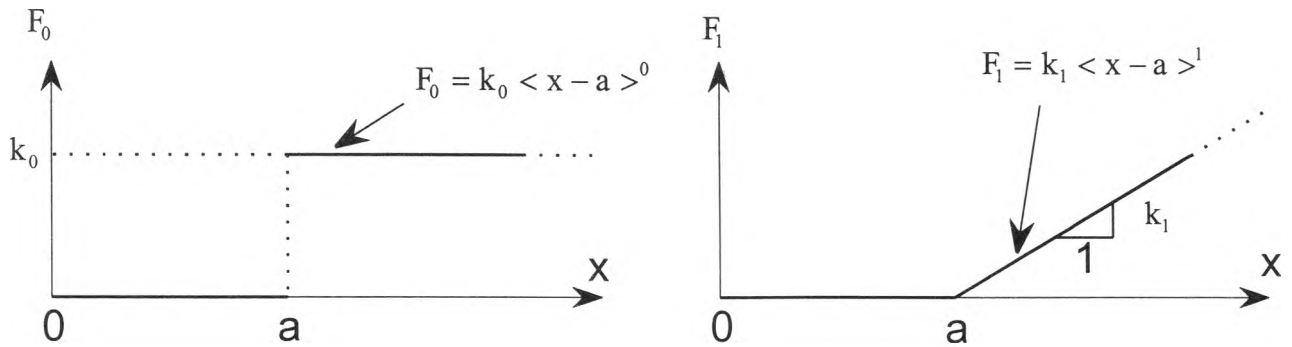


Figura 9. Función escalón y función rampa

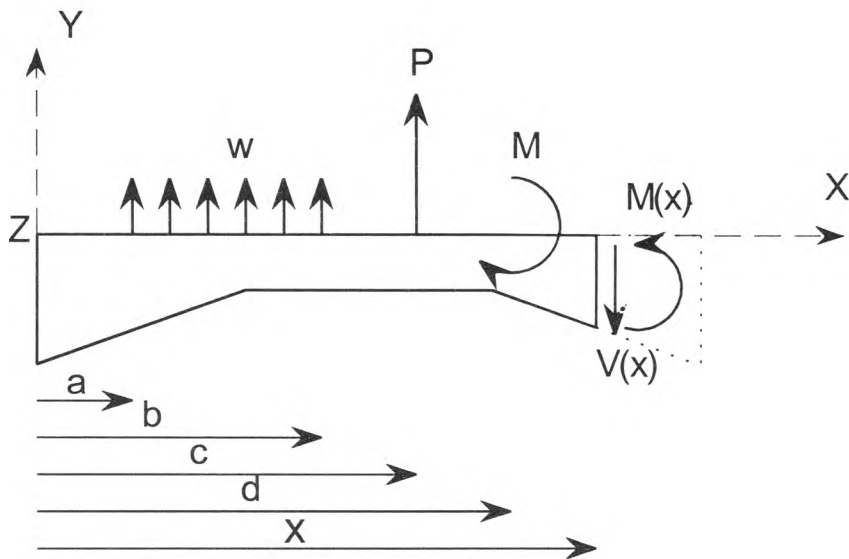


Figura 10. Tipos de fuerzas actuando sobre una barra de sección variable



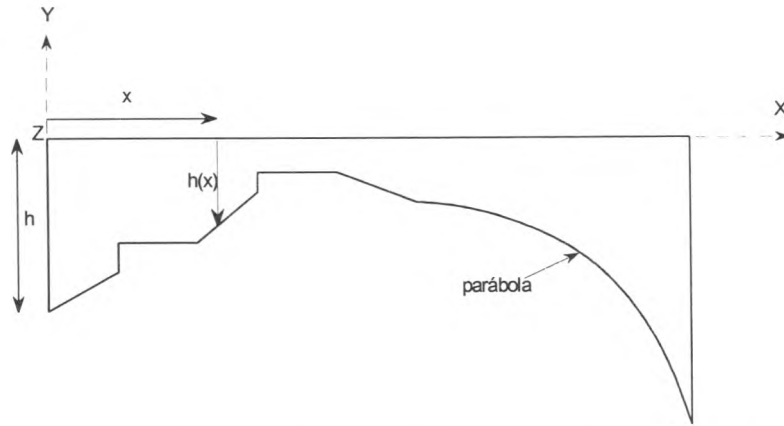


Figura 11. Barra de sección variable formada por una serie de segmentos

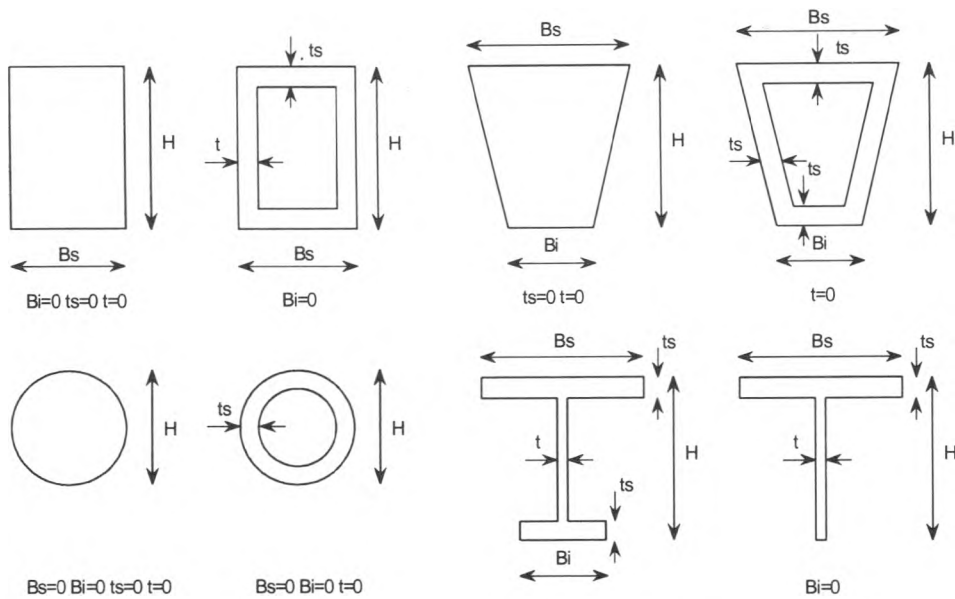


Figura 12. Algunas formas usuales para la sección transversal de una barra de sección variable

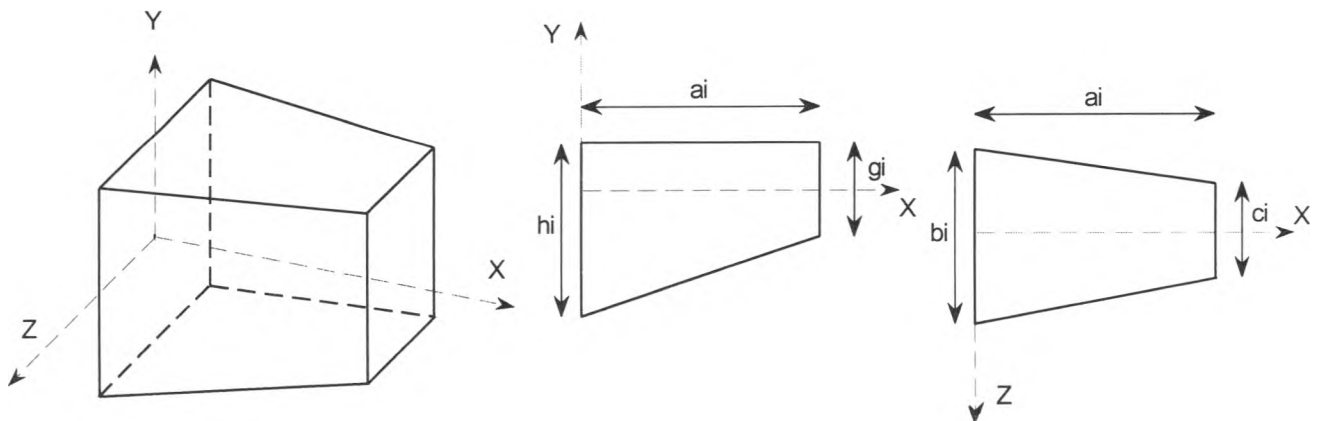


Figura 13. Segmento de barra con ancho y peralte variable

## Ejemplos

Para la solución de cada uno de los siguientes ejemplos, se preparó el archivo de datos y se ejecutó el programa SECVAR5 con el que se obtuvieron los coeficientes de flexibilidad (ecuaciones 7 a 16), de rigidez (ecuaciones 34 a 49), así como los giros de fijación y momentos de empotramiento (ecuaciones 50 a 53). Se reproducen algunos de los resultados proporcionados por el programa SECVAR5.

**Ejemplo 1.** Determine los coeficientes de rigidez y momentos de empotramiento de la viga mostrada en la figura 14.

La tabla 1 contiene algunos resultados proporcionados por el programa SECVAR5 para el

ejemplo 1. De la cuarta columna en adelante se muestra, en el renglón correspondiente, el cociente de la rigidez obtenida con (n) puntos entre la rigidez lograda con 36 puntos mediante integración numérica con la regla de Simpson de 1/3; las rigideces consideran el efecto de la deformación por cortante. Una segmentación más fina conduce a una mejor estimación en la evaluación de la integral, no se requiere de gran cantidad de puntos para lograr lo anterior. En caso extremo (para la regla de Simpson de 1/3), si sólo se consideran dos puntos en el proceso de integración numérica, existen diferencias de hasta 30 y 50%, en la estimación de las rigideces y momentos de empotramiento respectivamente.

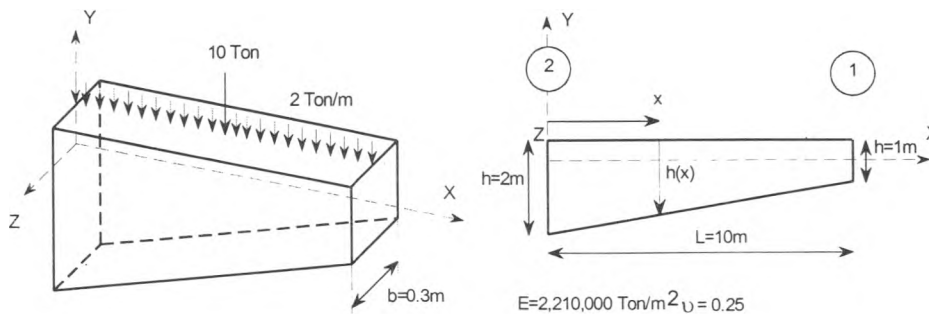


Figura 14. Barra de sección transversal rectangular con peralte variable

Tabla 1. Influencia del tamaño del intervalo de integración y de la relación peralte-claro (ejemplo 1)

$h1/L$	$h2/L$	$n$	$r_{11z}$	$r_{12z}$	$r_{22z}$	$r_{aaz}$	$r_{abz}$	$r_{baz}$	$r_{11y}$	$r_{12y}$	$r_{22y}$	$r_{aay}$	$r_{aby}$	$r_{bay}$	$M_{1z}$	$M_{2z}$	$R_1$	$R_2$	
0.1	0.2	2	0.81	0.68	0.88	0.81	0.76	0.84	0.96	0.93	0.97	0.96	0.95	0.96	0.50	1.47	0.77	1.17	
		4	0.97	0.96	0.98	0.97	0.97	0.98	1.00	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	0.93	1.04	0.98	1.02	
		6	0.99	0.99	1.00	0.99	0.99	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	1.03	0.99	1.01
		12	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		18	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		24	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
0.2	0.4	2	0.84	0.69	0.91	0.84	0.78	0.86	0.96	0.93	0.97	0.96	0.95	0.96	0.58	1.44	0.80	1.15	
		4	0.98	0.96	0.99	0.98	0.97	0.98	1.00	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	0.94	1.04	0.98	1.01	
		6	0.99	0.99	1.00	0.99	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	1.03	0.99	1.01	
		12	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	
		18	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	
		36	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	

continúa...

Tabla 1. Influencia del tamaño del intervalo de integración y de la relación peralte-claro (ejemplo 1) (continuación)

h1/L	h2/L	n	r <sub>11z</sub>	r <sub>12z</sub>	r <sub>22z</sub>	r <sub>aaz</sub>	r <sub>abz</sub>	r <sub>baz</sub>	r <sub>11y</sub>	r <sub>12y</sub>	r <sub>22y</sub>	r <sub>aay</sub>	r <sub>aby</sub>	r <sub>bay</sub>	M <sub>1z</sub>	M <sub>2z</sub>	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>
		24	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		36	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
0.4	0.6	2	0.96	0.87	0.97	0.95	0.94	0.96	0.99	0.98	0.99	0.98	0.98	0.98	0.89	1.32	0.90	1.08
		4	1.00	0.99	1.00	1.00	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	1.01	1.00	1.00
		6	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.01	1.02	1.00	1.00
		12	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		18	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		24	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		36	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

En la tabla 2 se muestra la influencia de la deformación por cortante, a partir de la cuarta columna se presenta la variación del cociente de la rigidez obtenida, sin considerar deformación por cortante entre la obtenida, considerando ese tipo de deformación. Para ambas rigideces se utilizaron 36 puntos en la integración numérica con la regla de Simpson de 1/3. Según varios autores (Damy, Tena, etc.) ese cociente aumenta con el incremento en la relación peralte a claro; si esa

relación es mayor de 0.4, pueden aparecer diferencias en la estimación de las rigideces de 40% o mayores; sin embargo, para los valores anteriores, las diferencias en los momentos de empotramiento no sobrepasan el 12%.

En la tabla 3 se muestran los resultados correspondientes al enunciado del ejemplo; las unidades empleadas fueron toneladas y metros, y los resultados incluyen el efecto de la deformación por cortante.

Tabla 2. Influencia de la deformación por cortante (ejemplo 1)

h1/L	h2/L	n	r <sub>11z</sub>	r <sub>12z</sub>	r <sub>22z</sub>	r <sub>aaz</sub>	r <sub>abz</sub>	r <sub>baz</sub>	r <sub>11y</sub>	r <sub>12y</sub>	r <sub>22y</sub>	r <sub>aay</sub>	r <sub>aby</sub>	r <sub>bay</sub>	M <sub>1z</sub>	M <sub>2z</sub>	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>
0.1	0.2	36	1.039	1.099	1.056	1.065	1.065	1.065	1.002	1.004	1.002	1.003	1.003	1.003	0.970	1.025	0.987	1.009
0.2	0.4	36	1.145	1.437	1.218	1.262	1.262	1.262	1.002	1.004	1.002	1.003	1.003	1.003	0.906	1.091	0.958	1.032
0.4	0.6	36	1.400	2.730	1.537	1.742	1.742	1.742	1.002	1.004	1.002	1.003	1.003	1.003	0.892	1.119	0.953	1.042

Tabla 3. Valores de las rigideces, fuerzas y momentos de empotramiento (ejemplo 1)

n	r <sub>ax</sub>	r <sub>j</sub>	r <sub>11z</sub>	r <sub>12z</sub>	r <sub>22z</sub>	r <sub>aaz</sub>	r <sub>abz</sub>	r <sub>baz</sub>	r <sub>11y</sub>
36	95,650.7	990.4	36,491.9	28,784.0	101,768.2	1,958.3	6,527.6	13,055.2	2,413.3
n	r <sub>12y</sub>	r <sub>22y</sub>	r <sub>aay</sub>	r <sub>aby</sub>	r <sub>bay</sub>	M <sub>1z</sub>	M <sub>2z</sub>	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>
36	1,417.6	3,405.1	86.5	383.1	482.3	18.03	42.75	12.53	17.47



**Ejemplo 2.** Obtener los coeficientes de rigidez y los momentos de empotramiento de la viga que se muestra en la figura 15.

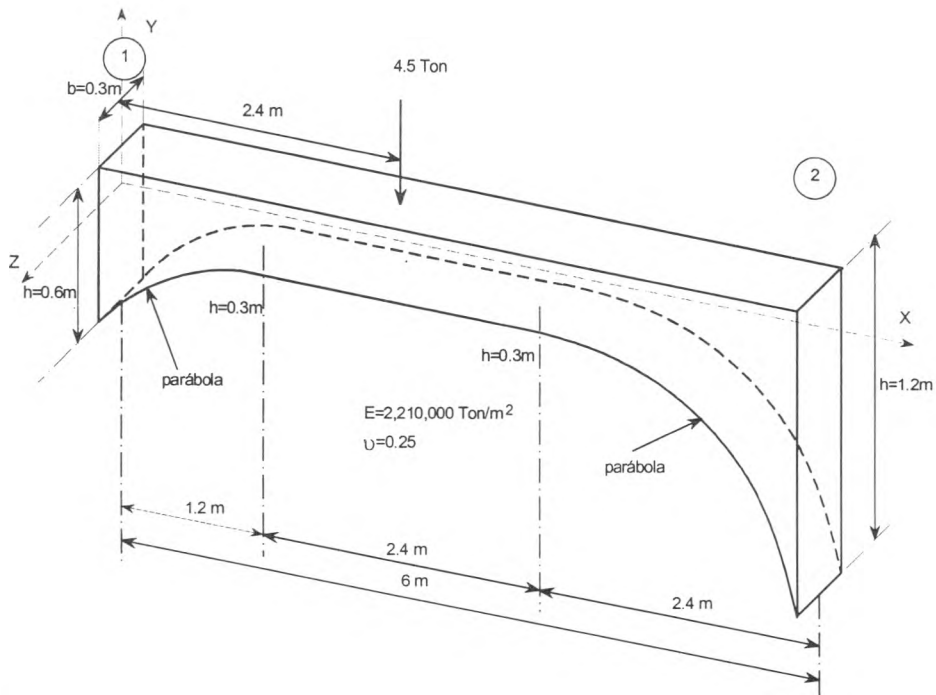


Figura 15. Barra de sección transversal rectangular con peralte variable (parabólico) en los segmentos extremos y constante en el central

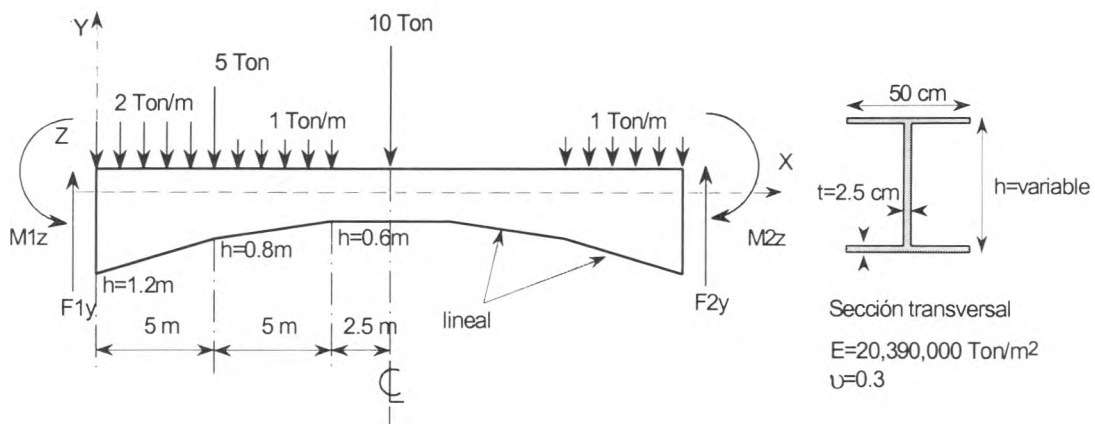


Figura 16. Barra de sección transversal "I" de peralte variable (lineal)

En la tabla 4 (con una estructura muy similar a la de las anteriores), las rigideces fueron calculadas con 12 y 24 puntos para la integración numérica, mediante la regla de Simpson de 1/3. El efecto de la deformación por cortante induce diferencias de menos de 3% en las rigideces, respectivamente; los momentos y fuerzas de

empotramiento resultaron prácticamente iguales.

Al final de la tabla 4, se muestran algunos de los resultados obtenidos por el programa SECVAR5, producto de reemplazar la variación parabólica de los extremos de la barra de este ejemplo por una lineal. Se observa que el cambio anterior trae como consecuencia

Ejemplo 2		Rigideces, momentos y fuerzas de empotramiento, unidades : toneladas y metros																	
<i>Variación parabólica de los extremos</i>																			
<b>Considerando efecto de cortante</b>																			
	<b>n</b>	<b>r<sub>ax</sub></b>	<b>r<sub>j</sub></b>	<b>r<sub>11z</sub></b>	<b>r<sub>12z</sub></b>	<b>r<sub>22z</sub></b>	<b>r<sub>aaz</sub></b>	<b>r<sub>abz</sub></b>	<b>r<sub>baz</sub></b>	<b>r<sub>11y</sub></b>	<b>r<sub>12y</sub></b>	<b>r<sub>22y</sub></b>	<b>r<sub>aay</sub></b>	<b>r<sub>aby</sub></b>	<b>r<sub>bay</sub></b>	<b>M<sub>1z</sub></b>	<b>M<sub>2z</sub></b>	<b>R<sub>1</sub></b>	<b>R<sub>2</sub></b>
(1)	12	59.230,7	482,9	2.924,1	2.772,9	5.225,1	380,4	949,5	1.333,0	4.177,9	2.882,4	5.740,8	435,7	1.176,7	1.437,2	3,69	5,08	2,47	2,03
(2)	24	59.145,0	480,8	2.896,5	2.743,7	5.178,8	376,7	940,0	1.320,4	4.173,7	2.880,4	5.735,1	435,3	1.175,7	1.435,9	3,67	5,04	2,47	2,03
(1)/(2)		1,001	1,004	1,010	1,011	1,009	1,010	1,010	1,010	1,001	1,001	1,001	1,001	1,001	1,001	1,004	1,009	0,998	1,002
<b>Sin considerar efecto de cortante</b>																			
	<b>n</b>	<b>r<sub>ax</sub></b>	<b>r<sub>j</sub></b>	<b>r<sub>11z</sub></b>	<b>r<sub>12z</sub></b>	<b>r<sub>22z</sub></b>	<b>r<sub>aaz</sub></b>	<b>r<sub>abz</sub></b>	<b>r<sub>baz</sub></b>	<b>r<sub>11y</sub></b>	<b>r<sub>12y</sub></b>	<b>r<sub>22y</sub></b>	<b>r<sub>aay</sub></b>	<b>r<sub>aby</sub></b>	<b>r<sub>bay</sub></b>	<b>M<sub>1z</sub></b>	<b>M<sub>2z</sub></b>	<b>R<sub>1</sub></b>	<b>R<sub>2</sub></b>
(3)	12	59.230,7	482,9	2.970,7	2.838,2	5.316,9	387,9	968,2	1.359,2	4.249,6	2.970,0	5.847,8	445,5	1.203,3	1.469,6	3,68	5,10	2,46	2,04
(4)	24	59.145,0	480,8	2.942,2	2.807,9	5.269,0	384,1	958,3	1.346,1	4.245,4	2.968,0	5.842,0	445,1	1.202,2	1.468,3	3,66	5,05	2,47	2,03
(3)/(4)		1,001	1,004	1,010	1,011	1,009	1,010	1,010	1,010	1,001	1,001	1,001	1,001	1,001	1,001	1,004	1,009	0,998	1,002
<b>Influencia de la deformación por cortante</b>																			
	<b>n</b>	<b>r<sub>ax</sub></b>	<b>r<sub>j</sub></b>	<b>r<sub>11z</sub></b>	<b>r<sub>12z</sub></b>	<b>r<sub>22z</sub></b>	<b>r<sub>aaz</sub></b>	<b>r<sub>abz</sub></b>	<b>r<sub>baz</sub></b>	<b>r<sub>11y</sub></b>	<b>r<sub>12y</sub></b>	<b>r<sub>22y</sub></b>	<b>r<sub>aay</sub></b>	<b>r<sub>aby</sub></b>	<b>r<sub>bay</sub></b>	<b>M<sub>1z</sub></b>	<b>M<sub>2z</sub></b>	<b>R<sub>1</sub></b>	<b>R<sub>2</sub></b>
(3)/(1)	12	1	1	1,016	1,024	1,018	1,020	1,020	1,020	1,017	1,030	1,019	1,023	1,023	1,023	0,997	1,003	0,998	1,002
(4)/(2)	24	1	1	1,016	1,023	1,017	1,019	1,019	1,019	1,017	1,030	1,019	1,023	1,023	1,023	0,997	1,003	0,998	1,002
<i>Variación lineal de los extremos (considerando deformación por cortante)</i>																			
	<b>n</b>	<b>r<sub>ax</sub></b>	<b>r<sub>j</sub></b>	<b>r<sub>11z</sub></b>	<b>r<sub>12z</sub></b>	<b>r<sub>22z</sub></b>	<b>r<sub>aaz</sub></b>	<b>r<sub>abz</sub></b>	<b>r<sub>baz</sub></b>	<b>r<sub>11y</sub></b>	<b>r<sub>12y</sub></b>	<b>r<sub>22y</sub></b>	<b>r<sub>aay</sub></b>	<b>r<sub>aby</sub></b>	<b>r<sub>bay</sub></b>	<b>M<sub>1z</sub></b>	<b>M<sub>2z</sub></b>	<b>R<sub>1</sub></b>	<b>R<sub>2</sub></b>
(5)	24	65.334,3	559,5	3.968,5	4.430,7	8.494,8	592,4	1.399,9	2.154,3	4.600,9	3.438,6	6.997,3	513,2	1.339,9	1.739,3	3,52	6,04	2,28	2,22
(5)/(2)	24	1,10	1,16	1,37	1,61	1,64	1,57	1,49	1,63	1,10	1,19	1,22	1,18	1,14	1,21	0,96	1,20	0,92	1,09

Tabla 4. Resultados para el ejemplo 2

diferencias en las rigideces y momentos de empotramiento. Encontrándose entre 10 y 64% para las primeras y de hasta un 20% para los últimos.

**Ejemplo 3.** Obtenga los coeficientes de rigidez y momentos de empotramiento de la viga mostrada en la figura 16.

Resultados obtenidos con el programa SECVAR5 se muestran en la tabla 5; donde aparezcan las rigideces y momentos de empotramiento obtenidos con y sin el efecto de la deformación por cortante, la influencia de este último, induce diferencias de menos de 3%, tanto en las rigideces como en los momentos y fuerzas de empotramiento

### Comparación con la solución obtenida por otros autores

Con el objeto de comparar algunos de los resultados producidos por el programa SECVAR5, se consultó en la bibliografía la solución a los ejemplos del punto anterior.

El ejemplo uno se logró resolver parcialmente utilizando la tabla 55 de la PCA (1958), por lo que se procedió a obtener su solución utilizando el programa STAAD (1990-2000). Debido a que las

versiones de este programa no consideran barras cuya variación de la sección transversal sea como la del ejemplo, la barra se tuvo que discretizar en una serie de segmentos (10 en total), (Figura 17) de sección transversal uniforme conectados entre sí, asignándoles a cada uno de ellos las propiedades geométricas medias correspondientes, tomando en cuenta la variación de propiedades.

El ejemplo 1 también se resolvió mediante el programa SAP2000 (1996-2000). En esos programas (SECVAR5, STAAD y SAP2000) se incluyó el efecto de la deformación por cortante.

En la tabla 6 pueden observarse los resultados obtenidos con las diferentes herramientas, se observa además que existen mínimas diferencias en las rigideces angulares alrededor del eje  $y$  de la barra, proporcionadas por las cuatro herramientas, de no más de 3% para los siguientes resultados logrados con los programas STAAD, SAP2000 y SECVAR5.

El ejemplo 2 se resolvió parcialmente utilizando la tabla 12 de la PCA (Portland Cement Association, 1958). Este ejemplo fue tomado de Sterling (1982), de ahí se tomaron algunos resultados que se incluyen en este documento.

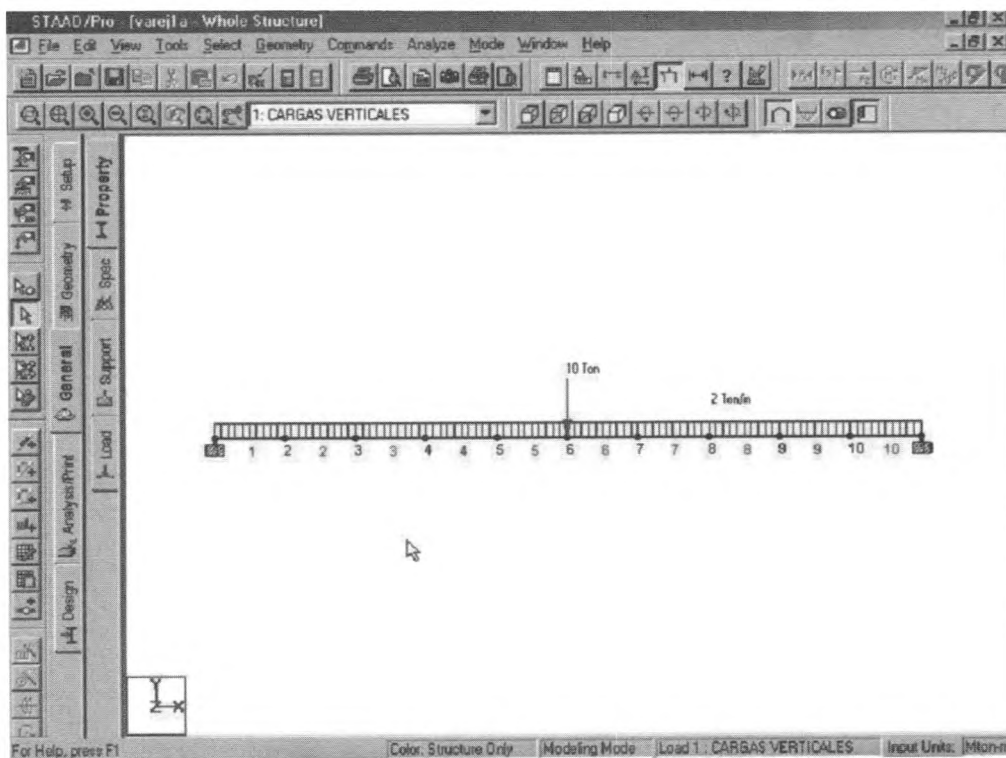


Figura 17. Ejemplo 1, segmentos de sección constante para uso del programa STAAD (1990-2000)



Ejemplo 3		Rigideces, momentos y fuerzas de empotramiento, unidades: toneladas y metros																	
<b>Considerando</b> efecto de cortante																			
	n	r <sub>ax</sub>	r <sub>j</sub>	r <sub>11z</sub>	r <sub>12z</sub>	r <sub>22z</sub>	r <sub>aaz</sub>	r <sub>abz</sub>	r <sub>baz</sub>	r <sub>11y</sub>	r <sub>12y</sub>	r <sub>22y</sub>	r <sub>aay</sub>	r <sub>aby</sub>	r <sub>bay</sub>	M <sub>1z</sub>	M <sub>2z</sub>	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>
(1)	50	35.299,0	2,908	18.359,4	12.017,4	18.359,3	97,2	1.215,1	1.215,1	1.701,5	850,3	1.701,5	8,2	102,1	102,1	103,43	64,37	23,56	11,44
(2)	250	35.299,1	2,908	18.359,2	12.017,3	18.359,3	97,2	1.215,1	1.215,1	1.701,5	850,3	1.701,5	8,2	102,1	102,1	103,41	64,35	23,56	11,44
(1)/(2)		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
<b>Sin considerar</b> efecto de cortante																			
	n	r <sub>ax</sub>	r <sub>j</sub>	r <sub>11z</sub>	r <sub>12z</sub>	r <sub>22z</sub>	r <sub>aaz</sub>	r <sub>abz</sub>	r <sub>baz</sub>	r <sub>11y</sub>	r <sub>12y</sub>	r <sub>22y</sub>	r <sub>aay</sub>	r <sub>aby</sub>	r <sub>bay</sub>	M <sub>1z</sub>	M <sub>2z</sub>	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>
(3)	50	35.299,0	2,908	18.629,8	12.287,9	18.629,8	98,9	1.236,7	1.236,7	1.702,8	851,7	1.702,8	8,2	102,2	102,2	103,78	64,03	23,59	11,41
(4)	250	35.299,1	2,908	18.629,7	12.287,8	18.629,7	98,9	1.236,7	1.236,7	1.702,8	851,7	1.702,8	8,2	102,2	102,2	103,75	64,00	23,59	11,41
(3)/(4)		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
<b>Influencia de la deformación por cortante</b>																			
	n	r <sub>ax</sub>	r <sub>j</sub>	r <sub>11z</sub>	r <sub>12z</sub>	r <sub>22z</sub>	r <sub>aaz</sub>	r <sub>abz</sub>	r <sub>baz</sub>	r <sub>11y</sub>	r <sub>12y</sub>	r <sub>22y</sub>	r <sub>aay</sub>	r <sub>aby</sub>	r <sub>bay</sub>	M <sub>1z</sub>	M <sub>2z</sub>	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>
(3)/(1)	50	1	1	1,015	1,023	1,015	1,018	1,018	1,018	1,001	1,002	1,001	1,001	1,001	1,001	1,003	0,995	1,001	0,998
(4)/(2)	250	1	1	1,015	1,023	1,015	1,018	1,018	1,018	1,001	1,002	1,001	1,001	1,001	1,001	1,003	0,995	1,001	0,998

Tabla 5. Resultados para el ejemplo 3

En la parte media de la tabla 6 se observa que, al utilizar las tres herramientas para el cálculo de las rigideces angulares alrededor del eje z existen diferencias mínimas (de no más de 3%). En el caso de los momentos de empotramiento, las diferencias entre los resultados proporcionados por Sterling (1982) y el programa SECVAR5 son de cuando más 2.5%. Cuando se comparan los valores obtenidos de (PCA, 1958) con los resultados proporcionados por el programa SECVAR5, la diferencia se incrementa a 3% y 6.5% para las rigideces y momentos de empotramiento respectivamente.

Es importante mencionar que para la obtención de las rigideces y momentos de empotramiento usando las tablas de la PCA, se hizo para cada uno de ellos un ajuste cuadrático (como el que se muestra en la figura 18), éste permitió extrapolar los datos provenientes de esa referencia, y así poder obtener los correspondientes al ejemplo en estudio. En definitiva, lo anterior influyó en las diferencias anotadas al final del párrafo anterior,

es posible que esas diferencias disminuyan si se utiliza una mejor función de ajuste.

El ejemplo 3 se resolvió con los programas STAAD (1990-2000) y SAP2000 (1996-2000), ya que el primer programa tiene dentro de sus capacidades la posibilidad de analizar barras de sección transversal "I" con variación lineal entre sus extremos de algunas de sus dimensiones (Figura 19), por lo que toda la barra se consideró de 5 segmentos (barras), a diferencia del programa SAP2000 en donde no hubo necesidad de hacer tal división y sólo se consideró una barra con propiedades variables (ver figuras 20 y 21). Los resultados obtenidos mediante los programas SECVAR5, SAP2000 y STAAD incluyen el efecto de la deformación por cortante.

Al final de la tabla 6 se muestran para el ejemplo 3, los resultados obtenidos con las tres herramientas, en ella se observa que existen diferencias en las rigideces angulares que no sobrepasan el 2%, y de menos del 6% en la rigidez torsional, siendo prácticamente nulas para las fuerzas y momentos de empotramiento.

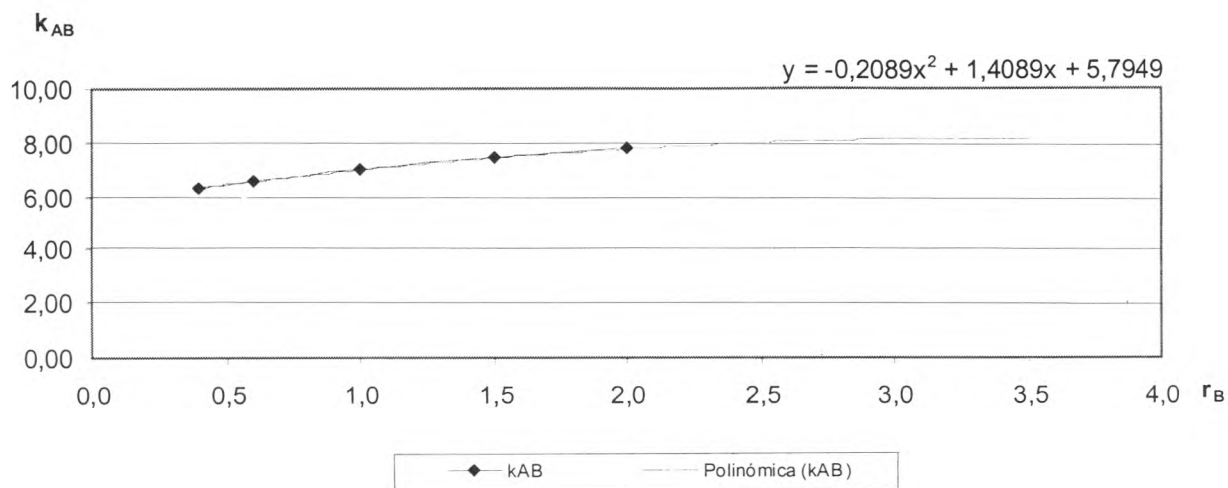


Figura 18. Ajuste cuadrático con datos de la tabla 12 de la PCA (1958)

Rigideces, momentos y fuerzas de empotramiento, unidades: toneladas y metros													
<b>Ejemplo 1</b>													
	Herramienta	$r_{ax}$	$r_j$	$r_{11z}$	$r_{12z}$	$r_{22z}$	$r_{11y}$	$r_{12y}$	$r_{22y}$	$M_{1z}$	$M_{2z}$	$R_1$	$R_2$
(1)	Tabla 55 PCA	-----	-----	-----	-----	-----	2.416,6	1.423,4	3.411,1	-----	-----	-----	-----
(2)	STAAD-III	95.693,9	987,4	37.065,7	29.470,9	102.287,4	2.414,9	1.417,7	3.394,9	17,91	43,28	12,46	17,54
(3)	Integración numérica	95.650,7	990,4	36.491,9	28.784,0	101.768,2	2.413,3	1.417,6	3.405,1	18,03	42,75	12,53	17,47
(4)	SAP2000	95.650,7	990,4	36.492,1	28.784,2	101.768,5	2.413,3	1.417,6	3.405,1	17,62	43,57	12,41	17,59
(1)/(3)		-----	-----	-----	-----	-----	0,1%	0,4%	0,2%	-----	-----	-----	-----
(2)/(3)		0,0%	0,3%	1,6%	2,4%	0,5%	0,1%	0,0%	0,3%	0,7%	1,2%	0,5%	0,4%
(4)/(3)		0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	2,3%	1,9%	0,9%	0,7%
<b>Ejemplo 2</b>													
	Herramienta	$r_{ax}$	$r_j$	$r_{11z}$	$r_{12z}$	$r_{22z}$	$r_{11y}$	$r_{12y}$	$r_{22y}$	$M_{1z}$	$M_{2z}$	$R_1$	$R_2$
(1)	Tabla 12 PCA	-----	-----	2.884,6	2.826,6	5.142,0	-----	-----	-----	3,55	4,71	-----	-----
(2)	Ref. 1, (S. Kinney)	-----	-----	2.900,0	2.763,7	5.250,0	-----	-----	-----	3,74	4,91	-----	-----
(3)	Integración numérica	59.145,0	480,8	2.896,5	2.743,7	5.178,8	4.173,7	2.880,4	5.735,1	3,67	5,04	2,47	2,03
(1)/(3)		-----	-----	0,4%	3,0%	0,7%	-----	-----	-----	3,3%	6,5%	-----	-----
(2)/(3)		-----	-----	0,1%	0,7%	1,4%	-----	-----	-----	1,9%	2,5%	-----	-----
<b>Ejemplo 3</b>													
	Herramienta	$r_{ax}$	$r_j$	$r_{11z}$	$r_{12z}$	$r_{22z}$	$r_{11y}$	$r_{12y}$	$r_{22y}$	$M_{1z}$	$M_{2z}$	$R_1$	$R_2$
(1)	STAAD-III	35.299,1	2,857	18.422,3	12.097,2	18.422,3	1.693,1	844,1	1.693,1	103,73	64,06	23,59	11,41
(2)	Integración numérica	35.299,1	2,908	18.629,7	12.287,8	18.629,7	1.702,8	851,7	1.702,8	103,75	64,00	23,59	11,41
(3)	SAP2000	35.299,2	2,750	18.302,1	11.977,1	18.302,1	1.701,6	850,0	1.700,6	103,50	64,17	23,57	11,43
(1)/(2)		0,0%	1,8%	1,1%	1,6%	1,1%	0,6%	0,9%	0,6%	0,0%	0,1%	0,0%	0,0%
(3)/(2)		0,0%	5,4%	1,8%	2,5%	1,8%	0,1%	0,2%	0,1%	0,2%	0,3%	0,1%	0,2%

Tabla 6. Comparación de resultados.



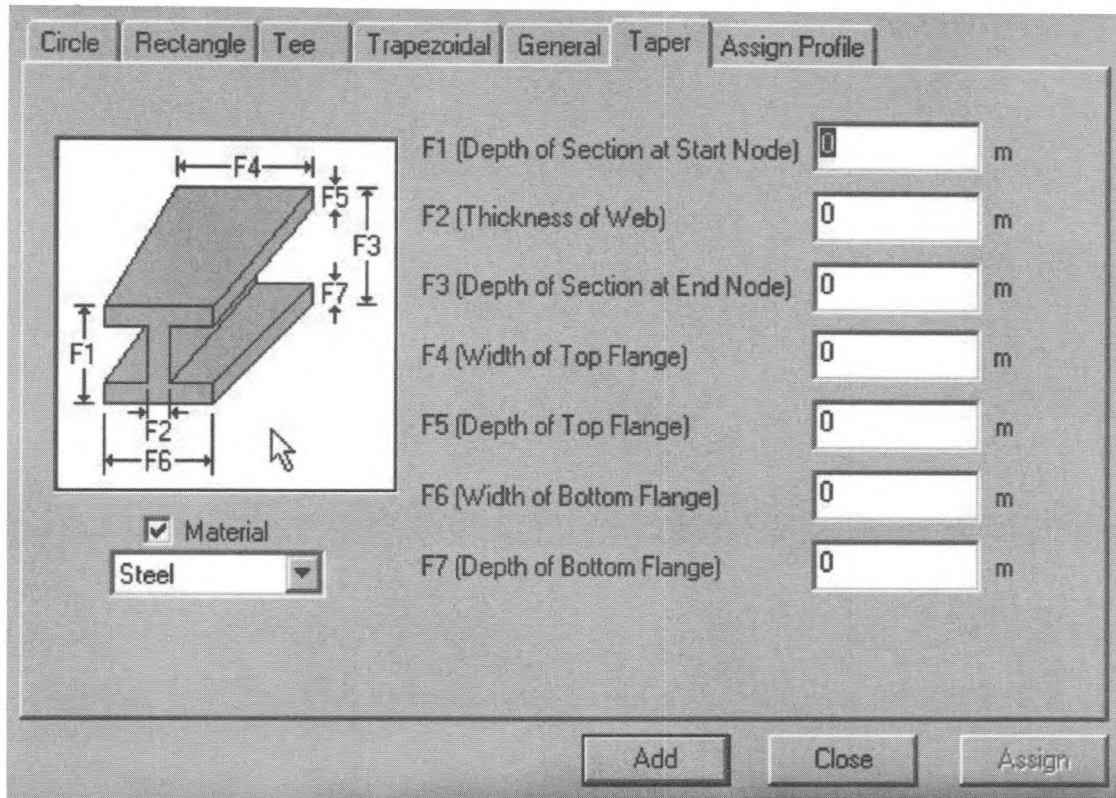


Figura 19. Barra con variación lineal de algunas de sus dimensiones, programa STAAD PRO (1990-2000)

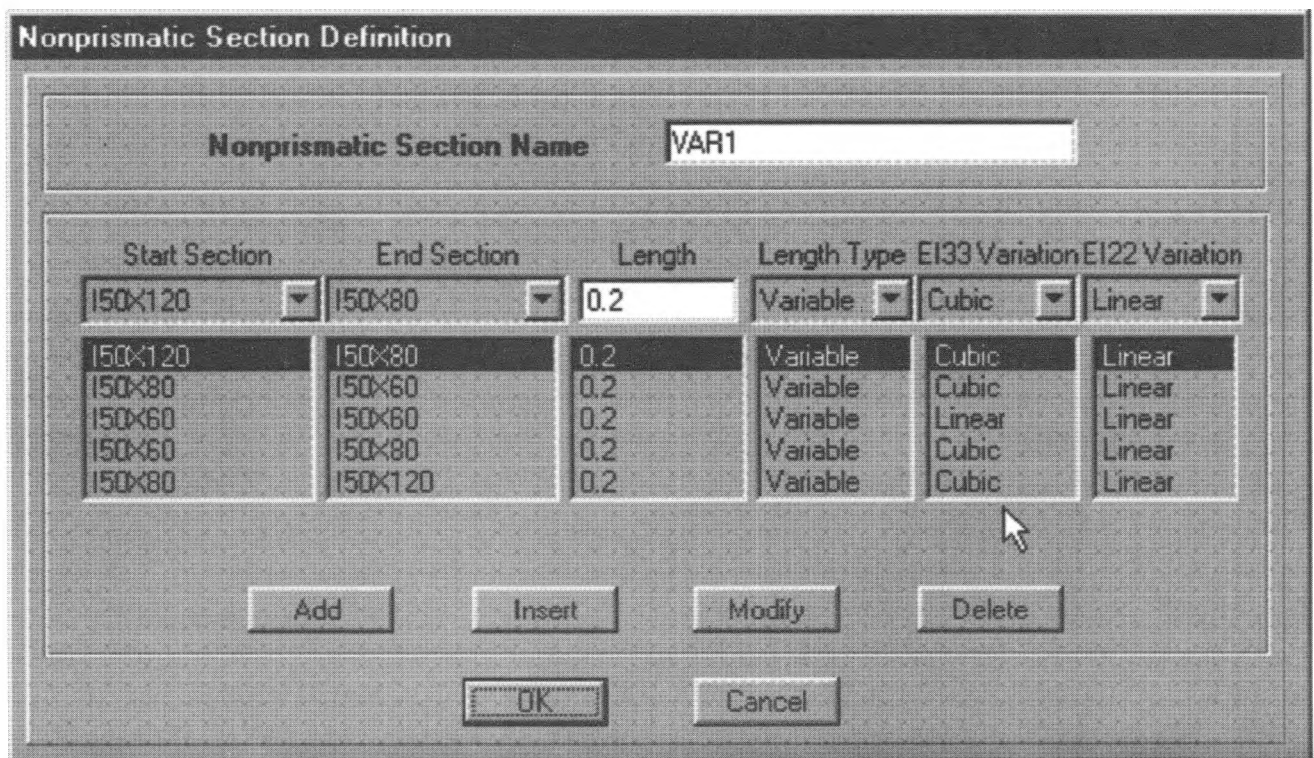


Figura 20. Definición de propiedades geométricas variables para la barra (ejemplo 3), programa SAP2000 (1996-2000)



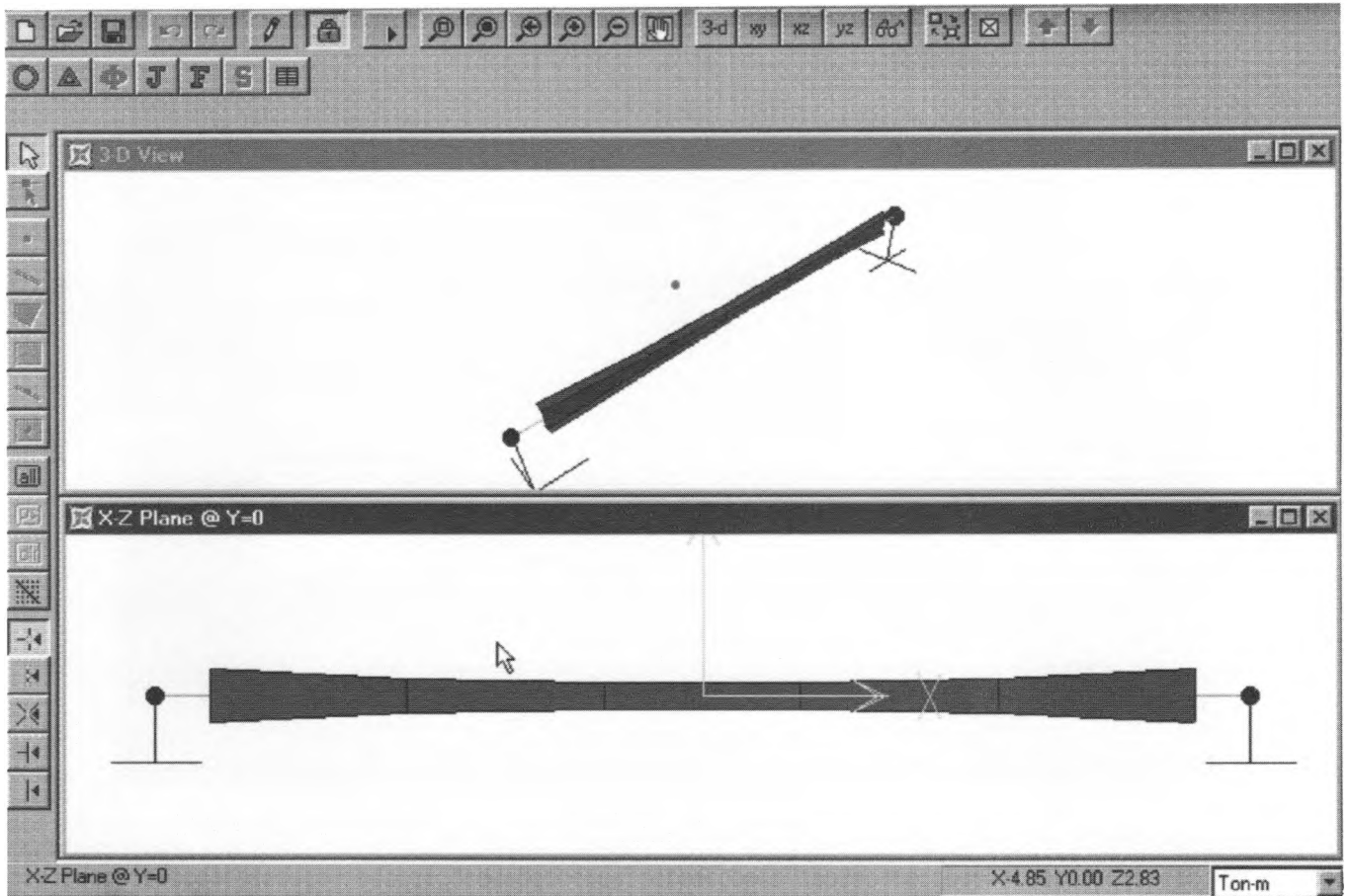


Figura 21. Una sola barra (ejemplo 3) con las propiedades geométricas variables definidas en la figura 20, programa SAP2000 (1996-2000)

## Conclusiones

Se presentó la aplicación de la integración numérica como una opción para la evaluación de los elementos de las matrices de rigidez elásticas bidimensionales y tridimensionales, así como de las fuerzas y momentos de empotramiento, todos ellos, para barras de sección transversal variable.

Para aplicaciones prácticas, la implementación de la metodología propuesta condujo a la elaboración del programa de computadora SECVAR5, con características de sencillez y flexibilidad, ya que le permite al usuario la posibilidad de manejar barras constituidas por una serie de segmentos con diferentes formas en su sección transversal, a partir de datos de las dimensiones características, según la forma de la sección. Es posible incluir la deformación por cortante, así como indicar el número de puntos a considerar en el proceso de integración numérica.

En cuanto a la obtención de las fuerzas y momentos de empotramiento, SECVAR5 puede considerar varias fuerzas concentradas y uniformes, estas últimas pueden estar actuando en toda la viga o solamente en una parte. Aunque no se había mencionado, SECVAR5 tiene incorporadas las reglas de integración trapecial y Simpson de  $1/3$  y  $3/8$  por lo que se puede comparar la solución proporcionada por esos diferentes esquemas de integración numérica

El programa SECVAR5 se aplicó a varios ejemplos (algunos de los cuales se incluyeron en este reporte), la comparación entre sí de los resultados proporcionados por otras herramientas y textos relacionados con el tema, resultó ser bastante satisfactoria. Las diferencias encontradas se deben (como anotan acertadamente varios autores), al efecto de la deformación por cortante, dependiente de la relación peralte claro y de la forma de la sección transversal de la barra. Por lo

anterior, SECVAR5 constituye una alternativa moderna para la solución de este tipo de problemas.

Por sencillez, el programa SECVAR5 se desarrolló en una versión de BASIC, pero con poco esfuerzo, todo o una parte del mismo puede ser traducido a otro lenguaje (si es necesario), y hacerle las modificaciones convenientes para incorporarlo a algún programa de análisis estructural, con lo que se tendrá la posibilidad de resolver estructuras con barras de sección transversal variable como una opción más dentro del mismo programa.

### Referencias

- Chapra S.C. y Canale R.P. (1999). *Métodos numéricos para ingenieros*. 3<sup>ra</sup>. Ed. McGraw-Hill, México.
- Damy-Rios J.E. (1982). *Notas de la clase análisis estructural*, Facultad de Ingeniería UNAM, México.
- Microsoft Corp. (1984-1989). *QUICK-BASIC* versiones 2.0, 4.0 y 4.5.
- Portland Cement Association (1958). *Handbook of Frame Constants, Beam Factors and Moment Coefficients for Members of Variable Section*.
- SAP 2000 (1996-2000). *Structural Analysis Program*, versiones 6.11 y 7.12", Computers and Structures, Inc. Berkeley, California USA.
- STAAD-III, Structural Analysis and Design Program (1990-2000). Versiones 21, 22, 22.3, 23 y 3.1 (PRO) Research Engineers, Inc. Yorba Linda CA, USA.
- Sterling-Kinney J. (1982). *Análisis de estructuras indeterminadas*, CECSA, México.
- Tena C.A. y Zaldo G.A. (1994). Formulación elástica de la rigidez de elementos de sección variable. IX Congreso Nacional de Ingeniería Estructural, Zacatecas, Zac., México.
- Tena C.A. (1997). Rigidez elástica de elementos de sección variable. *Revista Ingeniería*, Facultad de Ingeniería, UNAM. Vol. LXVI, No. 2, Abril-Junio.
- general de las estructuras*. División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, UNAM, México.
- Facultad de Ingeniería, UNAM (1999). *Métodos numéricos*. Trillas, México.
- Ghali A. y Neville A. (1984). *Análisis estructural*. Diana Técnico, México.
- Heilborn J. (1982). *Programas para ciencia e ingeniería*. Osborne/McGraw-Hill, México.
- Hibbeler R.C. (1997). *Structural Analysis*. 3<sup>th</sup> Edition, Prentice-Hall.
- Hiriarte V.B.R. (1990). *STRUCTURES*. Marshall and Nelson's, third edition, Longman Scientific and Technical.
- James M.L., Smith G.M. y Woford J.C. (1976). *Métodos numéricos aplicados a la computación digital con FORTRAN*. 2da. Ed. Representaciones y Servicios de Ingeniería, México.
- Mc-Cormac J. y Elling R.E. (1996). *Análisis de estructuras*. Alfaomega, México.
- Monroy-Miranda F. (2000). *Notas de la clase análisis estructural*. Facultad de Ingeniería UNAM, México.
- Shoichiro-Nakamura (1992). *Métodos numéricos aplicados con Software*. 1<sup>ra</sup>. Ed. Prentice-Hall, México.
- Timoshenko S.P. y Young D.H. (1983). *Teoría de las estructuras*. 2<sup>da</sup>. Ed. El Cano, SA, México.
- Warren C.Y. (1989). *ROARK'S Formulas for Stress and Strain*. 6<sup>th</sup> Edition, McGraw-Hill, International Editions General Engineering Series.
- Yuan-Yu Hsieh (1984). *Teoría elemental de estructuras*. Prentice-Hall, México.

### Bibliografía sugerida

- Damy-Rios J.E. (1984). *Notas de la clase aplicación de las computadoras al análisis estructural y teoría*



---

### **Semblanza del autor**

*Fernando Monroy-Miranda.* Egresó como ingeniero civil de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, en donde hace más de 20 años imparte cátedra de las asignaturas de mecánica de materiales I, II y III, teoría general de las estructuras, dinámica estructural, estructuras isostáticas y análisis estructural; siendo coordinador de estas dos últimas. Ocupó el cargo de jefe del laboratorio de materiales de la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Ha desarrollado varios programas de computadora para el análisis de estructuras y ha impartido cursos sobre análisis estructural y uso de programas de computadora para análisis y diseño de estructuras en el Colegio de Ingenieros Civiles de México, las Sociedades Mexicanas de Ingeniería Sísmica y Estructural, así como en la División de Educación Continua de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, la Comisión Federal de Electricidad y en algunas empresas del sector privado. Ha participado en varios proyectos relacionados con el cálculo y la construcción de estructuras.