CARLO FELICE MANARA - GABRIELE LUCCHINI

Momenti del PENSIERO MATEMATICO

Letture su aspetti e problemi delle scienze matematiche

MURSIA

1854/AC - U. Mursia editore - Via Tadino, 29 - Milano

PREFAZIONE

Si incontrano abbastanza frequentemente persone, anche colte ed intelligenti, che professano una decisa avversione per la matematica e che ostentano la loro ignoranza di questa scienza. Tale atteggiamento suscita spesso, in coloro che si dedicano alla matematica, il desiderio di farne comprendere lo spirito, e questo obiettivo si presenta talora come piú importante di quello di insegnare risultati specifici o teorie, in forma sistematica oppure episodica.

Le strade che si possono seguire sono, ovviamente, numerose e spesso non facili da percorrere, anche per le conoscenze tecniche normalmente richieste dai discorsi sulla matematica; un modo di avanzare su alcune di queste strade ci è parso quello di presentare diversi momenti dello sviluppo della matematica attraverso scritti di matematici e di pensatori interessati a questa scienza.

Vogliamo subito precisare che non ci siamo proposti né di dare una risposta alla domanda « Che cosa è la matematica? »[1] *né di fornire una esposizione sistematica dei pareri che sulla matematica hanno avuto*

---

[1] A questo proposito vogliamo ricordare che soltanto in una visione abbastanza limitata delle cose e con una certa ignoranza della evoluzione critica della scienza, anche la piú recente, ci si può illudere di rispondere in modo esauriente a domande di questo tipo sulle scienze, senza guardarle dal di dentro con la necessaria strumentazione logica e tecnica. Al riguardo si può ripetere ciò che ha scritto B. Finzi nella prefazione al suo trattato di *Meccanica razionale* (Bologna, Zanichelli, 1957, ristampa della seconda edizione, pag. 2):
« Si potrebbero elencare alcune decine di definizioni, tutte press'a poco dello stesso tipo, ché, fino a pochi anni or sono, la maggior parte dei trattati di meccanica incominciava cosí: "La meccanica razionale è..."; ma è saggia norma diffidare delle definizioni che si trovano in testa ai libri. I trattati piú moderni non danno quasi mai una definizione; sembrano dire al lettore: "Vuoi sapere che cosa è la meccanica? leggimi tutto e lo saprai!". Si tratta di una definizione concreta, ma molto particolare e... autoritaria ».

i filosofi nel corso della storia del pensiero umano;[2] *piú semplicemente ci siamo proposti di far vedere come il matematico lavora o guarda alla propria opera, nella convinzione che questo possa contribuire anche a far comprendere meglio gli argomenti di matematica che la scuola propone.*

Infatti nella introduzione scolastica tradizionale della matematica si ha una mancanza quasi assoluta della dimensione storica di questa scienza. Al massimo si hanno nei libri scolastici delle brevi note a piè di pagina che danno qualche notizia sui vari matematici e sull'epoca nella quale hanno vissuto.

Ma non vi è, in generale, una presentazione che miri a dare le motivazioni della ricerca matematica, della invenzione dei simboli, della logica interna e della sintassi che li governano, o l'inquadramento dei problemi che i matematici hanno risolto e delle teorie che hanno costruito, da un punto di vista che integri queste cose nel momento storico nel quale esse avvennero. Si potrebbe dire che lo studente il quale esce dalle nostre scuole ha della matematica una visione che appartiene in certo modo al mondo extratemporale delle idee, e ne trae l'immagine di una scienza che è costituita da problemi avulsi dalla realtà culturale dell'epoca in cui furono risolti, che non hanno motivazioni all'infuori di quella della mentalità dei matematici (mentalità abbastanza distorta, nel giudizio dell'uomo comune) e sono risolti con formule che appaiono spesso scarsamente giustificate.

Forse proprio da queste circostanze nasce quella avversione di cui si è detto, e che potrebbe, almeno in parte, essere superata cercando di cogliere, per cosí dire, la nascita del problema matematico e di comprendere quanta passione, quanta fantasia, quanta intuizione, quante doti che confinano con le doti dell'artista sono utilizzate quando si giunge alla scoperta matematica. Occorre cioè distinguere tra la ricerca del matematico e la sistemazione teorica che viene presentata nei trattati in una forma, per cosí dire, cristallizzata: gli assiomi sono enunciati prima dei teoremi, le deduzioni sono impeccabili e cosí via; invece la scoperta segue delle vie del tutto diverse e conduce ad avventure intellettuali che sono spesso affascinanti, come abbiamo cercato di mostrare in questo volume.

Su questa strada, abbozzeremo alcuni momenti della storia della matematica ed alcuni aspetti della psicologia del matematico, ad epi-

---

2 Si può dire che in ogni filosofo si trova una « teoria » o una interpretazione della matematica, forse per i suoi caratteri di certezza e di astrazione dagli oggetti del mondo fisico e della vita reale. A questo proposito vorremmo segnalare quanto F. Enriques ha scritto nei §§ 33-34 de *Le matematiche nella storia e nella cultura* (Bologna, Zanichelli, 1938, e, in ristampa anastatica, 1971) riportati in Appendice a questa prefazione.

sodi, senza la pretesa di una esauriente documentazione storica e di una analisi che scenda nel profondo della psiche; ci limiteremo a presentare alcuni matematici che scrivono di se stessi, della propria scienza e dei problemi che essi ritengono vivi alla propria epoca. Il lettore noterà che qualche osservazione è stata ripetuta in paragrafi diversi: questo ci è parso opportuno soprattutto per coloro che preferiranno una lettura episodica.

Le difficoltà che si incontrano nella realizzazione di un'opera come questa sono evidenti: è difficile presentare la matematica senza usare i suoi simboli, che sono i suoi strumenti tipici, i quali sono artificiali e possono apparire astrusi alla maggior parte dei lettori non tecnici; per quella sorta di avversione di cui abbiamo già detto, si rischierebbe cosí di provocare una immediata antipatia per ciò che si presenta; d'altra parte il rimanere nella esposizione puramente verbale o letteraria rischia di decurtare in modo radicale ciò che si vorrebbe presentare.

Nonostante il fatto che queste difficoltà rendano particolarmente arduo il nostro compito, abbiamo voluto scegliere i passi da presentare in modo che per intenderne il contenuto non sia necessaria una cultura matematica superiore a quella data nelle scuole secondarie. Ovviamente questa scelta ha portato a dover tralasciare di menzionare opere ed Autori importanti nello sviluppo della matematica, e l'esclusione non ha quindi alcun significato di giudizio di merito.

Vogliamo anche osservare che questo criterio di scelta ha portato a non poter seguire appieno la evoluzione del linguaggio matematico e degli strumenti con cui il matematico lavora. Riteniamo tuttavia che, anche con queste limitazioni, affiori il travaglio della ricerca, quale appare negli scritti dei matematici.

D'altra parte l'eliminazione degli strumenti tecnici ha portato anche alla assenza di tutte le dispute pseudofilosofiche sull'infinitamente piccolo e sulle origini del calcolo infinitesimale, dispute che appassionano forse ancora oggi qualcuno, ma che non hanno piú importanza nella elaborazione dei concetti matematici quale è stata ottenuta dalla critica anche recente.

Saremo lieti se la nostra raccolta contribuirà a convincere i giovani del fatto che la matematica è una scienza viva e che questo suo aspetto è ben diverso da quello che si coglie nei trattati e, purtroppo, nella pratica dell'insegnamento delle nostre scuole. Ma va anche ricordato che senza la conoscenza almeno superficiale della matematica non si può intendere il suo sviluppo storico e non si può quindi apprezzare quel lato umano della ricerca matematica che abbiamo cercato di presentare qui. Pertanto questa nostra fatica vorrebbe anche stimolare alla meditazione ed allo studio assiduo.

Vorremmo inoltre sostenere la importanza del ruolo culturale della matematica; non accettiamo infatti che questa scienza sia confinata nel ghetto delle materie prettamente strumentali, assegnandole il livello di una tecnica (forse anche molto raffinata) che non si può non insegnare perché è molto importante per le applicazioni, ma che non ha nulla da dire sulla formazione dell'uomo. Siamo invece convinti che la matematica abbia un suo posto insostituibile in questa formazione, perché educa alla analisi critica dei concetti, alla astrazione, alla deduzione rigorosa ed anche alla umiltà intellettuale. A nostro parere soltanto una mentalità abbastanza sprovveduta potrebbe portare ad insistere sul vieto tema delle « due culture »: ma perché la unificazione delle culture possa essere realizzata effettivamente occorre che la matematica sia insegnata mettendone in evidenza i suoi aspetti umani; e quindi anche presentando gli uomini che di questa scienza si sono occupati durante i secoli e che hanno contribuito a costruirla.

A questo fine abbiamo cercato di mettere in evidenza gli aspetti piú interessanti della personalità degli Autori di cui ci siamo occupati, quali appaiono dai loro scritti, trascurando spesso di insistere su quei minuti particolari della loro biografia che non ci sono apparsi altrettanto interessanti per il nostro scopo.[3]

Vorremmo dire qualche parola sulla traduzione dei brani di Autori che hanno scritto in una lingua diversa dall'italiano e sulla trascrizione delle forme linguistiche.

Per quanto riguarda le traduzioni fatte da noi (che sono quelle per le quali non ci sono indicazioni), abbiamo preferito tradurre abbastanza liberamente: pensiamo infatti che già la materia presentata sia di una certa difficoltà, e che questa sarebbe stata accresciuta se avessimo seguito pedissequamente il periodare degli Autori.

Il risultato sarebbe stato probabilmente quello di respingere il lettore non soltanto per il contenuto ma anche per la forma; e noi vogliamo invece che il lettore sia attirato, dalla conoscenza dei testi che presentiamo, ad accostarsi ai classici della scienza.

Inoltre pensiamo che l'impresa di rendere il sapore ed il colore della prosa di certi Autori (si pensi per esempio a B. Pascal, che è un classico della propria lingua) sia già difficile per i letterati di professione: noi che tali non siamo chiediamo venia degli eventuali errori fatti cercando di superare difficoltà estranee alle nostre abituali competenze.

Per quanto riguarda i passi scritti in italiano non moderno, abbiamo adottato dei criteri diversi di volta in volta, trasponendo le parole di

[3] Le indicazioni per reperire le notizie biografiche sugli Autori sono riportate nell'indice dei nomi e non nel testo.

qualche Autore nella forma della lingua attuale e lasciando altri passi nella loro forma originale, quando abbiamo creduto che questa rendesse meglio il carattere dell'Autore, il che ha una certa importanza nel nostro discorso.

* * *

Non vogliamo chiudere questa prefazione senza avere almeno accennato alle possibilità di completamento e di approfondimento dei temi proposti, ovviamente nell'ordine di idee che abbiamo cercato di precisare. Poiché questo ordine di idee porta, ovviamente, a prescindere dai singoli filoni della matematica contemporanea, che richiederebbero indicazioni di opere specialistiche di non agevole lettura e da vagliare accuratamente caso per caso, riteniamo che due siano gli aspetti da segnalare: le opere dei grandi matematici e i trattati piú diffusi di storia della matematica.

Per quanto riguarda le opere dei grandi matematici, è chiaro che i brani riportati in questo libro sono una piccola parte delle letture accessibili anche a chi non si è dedicato a studi specifici di matematica: d'altra parte pensiamo di aver fatto una scelta in un qualche modo stimolante nei confronti degli Autori ai quali abbiamo attinto e quindi, sia pure indirettamente, anche degli altri matematici che non abbiamo ricordato con brani dei loro lavori; per tutti rimandiamo alle edizioni ufficiali delle loro opere.

Per quanto riguarda i trattati di storia della matematica ci limitiamo a segnalarne alcuni, variamente significativi, che almeno in parte possono essere utilizzati anche come fonti bibliografiche.

G. J. ALLMAN, *Greek Geometry from Thales to Euclid*, Dublin, 1889.

E. T. BELL, *Men of Mathematics*, New York, Simon & Schuster Inc., 1931; ed. it.: *I grandi matematici*, Firenze, Sansoni, 1950.

E. BORTOLOTTI, *Studi e ricerche sulla storia della matematica in Italia nei secoli XVI e XVII*, Bologna, Zanichelli, 1928.

C. BOSSUT, *Essai sur l'histoire générale des mathématiques*, Paris, 1802; ed. it.: *Saggio sulla storia generale della Matematica*, Milano, Nobile e Tosi-Giegler, 1802.

N. BOURBAKI, *Elements d'histoire des mathématiques*, Paris, Hermann, 1960; ed. it.: *Elementi di storia della matematica*, Milano, Feltrinelli, 1963.

— —, *idem, deuxième édition revue, corrigée, augmentée*, idem, 1969.

C. B. BOYER, *History of Analytic Geometry*, New York, Yeshiva University, 1956.

H. F. BOYER, *A History of Mathematics*, New York, Wiley, 1968.

J. Boyer, *Histoire des mathématiques*, Paris, G. Carré & C. Naud, 1900.
C. A. Bretschneider, *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides - Ein historischer Versuch*, Leipzig, 1870.
M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Leipzig, Teubner, 1880-1908.
E. Carruccio, *Matematica e logica nella storia e nel pensiero contemporaneo*, Torino, Gheroni, 1958.
E. Casari, *Questioni di filosofia della matematica*, Milano, Feltrinelli, 1964.
F. Casori, *A History of Mathematical Notations*, 2 voll., La Salle (Illinois), The Open Court Publishing Company, 1828-1829.
U. Cassina, *Dalla geometria egiziana alla matematica moderna*, Roma, Cremonese, 1961.
G. Castelnuovo, *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna*, Milano, Feltrinelli, 1962.
E. Colerus, ed. it.: *Piccola storia della matematica*, Torino, Einaudi, 1941 e Verona, Mondadori, 1960.
J. L. Coolidge, *A History of Geometrical Methods*, New York, Oxford University Press, 1940.
P. Cossali, *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'Algebra - Storia critica di nuove disquisizioni analitiche e metafisiche arricchita*, Parma, Reale tipografia parmense, 1797-99.
F. Enriques, *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Bologna, Zanichelli, 1938.
F. Enriques e G. De Santillana, *Compendio di storia del pensiero scientifico dall'antichità fino ai tempi moderni*, Bologna, Zanichelli, 1937.
H. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, New York, Rinehart, 1958 e 1969.
A. Frajese, *Attraverso la storia della matematica*, Firenze, Le Monnier, 1969.
G. Friedlein, *Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und der Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis zum 13. Jahrhundert*, Erlangen, 1869.
L. Geymonat, *Storia e filosofia dell'analisi infinitesimale*, Torino, Levrotto e Bella, 1947.
——, *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Milano, Garzanti, 1972.
J. Gow, *A Short History of Greek Mathematics*, New York, Hafner, 1923.
S. Guenther, *Geschichte der Mathematik*, Leipzig, 1908-1911.
T. Heath, *A History of Greek Mathematics*, Oxford, Clarendson Press, 1921.
A. Hooper, *Makers of Mathematics*, New York, Random House, 1948.
A. G. Kaestner, *Geschichte der Mathematik seit der Wiederherstellung*

der Wissenschaften bis an das Ende des achtzehnten Jahrhunderts, Göttingen, 1796-1800.
F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Berlin, 1926-27.
M. Kline, *Mathematics in Western Culture*, London, Allen & Unwin, 1954.
— —, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972.
F. Le Lionnais, *Les grands courants de la pensée mathématique*, Paris, Blanchard, 1962.
G. Libri, *Histoire des Sciences mathématiques en Italie*, Paris, Renouard, 1838-41.
G. Loria, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, II ed., Milano, Hoepli, 1914.
— —, *Storia delle Matematiche*, 3 voll., Torino, 1929-1933.
— —, *Guida allo studio della storia delle matematiche*, II edizione rifusa e aumentata, Milano, 1946.
M. M. Marie, *Histoire des Sciences mathématiques et physiques*, 12 voll., Paris, Gauthier-Villars, 1883-1888.
L. Matthiessen, *Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen*, Leipzig, Teubner, 1878.
A. G. Miller, *Historical Introduction to Mathematical Literature*, New York, McMillan, 1916.
J. F. Montucla, *Histoire des mathématiques dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours, etc.*, Paris, Agasse, 1789-1802.
O. Neugebauer, *Vorgriechische Mathematik*, Berlin, 1934.
— —, *The Exact Sciences in Antiquity*, II ed., Providence (Rhode Island), Brown University Press, 1934.
J. R. Newman, *The World of Mathematics*, 4 voll., London, Allen & Unwin, 1960.
O. Ore, *Number Theory and Its History*, New York, McGraw Hill, 1948.
G. Sarton, *The Study of the History of Mathematics*, Cambridge (Massachusetts), 1936.
D. E. Smith, *History of Mathematics*, 2 voll., Boston, Ginn, 1923.
D. J. Struik, *A Source Book in Mathematics 1200-1800*, Cambridge (Massachusetts), Harvard University, 1969.
P. Tannery, *La géométrie grecque: comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons*, Paris, 1887.
I. Todhunter, *History of the Mathematical Theory of Probability*, New York, Chelsea Publishing Company, 1865.
J. Tropfke, *Geschichte der Elementar-Mathematik*, III ed., Berlin e Leipzig, 1930-1933.

H. G. ZEUTHEN, *Geschichte der Mathematik im Altertum um Mittelalter*, Copenaghen, 1896 (traduzione tedesca dell'edizione danese del 1893).
— —, *Geschichte der Mathematik im XVI und XVII Jahrhundert*, Leipzig, Teubner, 1903.

APPENDICE ALLA PREFAZIONE

Che cosa sono le matematiche [1]
di Federigo Enriques

SIGNIFICATO DEGLI ENTI MATEMATICI

La matematica pone al filosofo il problema di chiarire il significato dei suoi enti. [...] Platone scorgeva in questi gli oggetti di una realtà intelligibile. Invece gli stessi enti, astratti e separati dal mondo delle sensazioni, appariscono ad Aristotele come irreali. Di qui la controversia tra realisti e nominalisti, che doveva riaccendersi e prolungarsi nel medioevo. La difficoltà del problema sta in ciò: che fantasmi privi di corpo sembrano dominare le cose che in qualche modo ne dipendono: se pure non hanno esistenza concreta, si ritrovano come immanenti negli oggetti e nelle leggi della fisica. Una serie di minerali cristallizzati nella forma cubica pone allo spirito dell'osservatore « il cubo » come qualcosa di dato: un modello che se pure sia foggiato dallo spirito stesso per un lavoro inconscio d'astrazione e d'idealizzazione, appare in qualche modo immanente nelle cose osservate.

« La filosofia — dice GALILEO [*Opere*, VI, 232] — è scritta in questo grandissimo libro, che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica e i caratteri sono triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola... ».

[1] Da *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Bologna, Zanichelli, 1938 e, in ristampa anastatica, 1971, pagg. 139-142; le note originali sono state inserite nel testo entro parentesi quadre; i brevi tagli sono indicati con [...].

Definizioni delle matematiche

Per rispondere al problema sopra indicato, sembra naturale chiedersi in che maniera i pensatori piú cospicui abbiano definito le matematiche. Ma, come vedremo, queste definizioni non ci fanno penetrare meglio le difficoltà.

Per Descartes « toutes les sciences, qui ont pour but la recherche de l'ordre et de la mesure se rapportent aux mathématiques »[2] [*Règles pour la direction de l'esprit*, trad. fr., in « Oeuvres », X, 339]. Leibniz dice: « Mathesis universalis est scientia de quantitate in universum, seu de ratione *aestimandi*... hinc fit ut mathesis universalis sit scientia de mensurae repetitione seu de numero »[3] [*Math. Schriften*, ed. Gerhardt, III, 5].

Lo scopo di tali definizioni sembra essere soltanto di affermare l'unità del sapere matematico che, con la geometria analitica, viene a dipendere dal concetto del numero.

In modo simile, B. Bolzano,[4] preoccupandosi di una possibile estensione di questo sapere, di là dell'ordinaria aritmetica, nel campo dell'infinito (cui si riferiscono i suoi *Paradoxien des Unendlichen*,[5] Lipsia, 1857), definisce le matematiche come « scienza delle grandezze », dando il nome di grandezze a una qualsiasi classe di enti per cui si abbiano i concetti di uguaglianza, disuguaglianza e somma, coi relativi postulati caratteristici.

Il senso di tali formule è esattamente quello che ha la definizione della geometria nel programma di Erlangen di F. Klein, dove la geometria viene riguardata come studio delle proprietà invarianti delle figure rispetto a un gruppo di trasformazioni: si tratta insomma di illuminare in un senso particolare i rapporti che intercedono fra certe teorie, ravvisando qualcosa di comune nel loro studio.

Ma le anzidette definizioni delle matematiche non riescono nemmeno a coprire tutto il campo della scienza; per esempio la geometria proiettiva e la topologia resterebbero fuori da quelle formule.

Un nuovo indirizzo nella ricerca di una definizione delle mate-

---

2 « Tutte le scienze che hanno come scopo la ricerca dell'ordine e della misura si collegano alla matematica ».

3 « La matematica generale è la scienza delle quantità in generale, cioè del criterio per *stimare*... ne segue che la matematica in generale è la scienza della ripetizione della misura, ossia del numero ».

4 Bernard Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848), austriaco, prete cattolico, portò diversi contributi agli studi matematici e logici.

5 *I paradossi dell'infinito* (edizione italiana, Milano, Feltrinelli, 1965).

matiche è segnato dai logici matematici, che, tralasciando la considerazione dell'oggetto, si attaccano soltanto alla forma logica che la scienza è capace di rivestire nelle trattazioni piú compiute. E cosí riescono a definire le matematiche come studio dei sistemi *ipotetico-deduttivi* di proposizioni. Appunto a questo concetto si riferisce la definizione paradossale di BERTRAND RUSSELL:[6] « Le matematiche sono quella scienza, in cui non si sa di che cosa si parla e in cui non si sa se quello che si dice sia vero ». Con ciò si afferma che i concetti primitivi della scienza sono assunti senza definizione, enunciando e postulando solo i loro rapporti logici; ed anche che ogni indagine sulla verità o meno dei postulati trascende la conoscenza matematica, rispetto a cui i postulati stessi figurano come *ipotesi arbitrarie*, soggette soltanto alla condizione di non contraddirsi.

Ma che dire di una visione puramente formale, che rimane affatto indifferente al contenuto del sapere?

Il *Corpus juris*, esposto in forma logica secondo l'ideale di Leibniz, diventerebbe senz'altro un ramo delle matematiche.

Non per nulla la tradizione della logica matematica si riattacca all'alchimia speculativa dell'*Ars magna*, costruita dal mistico catalano RAIMONDO LULLO.[7] C'è anche nel pensiero di Leibniz e dei suoi continuatori l'idea di trarre dal nulla l'intero universo del sapere con la combinazione quasi meccanica di poche idee semplici. Qualcuno dei piú recenti sognava di sviluppare sistematicamente tutte le identità algebriche secondo le regole fisse del calcolo, e non si rendeva conto delle migliaia e migliaia di operazioni inutili che occorrerebbe compiere prima di giungere a qualche formula significativa; e peggio ancora del fatto che quando qualcuna di queste si presentasse, vi si passerebbe accanto senza comprenderne il valore.

Ben altro è l'insegnamento della storia. Abbiamo pur veduto il pensiero matematico svolgersi da problemi che sono posti alla nostra intuizione, inseguendo una verità che ci appare come qualcosa di dato, e che si chiarisce a poco a poco al nostro spirito anche attraverso l'errore.[8] [...]

---

6 Ricordiamo che il noto logico e filosofo inglese (1872-1970) si dedicò anche a studi di filosofia della matematica e scrisse, tra l'altro, in collaborazione con A. N. Whitehead, i *Principia Mathematica* (1910-1913; II ed. 1927).

7 Raimon Lull, o Lully (c. 1235-1315).

8 Si vedano le acutissime osservazioni su « L'errore nelle matematiche » dello stesso F. Enriques alle pagg. 252 e seguenti.

CAPITOLO I

La nascita del matematico

INTRODUZIONE

In base ai documenti storici, possiamo dire che moltissimi popoli antichi escogitarono alcuni simboli per rappresentare i numeri e le soluzioni di problemi matematici: ma anche se l'uomo pensante ha cominciato ben presto a fare i primi passi verso la matematica, si può affermare che soltanto con la civiltà greca questa dottrina è giunta a quei caratteri di astrattezza e di generalità che le sono specifici e che ne fanno una scienza, anzi una scienza del tutto particolare, come vedremo.

La lentezza con la quale è avvenuta la evoluzione della matematica verso lo stato di scienza astratta e generale può essere considerata come significativa, anche se noi oggi siamo portati a bruciare le tappe, anzi forse proprio per questo: i documenti delle civilizzazioni precedenti la greca testimoniano del fatto che le soluzioni di problemi matematici erano note soltanto in casi particolari e concreti, e danno l'impressione che le nozioni matematiche fossero comunicate a spizzico, in modo non metodico, come notizie utili e dedicate a risultati pratici, o addirittura in modo accidentale.

In testi di storia della matematica si trova per esempio la notizia che la Bibbia attribuisce al numero π*, che dà il rapporto della lunghezza della circonferenza al diametro,*[1] *il valore approssimato di 3; effettivamente nella Bibbia questa valutazione è data in modo del tutto casuale, e frammista ad altre notizie, come mostrano i passi seguenti:*

« ... e [l'architetto] fece anche di getto il mare[2] di rame, che

---

[1] Di π oggi si conoscono moltissime proprietà: la fondamentale è enunciata da un celebre teorema, dovuto al matematico tedesco Carl Louis Ferdinand Von Lindemann (1852-1939), il quale afferma che π non può essere radice di alcuna equazione algebrica a coefficienti interi. Inoltre, già nel secolo XIX il matematico inglese William Shanks aveva calcolato 707 cifre decimali di π (delle quali però « solo » le prime 527 esatte) e i moderni mezzi di calcolo permettono ovviamente approssimazioni ancora superiori. Le prime cifre sono 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971.

[2] Grosso bacile. L'architetto era molto probabilmente Hiram di Tiro (cfr. *I Libro dei Re*, VII, 13).

aveva dieci cubiti da un orlo all'altro, ed era rotondo...; la sua altezza era di cinque cubiti e un cordone di trenta cubiti lo cingeva tutto intorno ».[3]

« ... Fece parimenti il mare di getto, che aveva dieci cubiti da un orlo all'altro ed era rotondo tutto intorno. Aveva cinque cubiti d'altezza, ed un filo di trenta cubiti abbracciava tutta la sua circonferenza ».[4]

Da questi passi sembra si possa dedurre che lo scrittore valutasse la lunghezza della circonferenza del bacile uguale al triplo della sua larghezza. In verità è difficile prendere sul serio questa valutazione: infatti gli artigiani fenici, ai quali fu affidata molto probabilmente la costruzione del Tempio di Salomone, quasi certamente utilizzavano un valore molto piú approssimato di π.

Si noti infatti che assumere per questo numero il valore approssimato di 3 equivale, in termini geometrici, a confondere la lunghezza della circonferenza con quella del perimetro dell'esagono regolare inscritto, e questo poligono è molto chiaramente distinto dalla circonferenza, anche eseguendo la stima su una figura molto grossolana.

Inoltre una misura senza molte pretese di precisione della lunghezza della circonferenza (eseguita per esempio in modo puramente sperimentale con una cordicella ed un vaso rotondo) porta facilmente a dare per π *una valutazione molto piú approssimata; si giunge speditamente per esempio al valore 22/7, che si trova anche in Archimede. E già nel « Papiro Rhind »[5] scritto dall'egiziano Ahmes verso il 1700 a.C. si trovano enunciate delle regole per il calcolo dell'area del cerchio seguendo le quali si giungerebbe a trovare per* π *un valore che, espresso in termini moderni, sarebbe rappresentato da 3,1604.*[6]

Non vogliamo soffermarci in citazioni storiche sui molti pensatori antichi che raccolsero o trovarono risultati anche importanti (Talete,[7] *Pitagora*[8] *ed altri); come abbiamo già accennato, ci interessa osservare che, in base ai documenti noti,*[9] *si può asserire che la matematica nac-*

---

3 *Primo Libro dei Re*, VII, 23.
4 *Secondo Libro delle Cronache*, IV, 2.
5 Dal nome di Alex Henry Rhind che lo acquistò nel 1858; Rhind fu uno degli iniziatori degli scavi archeologici in Egitto verso il 1850.
6 La regola valuta l'area del cerchio con il quadrato degli $^8/_9$ del diametro: confrontandola con la regola attuale si ottiene $\pi = 256/81 = 3{,}16049...$
7 Talete di Mileto, geometra e astronomo greco vissuto attorno al 600 a.C.
8 Pitagora di Samo, filosofo greco vissuto intorno al 530 a.C.
9 Naturalmente nulla vieta di pensare che questi non siano pienamente rappresentativi dei risultati raggiunti nell'antichità nel campo della matematica.

que da problemi pratici[10] *e si sviluppò inizialmente con applicazioni concrete e con risoluzioni di detti problemi.*[11]

Come abbiamo già detto, non abbiamo prove che prima della civiltà greca la matematica avesse quei caratteri di astrattezza e di generalità che, a nostro parere, sono necessari perché un pensiero possa essere detto genuinamente scientifico. Va rilevato inoltre che nel pensiero greco troviamo non soltanto che la matematica ha raggiunto il livello a cui abbiamo accennato, ma troviamo altresí che la matematica viene analizzata nei suoi fondamenti e nei suoi procedimenti, con uno sganciamento dagli aspetti pratici non solo a livello di formulazione e trattazione di problemi, ma anche a livello di considerazioni filosofiche. E qui si può riconoscere l'inizio del fenomeno, già rilevato, dell'attenzione rivolta al modo di conoscere della matematica da parte dei filosofi, che si sono domandati da dove provenisse la particolare chiarezza dei concetti matematici e quale fosse il fondamento della particolare certezza dei ragionamenti matematici.

In questo ordine di idee, presentiamo inizialmente alcune pagine famose di Platone, nelle quali questo filosofo si pone detti problemi e dà le sue soluzioni. I passi sono celebri per varie ragioni; anzitutto essi testimoniano delle conoscenze matematiche di Platone, ma soprattutto essi danno una prova dell'interesse risvegliato dai problemi matematici nella cultura greca, anche in relazione al ripensamento ed alla critica della conoscenza umana, del suo valore e della fonte della sua certezza.

---

10 Già la leggenda (collegata con la etimologia del nome) afferma che la origine della geometria è dovuta alla pratica della misura delle terre, nata dal bisogno di ristabilire i confini dei campi egiziani soggetti alla inondazione del Nilo.

11 Come ad esempio quello della costruzione di un triangolo rettangolo.

PLATONE

L'importanza e l'influenza di Platone nella storia del pensiero non hanno certo bisogno di presentazione,[1] *e possiamo quindi limitarci a chiarire le ragioni (solo accennate nell'introduzione a questo capitolo) per le quali abbiamo voluto aprire questa antologia con pagine di questo Autore che, a rigore, non si può dire essere stato un matematico, proprio perché i suoi interessi prevalenti lo portavano verso la filosofia.*

---

1 Ricordiamo solo le date di nascita e di morte: 428/427 e 348/347 a.C., e la fondazione dell'Accademia intorno al 387 a.C.

Il suo merito particolare che, dal nostro punto di vista, vogliamo ricordare è quello di essersi dedicato anche a ripensamenti sulla matematica in modo da inserirla nel contesto della sua filosofia, sia per quanto riguarda l'analisi della scienza, sia per quanto riguarda il collegamento tra conoscenza (che non sarebbe altro che ricordo di nozioni già possedute dall'uomo) e matematica (che forse ha attirato l'attenzione di Platone proprio per la particolare certezza che essa presenta in certo modo come una sua caratteristica fondamentale).

I passi nei quali Platone tratta della matematica sono numerosi e anche di diverso interesse, e non riteniamo quindi di considerarli sistematicamente,[2] *sembrandoci sufficiente riportarne due (dai dialoghi* Repubblica *e* Menone*) e ricordare che nel dialogo* Timeo *si trova l'affermazione che i quattro elementi (terra, acqua, aria, fuoco), che si pensavano come costituenti dell'universo, avessero particelle elementari caratterizzate dal fatto di avere la forma dei solidi regolari oggi chiamati spesso « poliedri platonici »;*[3] *le particelle elementari della terra vengono pensate di forma cubica, quelle dell'acqua come aventi la forma dell'icosaedro, quelle dell'aria come aventi la forma dell'ottaedro, quelle del fuoco come aventi la forma del tetraedro. Al dodecaedro regolare viene attribuita una funzione puramente ornamentale, come simbolo della bellezza dell'universo, nella quale Dio si compiace.*

La posizione di Platone nei riguardi della matematica in generale e della geometria, e nei riguardi dei rapporti che queste scienze hanno con il reale e con la sua conoscenza, è abbastanza bene presentata dal seguente passo della Repubblica*:*

> « ... essi [i matematici] si servono di figure visibili e ragionano su di esse, ma non ad esse pensando, bensí a ciò di cui esse sono le immagini, ragionando sul quadrato in sé e sulla diagonale in sé, e non su quella che disegnano. Lo stesso si dica per tutte le figure che essi modellano e disegnano, di cui si servono come immagini (a guisa di ombre e di immagini riflesse nelle acque), cercando di vedere i veri enti, che non si possono vedere se non col pensiero ».

---

2 Per approfondimenti segnaliamo, ad esempio, *Platone e la matematica nel mondo antico* di A. Frajese, Roma, Studium, 1963.

3 Tetraedro (superficie formata da quattro triangoli equilateri), cubo (sei quadrati), ottaedro (otto triangoli equilateri), dodecaedro (dodici pentagoni regolari), icosaedro (venti triangoli equilateri). Ricordiamo che ci sono altri quattro poliedri regolari non convessi: i due dodecaedri stellati trovati da Johannes Keplero (1571-1630); il grande dodecaedro e il grande icosaedro trovati dal matematico francese Louis Poinsot (1777-1859).

Si trova qui affermato un punto di vista che i matematici hanno spesso sostenuto e che ritroveremo per esempio in Cartesio: il fondamento della matematica e delle sue certezze non è sperimentale; la certezza deriva soltanto dalla concatenazione logica delle deduzioni alle premesse, e non dalla evidenza o dalla perfezione delle figure.

Anzi, come vedremo, Cartesio fa una distinzione tra quelle che egli chiama le linee « geometriche » e quelle che egli chiama « meccaniche »; queste ultime, egli dice, hanno bisogno di precisione, perché ovviamente (nel pensiero di Cartesio) esse non hanno una definizione logicamente perfetta e quindi richiedono di essere tracciate con esattezza, perché questa è la sola garanzia della validità delle conclusioni; invece nelle linee « geometriche » le proprietà possono essere dedotte validamente soltanto in base alla definizione, per la forza della pura logica e le linee stesse non abbisognano quindi della precisione delle figure e dei disegni.

Per quanto riguarda il collegamento tra conoscenza e matematica, ci limitiamo al passo che segue, tratto dal dialogo Menone *(nome di uno degli interlocutori di Socrate); esso è celebre, perché con esso Platone (per bocca di Socrate) cerca di dimostrare la sua teoria della conoscenza (che non sarebbe altro che ricordo di nozioni già possedute dall'uomo); interessa in particolare il fatto che Platone abbia scelto un argomento di geometria per confermare la sua teoria, anche perché questa scelta può essere considerata indicativa del pensiero greco a proposito della geometria; questa veniva considerata infatti come una scienza che possedeva in sommo grado ed in modo quasi esemplare i caratteri di chiarezza e di certezza.*

*La traduzione è tratta dal citato libro di Attilio Frajese (*Platone e la matematica nel mondo antico, *Roma, Studium, 1963), che nelle note qui non riportate precisa, tra l'altro, le variazioni rispetto alla traduzione letterale e l'aggiunta delle lettere nelle figure.*

Socrate vuol mostrare a Menone che imparare è soltanto ricordare ciò che già sappiamo da una vita precedente, e fornisce una prova pratica invitando un ragazzo ignorante a risolvere un problema di geometria, fondando soltanto sui suoi ricordi.

Socrate – Non è certo facile (*fornire una prova*): comunque voglio fare il possibile, per farti cosa gradita. Chiamami uno di questi servi che t'accompagnano, quello che tu vuoi, affinché su di lui possa fornirti la dimostrazione.

Menone – Benissimo. (*Ad un servo*) Avvicinati.

Socrate – È greco? E conosce la lingua greca?

Menone – Senz'altro: è nato in casa.
Socrate – Sta bene attento se ti sembra che egli ricordi, oppure
Menone – Sarò attentissimo.
Socrate – Dimmi, ragazzo: sai che questo spazio qui è un quadrato? [4]

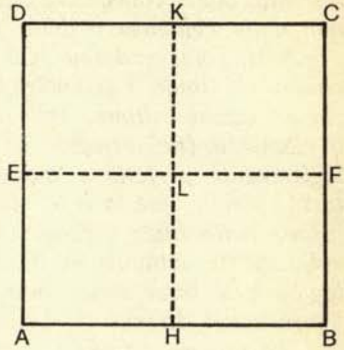


Fig. 1

Ragazzo – Sí, lo so.
Socrate – Questo è un quadrato: ha cioè queste quattro linee uguali? [5]
Ragazzo – Sí.
Socrate – E non ha uguali anche queste linee tracciate per i punti di mezzo? [6]
Ragazzo – Sí.
Socrate – E uno spazio come questo può essere maggiore o minore?
Ragazzo – Certamente.
Socrate – Se questo lato fosse lungo due piedi, e quest'altro lato pure due piedi, quanti *piedi* sarebbe il tutto? [7] Guarda un po' qua: se da questa parte la lunghezza fosse di due piedi,[8] e da quest'altra parte fosse di un piede solo,[9] lo spazio corrispondente sarebbe altra cosa che due *piedi*?
Ragazzo – Non sarebbe certo altra cosa.
Socrate – Ma poiché anche questa linea [10] è di due piedi, l'area non diventa due volte?
Ragazzo – Lo diventa di certo.
Socrate – Diventa cioè due volte due *piedi*?
Ragazzo – Sí.
Socrate – E quanti sono due volte due *piedi*? Fa' il calcolo e dimmelo.
Ragazzo – Son quattro, Socrate.
Socrate – Non si potrebbe costruire un altro spazio doppio di questo, e tale che abbia pure tutte le linee uguali come questo? [11]

---

4 Fig. 1.
5 *AB, BC, CD, DA.*
6 *EF, HK.*
7 *AB* e *BC* rispettivamente. Si noti che piedi è in corsivo quando è usato per le aree.
8 *AB.*
9 *AE* o *BF.*
10 *AD* o *BC.*
11 Un quadrato di area doppia.

Ragazzo – Sí.
Socrate – Di quanti *piedi* sarà?
Ragazzo – Di otto.
Socrate – Cerca ora di dirmi quanto sarà lunga ciascuna linea di quello spazio. Il lato di questo è di due piedi: quanto sarà lungo il lato del quadrato doppio?
Ragazzo – Ma è evidente, Socrate: sarà doppio.
Socrate – Vedi, Menone, come io non gli insegno nulla, ma gli rivolgo solo domande? E ora egli crede di sapere quanto è lungo il lato del quadrato di otto *piedi*, non ti sembra?
Menone – Sí.
Socrate – Ma lo sa, forse?
Menone – Per nulla affatto.
Socrate – Egli crede forse che il lato del quadrato di area doppia sia di lunghezza doppia?
Menone – Sí.
Socrate – Osserva ora come comincia a ricordare nel corretto processo della reminiscenza. (*Al ragazzo*) Dimmi: secondo te dalla linea doppia risulta area doppia? Dico come questa, non piú lunga da una parte e piú corta dall'altra, ma dappertutto uguale come questa, ma di area doppia di questa: quindi dell'area di otto *piedi*. Guarda se ti sembra ancora che risulti dal lato doppio.
Ragazzo – Sí, mi sembra.
Socrate – Questa linea non diventa forse doppia se aggiungiamo ad essa, di seguito, un'altra eguale? [12]

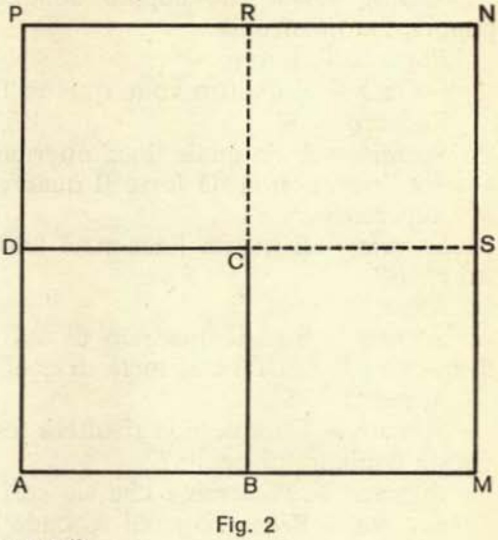


Fig. 2

Ragazzo – Certamente.
Socrate – Da questa linea (*AM*), tu dici, risulta l'area di otto

[12] $BM = AB$ (fig. 2).

piedi, se si tracciano quattro di tali linee? [13]

Ragazzo – Sí.

Socrate – Tracciamole, dunque, queste quattro linee uguali. Che siamo venuti a costruire se non il quadrato che tu dici essere di otto *piedi*?

Ragazzo – Proprio quello!

Socrate – Ma in questo nuovo quadrato non sono forse contenuti quattro quadrati come quello (di partenza) avente l'area di quattro *piedi*?

Ragazzo – Sí.

Socrate – Quanto è grande, dunque, il nuovo quadrato? Non è forse quattro volte quello di partenza?

Ragazzo – E come no?

Socrate – E se è quattro volte l'altro, è forse il suo doppio?

Ragazzo – No, per Giove.

Socrate – E che cosa è?

Ragazzo – È il quadruplo!

Socrate – Dal lato doppio dunque, ragazzo, non risulta area doppia, ma quadrupla.

Ragazzo – È vero.

Socrate – E quattro volte quattro fa sedici, no?

Ragazzo – Sí.

Socrate – E da quale linea otterremo il quadrato di otto *piedi*? Questa linea, non ci dà forse il quadrato quadruplo?

Ragazzo – Sí.

Socrate – E questa linea-metà (*AB*) ci dà il quadrato di quattro *piedi*?

Ragazzo – Sí.

Socrate – Sia: il quadrato di otto *piedi* non è forse il doppio di questo (di *ABCD*) e la metà di quello (di *AMNP*)?

Ragazzo – Sí.

Socrate – Dunque non risulterà forse da una linea maggiore di questa e minore di quella?

Ragazzo – Mi sembra che sia cosí.

Socrate – Bene: rispondi secondo quello che a te sembra (giusto). E dimmi, questa linea non era lunga due piedi, e quest'altra non era lunga quattro piedi?

Ragazzo – Sí.

---

[13] *AM, MN, NP, PA.*

Socrate – Dunque la linea (il lato) del quadrato dell'area di otto *piedi* deve essere maggiore di questa di due piedi e minore di quest'altra di quattro.

Ragazzo – Certo che deve esserlo.

Socrate – Ebbene: cerca di dirmi di quale lunghezza deve essere.

Ragazzo – Di tre piedi.

Socrate – Perché la linea sia lunga tre piedi, aggiungiamo a questa linea la sua metà: non si otterrà cosí la linea lunga tre piedi? [14] Infatti questa (*AB*) è di due piedi, quest'altra (*BT*) di uno: e cosí si genera il quadrato (*ATUV*) che tu dici.

Ragazzo – Sí.

Socrate – E poiché questa linea (*AT*) è di tre piedi, e quest'al-

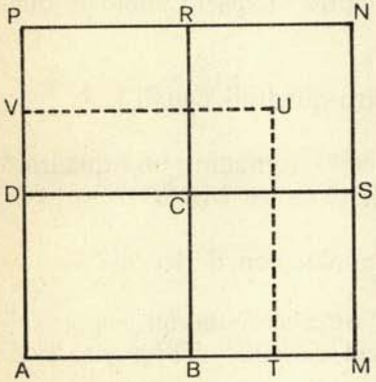


Fig. 3

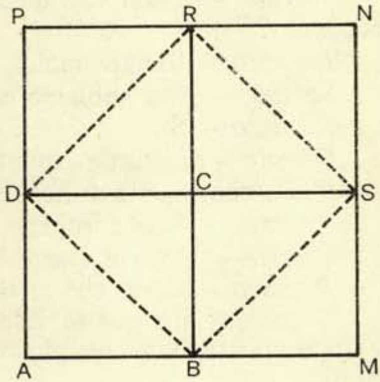


Fig. 4

tra (*TU*) è pure di tre piedi, tutto il quadrato (*ATUV*) avrà l'area di tre volte tre *piedi*, non è vero?

Ragazzo – Sembra di sí.

Socrate – E tre volte tre, quanti *piedi* sono?

Ragazzo – Nove.

Socrate – E il quadrato doppio di quanti *piedi* doveva essere?

Ragazzo – Di otto.

Socrate – Dunque dal lato di tre piedi non si genera il quadrato dell'area di otto *piedi*.

Ragazzo – No di certo.

---

[14] Ad *AB* si aggiunge $BT = AB/2$ (fig. 3).

Socrate – E da quale lato, allora? Cerca di dirmelo giustamente, e se non vuoi calcolarlo, mostra qui sul disegno da quale lato si generi il quadrato richiesto.

Ragazzo – Ma per Giove, o Socrate, non lo so.

Socrate – Ma ora dimmi ancora: questo quadrato (*ABCD*) non è di quattro *piedi*?

Ragazzo – Sí.

Socrate – Aggiungiamogli accanto un altro quadrato ad esso uguale (*BMSC*) (vedi fig. 4).

Ragazzo – Va bene.

Socrate – Ed anche un terzo (*SNRC*) uguale a ciascuno dei primi due.

Ragazzo – Va bene.

Socrate – E non vogliamo ora riempire lo spazio vuoto in quest'angolo? [15]

Ragazzo – Riempiamolo.

Socrate – Non abbiamo cosí quattro quadrati uguali?

Ragazzo – Sí.

Socrate – E tutt'e quattro insieme formano un quadrato (*AMNP*), che quante volte è quello di partenza (*ABCD*)?

Ragazzo – È quadruplo.

Socrate – Doveva essere invece doppio, non ti ricordi?

Ragazzo – Certo che lo ricordo.

Socrate – Ma queste linee,[16] che tracciamo da un angolo all'altro, non tagliano esattamente a metà ciascuno dei quattro quadrati?

Ragazzo – Sí.

Socrate – Dunque non abbiamo qui forse quattro linee uguali (*DB*, *BS*, *SR*, *RD*) che comprendono tra loro questo spazio? [17]

Ragazzo – Sí.

Socrate – Guarda ora: quanto misura questo nuovo quadrato?

Ragazzo – Non lo so.

Socrate – Ma le linee tracciate (*DB*, *BS*, *SR*, *RD*) non dividono forse internamente per metà ciascuno dei quattro quadrati?

Ragazzo – Sí.

Socrate – E quante di queste metà ci sono nel tutto?

---

15 Angolo *DCR*.
16 Come *BS*, *SR*, *RD*, *DB*.
17 *BSRD*.

Ragazzo – Quattro.
Socrate – E quante metà vi sono in questo quadrato di partenza?
Ragazzo – Due.
Socrate – E quattro che cosa è di due?
Ragazzo – Il doppio.
Socrate – Di quanti *piedi* è dunque questo nuovo quadrato (*BSRD*)?
Ragazzo – Di otto.
Socrate – E quale è il lato di questo nuovo quadrato?
Ragazzo – Questo (*DB*).
Socrate – Cioè la linea che andando da un angolo all'altro taglia il quadrato di quattro *piedi*?
Ragazzo – Sí.
Socrate – Ebbene: i sapienti chiamano *diagonale* questa linea. Cosicché, se questa linea si chiama diagonale, è proprio dalla diagonale, come tu dici, o ragazzo di Menone, che si genera il quadrato di area doppia.
Ragazzo – Proprio cosí, Socrate.

EUCLIDE E LE VERSIONI DEGLI « ELEMENTI »

Il nome del greco Euclide (Εὐκλείδης)[1] *è uno dei piú famosi nella storia della matematica; a lui si deve infatti il celebre libro degli* Elementi *che può essere considerato come il primo trattato scientifico che sia giunto sino a noi.*

Non vi è dubbio che la matematica greca non è nata con Euclide, e che questo autore, per testimonianza per esempio di Proclo,[2] *utilizza nelle sue trattazioni i risultati della ricerca di matematici che lo precedettero. Resta tuttavia il fatto che molte proposizioni che egli espone*

1 Della sua vita si sa solo che insegnò e fondò una scuola ad Alessandria al tempo di Tolomeo I, che regnò tra il 306 e il 283 a.C.
2 Filosofo greco (412-485). Fu a capo dell'Accademia platonica di Atene dal 450 alla morte; nella sua opera si trova un « Elenco dei matematici » attribuito a Eudemo di Rodi (vissuto prima del 300 a.C.), discepolo di Aristotele, con lo studio delle cognizioni matematiche dal punto di vista storico.

sono dovute a lui e che a lui si deve la sistemazione della materia con quei caratteri di sistematicità, di astrattezza e di generalità che qualificheranno in tutta la storia della umanità la matematica intesa come scienza.

Va osservato che negli Elementi *viene presentata anzitutto la geometria e in seguito l'aritmetica; l'analisi di questa successione di presentazione delle conoscenze matematiche dell'epoca di Euclide si potrebbe prestare a molte considerazioni; qui ci limitiamo a ricordare il fatto che i greci non possedevano una convenzione comoda per rappresentare i numeri. Questa deficienza è stata ereditata dalla cultura medioevale e ha dato luogo ad una prevalenza costante dell'aspetto geometrico della rappresentazione della quantità rispetto all'aspetto puramente aritmetico.*[3]

Il trattato euclideo si presenta in una struttura il cui rigore è ammirabile, e ha formato in certo modo anche l'esempio, il paradigma della esposizione scientifica rigorosa per quasi duemila anni. Euclide infatti inizia con la presentazione dei « termini », cioè con la spiegazione della terminologia che egli userà nel seguito del suo libro. Queste proposizioni hanno dato luogo a moltissimi commenti, come vedremo, nella maggior parte di ispirazione filosofica. Probabilmente questi commenti sono stati originati dal carattere che veniva attribuito alla geometria, la quale era considerata come una scienza specificata da determinati « oggetti »; dopo la critica piú recente questa concezione è largamente cambiata e quindi anche le discussioni a proposito del significato delle proposizioni euclidee riguardanti i termini hanno perduto molto del loro interesse.

Dopo i « termini » Euclide enuncia delle proposizioni che sono date senza dimostrazione, divise in due specie: le « nozioni comuni » ed i « postulati ». Le « nozioni comuni »[4] *sono delle proposizioni non dimostrate che hanno una portata estremamente generale; i cinque « postulati » sono invece delle proposizioni di portata relativamente piú ristretta e di argomento piú specificamente geometrico; ricordiamo che il quinto fra essi è il celebre postulato riguardante le rette parallele, che ha dato origine ad una controversia plurisecolare, chiarita completamente sol-*

---

[3] A titolo puramente indicativo di questa situazione culturale vogliamo qui ricordare la interpretazione che è stata data di un verso di Dante che risulterebbe sotto altri aspetti abbastanza oscuro. Si tratta del celebre verso

« Lunga promessa con l'attender corto »

(Inf. XXVII-410)

il cui significato è evidentemente « promettere molto e mantenere poco »; ma le nozioni di « lungo » e di « corto » sono molto probabilmente tratte da una abitudine alla rappresentazione visiva della quantità, che faceva ricorso alle nozioni geometriche per difetto di possibilità di rappresentazione con altri mezzi.

[4] Nella versione del Vacca, che in parte riporteremo, sono 5; in quella del Commandino, che pure in parte riporteremo, sono 10.

tanto nella seconda metà dello scorso secolo, con un processo critico che ha avuto una fondamentale influenza su tutta la matematica.

Ai « termini », alle « nozioni comuni » e ai « postulati », Euclide fa seguire, in tredici libri, proposizioni di geometria e di aritmetica; cominciamo con il riportare le prime pagine degli Elementi *nella traduzione dovuta a Giovanni Vacca,*[5] *senza riportare le note del traduttore e limitandoci a ricordare che è molto probabile che il testo relativo a « termini », « postulati », « nozioni comuni » sia giunto a noi alterato e deformato.*

Termini

1. PUNTO è ciò che non ha parti.
2. LINEA [è] una lunghezza senza larghezza.
3. ESTREMI DI UNA LINEA son punti.
4. LINEA RETTA è quella che è posta in pari rispetto ai suoi punti.
5. SUPERFICIE è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.
6. ESTREMI DI UNA SUPERFICIE son linee.
7. SUPERFICIE PIANA è quella posta in pari rispetto alle sue rette.
8. ANGOLO PIANO è l'inclinazione di due linee in un piano che si toccano, ma non sono per diritto.
9. Quando le linee comprendenti un angolo son rette, l'angolo si chiama RETTILINEO.
10. Se una retta posta sopra una retta, fa gli angoli adiacenti eguali tra loro, ognuno dei due angoli eguali è RETTO, e la retta posta si chiama PERPENDICOLARE a quella su cui è stata posta.
11. ANGOLO OTTUSO è quello maggiore di un retto.
12. ACUTO è quello minore di un retto.
13. TERMINE è l'estremo di qualche cosa.
14. FIGURA è ciò che è compreso da uno o piú termini.
15. CIRCOLO è una figura piana, compresa da una sola linea, tale che tutte le rette condotte ad essa da un punto posto entro la figura, sono eguali tra loro.
16. CENTRO DEL CIRCOLO si chiama quel punto.

[5] Euclide, *Il primo libro degli Elementi*, testo greco, versione italiana, introduzione e note a cura di Giovanni Vacca, Firenze, Sansoni, 1916.

17. DIAMETRO DEL CIRCOLO è una retta condotta per il centro, e terminata ad ognuna delle parti alla circonferenza del circolo, la quale divide anche il circolo per metà.

18. SEMICIRCOLO è la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata. Il centro del semicircolo è lo stesso del centro del circolo.

19. FIGURE RETTILINEE son quelle comprese da rette, TRILATERE da tre, QUADRILATERE da quattro, MULTILATERE quelle comprese da piú di quattro.

20. Tra le figure trilatere è TRIANGOLO EQUILATERO quello che ha i tre lati eguali; ISOSCELE quello che ha due soli lati eguali; SCALENO quello che ha i tre lati diseguali.

21. Inoltre tra le figure trilatere, è TRIANGOLO RETTANGOLO quello che ha un angolo retto, OTTUSANGOLO quello che ha un angolo ottuso, ACUTANGOLO quello che ha i tre angoli acuti.

22. Tra le figure quadrilatere è QUADRATO quella che è equilatera e rettangola; OBLUNGO quella che è rettangola ma non equilatera; ROMBO quella che è equilatera ma non rettangola; ROMBOIDE quella che ha i lati e gli angoli opposti eguali tra loro, ma non è né equilatera, né rettangola; si chiamino TRAPEZII tutti gli altri quadrilateri.

23. PARALLELE sono rette, le quali sono nello stesso piano, e prolungate all'infinito da ognuna delle due parti, da nessuna delle due parti si incontrano tra loro.

Postulati

1. Si ammetta di poter tirare da ogni punto ad ogni [altro] punto, una linea retta;

2. e di poter prolungare continuamente per diritto una linea retta terminata;

3. e con ogni centro e con ogni distanza, descrivere un circolo;

4. e che tutti gli angoli retti sono eguali tra loro;

5. e che se una retta incontrando due rette, fa gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate all'infinito, si incontrano da quella parte nella quale gli angoli son minori di due retti.

Nozioni comuni

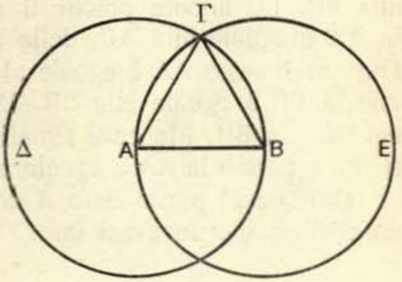
1. Le cose eguali ad una stessa, sono eguali tra loro.
2. E se a cose eguali si aggiungono cose eguali, i tutti sono eguali.
3. E se da cose eguali si tolgono cose eguali, i resti sono eguali.
4. E le cose sovrapponentisi l'una sull'altra, sono eguali tra loro.
5. E il tutto è maggior della parte.

LIBRO PRIMO

1. - *Sopra una retta data terminata, costruire un triangolo equilatero.*

Sia AB la retta data terminata.

Si deve sulla retta AB costruire un triangolo equilatero.



Con centro A e distanza AB si descriva (*P* 3)[6] il circolo BΓΔ, e di nuovo con centro B e distanza BA si descriva (*P* 3) il circolo AΓE, e dal punto Γ in cui i circoli si tagliano tra loro, si conducano (*P* 1) ai punti A, B le rette ΓA, ΓB.

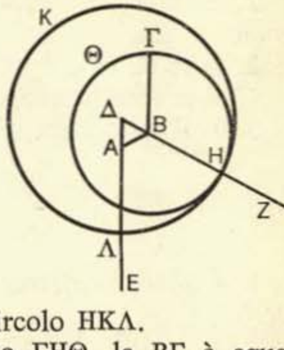
E poiché il punto A è centro del circolo ΓΔB, la AΓ è eguale (*T* 15) alla AB. E di nuovo, poiché il punto B è centro del circolo ΓAE, la BΓ è eguale alla BA (*T* 15). Ma si è già dimostrato che ΓA è eguale alla AB. Dunque ognuna delle ΓA, ΓB è eguale alla AB. Ma cose eguali ad una stessa sono eguali tra loro (*C* 1), dunque la ΓA è eguale alla ΓB. Dunque le tre ΓA, AB, BΓ sono eguali tra loro.

Dunque il triangolo ABΓ è equilatero ed è costruito sulla retta data terminata AB, come dovevasi fare.

---

[6] L'indicazione (*P* 3) rimanda al terzo postulato, (*T 15*) rimanda al termine 15, (*C 1*) rimanda alla prima nozione comune; rimandi analoghi danno, ovviamente, le analoghe indicazioni con altri numeri.

2. - *Ad un dato punto apporre una retta eguale ad una data retta.*



Sia A il punto dato, e sia BΓ la retta data. Si deve al punto A apporre una retta eguale alla retta data BΓ.

Si conduca infatti dal punto A al punto B la retta AB (*P* 1), e si costruisca su di essa il triangolo equilatero ΔAB (1), e si prolunghino per diritto (*P* 2) alle ΔA, ΔB le rette AE, BZ, e con centro B e distanza BΓ si descriva il circolo ΓHΘ (*P* 3), ed ancora con centro Δ e distanza ΔH si descriva (*P* 3) il circolo HKΛ.

Poiché il punto B è centro del circolo ΓHΘ, la BΓ è eguale alla BH. Ed ancora poiché il punto Δ è centro del circolo HKΓ, la ΔΛ è eguale alla ΔH, delle quali la parte ΔA è eguale alla ΔB. Dunque il resto AΛ è eguale al resto BH (*C* 3). Ma si è dimostrato che la BΓ è eguale alla BH. Dunque ognuna delle due AΛ, BΓ è eguale alla BH. Ma cose eguali ad una stessa sono eguali tra loro (*C* 1), e perciò la AΛ è eguale alla BΓ.

Dunque al punto dato A si è apposta la AΛ, eguale alla retta data BΓ, come dovevasi fare.

Vista quale sia l'impostazione che Euclide dà alla sua opera geometrica, vogliamo aggiungere a quanto abbiamo presentato la traduzione del celebre teorema del libro IX con il quale Euclide dimostra che i numeri primi sono in numero infinito.

Tale dimostrazione, di una estrema semplicità ed eleganza, merita forse qualche commento, anzitutto perché in essa, come si vedrà, i numeri interi sono concepiti come rappresentati graficamente, mediante segmenti di cui essi misurano le lunghezze; ma l'aspetto ben piú importante di questo teorema è quello di affermare di fatto la superiorità della logica su ogni possibile esperimento e su ogni possibile calcolo concreto.

In questo ordine di idee quindi l'opera di Euclide si situa, come abbiamo già detto, ad un livello scientifico molto superiore rispetto a tutte le conoscenze matematiche dei popoli antichi che lo precedettero.

Ecco la Proposizione 20 del libro IX:

I numeri primi sono piú numerosi di ogni insieme [7] assegnato di numeri primi.

La dimostrazione che Euclide dà della proposizione potrebbe essere esposta in termini moderni nel modo seguente: siano a, b, c *numeri primi e supponiamo che non ve ne siano altri; questa ipotesi è assurda.*

Consideriamo infatti il numero

$$d = a\,b\,c + 1;$$

questo o è primo oppure ha un divisore primo.

Nel caso in cui sia primo, esso è certamente diverso da a, *da* b, *da* c *e quindi abbiamo trovato un numero primo diverso dai tre considerati. Se non è primo avrà almeno un divisore primo* g; *si verifica subito che tale divisore primo è diverso da* a, *da* b, *da* c; *si conclude quindi ancora che esiste un numero primo diverso da questi tre.*

Pensiamo che una menzione a parte si debba fare delle versioni degli Elementi *di Euclide, che furono moltissime attraverso i secoli e che testimoniano dell'autorità dell'Autore e del tipo di cultura e di interessi dei traduttori.*

Sappiamo che Euclide era noto ai Romani, tanto che Cicerone[8] *lo menziona (*De Oratore, *III); sappiamo anche che Euclide fu conosciuto dagli Arabi, che tradussero la sua opera e che ne fecero numerosissimi commentari.*

La prima versione di Euclide in una lingua occidentale volgare (diversa, cioè, dal latino che era la lingua dei dotti) si deve a Niccolò Tartaglia ed è del 1543. Federico Commandino da Urbino[9] *fece nel 1572 una traduzione di Euclide con commentari in latino e nel 1575 diede la traduzione italiana della sua versione.*

Senza soffermarci su altre versioni, abbiamo riprodotto le prime pagine della versione italiana di Commandino,[10] *insieme con i suoi commenti e le riproduzioni dei commenti antichi (Scolii). Si noterà che spesso dopo la proposizione di Euclide tradotta prende la parola il commentatore, le cui linee sono precedute dalle parole « Il Commandino ».*

---

7 Dal contesto si evince che questo insieme dato si suppone finito.
8 Marco Tullio Cicerone (106-43 a.C.).
9 (1509-1575).
10 *Degli Elementi d'Euclide libri quindici con gli scholii antichi volgarizzati già d'ordine del famosissimo matematico Federigo Commandino da Urbino e con commentarij illustrati* - In Pesaro, appresso Flaminio Concordia, MDCXIX.

DEGLI ELEMENTI D'EVCLIDE

LIBRI QVINDICI.

CON GLI SCHOLII ANTICHI.

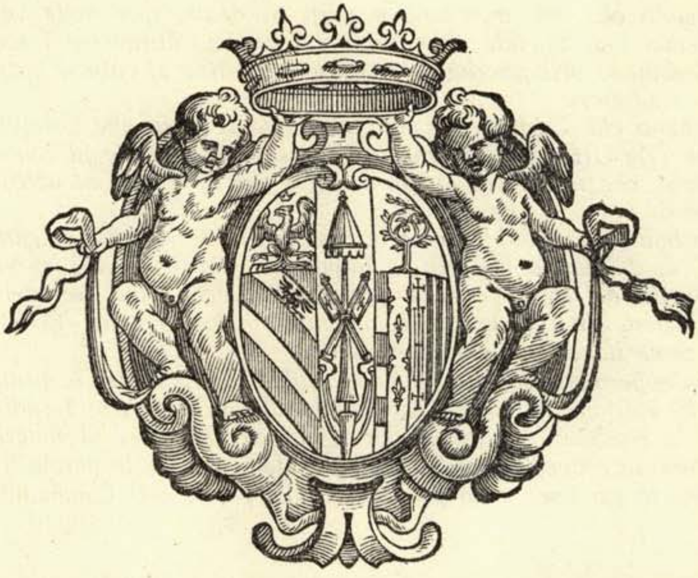
Volgarizzati già d'ordine del famosissimo Matematico FEDERIGO COMMANDINO DA VRBINO; e con Commentarij illustrati.

Et hora con diligenza reuisti, e ristampati:

DEDICATI AL SERENISSIMO

DON FEDERIGO FELTRIO

DELLA ROVERE PRENCIPE D'VRBINO.



IN PESARO, Appresso Flaminio Concordia, MDCXIX.

CON LICENZA DE' SVPERIORI.

Ad instanza di Gio. Antonio Ingegnieri da Fossombrone.

DE GLI ELEMENTI
DI EVCLIDE

Libro Primo.

CON I COMMENTARII
DI FEDERICO COMMANDINO DA VRBINO.

DIFFINITIONI.

I.

IL PVNTO, è quello che non ha parte, ò vero che non ha grandezza alcuna.

IL COMMANDINO.

Euclide per la negatione delle parti ci ha dimoſtrato qual ſia il punto, che è principio di tutta la materia propoſta, percioche eſſendo che li principij ſiano differenti da quelle coſe, delle quali eſſi ſono principij, & eſſendo che le loro negationi dimoſtrino in vn certo modo la natura di quelli, non ſenza cagione hanno ritrouato l'orationi negatiue conuenire ad eſſi principij, il che afferma Proclo con l'autorità di Parmenide. I Pythagorici per vna certa proportione, & tranſlatione diffinirono il pũto eſſere l'vnità che ha poſitione; percioche il pũto ha poſitione, & l'vnità nõ l'ha. Ariſtotele nel quarto libro della ſua diuina philoſophia dice, che quello che è vno, ouero diforma, ouero di quantità è indiuiſibile, quello dunq; che ſecondo la quãtità, come quãtità, nõ ſi può diuidere, quello dico che in tutto è tale, & ſenza poſitione ſi chiama vnità; ma quello che in tutto è tale, & ha la poſitione diceſi pũto: & quello che in vn ſol modo ſi può diuidere, ſuperficie: quello poi che da tutte le parti ſi può diuidere. & che ha le tre dimenſioni è chiamato corpo.

Il punto ſecondo i Pithagorici è lunità, che ha poſitione.

I I

La linea è vna lunghezza ſenza larghezza.

IL COMMANDINO.

Doppo il punto la linea tiene il ſecondo luogo, perche ſi come il punto è della linea, coſi la linea è principio della ſuperficie, della quale ſi dirà qui ſotto. il punto dunque ſi come principio di tutte le grandezze per la negatione ſola, ma la linea parte per l'affirmatione, parte per la negatione ci è ſtata dimoſtrata, quando diſſe, che è vna lunghezza ſenza larghezza. Altri altramente hanno diffinita la linea, percioche alcuni diſſero, ch'ella era fluſſo del punto; alcuni, fra quali fù Ariſtotele, diſſero, che era vna grandezza che in vn ſol modo ſi può diuidere; cioè ſecõdo la lunghezza della linea noi habbiamo notitia, come dice Apollonio, quando ſi miſurano le lunghezze ſole, ò delle vie, ò delle mura, perche all'hora non vi ſi aggiunge ne larghezza, ne groſſezza, ma conſideriamo ſolo vna dimenſione, ſi come quando ſi miſurano i campi riguardiamo la ſuperficie, & quando ſi miſurano i pozzi riguardiamo il ſolido, conciosiacoſa che raccogliendo inſieme tutte le dimenſioni, diciamo eſſere tanto lo ſpatio

Il punto é prĩcipio di tutte le grã dezze.
Varie diffinitioni della linea.
Notitia della linea.
Notitia della ſupficie.
Notitia del ſolido.

Senſo della linea.

Linee ſemplici, & miſte.

del pozzo ſecondo la lunghezza, larghezza, & altezza. Il ſenſo poi della linea haueremo, ſe i termini che diuidono i luoghi illuminati da gli ombroſi conſidereremo coſi nella luna, come nella terra, però, che queſto mezo ſecōdo la larghezza nō hà dimenſione, ma ſecondo la lunghezza, la quale inſieme col lume, & con l'ombra ſi prolunga. delle linee altre ſono ſemplici, altre miſte, le ſemplici ſono la linea retta, & la circolare, benche la retta ſia piu ſemplice, l'altre poi tutte ſono miſte; come le ſettioni del cono, le helici, le conchoidi, le ciſſoidi, & altre ſimili.

III.

I fini della linea ſono i punti.

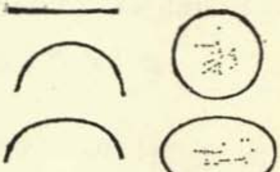
IL COMMANDINO.

Euclide vſa la linea in tre modi.

La linea circolare per ſe ſteſſa nō ha fine alcuno.

La Ellipſe i ſe ſteſſa ſi riuolge come il cerchio.

Vſando in tre modi la linea Euclide, ò vero terminata, & finita dall'vna, & l'altra parte, ò vero infinita, ò dall'vna parte finita e dall'altra infinita; hora ſi tratta di quella, che è da tutte due le parti finita, della quale dice che i fini ſono due punti. ma è da ſapere che la linea circolare per ſe ſteſſa non ha fine alcuno, ma ſe in eſſa ſi conſidera qualche punto, queſto medeſimo ſarà principio, & fine, diuerſamente pero conſiderato. quello che ſi è detto della linea circolare, ſi può dire etiandio della ellipſe, la quale parimente ſi come il cerchio in ſe ſteſſa ſi riuolge. ma prendendoſi vna parte della linea circolare ò della ellipſe, di eſſa non altramente che della linea retta, i fini ſaranno due punti, & queſto medeſimo intender ſi deue delle altre linee curue.



IIII.

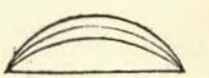
La linea retta è quella che ſi diſtende vgualmēte fra li ſuoi pūti

IL COMMANDINO.

Come Platone diffiní la linea retta.

Diffinitione della linea retta di Archimede.

Vuol Euclide, che la linea retta è quella che contiene diſtanza vguale, cioè quella diſtanza che s'interpone fra li ſuoi punti, percioche quanto l'vn punto è diſtante dall'altro, tanta è la grandezza della linea retta terminata da eſſi punti: & queſto è il diſtenderſi vgualmente fra li ſuoi punti. ſe poi nella circonferenza del cerchio, ò vero in altra qual ſi voglia linea ſi conſidereranno due punti, la portione di quella linea, che s'interpone ſarà aſſai maggiore che la diſtanza delli detti punti. In queſto modo mi pare che Proclo dichiari la diffinitione della linea retta. ma Platone diſſe che la linea retta era quella, i mezi della quale ſi oppongono à gli eſtremi, percioche queſto neceſſariamente auuiene ad eſſi eſtremi che ſono nella linea retta, ma nō già à quelli, che ſono nella circolare, ò altra linea. onde dicono etiandio gli Aſtrologi il Sole ecclisſarſi, & mancare, quando nella medeſima retta linea eſſo, & la luna, & l'occhio noſtro ſi troua, percioche all'hora la luna che ſta nel mezo ſi oppone al detto occhio noſtro. Archimede, come narra Proclo, diſſe che la linea retta era la più breue di tutte l'altre linee c'hanno i medeſimi fini. la qual diffinitione fu accettata dal Campano, oue dice che la linea retta è vna breuiſſima eſtenſione dall'vn punto all'altro, che quelli nelle ſue eſtremità riceue.



V.

La ſuperficie è quella, che ſolamente ha lūghezza, & larghezza.

IL COMMANDINO.

Ha detto che la ſuperficie ſolamente ha lunghezza, & larghezza, percioche ella è ſenza groſſezza,

grossezza. altri dissero che ella era termine del corpo, altri grandezza distante per due interualli, della quale superficie dicono che noi habbiamo cognitione nel misurare i campi & nel distinguere i lor termini secondo la lunghezza & larghezza: & che di essa prendiamo vn certo senso, quando riguardiamo le ombre, imperoche essendo quelle senza alcuna grossezza, poiche non possono penetrare le parti interiori della terra, hanno solo lunghezza, & larghezza. delle superficie altre sono semplici, altre miste. le semplici sono la piana & la sphèrica, l'altre tutte poi sono miste, come la cylindrica, la conica, & quelle che hanno origine dalle settioni del cono, cioè delle figure conoidi, & spheroidi, & altre.

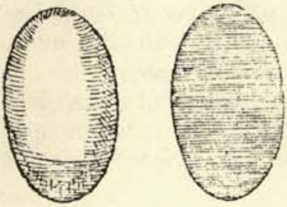
Varie diffinitioni della superficie. Notitia della superficie. Senso della superficie. Superficie semplici, & miste.

VI.

I fini della superficie sono le linee.

IL COMMANDINO.

Come non di tutte le linee i fini sono i punti, così nõ di tutte le superficie i fini sono le linee, percioche la superficie della sphera, ò del spheroide per se stessa non ha fini alcuni tali. se non è segata da piani, perche all'hora per fini ha le linee che dal segamento si fanno. della superficie poi del cerchio, & di quella, che è contenuta dentro della ellipse il fine è vna linea cioè la circonferenza, & la ellipse. ma segandosi haueranno per fini le linee.

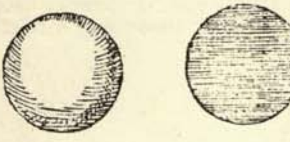


Superficie della sphera, & del sphero de. La superficie del cerchio, & quella che è contenuta dalla elipse.

VII.

La superficie piana, è quella che giace vgualmente fra le sue linee.

IL COMMANDINO.



I philosophi antichi, come testifica Proclo, diceuano la superficie, & il piano essere vna medesima cosa. ma Euclide, & i suoi seguaci dicono, che la superficie è il genere, & la sua specie è l'piano ò vero la superficie piana; si come della linea è specie linea retta. la onde essi diffiniscono il piano, con vna certa proportione alla linea retta, percioche come la linea retta è quella che si distẽde vgualmente fra i suoi punti, ò vero i mezi della quale si oppõgono à gli estremi, ò che è la piu breue di tutte l'altre, c'hanno i medesimi fini, così dissero che la superficie piana era quella, che giace vgualmente fra le sue linee, ò che i mezi della quale si oppõgono à gli estremi, ò che e piu breue di tutte le altre superficie, c'hanno i medesimi fini. & certamente tutte le diffinitioni della linea retta, si possono benissimo accõmodare alla superficie piana. ma se bene le superficie sono di più spetie, Euclide ha voluto diffinire solo la piana, & in questa considerare le figure, e le loro affettioni.

VIII.

L'angolo piano è quella inclinatione, che fanno due linee quando in vn punto si toccano, & non son poste dirittamente fra loro.

IX.

Et quando le linee, che contengono l'angolo sono rette, si chiama tal angolo rettilineo.

In modo abbastanza generico si potrebbe dire che i commenti del Commandino, soprattutto alle proposizioni euclidee che riguardano le « diffinitioni », sono piuttosto di carattere filosofico che matematico. Si veda per esempio il commento di carattere quasi metafisico che il Commandino appone alla celebre frase iniziale degli Elementi *che tratta del punto. Il Commandino riporta l'affermazione di Proclo che si appoggia a Parmenide*[11] *e che afferma che i principi devono avere definizioni negative; e questa osservazione viene applicata alla frase euclidea riguardante il punto, del quale si dice soltanto che non ha parti.*

Questi commenti dimostrano – come abbiamo detto e come vedremo in seguito a proposito di Tartaglia – quale fosse il modo di concepire la geometria che era adottato nel secolo XVI.

Vale la pena di ripetere che oggi simili commenti non si fanno piú, perché la matematica in generale e la geometria in particolare hanno cessato di avere quel carattere quasi magico che ad esse veniva attribuito da una certa scienza e da una certa concezione della cultura.

---

[11] Parmenide d'Elea, nato intorno al 539 a.C., portò importanti e originali contributi alla filosofia greca; per quanto riguarda gli altri matematici citati dal Commandino ricordiamo che: Apollonio Pergeo, considerato il piú originale e profondo dei matematici greci dopo Archimede, nacque verso il 262 a.C. a Perga; Campano da Novara, matematico, astronomo, medico, visse nel XIII secolo.

ARCHIMEDE

Archimede di Siracusa[1] *ha un posto particolare nella storia della matematica per le scoperte geniali che egli fece, non solo nel campo della scienza pura, ma anche nel campo della scienza applicata.*

La testimonianza del contributo che egli diede alla difesa della sua patria assediata dai Romani (con la invenzione degli specchi ustori, mediante i quali incendiava, si dice, le navi nemiche) va posta forse piú nella leggenda che nella storia, cosí come, probabilmente, il racconto della sua morte (per mano di un soldato romano che non riuscí a distoglierlo dalle sue meditazioni), e l'episodio della scoperta del principio, ancora oggi chiamato « di Archimede », che riguarda la spinta esercitata da un fluido su un corpo che vi è immerso, con il grido di gioia « Ho trovato! » (« Eureka ») con il quale manifestò la sua scoperta.

---

[1] Nato intorno al 287 a.C. a Siracusa, studiò ad Alessandria e si dedicò a ricerche di matematica e ingegneria nella sua città natale, dove morí nel 212 a.C.

Resta tuttavia il fatto che egli dimostrò una genialità unica nel risolvere i problemi riguardanti la misura di aree di figure limitate da linee curve (cerchio e segmento di parabola) oppure la misura dei volumi di solidi limitati da superficie curve (per esempio della sfera) e i problemi che ai suoi tempi erano considerati di « alta ingegneria », come quelli riguardanti l'equilibrio dei corpi pesanti e, come già si è detto, dei corpi immersi in un fluido.

*Le pagine che seguono, tratte dall'*Arenario*, hanno un grande interesse per la storia della matematica, tra l'altro perché riguardano un problema che era particolarmente mal risolto nella matematica greca: quello della rappresentazione dei numeri interi.*

Si potrebbe dire che l'insieme di convenzioni mediante le quali i Greci rappresentavano i numeri, con lettere del loro alfabeto alle quali apponevano diversi indici, poi con parole ecc., era molto scomoda; quello che sarà poi adottato dai Romani, per quanto un po' piú razionale, sarà certo ancora insufficiente per una utilizzazione intensiva.

Forse uno dei progressi fondamentali che la civilizzazione occidentale ha fatto nel Rinascimento è stato originato dalla acquisizione delle convenzioni di rappresentazione dei numeri mediante le cifre arabe, trasmesse agli Arabi dagli Indiani.

Qui si può vedere come Archimede si cimenta con un problema che aveva fatto indietreggiare i suoi predecessori ed i suoi contemporanei: contare i granelli di sabbia che potrebbero riempire l'universo, allora concepito come la sfera che sostiene le stelle fisse.

Nella dedica a Gelone[2] *traspare una certa venatura di orgoglio; pensiamo che Archimede avesse tutti i diritti di essere orgoglioso, perché altri avevano rinunciato a risolvere il problema, cavandosela col dire che il numero dei granelli di sabbia era infinito; il che era un modo per dire che non è determinabile.*

Archimede invece anzitutto rappresenta, in modo particolarmente semplice, alcuni numeri grandissimi e poi conta i granelli di sabbia che riempirebbero la sfera delle stelle fisse, appoggiandosi sulle conoscenze che egli aveva a proposito del volume della sfera e su semplici considerazioni di similitudine.

Volendo adottare una certa retorica, si potrebbe parlare qui di una vittoria dello spirito umano; noi ci limitiamo ad osservare quale sia l'apporto della matematica al progresso della conoscenza; laddove l'uomo comune si dichiara vinto, di fronte al problema prima di rappresentare e poi di valutare dei numeri grandissimi che fanno arretrare spaventata l'immaginazione, il matematico di genio affronta il problema e lo risolve.

---

[2] Gelone, figlio di Gerone II, che fu tiranno di Siracusa dal 270 al 216 a.C.

Prima di riportare le parole con le quali Archimede dedica la sua opera a Gelone vorremmo fare due altre osservazioni.

La prima riguarda l'importanza che il mezzo linguistico di espressione delle idee ha sulla formazione delle idee stesse; abbiamo detto infatti che Archimede risolve due problemi e che il primo di essi è quello di rappresentare in modo accettabile dei numeri molto grandi; c'è da pensare infatti che una delle ragioni che scoraggiarono coloro che, prima di lui, pensarono al problema del numero dei granelli di sabbia sia stata anche la inesistenza di mezzi per esprimere questo numero e per rappresentarlo in modo abbastanza maneggiabile; pertanto un primo risultato straordinario di Archimede è proprio quello di aver trovato il mezzo per rappresentare con simboli verbali dei numeri che superano l'abituale capacità di immaginazione.

La seconda osservazione è che non ci si deve aspettare che Archimede fornisca il numero fino alle unità, cosí come si dice per esempio che una città ha 1.435.673 abitanti. Egli è ben conscio dell'ordine di approssimazione che accompagna le sue affermazioni e quindi degli errori inevitabili dai quali sono affetti i suoi calcoli; pertanto egli si limita a dire che il numero che gli interessa non è superiore ad un certo numero che egli sa esprimere, o meglio sta tra due certi numeri.

A ben guardare egli dimostra uno spirito scientifico ben superiore a quello che certi moderni mostrano di avere quando comunicano delle cifre che non hanno significato, o che ne hanno poco, perché manca ogni possibilità tecnica concreta di verificare la loro esattezza: pensiamo per esempio a certi dati statistici, o alle cifre di certi bilanci che esprimono dei numeri che i giornalisti chiamano « astronomici »; sarebbe forse piú onesto dire che un certo numero sta fra altri due, che sono dati con meno cifre ma che hanno un significato piú reale. Si comunicherebbe cosí una idea piú chiara ed esatta di quella che viene chiamata di solito la « precisione matematica »; questa non è la presunzione di non commettere errori, ma la coscienza di conoscere la portata precisa dei propri errori e delle proprie incertezze e di presentarli onestamente, avendo piena consapevolezza delle possibilità della mente umana, ma anche dei suoi limiti.

« Vi sono alcuni, o Gelone, i quali sostengono che il numero dei granelli di sabbia che esistono è infinito; e quando dico "granelli di sabbia" intendo indicare non soltanto la sabbia che è nei dintorni di Siracusa, e nel resto della Sicilia, ma anche tutta quella che si può trovare in una qualunque regione, sia essa abitata oppure disabitata.

« Vi sono altri i quali, pur non pensando che il numero dei granelli di sabbia sia infinito, pensano tuttavia che non si possa rappresentare un numero grande a sufficienza per indicare il numero di tutti i granelli di sabbia.

« E quindi è chiaro che questi ultimi pensano che non si possa dare un nome al numero che rappresenti tutti i granelli di sabbia che possono riempire un volume uguale a quello della Terra, e includendo anche i mari e le regioni depresse, supposte riempite di sabbia fino ad un'altezza che sia piú grande di quella della piú alta montagna.

« Ma io invece cercherò di mostrarti, per mezzo di dimostrazioni matematiche che Tu potrai seguire, che i numeri che io ho rappresentato nella mia opera che ho inviato a Zeusippo,[3] sono molto piú grandi, non soltanto del numero dei granelli di sabbia che potrebbero riempire la Terra, ma addirittura del numero dei granelli di sabbia che potrebbero riempire tutto l'universo.

« Tu sai bene che il nome "universo" è stato utilizzato dagli astronomi per indicare la sfera che ha come centro il centro della Terra e che ha come raggio la distanza dal centro della Terra al centro del Sole.

« Questo è il significato che comunemente gli astronomi attribuiscono al termine "universo". Tuttavia Aristarco di Samo[4] ha scritto un libro, nel quale egli sviluppa alcune ipotesi in base alle quali l'universo risulta essere molte volte piú grande di quanto noi abbiamo detto poco fa. Le sue ipotesi sono che le stelle fisse ed il Sole siano immobili nello spazio e che la Terra giri attorno al Sole lungo una circonferenza della quale il Sole è il centro, mentre la sfera delle stelle fisse, la quale ha lo stesso centro del Sole, è cosí grande che il rapporto tra il raggio della sfera delle stelle fisse e il raggio dell'orbita terrestre ha valore uguale al rapporto tra il centro della sfera e la sua superficie. Ora si vede facilmente che ciò è impossibile; perché, dato che il centro della sfera non ha dimensione alcuna, non è possibile pensare al rapporto tra il centro e la superficie della sfera. Pertanto dobbiamo pensare che Aristarco volesse dire questo: poiché noi pensiamo che la Terra sia come il centro del-

[3] Archimede si riferisce a un'opera, ricordata anche in seguito, intitolata *I principi*, che non ci è pervenuta. Zeusippo risulta noto solo per la corrispondenza con Archimede.

[4] Astronomo greco, vissuto intorno al 270 a.C., famoso per essere stato il primo a sostenere che è la Terra a ruotare attorno al Sole, autore di un breve trattato sulle dimensioni e le distanze del Sole e della Luna.

l'universo, il rapporto tra la Terra e ciò che noi chiamiamo l'universo è uguale al rapporto tra la sfera che contiene il cerchio che è l'orbita della Terra (come egli suppone) e la sfera delle stelle fisse. Infatti egli sviluppa la sua dimostrazione conformemente ad una ipotesi di questo tipo, ed in particolare egli mostra di accettare come ipotesi che la grandezza della sfera nella quale egli suppone che la Terra si muova sia uguale a quella che noi chiamiamo l'"universo".

« Ora io dico che, anche se si immaginasse una sfera grande come quella che Aristarco suppone essere la sfera delle stelle fisse e questa fosse piena di sabbia, dimostrerò che tra i numeri che io ho rappresentato nei *Principi* alcuni superano in grandezza il numero dei granelli di sabbia che riempiono la sfera di cui si parlava, purché si ammettano le seguenti ipotesi:

« 1. - La circonferenza della Terra non è superiore ai 3 milioni di stadi.[5] È vero che qualcuno ha cercato di dimostrare, come certamente Tu sai, che la circonferenza della Terra vale circa 300 mila stadi. Ma io vado piú in là, e ammetto che la circonferenza della Terra non sia piú lunga di 3 milioni di stadi.

« 2. - Il diametro della Terra è piú grande di quello della Luna e il diametro del Sole è piú grande di quello della Terra. In questa ipotesi io adotto le vedute della maggioranza degli astronomi.[6]

« 3. - Il diametro del Sole è circa 30 volte quello della Luna e non piú.[7] È vero che, tra gli antichi astronomi, Eudosso ha dichiarato che il diametro del Sole è circa 9 volte quello della Luna e Fidia mio padre ha detto che è 12 volte, mentre Aristarco ha cercato di dimostrare che il diametro del Sole è piú che 18 volte e meno che 20 volte quello della Luna.

« Ma io vado piú avanti di Aristarco e per dimostrare le mie proposizioni senza ombra di dubbio, io suppongo che il diametro del Sole sia non piú di 30 volte quello della Luna.

« 4. - Il diametro del Sole è maggiore del lato del chiliagono [poligono regolare convesso di 1.000 lati] inscritto nel cerchio massimo della sfera dell'universo. Ho fatto questa ipotesi perché Aristarco ha scoperto che il Sole ha un diametro apparente che è circa

[5] Nel sistema alessandrino lo stadio corrispondeva a 184,85 m (in quello attico a 187,60 m).
[6] Il diametro del Sole è circa 109 volte quello della Terra; quello della Luna è circa 0,27827 volte quello della Terra.
[7] Il diametro del Sole è circa 400 volte quello della Luna.

1/720 del cerchio dello Zodiaco, ed io, da parte mia, ho cercato sperimentalmente di misurare l'angolo che ha il suo vertice nell'occhio ed è sotteso dal Sole ».

In seguito Archimede espone il procedimento da lui seguito per misurare il diametro apparente del Sole, e poi procede alla esposizione del suo metodo per rappresentare i numeri molto grandi.

Partendo dai nomi tradizionali che venivano allora dati ai numeri, i quali si sapevano indicare fino a 10 mila (la miriade), Archimede introduce anzitutto la miriade di miriadi, cioè il numero 100.000.000 = 10^8.

Questo numero gli serve come unità per indicare i numeri di un « secondo ordine », che vanno da 10^8 a 10^{16}; a sua volta questo numero diventa l'unità dei numeri del « terzo ordine », e cosí via, fino a concludere quello che egli chiama il « primo periodo », che comprende i numeri da 1 fino a 10 elevato ad un esponente che è $8 \cdot 10^8$.

Per avere un'idea del numero finale del primo periodo si osservi che, se si volesse rappresentarlo mediante le ordinarie convenzioni che noi utilizziamo per rappresentare i numeri, occorrerebbero 800.000.000 di cifre; ora, sulla base dei circa 3.000 caratteri che stanno nella pagina che stiamo leggendo, occorrerebbero circa 270 volumi, ciascuno di mille pagine come questa.

Archimede poi costruisce il secondo periodo, il terzo periodo e cosí via, fino al periodo 10.000.000. L'ultimo numero dell'ultimo periodo richiederebbe 80.000 milioni di milioni di cifre per essere rappresentato.

Egli poi utilizza le sue misure e le proprietà che conosce a proposito dei volumi della sfera e dimostra che il numero dei granelli di sabbia che riempirebbero la sfera dell'universo è minore di mille unità dell'ordine di numeri del primo periodo, cioè minore di 10^{51}.

Ed inoltre egli calcola che una sfera grande come la sfera che Aristarco pensa essere la sfera delle stelle fisse sarebbe riempita da un numero di granelli di sabbia minore di 10 milioni di volte l'unità dell'ottavo ordine di numeri del primo periodo, cioè minore di 10^{63}.

Riportiamo qui la conclusione:

« Capisco che queste cose, o Gelone, potranno apparire inverosimili alla maggioranza, cioè a coloro che non hanno studiato la matematica; ma coloro i quali hanno una certa familiarità con questa scienza ed hanno posto attenzione alle distanze della Terra, della Luna e dell'intero universo saranno convinti dalla dimostrazione.

« E perciò ho pensato che questo argomento non fosse indegno della Tua considerazione ».

Sarebbe molto difficile dar conto qui di tutti i problemi nella cui soluzione Archimede ha manifestato l'originalità delle sue concezioni e la statura del suo genio. Ci limitiamo pertanto a riportare la introduzione al trattato riguardante la quadratura del segmento di parabola. *In questo passo Archimede tra l'altro enuncia quella proposizione che oggi viene comunemente indicata come « Postulato di Archimede » e che riguarda le grandezze.*

È da notare inoltre che Archimede dichiara esplicitamente che il procedimento con il quale egli giunse a scoprire la proprietà che gli interessa è stato di carattere meccanico, mentre la dimostrazione che egli dà della proprietà è di carattere geometrico. Abbiamo qui una occasione interessantissima per cercare di capire come la fantasia, la intuizione meccanica, la inventiva possano aiutare il matematico nella scoperta; la quale poi viene esposta con i metodi della logica rigorosa e ineccepibile.

Tra l'altro Archimede in questa questione, come in altre che riguardano la misura di superficie non limitate da rette e di solidi non limitati da facce piane, ha dimostrato di essere un autentico precursore dei procedimenti che si affermarono con Newton e Leibnitz e che sono fondamentali per il calcolo infinitesimale.

« Archimede a Dositeo [8] salute.

« Quando ho saputo che Conone,[9] che era mio amico, era morto, ma che tu eri suo amico e quindi anche esperto in geometria, mentre da una parte ho sentito dolore per la perdita di una persona che era non soltanto mio amico ma anche un esperto matematico, mi sono proposto di far conoscere a te, cosí come avrei voluto far conoscere a Conone, un certo teorema geometrico che non era stato dimostrato prima e che ora io ho dimostrato, ma che è stato scoperto da me con i metodi della meccanica e che ora io presento con i metodi della geometria.

« Qualcuno dei geometri dei tempi andati ha cercato di dimostrare che è possibile trovare una figura a contorno rettilineo la cui area fosse uguale a quella di un cerchio dato o di un segmento di cerchio dato; e, quando essi cercarono di determinare l'area limitata dalla sezione di un intero cono e da una retta,[10] cercando di in-

---

[8] Dositeo di Colono, successore di Conone di Samo a capo della scuola matematica alessandrina.

[9] Conone di Samo, astronomo e geometra greco del terzo secolo a.C., successore di Euclide a capo della scuola matematica alessandrina.

[10] Il testo qui appare poco comprensibile.

trodurre dei postulati che non apparivano evidenti a tutti, si riconobbe da parte di molti che il problema non era stato risolto. Ma non so se qualcuno tra i miei predecessori ha cercato di determinare l'area compresa tra una retta e la sezione di un cono retto, problema del quale ho trovato la soluzione.[11]

« Infatti ho dimostrato che un segmento [12] limitato da una retta e da una sezione piana del cono retto [13] è quattro terzi del triangolo che ha la stessa base e la stessa altezza del segmento.

« E per dimostrare questa proprietà ho supposto vero il seguente postulato: che la differenza tra la maggiore e la minore di due aree non uguali tra loro, può, aggiunta su se stessa, superare ogni area assegnata.[14]

« I geometri antichi hanno già utilizzato questa proposizione; perché proprio appoggiandosi su questa hanno dimostrato che i cerchi stanno fra loro in ragione duplicata dei loro diametri,[15] che le sfere stanno tra loro nella ragione triplicata dei loro diametri [16] e che ogni piramide è [di volume uguale a] un terzo del prisma che ha la stessa base e la stessa altezza della piramide; ed infine, introducendo un postulato analogo a quello che io ho enunciato, essi hanno dimostrato che il cono è [di volume uguale a] un terzo del cilindro che ha la stessa base e la stessa altezza.

« E, in conclusione, ognuno di questi teoremi è stato accettato, cosí come lo sono stati quelli che sono stati dimostrati senza il ri-

---

11 Per capire l'enunciato, si deve osservare che Archimede adotta qui la classificazione delle curve sezioni del cono con un piano (curve che sono anche oggi chiamate « sezioni coniche » o piú brevemente e semplicemente « coniche ») che è un poco diversa da quella che oggi è adottata. Infatti oggi noi consideriamo un cono (per esempio per fissare le idee possiamo pensare ad un cono di rotazione) e classifichiamo le curve sezioni piane del cono a seconda che il piano secante sia parallelo a due, ad una sola o a nessuna delle rette generatrici del cono stesso; si ottengono cosí l'iperbole, la parabola e la ellisse, rispettivamente. Invece nell'antichità si assumeva il piano secante perpendicolare ad una delle generatrici del cono, e le curve sezioni venivano classificate a seconda dell'angolo di apertura del cono stesso nel suo vertice. Di conseguenza la sezione del cono avente come angolo di apertura un angolo retto, fatta beninteso con un piano perpendicolare ad una retta generatrice del cono, veniva ad essere una parabola.

12 Cioè una porzione di piano.

13 Cioè da una parabola, secondo quanto abbiamo detto poco fa.

14 Questa proposizione viene oggi comunemente chiamata « Postulato di Archimede ». Essa è valida non soltanto per le aree, ma anche per le grandezze le quali appartengono a vastissime classi, grandezze che oggi vengono chiamate « grandezze archimedee ».

15 Cioè le superficie di due cerchi stanno tra loro come i quadrati dei raggi.

16 Cioè i volumi di due sfere stanno tra loro come i cubi dei raggi.

corso a questo postulato.[17] E poiché il mio lavoro oggi pubblicato ha superato le stesse prove, come le proposizioni che ho ricordato or ora, ho scritto le dimostrazioni e te le invio, anzitutto cosí come sono state trovate per mezzo di considerazioni di meccanica e poi come sono state rigorosamente dimostrate mediante la geometria.

« Ho premesso inoltre alcune proposizioni che riguardano le coniche e che sono utili per le dimostrazioni che vengono in seguito. Salute ».

A proposito di questi discorsi vogliamo ricordare, per concludere il discorso su Archimede, la celebre « lettera a Eratostene »,[18] *nota anche come « Metodo » e ritrovata solamente nel 1906, riportandone alcuni passi.*

« Archimede a Eratostene salute.

« ... Ma poiché, come ho già detto, ti riconosco studioso e maestro eccellente di filosofia che sa apprezzare, quando è il caso, le ricerche matematiche, ho creduto bene esporti e dichiararti in quest'opera le particolarità di un metodo mediante il quale ti sarà possibile acquistare una certa perizia per trattare cose matematiche per mezzo di considerazioni meccaniche.

« Sono persuaso del resto che questo metodo sarà non meno utile anche per le dimostrazioni degli stessi teoremi.

« Infatti a me alcune cose si manifestarono prima per via meccanica, e poi le dimostrai geometricamente, perché la ricerca fatta con questo metodo non comporta una vera dimostrazione.

« Però è certamente piú facile, dopo aver cosí acquistato una certa cognizione delle questioni, trovarne la dimostrazione anziché cercarla senza avere alcuna conoscenza preliminare.

« Per questa ragione, anche in quei teoremi, riguardanti il cono e la piramide, di cui Eudosso[19] trovò per primo la dimostrazione,

---

17 Il senso della proposizione è probabilmente che il postulato appare evidente ed è stato accettato da altri geometri, insieme con le conseguenze che se ne traggono. Pertanto il merito di Archimede starebbe qui nel fatto di aver esplicitamente riconosciuto che la proposizione suddetta era un postulato e quindi non poteva essere dimostrata, e che essa andava esplicitamente enunciata come una proposizione necessaria per il seguito, ma non dimostrata.

18 Eratostene, detto di Alessandria, o anche di Cirene, sua città natale (c. 276-c. 192 a.C.), scrisse di astronomia, matematica ed altro.

19 Eudosso di Cnido (c. 400 - c. 347 a.C.), matematico e astronomo greco.

cioè che il cono è la terza parte del cilindro e la piramide è la terza parte del prisma, aventi la stessa base e altezza eguale, un merito non piccolo dovrebbe attribuirsi a Democrito [20] che per primo enunciò queste proprietà delle figure senza dimostrarle.

« ... In questa occasione ho deciso di esporre per iscritto il metodo... perché sono persuaso che non poca utilità esso arrecherà alla matematica; penso infatti che alcuni dei presenti e dei posteri, mediante questo metodo, possano trovare anche altri teoremi che a me non sono ancora venuti in mente... ».[21]

---

20 Democrito di Abdera (o come sostengono alcuni, probabilmente a torto, di Mileto), nato secondo alcuni verso il 470 a.C. e secondo altri piú tardi, uno dei maggiori scienziati e filosofi greci.

21 Per una traduzione in italiano del « Metodo » rimandiamo a *Il «metodo» di Archimede e le origini del calcolo infinitesimale nell'antichità*, di Enrico Rufini, Milano, Feltrinelli, 1961. Segnaliamo inoltre l'edizione delle *Opere di Archimede* a cura di Attilio Frajese, Torino, UTET, 1964.

CAPITOLO II

Nuovi strumenti per la matematica

INTRODUZIONE

Il Rinascimento, che ha portato ad un risveglio di pensiero e di ricerca in ogni campo, ha influito ovviamente anche sulla matematica, dando inizio ad una evoluzione che ha gradualmente cambiato la fisionomia di questa scienza.

Il primo passo di questo progresso, diventato rapidissimo nei secoli successivi, è stato fatto nel secolo XVI con la fondazione di un ramo fondamentale per la matematica: quello che doveva essere chiamato « Algebra »[1] *e che era stato preceduto dall'importantissimo avvenimento dell'introduzione in Italia e della diffusione in tutto il mondo occidentale delle convenzioni per rappresentare i numeri interi, che gli Arabi avevano tratto dagli Indiani.*

L'attuale familiarità con questi strumenti e con i procedimenti che ne derivano non deve portare a disconoscere l'importanza della loro acquisizione per lo sviluppo non solo della matematica e della scienza ma anche per tutta la vita associata.

Per quanto riguarda le convenzioni per rappresentare i numeri, introdotte in Occidente dai mercanti toscani che erano in contatto con gli Arabi per ragioni commerciali, si può dire che il risveglio del pensiero matematico in Occidente può essere collegato proprio all'introduzione di queste convenzioni e osservare che tutta l'umanità civilizzata le ha progressivamente adottate e che non vi è alcuna ragione per prevedere il loro abbandono; inoltre, per la stretta vicinanza tra i fenomeni della ideazione e quelli della espressione del pensiero, tra le idee astratte e i simboli di cui ci si serve per esprimerle, l'adozione delle dette convenzioni per rappresentare i numeri interi è da considerarsi come uno dei momenti fondamentali del progresso scientifico che ha avuto origine nel Rinascimento.

---

[1] Ricordiamo che « algebra » deriva dall'arabo *al-giabr*, che vuol dire *trasporto*; nel titolo del trattato di *Al-Khuwarizmi* (deformato dal traduttore in *Algorithmi*, dal quale è derivato *algoritmo* con l'abituale significato di procedimento regolare di calcolo) compare anche *al-mukabala* che vuol dire riduzione dei termini simili. Il trattato di *Al-Khuwarizmi* risale alla prima metà del secolo IX dell'era volgare e tratta questioni di aritmetica commerciale e le equazioni di primo e di secondo grado.

Vogliamo osservare esplicitamente che l'importanza di questa adozione sta soprattutto nella rispondenza delle convenzioni alle esigenze di calcolo e di ragionamento: si può dire che ogni popolo ha trovato modo di rappresentare i numeri in relazione alle sue esigenze e ha in un certo modo avuto la sensazione della infinità della serie dei numeri naturali,[2] *ma c'è una certa differenza tra l'arrangiarsi a rappresentare i numeri di fronte a un problema pratico e la risoluzione del problema di rappresentare i numeri in modo da poter eseguire comodamente le operazioni.*

Va quindi riconosciuto, ovviamente con aspetti particolarmente interessanti per noi, il contributo dell'acquisizione delle cifre arabe allo sviluppo della matematica e specificamente, nel periodo che stiamo considerando, alla fondazione dell'algebra e alla costruzione del campo reale e complesso, del quale vedremo i prodromi nei lavori di R. Bombelli.

Per quanto riguarda l'importanza della fondazione dell'algebra, si può osservare che essa può a ragione definirsi grandissima per lo sviluppo del pensiero matematico, e che lo sviluppo del pensiero matematico ha significato anche lo sviluppo del pensiero scientifico in generale: pertanto si può dire che gli studi sull'algebra del XVI secolo hanno portato a un cambiamento nel modo di pensare e di procedere di tutta l'umanità.

Oggi riconosciamo senza difficoltà gli stretti legami tra lo sviluppo dell'algebra e il progresso del simbolismo matematico: appare quindi particolarmente interessante considerare gli sforzi per la conquista di risultati algebrici e del necessario simbolismo.

Qui deve essere ricordato il contributo portato dai matematici italiani (ai quali risulta di fatto interamente dedicato questo capitolo) con le formule risolutive delle equazioni di terzo e di quarto grado,

---

2 L'esploratore americano Leonard Clark, nel suo libro *I fiumi scendevano a oriente* (Milano, Garzanti, 1969) racconta un episodio che è abbastanza interessante a proposito della simbolizzazione dei numeri da parte dei popoli primitivi.
Egli racconta ciò che si è verificato quando un indigeno, che prima di allora non aveva contato piú di 20 e quindi si era servito delle dita delle mani e dei piedi, si trovò a dover rappresentare un numero superiore a quello che egli aveva conosciuto fino ad allora.
« Nel contare la pescata, tra pesci grossi e pesci piccoli, Tomàs arrivò, tutto concentrato, sino al decimo dito delle mani, poi continuò con le dita dei piedi, e cosí, miracolosamente, toccò « venti ». Ora questo è il numero massimo sino al quale sanno contare gli indios, e io ero curioso di vedere come sarebbe finita. Ma Tomàs era un uomo di risorse. Si fermò, facendomi un sorrisone; poi, con un dito unto e bisunto tracciò un gran segno sulla parete e... ricominciò daccapo. Quando ebbe finito, sul muro si vedevano quattro segni, ma crescevano tre dita... ».

che costituiscono i progressi piú importanti della matematica dopo secoli di silenzio e di stasi.

Oggi sappiamo che queste formule possono essere considerate addirittura come una specie di colonne d'Ercole della teoria delle equazioni, grazie a un risultato che doveva essere conquistato solo nel secolo XIX, con la dimostrazione del teorema che viene talvolta indicato con i nomi di Ruffini e di Abel,[3] *il quale assicura che le radici di una equazione algebrica di grado superiore al quarto non possono essere espresse in generale come funzioni dei coefficienti mediante radicali.*

Tra i tanti documenti dell'epoca che si potrebbero presentare, abbiamo scelto alcuni Autori che riteniamo particolarmente significativi dei fatti storici, anche se non rappresentano tutta la matematica dell'epoca considerata: Leonardo Pisano, Niccolò Tartaglia, Gerolamo Cardano, Rafael Bombelli.

Inoltre abbiamo riportato anche qualche passo dei Cartelli di matematica disfida, *che costituiscono un episodio molto interessante anche se non unico della storia della scienza; episodio che riflette non soltanto il clima di fioritura improvvisa di nuovi metodi e di scoperte significative, ma anche per certi aspetti la struttura della società del tempo, in particolare per quanto riguarda il posto che la scienza e gli scienziati avevano in essa.*

Questo clima era tale che i maestri degli studi ritenevano opportuno sfidarsi a concorsi pubblici, sfoderando formule e metodi che erano considerati come una specie di ricette magiche e tenuti accuratamente segreti, per conquistare fama e prestigio.

In questo ordine di idee e secondo questo aspetto, l'algebra conserva in questa epoca il carattere di un procedimento per la risoluzione di problemi misterioso e quasi superiore alle forze umane, con aspetti di magia, grazie anche alla figura e agli atteggiamenti di alcuni dei contendenti.

Qui viene naturale ricordare G. Cardano, di cui parleremo, che riuniva in sé i caratteri dello scienziato, con idee sorprendentemente moderne per il suo tempo, e del mago o stregone, con le relative pose tipiche.

Nell'importanza che veniva data alla capacità di risolvere problemi, non necessariamente appartenenti alla classe di quelli che siamo abituati a considerare come problemi matematici, possiamo scorgere un

[3] Paolo Ruffini (1765-1822), italiano, medico e matematico; pubblicò la trattazione che qui interessa in varie memorie tra il 1799 e il 1806. Niels Henrik Abel (1802-1827), norvegese, pubblicò il risultato che qui interessa nel 1824. Ricordiamo che il creatore della teoria generale delle equazioni è il francese Evariste Galois (1811-1832).

modo di vedere la matematica come processo di razionalizzazione e di formalizzazione applicato a questioni di tipi molto vari.[4]

In ciò possiamo riconoscere un segno di quei caratteri di attualità, nei riguardi del tempo in cui viene coltivata, che la matematica ha, come si è accennato, prima di essere sistemata in scienza astratta e distaccata dalla storia e dalle sue vicende.

[4] Ritroveremo questo atteggiamento anche in seguito, e in particolare in Eulero.

LEONARDO PISANO

Il nome di Leonardo Pisano[1] *ha un posto importantissimo nella storia della matematica e si potrebbe dire anche di tutta la civilizzazione occidentale; a lui infatti viene attribuito il merito di aver diffuso le convenzioni indiane per la rappresentazione dei numeri, convenzioni che oggi sono adottate da tutto il mondo civile.*

Si può dire che questo fu il primo passo verso la lunga strada che conduce alla scienza modernamente intesa; abbiamo già detto parlando di Archimede e nella introduzione a questo capitolo che la scelta di simboli opportuni e comodi per rappresentare le idee è spesso una condizione fondamentale per la fortuna delle idee stesse.

Le convenzioni oggi adottate per rappresentare i numeri sono molto piú comode di quelle che erano state adottate dai Romani e che erano in uso all'epoca in cui Leonardo Pisano scriveva; particolarmente comoda è la possibilità di dare delle regole semplici per le operazioni, valide anche per numeri molto grandi e in certo modo, per cosí dire, meccaniche ed automatiche.

Gli insegnamenti che Leonardo Pisano dà ai suoi contemporanei sono contenuti nel celebre Liber abaci, *di cui diamo qui di seguito la traduzione di alcuni brani.*

È interessante osservare che ciò che Leonardo espone costituisce per i giovani di oggi un insieme di conoscenze che viene acquisito durante la scuola elementare; tuttavia all'epoca di Leonardo queste nozioni costituivano la frontiera piú avanzata della scienza.

[1] Nato intorno al 1170 e morto nel 1230, è noto anche come Leonardo di Pisa e Leonardo Fibonacci (figlio di Bonifacio); della sua vita si sa poco, attraverso osservazioni casuali inserite nei suoi lavori, il piú noto dei quali è il *Liber abaci,* redatto in due versioni nel 1202 e nel 1228.

« Incomincia il libro dell'abaco, composto da Leonardo figlio di Bonifacio Pisano nell'anno 1202 ».

Leonardo Pisano incomincia dedicando il suo libro a Michele Scotti, suo maestro, e narrando come gli avvenne di entrare in contatto con le convenzioni di rappresentazione dei numeri che erano usate dagli Indiani, perché dovette aiutare suo padre, che era funzionario delle dogane pisane; come apprezzò la comodità e la razionalità di queste convenzioni, e come perfezionò la conoscenza di questa scrittura dei numeri in occasione dei viaggi che fece. Egli dichiara anche di avere perfezionato queste sue conoscenze sui numeri studiando l'opera di Euclide.

Interessante appare il passo seguente del « prologo » del libro, in cui si parla dell'esercizio che deve essere praticato da tutti quelli che vogliono apprendere l'arte dei numeri, in modo che la manovra e l'applicazione delle cifre diventi in certo modo automatica:

« ... Pertanto coloro i quali vogliono acquisire bene la pratica di questa scienza, debbono continuamente applicarsi all'esercizio di essa con pratica diuturna. Infatti, quando la scienza, con la pratica, è diventata un "habitus", la memoria e l'intelligenza si accordano in modo tale con le mani e le cifre, che arrivano al risultato insieme, quasi con un medesimo impulso spontaneo e naturale; e quando lo studioso avrà presa l'abitudine, allora gli sarà facile arrivare gradualmente alla perfezione ».

Leonardo presenta poi il piano della sua opera e introduce nel primo capitolo le convenzioni fondamentali.

Incomincia il primo capitolo

Le nove cifre utilizzate dagli indiani sono queste: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Con queste nove cifre e con questo altro segno « 0 » che in arabo si chiama « zero » [2] si scrive qualunque numero, come si mostrerà tra poco. Infatti il numero è una collezione di unità, che può accrescersi in modo infinitamente crescente, secondo una gerarchia di gradi. Il primo di questi gradi consta di unità, che vanno dall'uno al dieci. Il secondo è costituito dalle decine, che vanno dal dieci fino al cento. Il terzo è costituito dalle centinaia, che vanno dal

[2] La parola latina utilizzata da Leonardo è « zephyrum ».

cento fino al mille. Il quarto è costituito dalle migliaia, che vanno da mille a diecimila; e cosí si procede indefinitamente con la gerarchia dei gradi, ciascuno dei quali consta (di numeri) che sono dieci volte piú grandi di quelli del grado precedente.

Nella rappresentazione dei numeri il primo grado incomincia da destra; il secondo segue il primo verso sinistra; il terzo segue il secondo. Il quarto segue il terzo e cosí via sempre verso sinistra ogni grado segue quello che lo precede.

Dunque una cifra che sta nel primo grado rappresenta se stessa; per esempio se nel primo grado c'è la cifra « 1 », questa rappresenta il numero uno; se c'è la cifra « 2 » questa rappresenta il numero due, e cosí via per le cifre che seguono, fino al numero nove.

Invece le nove cifre che vengono messe nel secondo grado rappresentano tante decine quante sarebbero le unità che rappresenterebbero nel primo grado.

Cosí la cifra « 1 » messa al secondo grado rappresenta il dieci; la cifra « 2 » rappresenta il venti; la « 3 » rappresenta il trenta e cosí via; la « 9 » rappresenta il novanta.

Una cifra che è messa nel terzo grado rappresenta tante centinaia quante sono le decine che rappresenterebbe se fosse nel secondo grado o le unità che rappresenterebbe se fosse nel primo.

Leonardo procede cosí presentando le convenzioni di scrittura e poi quelle di lettura dei numeri; infine egli detta delle regole per rappresentare i numeri servendosi delle dita delle mani.

In seguito egli presenta le tavole della addizione e della moltiplicazione dei numeri; è interessante osservare che egli dà soltanto la metà delle tavole, e che fa ciò sfruttando le proprietà commutative delle operazioni.

Cosí dopo aver presentato le somme del 3 con tutti gli altri numeri (minori di 10) ed aver trovato che si ha

$$3 + 5 = 8,$$

quando presenta la tabella che riguarda il numero 5 non si cura piú di dare il risultato della somma del 5 col 3.

Leonardo presenta poi le regole per le operazioni aritmetiche, dando le prescrizioni per « mettere in colonna » e per tenere a memoria i riporti che sono analoghe (in gran parte) a quelle che ancora oggi insegniamo nelle nostre scuole elementari, e sulle quali non ci pare quindi necessario soffermarci.

GEROLAMO CARDANO

Gerolamo Cardano[1] *fu un personaggio interessantissimo del secolo XVI. Medico, astrologo, filosofo (nel senso in cui questo termine era assunto nell'epoca), egli ha il suo posto nella storia della matematica come colui che ha dato la formula per la risoluzione della equazione di terzo grado;*[2] *tale formula in moltissimi testi viene ancora oggi chiamata « formula di Cardano ». Tuttavia la questione storica è abbastanza intricata e non è facile dirimerla: pare che una formula per la soluzione di un caso della equazione cubica sia stata scoperta da Scipione del Ferro, matematico bolognese, verso l'anno 1515.*

La conoscenza di questa formula pervenne poi agli scolari di del Ferro, uno dei quali, Antonio Maria Fiore, sfidò nel 1535 Niccolò Tartaglia ad una pubblica contesa, nella quale egli si proponeva di sfruttare la formula di del Ferro per sconfiggere Tartaglia. Tuttavia quest'ultimo, essendo a conoscenza del fatto che il problema poteva essere risolto, arrivò a determinare per conto suo la formula risolutiva prima della contesa pubblica. Pare che Tartaglia abbia comunicato la sua scoperta al Cardano, ma impegnando costui al segreto; invece, secondo la versione di Tartaglia, Cardano pubblicò la formula.

Ciò dette luogo ad una polemica tra i due, che coinvolse anche Ludovico Ferrari,[3] *scolaro di Cardano; tra l'altro la polemica dette luogo anche ai* Cartelli di matematica disfida *di cui diremo in seguito.*

Per dare un'idea dello stato della scienza a quel tempo, diremo che non esisteva ancora una convenzione comoda, razionale, universalmente accettata, per i simboli dell'algebra; di conseguenza le formule dovevano essere esposte con parole (come vedremo in seguito a proposito di Tartaglia) ed i calcoli dovevano essere descritti a parole o con lunghe circonlocuzioni.

Tra l'altro la manovra dei numeri negativi non era universalmente accettata e quindi invece di dare la *(unica) formula per la equazione*

---

[1] Nato a Pavia nel 1501, ebbe vita travagliata ed avventurosa; fu lettore di geometria, aritmetica e astronomia presso le Scuole Palatine di Milano dal 1534 e insegnò medicina a Pavia dal 1543; passò a Bologna nel 1562 e morí a Roma nel 1576.

[2] Ricordiamo che già i Greci sapevano risolvere l'equazione di II grado, con operazioni geometriche, e che alcune equazioni di III grado furono da essi ricondotte a operazioni geometriche, le quali tuttavia non possono dare la risoluzione dell'equazione generale.

[3] Nato a Bologna nel 1522, prese il posto di Cardano a Milano, poi passò a Mantova e all'Università di Bologna; morí nel 1565. È noto soprattutto per la sua risoluzione dell'equazione biquadratica.

di terzo grado, venivano date varie formule, ognuna delle quali si riferiva ad un caso di equazione; per esempio si distingueva la regola per risolvere la equazione cubica nel caso « cubo piú cose eguale a numero », cioè nel caso in cui la equazione stessa si potrebbe scrivere nella forma seguente

$$x^3 + ax = N \quad (a,\ N \text{ positivi})$$

dall'altro caso « cubo eguale a cose piú numero », che si potrebbe scrivere nella forma

$$x^3 = ax + N \quad (a,\ N \text{ positivi})$$

Dopo queste premesse, presentiamo alcuni passi del trattato, scritto in latino, che Cardano intitolò Artis magnae, sive de regulis algebraicis, liber unus *e che è anche noto come* La grande arte. *Cominciamo con la versione di Cardano della scoperta della formula risolutiva della equazione cubica, che è riportata nel primo capitolo.*

Nei nostri giorni Scipione del Ferro di Bologna ha risolto il caso di « cubo e cose eguale a numero » [4] con una impresa molto elegante ed ammirevole.

Poiché quest'arte sorpassa ogni capacità e sottigliezza di mente umana ed è invece un autentico dono del cielo e una prova delle possibilità della mente umana, chiunque riesce in questa impresa crederà che non vi è nulla che egli non possa comprendere.

In concorrenza con del Ferro, il mio amico Niccolò Tartaglia di Brescia, mal tollerando di essere superato, risolse lo stesso caso, in occasione di una disputa che egli ebbe con Antonio Maria Fiore, scolaro di del Ferro, e, mosso dalle mie molte sollecitazioni, mi comunicò il procedimento.

Poiché io ero stato fuorviato dalle parole di Luca Pacioli,[5] il quale aveva affermato che non si poteva trovare una formula piú generale di quella scoperta da lui,[6] nonostante le molte e grandi sco-

---

[4] Cioè l'equazione che può essere data nella forma

$$x^3 + ax = N \quad (a,\ N \text{ positivi}).$$

[5] Luca Pacioli, o Paciolo (1445-1509), italiano, frate, diffuse, dopo due secoli e mezzo, l'opera di Leonardo Pisano e la sua *Summa di Aritmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità*, stampata in Venezia nel 1494, può essere considerata il punto di partenza di Cardano e degli altri algebristi italiani del 1500.

[6] Si tratta forse delle equazioni del tipo

$$x^4 + bx^2 = ax \quad \text{e} \quad x^4 + ax = bx^2 \quad (a,\ b \text{ positivi}),$$

che Luca Pacioli aveva affermato essere « impossibili ».

perte che, come è noto, avevo già fatto, avevo perso la speranza di andare piú avanti.

Ma poi, dopo aver ricevuto la soluzione di Tartaglia, e mentre stavo cercando la dimostrazione di questa, arrivai a capire che c'erano molte altre cose da scoprire.

Proseguendo in questo pensiero e con speranza sempre crescente, ho scoperto anche le formule riguardanti gli altri casi, in parte da solo e in parte con l'aiuto di Ludovico Ferrari, già mio scolaro.

D'ora innanzi le cose che comunicherò saranno date con il nome dei loro scopritori; quelle che saranno comunicate senza nome, sono mie scoperte.

Le dimostrazioni, salvo quelle tre di Maometto[7] e le due di Ludovico, le altre sono tutte mie. Ciascuna è presentata in modo indipendente e munita di un esempio pratico.

Benché si possa aggiungere una lunga serie di regole a quelle qui esposte, noi qui concludiamo il nostro discorso con la equazione cubica, toccando soltanto in modo episodico le altre. Poiché una « positio » (prima potenza) può essere rappresentata da una lunghezza, un quadrato può essere rappresentato da una superficie, un cubo può essere rappresentato da un volume, sarebbe follia cercare di andare oltre. La natura non lo permette.[8]

Dopo qualche riga Cardano prosegue:

Occorre ora ricordare che esistono delle potenze (di esponente) pari e potenze (di esponente) dispari. Il quadrato, il quadrato del quadrato, il cubo del quadrato e cosí via procedendo sono pari, mentre la prima potenza,[9] il cubo, la quinta e la settima potenza le chiamiamo dispari. Inoltre il 9 si può ottenere tanto da 3 che da -3, poiché meno per meno dà piú. Ma nel caso delle potenze dispari ciascuna conserva la sua natura: non è un numero positivo

---

7 Si tratta di Maometto, figlio di Mosè l'Arabo, morto nell'anno 840, uno degli algebristi arabi.

8 Si può constatare ancora una volta la influenza della rappresentazione dei numeri mediante immagini geometriche, rappresentazione che trae la sua origine dalla matematica greca.
Ovviamente con queste convenzioni risulta impossibile rappresentare geometricamente una potenza superiore al cubo; questa difficoltà ha avuto la sua importanza nello sviluppo dell'algebra.

9 « La cosa », dice Cardano.

a meno che non derivi da un vero numero, ed un cubo che ha un valore negativo, ovvero ciò che chiamiamo un *debito*, non può essere ottenuto da un vero numero.[10]

Diamo ora la regola espressa verbalmente da Cardano per risolvere un caso della equazione cubica, cioè quella che nella nomenclatura del tempo veniva chiamata « cubo eguale a cose piú numero » e che può essere scritta nella forma

$$x^3 = ax + N \quad (a,\ N \text{ positivi}).$$

La regola si trova nel cap. XII della Grande arte.

Regola I. La regola è questa: se il cubo di un terzo del coefficiente della « cosa »[11] non è piú grande del quadrato della metà del « numero »,[12] si sottragga il primo dal secondo, si aggiunga la radice quadrata della differenza ottenuta alla metà del « numero » e di nuovo si sottragga la stessa radice dalla stessa metà, e si avrà un « binomio » ed una « apotome »;[13] la somma delle radici cubiche di questi due dà la soluzione.

Per usare le formule odierne, si ha che, se è

$$\left(\frac{a}{3}\right)^3 \leqslant \left(\frac{N}{2}\right)^2$$

si hanno il « binomio »

$$\frac{N}{2} + \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}$$

e la « apotome »

$$\frac{N}{2} - \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}$$

---

[10] Si trae da queste espressioni che all'epoca di Cardano si conoscevano alcune regole fondamentali dell'algebra dei numeri relativi, come quella che vuole che il prodotto di due numeri negativi sia un numero positivo; tuttavia si aveva ancora qualche incertezza nella interpretazione del significato dei numeri negativi, tanto che i numeri positivi venivano chiamati *numeri veri*, mentre un numero negativo veniva interpretato come un *debito*.

[11] L'incognita.

[12] Il termine noto.

[13] Con vocabolo derivato dal greco, vale a dire la differenza.

e la soluzione

$$\sqrt[3]{\frac{N}{2}+\sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{N}{2}-\sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

Secondo la sua promessa, Cardano dà un esempio numerico della sua regola, che scriviamo con le notazioni moderne.

Per esempio, sia da risolvere la equazione

$$x^3 = 6x + 40$$

Si faccia il cubo di 2, che è il terzo del coefficiente di x, e si ottiene cosí 8; si sottragga questo da 400, che è il quadrato del 20 che è la metà del « numero », e si ottiene 392; la radice quadrata di questa assommata a 20 dà (il « binomio »)

$$20 + \sqrt{392}$$

e sottratta da 20 dà (la « apotome »)

$$20 - \sqrt{392},$$

e la somma delle radici cubiche di questi

$$\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}$$

è il valore di x.

Cardano prosegue nell'esporre altre regole per altri casi di equazioni; estremamente interessante è l'insieme di accorgimenti che egli adotta per trasformare le equazioni e quindi per utilizzare le regole che egli ha già stabilito per la loro applicazione ad altri casi, che a prima vista si presenterebbero come nuovi.

È anche interessante osservare che, nonostante le incertezze di cui abbiamo parlato a proposito dei numeri negativi, egli lavora spesso con tali numeri, e addirittura si spinge fino a lavorare con i numeri che noi oggi chiamiamo « immaginari » e che egli presenta come radici quadrate di numeri negativi.

Soltanto Rafael Bombelli giungerà a trattare in modo rigoroso e generale questi nuovi enti, ma è interessante osservare dal vivo come queste scoperte nascano. Il passo che segue, che scriviamo con le notazioni moderne, è tratto dal capitolo XXXVII della Grande arte.

PROBLEMA I

La dote della moglie di Francesco è di 100 aurei maggiore del patrimonio di Francesco ed il quadrato della dote è di 400 superiore al quadrato del patrimonio stesso. Trovate la dote e il patrimonio.

Supponiamo che Francesco abbia $-x$; quindi la dote della moglie vale $100 - x$. Si faccia il quadrato delle parti, ottenendo cosí x^2 e $10.000 + x^2 - 200\,x$. La differenza tra queste è di 400 aurei.

Cardano è quindi condotto dal problema a risolvere la equazione algebrica che, con le notazioni odierne, potrebbe essere scritta nella forma

$$x^2 + 400 + 200\,x = 10.000 + x^2$$

Egli cosí trova che Francesco ha —48, cioè ha un debito *di 48 aurei nei riguardi della moglie.*

Dopo questa interpretazione delle radici negative di una equazione, interpretazione che ha quindi una validità legata al problema concreto, Cardano si cimenta anche con i problemi che coinvolgono numeri immaginari; sempre nello stesso capitolo della Grande arte *si ha:*

Regola II. La seconda specie di ipotesi di negativo coinvolge la radice quadrata di un numero negativo. Ne darò un esempio: supponiamo che si dica: si divida il 10 in due parti tali che il loro prodotto è 30 oppure 40; è chiaro che la cosa è impossibile. Nondimeno faremo cosí: dividiamo il 10 in due parti uguali, facendo ciascuna uguale a 5. Facciamone il quadrato, il che fa 25. Sottraiamo il 40 dal 25 cosí ottenuto, come ho mostrato nel capitolo sulle operazioni del sesto libro, lasciando un resto di -15, la radice quadrata del quale, aggiunta al 5 o sottratta dal 5, dà le due parti il prodotto delle quali è 40. Queste saranno:

$$5 + \sqrt{-15} \quad \text{e} \quad 5 - \sqrt{-15}\,.$$

NICCOLÒ TARTAGLIA

Niccolò Tartaglia (1499-1557), bresciano, fu uno dei piú importanti matematici del secolo XVI: ricordato anche per aver dato la prima traduzione dell'opera di Euclide in una lingua occidentale vivente, egli apportò dei contributi di estrema importanza all'algebra, alla meccanica razionale, ed alla matematica pura ed applicata, cosí da poter essere considerato una delle figure piú importanti della scienza del suo tempo.
Prima di esporre questi contributi, vogliamo soffermarci un poco sulla figura umana di Niccolò Tartaglia, perché riteniamo che la conoscenza di questa sia utile per capire il suo modo di procedere nell'attività scientifica.
Alcuni particolari della sua biografia (tutto sommato non troppo importanti) non sono certi, come per esempio l'anno della sua nascita[1] *e il fatto che avesse oppure non avesse un cognome;*[2] *ma è certo che egli nasceva da una famiglia poverissima, che era di bassa statura come il padre Michele, che i traumi e le difficoltà dell'infanzia gli diedero un carattere litigioso. A questo proposito vogliamo ricordare che Rafael Bombelli nella prefazione alla sua* Algebra *scrive di Tartaglia:*

« ... come quello il quale di sua natura era cosí assuefatto a dir male, che all'hora egli pensava di haver dato honorato saggio di sé, quando che di alcuno havesse sparlato... ».

Tartaglia stesso ha raccontato, in una lingua non dotta ma vivissima, la propria infanzia povera e l'episodio della violenza da lui subita, che gli procurò il difetto di pronuncia da cui gli derivò il soprannome che divenne un nome celebre nella storia della scienza. Il racconto sta in una pagina autobiografica del libro VI dei Quesiti et inventioni diverse;[3] *in questa pagina egli risponde alle domande di Gabriele Tadino, Cavaliere di Rodi e Priore di Barletta (che nell'opera è indicato con « P », mentre lo stesso Tartaglia è indicato con « N »).*

---

1 L'abituale indicazione del 1499 per suo anno di nascita è basata su uno stato di famiglia che, in data 1529, attribuisce a Tartaglia l'età di 30 anni.
2 Secondo alcuni aveva il cognome Fontana: infatti nel suo testamento (del 1557) nomina il fratello Zampiero di cognome Fontana.
3 Nella maggior parte dei casi i quesiti sono esposti in forma di dialogo, in cui Tartaglia risponde a interlocutori che possono variare da dialogo a dialogo. L'opera è del 1546.

P. [...] Ditemi anchora, come se chiamava vostro padre. **N.** Mio padre hebbe nome Michele. Et perche la natura non gli fu manco avara in dare à sua persona grandezza conveniente, di quello che fu la fortuna in farlo partecipe di suoi beni, fu chiamato Micheletto. **P.** Certamente se la natura fu alquanto avara, in dare alla persona di vostro padre grandezza conveniente, neanche con voi è stata molto liberale. **N.** Io me ne allegro, perche l'esser di persona cosi piccolo, mi fa testimonianza che veramente fui suo figlio, perche anchor che il non mi lasciasse al mondo, à me con un'altro mio fratello, e due sorelle, quasi salvo, che l'esser per buona memoria de lui, mi basta haver sentito à dire da molti che il conosceva e praticava, che egliera huomo da bene, della qual cosa molto piu me ne contento, e allegro di quello haveria fatto se mi havesse lasciato dimolta facolta con un tristo nome. **P.** Che essercitio faceva vostro padre. **N.** Mio padre teneva un cavallo, e con quello correva alla posta ad istantia di Cavallari da Bressa,[4] cioe portando lettere della Illustrissima Signoria, da Bressa, à Bergamo, à Crema, à Verona, e altri luochi simili. **P.** Di che casata se chiamava. **N.** Per Dio che io non so, ne me aricordo de altra sua casata, ne cognome, salvo che sempre il sentei da piccolino chiamar simplicemente Micheletto Cavallaro, potria esser che havesse havuto qualche altra casata, over cognome, ma non che io sappia, la causa è, che il detto mio padre mi morse[5] essendo io di eta de anni sei, nel circa, e cosi restai io, e un'altro mio fratello (poco maggior di me) e una mia sorella (menora di me) insieme con nostra madre vedova, e liquida di beni della fortuna, con la quale, non poco dapoi fussemo dalla fortuna conquassati, che à volerlo raccontar faria cosa longa, la qual cosa mi dete da pensar in altro che de inquerire di che casata se chiamasse mio padre. **P.** Non sapendo di che casata si chiamasse vostro padre, perche ve chiamati cosi Nicolo Tartaglia. **N.** Io ve diro, quando che li Francesi saccheggiorno Bressa, nel qual sacco fu preso la bona memoria del Magnifico messer Andrea Gritti (à quel tempo Proveditore) e fu menato in Franza, oltra che ne fu svalisata la casa (anchor che poco vi fusse) ma piu, che essendo io fuggito nel domo di Bressa insieme con mia madre, e mia sorella, e molti altri huomini, e donne della nostra contrata, credendone in tal luoco esser salvi almen della per-

[4] Brescia.
[5] Morí.

sona, ma tal pensier ne ando falito, perche in tal chiesa, alla presentia di mia madre mi fur date cinque ferite mortale, cioe tre su la testa (che in cadauna la panna del cervello si vedeva)[6] e due su la fazza,[7] che se la barba non me le occultasse, io pareria un mostro, fra le quale una ve ne haveva traverso la bocca, e denti, la qual della massela, e palato superiore me ne fece due parti, e el medesimo della inferiore: per la qual ferita, non solamente io non poteva parlare (salvo che in gorga,[8] come fanno le gazzole) ma non che poteva manzare, perche io non poteva movere la bocca, nelle massele in conto alcuno,[9] per esser quelle (come detto) insieme con li denti tutte fracassate, talmente, che bisognava cibarme solamente con cibi liquidi, e con grande industria. Ma piu forte che à mia madre, per non haver cosi il modo da comprar li unguenti (non che da tuor medico) fu astretta a medicarme sempre di sua propria mano, e non con unguenti, ma solamente con el tenermi nettate le ferite spesso, e tolse tal essempio dalli cani, che quando quelli si trovano feriti si sanano solamente con el tenersi netta la ferita con la lingua. Con la qual cautella, in termine di pochi mesi me ridusse à bon porto, hor per tornare al nostro proposito, essendo io quasi guarrito di tale, et tai ferite, stetti un tempo, che io non poteva ben proferire parole, ma sempre balbutava[10] nel parlare, per causa di quella ferita à traverso della bocca, e denti (non anchor ben consolidata) per il che li putti[11] della mia eta con chi conversava, me imposero per sopra nome Tartaglia. Et perche tal cognome me duro molto tempo, per bona memoria di tal mia disgratia, me apparso de volermi chiamare Nicolo Tartaglia. **P.** Di che eta erate[12] voi a quel tempo. **N.** De anni 12 vel circa. **P.** Certamente la fu cosa molto crudela à ferire un putto di quella eta, avisandovi, che mi meravigliava di tal vostro stranio cognome, perche à me mi pareva di non haver mai alduto[13] ne sentito à nominar una tal casata in Bressa. **N.** La cosa sta precisamente, come ho narrato à vostra Reverentia. **P.** Che[14] fu vostro

---

6 Si vedeva la materia cerebrale.
7 Faccia.
8 Gola.
9 Né le mascelle in alcun modo.
10 Balbettavo.
11 Ragazzi.
12 Eravate.
13 Udito.
14 Chi.

precettore. **N.** Avanti, che mio padre morisse, fui mandato alquanti mesi à scola di leggere, ma perche à quel tempo io era molto piccolo, cioe di eta de anni cinque in sei, non me aricordo el nome di tal maestro, vero è, che essendo poi di eta di anni 14, vel circa, andei volontariamente circa giorni 15 à scola de scrivere da uno chiamato maestro Francesco, nel qual tempo imparai a fare la A.b.c. per fin al k. de lettra mercantesca. **P.** Perche cosi per fina al k. e non piu oltra. **N.** Per che li termini del pagamento (con el detto maestro) erano di darli el terzo avanti tratto, e un'altro terzo quando che sapeva fare la detta A.b.c. per fina al k. e el resto quando, che sapeva fare tutta la detta A.b.c. e perche al detto termine non mi trovava cosi li danari de far el debito mio (e desideroso de imparare) cercai di havere alcuni di suoi Alphabeti compiti, e essempi de lettera scritti di sua mano, e piu non vi tornai, perche sopra de quelli imparai da mia posta [15] e cosi da quel giorno in qua, mai piu fui, ne andai da alcun'altro precettore, ma solamente in compagnia di una figlia di poverta, chiamata Industria. Sopra le opere degli huomini defonti continuamente mi son travagliato. Quantunque della eta d'anni vinti in qua sempre sia stato da non poca cura famigliare straniamente impedito. Et finalmente poi la crudel morte mi ha fatto restare novamente poco men che solo.

Piccolo nella persona, deformato dalla ferita in modo tale che, se non avesse la barba, apparirebbe un « mostro », impedito nella parola, povero a tal punto da non poter pagare il maestro, che pretendeva un terzo del salario convenuto in anticipo ed un terzo quando avesse insegnato metà dell'alfabeto, deriso dai coetanei con un soprannome un po' crudele, Tartaglia svilupperà un carattere non facile; possiamo, se non giustificare, almeno spiegare questa sua indole poco socievole pensando che forse una certa sua scontrosità naturale fu accresciuta dalla dura esperienza della povertà sofferta in gioventú; la figura infelice, quella disgrazia di cui abbiamo detto, quel soprannome spregiativo divenuto addirittura un nome, non aiutarono certo Tartaglia a farsi una visione serena del mondo; inoltre la coscienza del proprio valore, che non veniva riconosciuto come forse egli desiderava, il confronto con la gloria di altri, che egli non sempre considerava piú meritevoli di lui, lo resero notevolmente scontroso e facile alla disputa.

È celebre la sua polemica con Gerolamo Cardano a proposito della

---

[15] Da solo.

priorità della scoperta della formula risolutiva della equazione di 3° grado; la polemica era legata anche al clima di competizione, non solo scientifica ma anche economica, tra gli uomini di scienza del tempo (cfr. pag. 55), e portò ai sei Cartelli di matematica disfida *(cfr. pag. 77) tra Tartaglia e Ludovico Ferrari (discepolo di Cardano) e alla pubblica disputa conclusiva a Milano (1548), apparentemente vinta dal Ferrari; se ne colgono gli echi anche nel già citato libro dei* Quesiti et inventioni diverse, *nel quale è riferita la versione di Tartaglia: non ci soffermiamo su questa, e passiamo ad analizzare gli aspetti piú propriamente scientifici dell'opera di Tartaglia.*

A questo proposito, avendo già chiarito l'importanza dell'algebra per lo sviluppo del pensiero matematico e scientifico in generale, vogliamo innanzitutto riconoscere nelle opere di Tartaglia quale sia l'influenza che l'esistenza di certi simboli può esercitare sulla possibilità stessa del formarsi di certe idee; contemporaneamente possiamo anche ammirare la fantasia e la penetrazione di una mente la quale, senza possedere i simboli che noi oggi utilizziamo, arriva a risolvere dei problemi che oggi sono considerati come elementari e che invece a quell'epoca richiedevano la potenza di una mente geniale per essere risolti.

Un esempio, semplice ma significativo, del modo di procedere di Tartaglia è quello presentato dal 9° Quesito del libro IX dei Quesiti et inventioni diverse, *del quale vogliamo dare anzitutto la soluzione con le tecniche attuali. Il problema è il seguente: un tizio ha un debito; ne paga una parte e gli restano da pagare 300 ducati; il quadrato di un quinto della somma pagata uguaglia il debito iniziale; si tratta di determinare questo debito.*

Tartaglia risponde subito che il debito era di 400 ducati; a richiesta dell'interlocutore, spiega poi quale sia stato il suo procedimento, che coincide sostanzialmente con quello moderno.

Egli procede assumendo come incognita la parte del debito che è stata pagata; qualunque scolaro di oggi chiamerebbe « x » tale incognita; nella nomenclatura di Tartaglia tale incognita viene chiamata « una cosa » (intendendo evidentemente alludere a una cosa indeterminata). Allora il debito totale è espresso da

$$x + 300.$$

La condizione del problema comporta che si abbia

$$\frac{x^2}{25} = x + 300.$$

Di qui, togliendo il denominatore (Tartaglia si esprime dicendo « ristorando le parti ») si arriva con la regola solita (« seguo il capi-

tolo», dice Tartaglia) al valore $x = 100$ della incognita e quindi al valore di 400 ducati per il debito iniziale.

Sentiamo le parole di Tartaglia per renderci conto di quali siano le difficoltà di risolvere un problema, anche elementare, quando non si posseggano gli strumenti per sviluppare i calcoli e per esprimere i risultati.

Questo ci permetterà di renderci conto del valore della scoperta di Tartaglia, per quanto riguarda la formula ed il procedimento risolutivo della equazione di 3° grado.

Maestro Francesco.[16] Eglie uno, che me doveva dare una quantita de ducati, e me ne ha dato una parte, talmente che el mi resta anchora duc. 300, e sappiati che tolto il 1/5 di quello, che lui me ha dato, e quello moltiplicandolo in se medesimo, fa tanto quanto era il primo debito, ve adimando quanto fu il primo debito. **N.** Il primo debito fu ducati 400. **M.F.** Et con che regola lo ritrovati. **N.** Anchor che per altre vie tal ragione se potria fare, nondimeno io la risolvo per Algebra, cioe pongo che li ducati che ve ha dati siano una cosa, adunque tutto il debito fu ducati 300 piu una cosa, poi piglio il 1/5 de una co, qual è 1/5 co, e questo lo moltiplico in se medesimo fa 1/25 de censo,[17] e questo si è eguale à 1 co piu 300, ristoro le parte e seguo il capitolo, e trovo la cosa valer 100, e ducati 100 vi aveva dati, li quali gionti con li ducati 300 che vi resta faranno ducati 400 come di sopra vi dissi. **M.F.** Sta bene.

Come si vede, Tartaglia arriva alla equazione di 2° grado

$$x^2 = 25\ (x + 300)$$

che ha un'unica radice positiva data da $x = 100$. L'altra radice, data da $x = -75$ non viene presa in considerazione; infatti la matematica in quel tempo non aveva ancora sviluppato con sicurezza le regole dell'algebra dei numeri relativi.

Passando alla risoluzione della equazione di 3° grado, riportiamo qui la formula risolutiva, che Tartaglia ha dato in versi, per poter meglio ricordarla, come egli stesso dice nel Quesito 34° del libro IX del libro già citato piú volte.

Ripetiamo che all'epoca in cui Tartaglia scriveva non era ancora maturato un insieme di convenzioni che esprimesse in modo comodo

---

16 Francesco Feliciano.

17 Quadrato.

e chiaro le relazioni algebriche. Cosí il primo membro della equazione cubica:

$$x^3 + ax = N$$

viene espresso dagli algebristi dell'epoca nel modo seguente: « cubo » (cioè x^3) piú « cose » (cioè ax) uguale a « numero » (cioè al termine noto, indicato qui con N).

[...] voglio che sappiati, che per potermi aricordare in ogni mia improvisa occorrentia tal modo operativo, io l'ho redutto in uno capitolo in rima, perche se io non havesse usato questa cautella spesso me saria uscito di mente, e quantunque tal mio dire in rima non sia molto terso non mi ho curato, perche mi basta che mi serva à ridurme in memoria tal regola ogni volta, che io il dica, il qual capitolo ve lo voglio scrivere de mia mano, accio che siati sicuro, che vi dia tal inventione giusta, e buona.

Quando chel cubo con le cose appresso
Se agguaglia à qualche numero discreto
Trovan dui altri differenti in esso.
Da poi terrai questo per consueto
Che'l lor produtto sempre sia eguale
Al terzo cubo delle cose neto,
El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sottratti
Varra la tua cosa principale.

Piuttosto che riportare gli altri versi di Tartaglia, versi che certamente non sono dei capolavori poetici, e che lui stesso qualifica come aventi uno scopo puramente mnemonico, preferiamo interpretare con i simboli matematici di oggi quelli che abbiamo riportato.

Cerchiamo anzitutto di tradurre i primi due versi: « Quando chel cubo con le cose appresso se agguaglia à qualche numero », cioè quando si abbia, con a e N positivi

$$\begin{array}{ccccc} x^3 & + & ax & = & N \\ \textit{cubo} & \textit{con appresso} & \textit{cose} & \textit{agguaglia à} & \textit{numero.} \end{array}$$

Consideriamo poi il terzo verso: « trovan dui altri differenti in esso (numero) », cioè trova altri due numeri che abbiano il « numero » come differenza; indichiamo con u e v tali numeri e quindi scriviamo

$$u - v = N.$$

Ma questi due numeri non possono essere presi in modo arbitrario, perché, prosegue la regola, « el loro produtto sempre sia eguale al terzo (del) cubo delle cose », cioè si deve avere

$$u \cdot v = [a/3]^3.$$

Queste due condizioni permettono di determinare i due numeri u e v come radici di una equazione di 2° grado. Determinate che siano tali radici, la « cosa principale » (cioè la incognita x della equazione di 3° grado) sarà data dalla differenza (« residuo ») delle loro radici cubiche (« delli lor lati cubi »; cfr. nota 4 a pag. 82).

Come si vede, a ragione abbiamo affermato che il simbolismo risulta quasi necessario per la matematica; basta confrontare ciò che si dice con precisione assoluta mediante le formule e le difficoltà di interpretazione del discorso con parole.

Oltre che con questioni di algebra, Tartaglia si cimentò anche con problemi di altri campi, ma con risultati non altrettanto significativi; ad esempio in certe questioni di geometria non giunse a dare delle trattazioni che fossero al livello di quelle date da Euclide (che, come abbiamo detto, Tartaglia fu il primo a tradurre in una lingua occidentale vivente) e da Archimede.

Nella trattazione del problema della quadratura del cerchio (nel quale Archimede aveva dato, come abbiamo detto, dei risultati sorprendenti, in se stessi e per il metodo seguito) lo vediamo dare una risposta abbastanza generica, nella quale c'è indubbiamente una osservazione significativa: quella che potremmo enunciare come esistenza di un elemento separatore tra lunghezze minori e maggiori di quella della circonferenza e tra aree minori e maggiori di quella del cerchio; però Tartaglia non approfondisce l'osservazione a livello matematico, rifugiandosi in argomentazioni pseudofilosofiche, come mostra il dialogo che riportiamo del Quesito 19° del libro IX dei Quesiti et inventioni diverse.

Magnifico M. Zuan Battista.[18] Haveti voi opinione che il sia possibile à ritrovare la quadratura del cerchio. **N.** Il non si puo negare, che quella cosa che è in esser nelle cose naturale, che il non sia possibile anchora à ritrovarla.[19] **M.Z.** Voi seti in errore. Anchora che Aristotele affermi esser possibile, la causa è, che fra il diametro del cerchio, e la sua circonferentia non vi cade alcuna proportione, perche il diametro non è univoco con la circonferentia (perche il

[18] Giovanni Battista Memo.
[19] La frase potrebbe essere interpretata cosí: non si può negare che sia possibile trovare l'area del cerchio, poiché appare naturale che il cerchio abbia un'area.

retto, e il curvo non sono univoce)[20] e pero non sono comparabili, et non essendo comparabili non si puo dire, che fra loro ve sia alcuna specie di proportione, e quello che non è in nelle cose di natura non è possibile à poterlo ritrovare. N. Eglie ben vero, che la linea retta non è comparabile alla curva rispetto à quella qualita del retto, e curvo, ma rispetto alla quantita, à me mi pare, che siano comparabile, perche il predicamento della quantita è uno, e quello della qualita è un'altro, e che il sia il vero che siano comparabili, e che ve sia fra lor proportione, facilmente il si puo provare per la quinta diffinitione del quinto di Euclide. Nella quale lui diffinisse che quelle quantita se dicono haver proportione fra loro, le quale moltiplicate si possono eccedere l'una, e l'altra, e perch'eglie cosa chiara, che il quadruplo del diametro del cerchio, eccede la circonferentia di quello, perche il quadruplo del detto diametro di tal cerchio è eguale alli 4 lati del quadro circonscritto al medesimo cerchio, e li detti 4 lati, eglie manifesto esser molto piu della circonferentia del cerchio, adunque potendosi moltiplicare il diametro del cerchio talmente che ecceda la detta circonferentia seguita (per la detta diffinitione) che fra il diametro del cerchio et la circonferentia di quello ve sia proportione, anchor che tale proportione sia incognita, che è il proposito.

Non vogliamo chiudere il discorso su Tartaglia senza aver ricordato il General trattato di numeri et misure *(1556-1560), opera enciclopedica sulle matematiche elementari che testimonia delle conoscenze matematiche di quei tempi. Di questo trattato, per presentare quel certo gusto dell'epoca cui si è accennato nell'introduzione a questo capitolo, riportiamo alcuni problemi del libro XVI (nn. 132, 133, 141, 142, 143), che ancora oggi spesso si vedono ripresi in rubriche di enigmistica e giochi.*[21]

Sono duoi, che hanno robbato una ampoletta di balsamo a uno signor, nella qual era dentro oncie 8 di balsamo a ponto accadette che costoro nel suo partire trovorno uno vedriaro, che haveva solamente due ampolette l'una delle quali teneva oncie 5, l'altra

[20] La frase potrebbe essere interpretata dicendo che la linea retta e la linea curva non appartengono alla stessa specie di linee.

[21] Si potrebbe dire che questi problemi appartengono a quella branca della matematica che oggi si chiama «Ricerca operativa»: infatti essi non riguardano «numeri et misure» ma procedimenti razionali per dirigere dei comportamenti umani.

oncie 3 e cosi per la pressa, che loro havevano egli comperorono queste 2 e caminorno di longo fin che furono al luogo sicuro, poi si missero a voler partir questo balsamo, dimando come fecero non havendo ne peso, ne altra misura certa. Io dico se lo vuoi sapere impisse prima quella dalle oncie 3 piena che la sia vodala in quella dalle oncie 5 poi impisse un'altra fiata quella dalle 3 del resto del balsamo, ch'è rimasto nella grande trovarai, che gli ne restara anchora 2 poi voda anchora quella dalle 3 in quella dalle 5 trovarai che non gli ne intrara se non 2 e 1 ne restara in quella dalle 3 e 2 n'erano rimaste nella grande. Fatto che hai cosi ritorna a vodar quella dalle 5 nella grande, e cosi gli ne faranno 7 poi quella che era in quella dalle 3 vodala in quella dalle 5 poi riempie un'altra fiata quella dalle 3 e poi la revoda in quella dalle 5 dove era rimasta quella sola faranno a ponto 4 e 4 ne sono rimaste nell'ampoletta grande, e cosi si trovorno haver oncia 4 di balsamo a ponto ciascun di loro, onde si partirno contenti, e andettero chi di qua chi di la.

Sono 3 altri, che hanno robbata una ampoletta piena, nella qual era oncie 24 di balsamo, e se ne fuggirno, onde un di loro compero 3 ampolette per volerselo partire in terzo, ma non hebbe ventura a trovarle alla tenuta di oncie 8 l'una, perche l'una non ne teneva se non 5 l'altra ne teneva 11 e l'altra 13 dimando come fecero a partirlo giustamente non havendo altro peso ne altra misura.

Fa cosi impisse prima quella dalle 5 piena che la sia vodala in quella dalle 11 poi impisse un'altra fiata quella dalle 5 e vodala anchora in quella dalle 11 anchora impissela, e vodala in quella dalle 11 quello, che gli puo intrare cosi fatto trovarai che quella dalle 11 sara piena, e in quella dalle 5 ne saranno rimase 4 e 9 nella grande, e pero voda quella dalle 11 nella grande gli ne saranno mo 20 poi quelle 4 oncie che erano in quella dalle 5 vodale in quella dalle 11 e riempisse quella dalle 5 di quello balsamo, che è nella grande, e poi voda in quella dalle 11 e cosi gli ne saranno 9 e 15 nella grande, poi impisse un'altra fiata quella dalle 5 e riempisse quella dalle 11 quello gli ne puo intrare cosi fatto trovarai che quella dalle 11 sara piena, e in quella dalle 5 ne saranno restate 3 e 10 in quella grande, e pero voda quella dalle 11 nella grande, che saranno 21 poi quelle 3 oncie, che erano in quella dalle 11 poi riempisse quella dalle 5 e vodala anchora in quella dalle 11 e cosi gli ne saranno 8 le quali vodarai in quella dalle 13 per la sua parte, e 16 ne rimangono nella grande per la parte de gli altri duoi. Poi se vuoi anchora dividere le altre 16 oncie per mezo, fa come hai fatto di sopra fin che tu ti trovi haverne 8 in quella dalle 11 e 8 ne rimanghino nella grande, e cosi gli haveranno tutti oncie 8 di balsamo senza inganno alcuno, ne de l'uno, ne de l'altro, si che il primo havera le sue 8 oncie in quella ampoletta dalle 13 e il secondo havera le sue in quella dalle 11 e al terzo gli saranno rimase le sue in quella grande da oncie 24 e cosi se ne partirono contenti.

Uno conduce da una terra a un'altra uno lupo, una capra, e porta in spalla un fasso di verzi, accade che nella via il trova una grande acqua da passare, e per sua ventura trova li uno navetto legato alla riva, il qual navetto è cosi piccolo, che non vi puo star dentro piu che 2 persone, dimando come il fara a condurli fuora salvi, perche se lui intra, e che'l toglia il fasso delli verzi, e portarlo de la infra questo mezzo il lupo manzarebbe la capra. Se anche il tolesse prima il lupo nello navetto, e portarlo de la, infra questo mezzo la capra manzaria li verzi, e se tu vuoi dire, che lui debba portar anchor lui li verzi in spalla, come lui ha fatto fin qui non è possibile, perche se lui debbe poter vogar bisogna che'l sia ispedito.

Farai adonque cosi prima tu condurrai fuora la capra, perche il lupo non manza verzi se non gli fossero cotti, e ben grassi, portato che hai fuora la capra tu ritorni di qua a torre li verzi, e se li porta de la appresso alla capra, poi pigli la capra, e si la ritorni un'altra fiata di qua, poi tu pigli il lupo, e lo porti de la appresso alli verzi, poi tu ritorni di qua con il navetto a torre la capra, perche tu non hai paura, che'l lupo manzi verzi crudi, e pero senza paura tu vieni a torre la capra, e conducela de la, poi lega il navetto alla riva, e piglia il fasso delli verzi in spalla, e te ne vai alla tua via cantando in compagnia del lupo, e della capra, e cosi hai fatta la ragione, e da questa è nasciuto un certo proverbio fra gli huomini, dicendo in qualche proposito, egli ha salvato la capra e li verzi.

Sono 3 belli gioveni freschi e gagliardi, i quali hanno 3 belle damigelle per mogliere, e sono gelosi tutti, cosi le moglier delli mariti, come li mariti delle moglier. Accade che costoro si parteno da casa di brigata per esser vicini per voler andar a una certa perdonanza, onde accadette che nella via gli trovorno un fiume molto largo da passar, e non vi era ne ponte, ne porto, ma per sua ventura gli trovorno un navetto piccolo, che non gli poteva star dentro piu che 2 persone, dimando, come faranno a passare senza alcun sospetto di gelosia.

Farai cosi prima manda fuora 2 donne, poi che una di quelle torni di qua con il navetto, e venga a torre l'altra, e la conduchi de la, condotte che siano fuora tutte 3 le donne, se ne parte una, e vien di qua con il navetto, e vassene appresso a suo marito, e lui la piglia per la mano, poi quelli 2 altri huomini, che hanno de la le sue donne si parteno con il navetto, e ne vanno de la appresso a loro, poi un di loro piglia sua moglier in braccio, e la conduce di qua, poi quelli 2 huomini, che sono di qua intrano nello navetto, e vanno de la, e quella femina che è de la vien di qua con il navetto a torre un'altra giovane, e la mena de la, poi vien oltra uno de gli huomini, e intra nello navetto, e vien di qua, e piglia sua mogliere, e se la mena de la, e attacca il navetto alla ripa, e se ne vanno tutti a braccio a braccio con le sue donne al suo viaggio tutti allegri, e gelosi.

Et se fossero stati 4 huomini, e 4 donne prima manda fuora 2 donne, e fa che una di quelle ne venga a torre un'altra, e la conduce de la, poi una di quelle vien di qua con il navetto, e tolse la quarta donna, e se la condusse de la, condutte che le siano de la tutte quattro, ne vien di qua una con il navetto, e si accosta appresso a suo marito, poi si levano duoi huomini, e entrano nel navetto, e si se ne vanno de la appresso alle sue donne, poi quella donna che è de la discompagnata intra nello navetto, e vien a torre suo marito, e lo mena de la, e di qua sono rimasti solamente marito, e mogliere, poi se ne venne di qua uno di quelli huomini, e mena de la quel-l'huomo chi era di qua con la donna sua, menato che'l fu de la quello di prima andette appresso a sua moglier, e quest'altro ritorno di qua a tor sua mogliere, e la condusse de la, e cosi furno condotti fuora tutti sani, e salvi. Poteva anchora venir di qua una di quelle 3 donne, e condur fuora quella quarta donna, poi quando le furno de la poteva anchora tornar di qua col navetto quella donna, e venir a torre suo marito, e condurlo de la, e poi attaccar il navetto alla ripa del detto fiume, e andarsene cantando di brigata.

Osserviamo che i primi due problemi possono essere risolti con un numero di travasi minore di quello indicato da Tartaglia,[22] *che la riso-*

[22] Considerando ordinatamente le ampollette di capacità 8, 5, 3 si prende: 3,5,0;

luzione dell'ultimo problema ha dato luogo a erronee contestazioni perché alcuni, come C. G. Bachet[23] *e I. Ghersi,*[24] *considerando gelosi solo i mariti, hanno riconosciuto impossibile il problema di traghettare quattro coppie.*[25]

3,2,3; 6,2,0; 6,0,2; 1,5,2; 1,4,3; 4,4,0. Analogamente per il secondo problema, considerando ordinatamente le ampollette di capacità 24, 5, 11, 13, si prende: 11,0,0,13; 11,5,0,8; 11,0,5,8; 6,5,5,8; 6,0,10,8; 1,5,10,8; 1,4,11,8; 12,4,0,8; 12,0,4,8; 7,5,4,8; 7,0,9,8; 2,5,9,8; 2,3,11,8; 13,3,0,8; 13,0,3,8; 8,5,3,8; 8,0,8,8.

[23] « Tartaglia ha creduto di poter risolvere il problema facendo passare le persone due a due ma s'è sbagliato, come dice Bachet, che riconosce la cosa impossibile, senza darne una dimostrazione. » (C.G. Bachet, *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres*, quinta edizione rivista semplificata e accresciuta da A. Labosne, Paris, Gauthier-Villars, 1884, pag. 150; la prima edizione è del 1612, la prima ristampa, con aggiunte, del 1624).

[24] « Questo problema... non è possibile. Tartaglia... lo aveva ritenuto possibile, in causa d'una svista. » (I. Ghersi, *Matematica dilettevole e curiosa*, III ed., Milano, Hoepli, 1929, pag. 12).

[25] Vogliamo osservare che queste erronee contestazioni possono forse essere collegate al fatto che la soluzione di Tartaglia al problema relativo a tre coppie non utilizza l'ipotesi della gelosia delle mogli, ciò che porta a un numero di viaggi maggiore di quello che si ha utilizzando opportunamente questa ipotesi.

I CARTELLI DI MATEMATICA DISFIDA

Una delle caratteristiche della scienza del Rinascimento è stata quella del fervore della scoperta e della invenzione; si potrebbe dire, in forma abbastanza pittoresca, che si è avuto un ribollire di idee, che ha dato ai matematici un poco il carattere di pionieri, con tutte le conseguenze: in particolare, vi era un'atmosfera di competizione, che portava anche alla gara intellettuale.

Secondo il costume del tempo, nel quale i maestri non erano dipendenti pubblici, ma erano pagati secondo la celebrità, gli scienziati miravano ad avere la massima fama possibile, ed a dimostrare che erano superiori agli altri, loro concorrenti.

Era una lotta tra persone che aveva anche un aspetto economico, il che rendeva le dispute spesso particolarmente dure, e suscitava cattivi umori, portando spesso i disputanti ad utilizzare anche dei mezzi non del tutto leali.

È opportuno tener conto anche di questo clima per spiegare la disputa tra Cardano e Tartaglia a proposito della scoperta della formula di risoluzione della equazione di 3° grado e le varie polemiche tra i due (cfr. pagg. 59 e 69).

Una eco di questo clima è fornita dall'episodio dei sei Cartelli di matematica disfida *che Ludovico Ferrari, allievo di G. Cardano ed a nome di questi, inviava a N. Tartaglia, e dei sei controcartelli di Tartaglia.*

Si rivela in questi cartelli non soltanto l'ambiente scientifico dell'epoca, ma anche il carattere dei contendenti.

La disputa finí senza né vinti né vincitori, o meglio con la pretesa di ciascuno dei contendenti di avere vinto.

Riproduciamo qui di seguito il primo dei sei Cartelli di matematica disfida, *inviato da Ludovico Ferrari a Niccolò Tartaglia, utilizzando l'edizione curata da Enrico Giordani (Milano, R. Stabilimento litografico di Luigi Ronchi e Tipografia degl'Ingegneri, 1876).*

Messer Nicolò Tartalea,[1] mi è pervenuto alle mani un vostro libro, intitolato *Quesiti e inventioni nuove*,[2] nell'ultimo trattato del quale, facendo voi mentione dell'Eccellente Signor Hieronimo[3] Cardano medico Melanese, il qual è hora publico Lettor di medicina in Pavia, voi non vi vergognate di dir, che egli è ignorante nelle mathematice, huomo molto tondo,[4] degno che gli fosse anteposto Messer Giovan da Coi,[5] e lo chiamate poverello, huomo che tien poco sugo, e di poco discorso, con altre simili parole ingiuriose, le quali per tedio lascio da parte. Sforzandovi con certe vostre fittioni,[6] di dar a vedere a gli ignoranti, che cosi sia. Dico agli ignoranti, percioche giudico, non ci essere persona di alcun giudicio, che per le cose che egli ha fuori in stampa non lo conosca in tutto diverso da quello che voi il dipingete, e che leggendo quella vostra filatera, non gli paia legger le facetie del Piovano Arlotto.[7] Direi Luciano de veris narrationib.[8] se non fosse che voi havete piu ingeniosa inventione, piu bello stilo, megliore ordine, e piu fiorite parole. Per dirvi il vero, penso che habbiate fatto questo, sapendo che il Signor Hieronimo è di cosi felice ingegno, che non solamente in medicina, la

1 Tartaglia.
2 Sappiamo che il titolo esatto era *Quesiti et inventioni diverse.*
3 Gerolamo.
4 Ingenuo, ignorante.
5 Zuanne de Tonini, da Coi, matematico bresciano.
6 Invenzioni.
7 Le « facezie » sono contenute in un libro classico, pubblicato con titoli diversi, tra i quali *Detti e facetie*, che veniva considerato come un libro umoristico; tali « facezie » dimostrano nell'autore, il Piovano Arlotto Mainardi (1395-1483), uno spirito giocoso, spesso acuto; qui il senso è evidentemente che le espressioni di Tartaglia nei riguardi di Cardano sono ridicole.
8 Altra opera classica: *De veris narrationibus* del greco Luciano (c. 125 - c. 190).

qual'è sua professione, è di quella sufficienza che si sa, ma anchor nelle mathematice, le quali altre volte egli usò a guisa di giuoco, per pigliarsi alcuna ricreatione e solazzo, è cosi ben riuscito che universalmente, per parlar con modestia, è tenuto fra primi mathematici. Il perche, come l'Homeromastix [9] speravate di acquistarvi per tal via honorata fama. Il qual desiderio è buono, quando sia congiunto con propria virtú, e non col biasmare altrui. Per tanto, io non solamente per difender la verità, ma anchor perche questo tocca a me principalmente, che sono creato suo, essendo Sua Eccellentia impedita dal grado che tiene, ho deliberato far publicamente conoscere, ò il vostro inganno, over (come piu tosto penso) la vostra malignità. Non col rendervi il contracambio in parole, il che potrei far, non con fittioni (come voi) ma lealmente. Atteso che, oltra mille errori de primieri libri di quella vostra opera, havete anchor posto nel libro ottavo le propositioni di Giordano [10] come vostre, senza far mentione alcuna di lui: il che grida furto. Et facendovi le dimostrationi di vostra testa, le quali per lo piu non conchiudono, fate confessar con gran vostro vituperio all'Illustrissimo Signor Don Diego di Mendozza [11] cose, che so io certo (percioche conosco in parte la sua gran dottrina) che egli non le direbbe per tutto l'oro del mondo: il che dichiara presuntione con ignoranza. Ma questo mi par niente, quando considero, che nel medesimo libro havete ardir di riprendere ingiustamente Aristotele nelle mecanice. Ponete anchora nell'ultimo trattato la medesima cosa tre, e quattro volte: il che significa non poca smemoraggine, e negligenza. Pur (come dico) non mi voglio attaccar su questo (offerendomi nondimeno à mantenervi quanto ho detto). Ma piu largamente, mi offerisco in Geometria, Arithmetica, e in tutte le discipline che da esse dependono, come è Astrologia, Musica, Cosmographia, Prospettiva, Architettura, e altre, a disputar in luogo egualmente commodo, dinanzi à giudici idonei, publicamente con voi: accettando di disputar, non solamente sopra quanti authori greci, latini, e volgari hanno scritto in tali faculta, ma anchora sopra le vostre nuove inventioni, le quali tanto vi dilettano, pur che anchor voi similmente accettiate le mie. Et questo propongo per farvi conoscer, che indegnamente e falsa-

---

[9] Homeromastix (frusta di Omero) fu il soprannome di un detrattore di Omero, il grammatico greco Zoilo (c. 400-320 a.C.).

[10] Giordano di Nemore, o Nemorario, autore, nel XIII secolo, di un trattato *De ponderibus* che veniva considerato come un manuale.

[11] Diego Hurtado de Mendoza (1503-1575), diplomatico, storico e poeta spagnolo.

mente havete detto e scritto ciò che ritorna in biasimo del antedetto Signor Hieronimo: il quale à pena sete degno di nominare: e che sete piu lontano che forse non vi credete da quel segno, al qual vi presumete di esser pervenuto. Il che feci accader l'anno 1540 al vostro Messer Giovan da Coi, com'e publico à tutti, e voi fingendo non saperlo, volete pure anteporlo (come dissi) al Signor Cardano, il quale nomino cosi spesso con gran riverenza. Et acciò che non vi rincresca fatica ò spesa mi offerisco, di giucar, e deporre quanti danari vorrete deporre anchor voi, infino alla somma di 200 scudi, acciò che il vincitor acquisti l'honore, non con danno suo, ma piu tosto con avantaggio. Et à fine che questo mio invito non vi paia troppo privato, ho mandato una copia della presente scrittura à ciascuno de Signori infrascritti, i quali tutti si dilettano, e sanno delle mathematice, oltra non poche altre, le quali sono sparse in diversi luoghi d'Italia, e in diverse provincie. Notificandovi, che io aspetterò la risposta fra 30 giorni dopo la appresentatione di questa: La qual non venendo resoluta, lascerò far giudicio al mondo della qualità vostra: Riservandomi ragione anchor, di proceder piu avanti, se cosi mi parrà di fare. Data in Melano alli 10 di Febraro 1547.

Io Ludovico Ferraro publico Lettore delle mathematice in Melano affermo quanto di sopra ho detto.

Io Benedetto Rhamberti son testimonio di quanto si contiene di sopra, e di man propria mi sono sottoscritto.

Io Nicolò Secco son testimonio di quanto si contiene di sopra, e de mia mano mi son sottoscritto.

Io il Mutio Iustinopolitano sono testimonio di quanto si contiene di sopra, e di mano propria mi sono sottoscritto.

Segue l'elenco degli scienziati ai quali il Ferrari ha inviato copia del Cartello.

A questo Tartaglia rispose con un Controcartello, *e la disputa proseguí giungendo fino a sei cartelli e altrettanti controcartelli. Tartaglia, tra l'altro, insinua continuamente che il Ferrari è soltanto un portavoce di Cardano, con il quale egli intende misurarsi direttamente, dichiarandosi pronto a sostenere la disputa pubblica, per la quale sceglie come giudici... « tutti gli huomini intelligenti del mondo ».*

Non entra negli scopi di questo volume il riportare tutti i cartelli e controcartelli, né presentare una soluzione definitiva della intricata questione storica. Ci basta aver ricordato l'episodio come caratteristico dell'ambiente scientifico dell'epoca.

RAFAEL BOMBELLI

Rafael Bombelli, matematico e idraulico,[1] *è l'ultimo, in ordine di tempo, degli algebristi di scuola italiana ed in particolare di scuola bolognese, del secolo XVII. Si potrebbe dire che le grandi imprese della risoluzione della equazione di 3° e di 4° grado culminano con Bombelli nella sistemazione teorica, che egli dà dell'algebra del suo tempo, sistemazione nella quale trova posto la prima trattazione rigorosa dei numeri immaginari.*

A questo proposito ricordiamo che già Cardano aveva eseguito dei calcoli con dei « numeri » che erano definiti come radici di numeri negativi (cfr. pag. 64); questa impostazione della introduzione dei numeri immaginari era in Cardano una dimostrazione di grande inventiva ed anche di grande audacia intellettuale; ma insieme era anche contraddittoria con quanto egli stesso aveva osservato, ricordando che i quadrati sono numeri positivi e che quindi soltanto per questi numeri ha senso parlare di radice quadrata.

Bombelli introduce dei simboli che egli, come vedremo, riconosce essere di una specie diversa da quella di ogni altro numero; ma non lascia questa introduzione nel campo delle « stranezze »; egli invece ne dà le leggi di calcolo, e quindi, con la stessa enunciazione delle leggi di calcolo, avvia la matematica alla rigorosa introduzione di questi nuovi « numeri », introduzione che non lasci adito a sospetti di eventuale contraddizione.

In sintesi si potrebbe dire che con R. Bombelli l'algebra incomincia a lasciare il suo aspetto in certo modo « magico » per acquistare finalmente l'aspetto di una scienza. Vedremo nel seguito, commentando i vari passi che presenteremo, come avviene questa maturazione.

*I tratti che presentiamo sono presi dall'opera fondamentale di Bombelli, l'*Algebra *del 1572. Va notato che quest'opera è scritta in lingua volgare (e quindi non in latino, come quelle di G. Cardano) e molto corretta, in contrasto con la lingua piena di voci dialettali e dalla sintassi contorta, che è utilizzata da N. Tartaglia.*

A proposito di questi, abbiamo già esposto il giudizio che R. Bombelli dà del suo carattere (cfr. pag. 65), ed anche questo giudizio dà una idea dell'ambiente della ricerca scientifica dell'Italia del secolo XVI.

*Il passo seguente è tratto dal Libro I dell'*Algebra;[2] *è interessante*

---

[1] Non si ha notizia sicura della data e del luogo di nascita; egli si dichiara « cittadino bolognese » e sta di fatto che la famiglia Bombelli apparteneva alla nobiltà del contado bolognese; la sua morte si situa tra il 1572 e il 1576.

[2] Utilizziamo il volume edito da Feltrinelli, Milano, 1966.

osservare come la matematica dell'epoca considerasse gli irrazionali: numeri che « non si possono nominare » (e cioè non sono razionali); il progresso fondamentale che è stato compiuto da Bombelli è quello che consiste nel dare le leggi di calcolo di questi numeri « strani » e quindi nel definire questi nuovi enti attraverso la grammatica logica del loro impiego concreto nel calcolo.

Diffinitione della radice quadrata, detta sorda,[3] *ovvero indiscreta*

La radice quadrata è il lato [4] di un numero non quadrato il quale è impossibile poterlo nominare,[5] però si chiama radice sorda, ovvero indiscreta [6] come sarebbe se si havesse a pigliare il lato di 20, il che non vuol dire altro, che trovare un numero, il quale moltiplicato in se stesso faccia 20; il ch'è impossibile trovare, per essere il 20 numero non quadrato; esso lato si direbbe essere radice 20, ma avvertiscasi, che quando si dirà simplicemente radice, si intenderà quadrata, la quale si scriverà cosí R.q.

Bombelli non si accontenta di osservare che questi numeri sono di specie diversa da quella dei numeri razionali, ma compie due passi importantissimi nella direzione che porta ad una sistemazione teorica di questi enti « strani »; anzitutto egli insegna a calcolare un numero razionale che sia vicino quanto si vuole al numero irrazionale considerato e in secondo luogo egli dà le leggi con le quali si calcola con questi nuovi enti.

Egli dà infatti anche i procedimenti che portano a « conoscere per pratica » i numeri di cui egli parla.

Particolarmente interessanti sono due procedimenti con i quali egli dà la costruzione geometrica della radice cubica, cioè la costruzione geometrica del segmento la cui misura è la radice cubica della misura di un altro segmento dato. In uno dei procedimenti egli arriva a costruire la radice cubica per tentativi; nell'altro egli ricorre ad uno strumento

---

[3] I numeri che oggi chiamiamo « irrazionali » vengono chiamati « surdi » (cioè « absurdi »); venivano detti « razionali » i numeri che esprimono i rapporti, cioè le « ragioni », tra due grandezze commensurabili tra loro.

[4] Anche la espressione « lato » nasce dalla consuetudine di rappresentare le quantità con mezzi geometrici; quindi il numero di cui si vuole trovare la radice quadrata viene interpretato come la misura dell'area di un quadrato e di conseguenza la radice quadrata viene interpretata come la misura del lato del quadrato. Questo modo di esprimersi viene adottato anche da Galileo e da Tartaglia.

[5] Non è possibile infatti rappresentare un numero irrazionale mediante simboli in numero finito, che facciano intervenire soltanto interi o frazioni.

[6] Tutte queste espressioni equivalgono al nostro termine « irrazionale ».

costituito da due « squadri », che scorrono l'uno sull'altro e la cui posizione giusta viene trovata, anche qui, per tentativi.

È da rilevare che soltanto tre secoli dopo si poté avere la certezza che la radice cubica di un segmento non può essere costruita in modo preciso con i due strumenti elementari, cioè con la riga e con il compasso, usati nel modo classico: cioè la riga usata per tracciare la retta che congiunge due punti oppure per determinare le intersezioni di una retta con una circonferenza, il compasso usato per tracciare una circonferenza avente come centro un punto dato e come raggio un segmento pure dato.

Bombelli coglie l'occasione per ricordare la nota leggenda dalla quale si vuole abbia avuto origine il problema della duplicazione del cubo, cioè della determinazione del segmento che abbia come lunghezza la radice cubica di 2.

Questa leggenda viene esposta nel seguente passo della Lettera di Eratostene di Cirene[7] al re Tolomeo III.[8]

« Eratostene a Tolomeo salute.

« Narrano che uno degli antichi poeti tragici [9] facesse apparire sulla scena Mino [10] nell'atto di costruire una tomba a Glauco [11] e che Mino, accorgendosi che questa era lunga da ogni lato cento piedi, dicesse: "Piccolo spazio invero accordasti ad un sepolcro di re; raddoppialo, conservandolo sempre di forma cubica, raddoppia tutti i lati del sepolcro". Or è chiaro che egli si ingannava. Infatti, duplicandone i lati, una figura piana si quadrupla, mentre una solida si ottuplica. Allora anche fra i geometri si pose la questione in qual modo si potesse duplicare una data figura solida qualunque conservandone la specie.[12] E questo problema fu chiamato "duplicazione del cubo".

« Dopo che tutti furono per lungo tempo titubanti, per primo Ippocrate di Chio [13] trovò che se tra due linee rette,[14] delle quali la maggiore sia doppia della minore, si iscrivono due medie in proporzione continua,[15] il cubo sarà duplicato, e cosí tramutò la difficoltà in altra non minore.

---

7 O di Alessandria (cfr. nota 18 a pag. 48).
8 Regnò in Egitto tra il 246 e il 221 a.C.
9 Secondo alcuni sarebbe Euripide (c. 485-407 a.C.).
10 Antico re di Creta.
11 Suo figlio.
12 Cioè la forma.
13 Geometra greco vissuto intorno al 460 a.C.
14 Cioè tra due segmenti.
15 Cioè $1 : x = x : y = y : 2$ che dà $y = x^2$, $2x = y^2$ e quindi $x^3 = 2$.

« Si narra che piú tardi i Delii, spinti dall'oracolo [16] a duplicare una certa ara, caddero nello stesso imbarazzo.[17]

« E vennero spediti dei legati ai geometri che convenivano con Platone nell'Accademia, per incitarli a cercare quanto era richiesto. Essi se ne occuparono con diligenza e si dice che, avendo cercato di inserire due medie tra due rette, Archita di Taranto [18] vi riuscisse con il semicilindro ed Eudosso invece mediante linee curve.

« Questi furono seguiti poi dagli altri, con dimostrazioni piú perfette, ma si poté effettuare la costruzione ed adattarla alla pratica, eccettuato forse Menecmo,[19] e con grande fatica... ».

Ritornando a Bombelli, ecco come egli introduce la prima delle costruzioni da lui escogitate per la determinazione di un segmento che abbia la lunghezza che è radice cubica di un altro.

Modo di trovare il lato cubico di un numero in linea

Il trovare il lato cubico di una linea, essendo data una misura nota, non è altro che veder di trovar il lato di un cubo, che sia pari a piú cubi di lati pari, che dalli antichi fu molto cercato al tempo di Platone per quello, che detto havea l'oracolo, quando rispondendo a chi gli domandava il rimedio per la peste, disse: duplicandosi l'altare, cessarà la peste, et essi fatto duplicare l'altare in longhezza, altezza e larghezza, né cessando, ritornati all'oracolo, gli rispose, che la peste non cessava, per non havere osservato quanto gli havea imposto; e ricorrendo in ultimo a Platone, da' suoi discepoli varij modi furono da quelli trovati, per mandare ad effetto l'amfibologico detto dell'oracolo, delli quali, dui qui sotto ne porrò, e questa è chiamata dimostratione di trovare due linee medie fra due linee date, le quali (ancorché siano per scientia note) nondimeno giamai si sono effettuate, se non instromentalmente.

Bombelli espone il suo procedimento ed il modo per migliorare l'approssimazione. La seconda costruzione fa uso di uno strumento che non è classico, cioè è diverso dagli strumenti che vengono chiamati tradizionalmente « strumenti elementari »: la riga ed il compasso.

---

16 A Delo vi era un oracolo di Apollo.

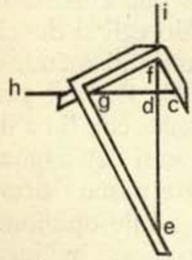
17 Questa è forse la ragione per cui storicamente il problema della duplicazione del cubo viene chiamato anche « problema di Delo ».

18 Meccanico e fisico nato verso il 430 a.C.

19 Matematico greco vissuto verso il 350 a.C.

L'altra dimostratione

Sia la linea .a. 1 e la linea .b. 8, della quale se ne habbia a pigliare il lato cubico; tirisi la .c.d. par all'.a. et .d.e. par alla .b. che si congionghino in .d. ad angolo retto, e allonghisi .e.d. fino in .i. et .c.d. fino in .h. e poi si habbiano dui squadri materiali, e pongasi l'uno con l'angolo .f. di dentro sopra la linea .d.i. e facendo che tocchi con l'una delle braccia la estremità .c. l'altra taglierà .c.h. in .g. e l'angolo di dentro dell'altro squadro si ponga sopra il taglio .g. e si faccia che con l'uno delle braccia tocchi il braccio .l. dell'altro, talché si congionghino insieme (come si vede piú chiaramente nella figura) e cosí all'hora l'altro braccio passerà di sopra, o di sotto, o per la estremità .e. et se passerà per la estremità .e. la .d.f. sarà il lato cubico della .d.e. et se passarà di sopra, bisogna alzar l'angolo .f. tanto, che l'altro squadro tocchi la estremità .e. con le conditioni dette, e passando di sotto al punto, bisogna abbassare l'angolo .f. tanto, che l'altro squadro tocchi esso punto .e. con le conditioni dette, che cosí la linea .f.d. sarà il lato cubico ricercato di .d.e. ch'essa .f.d. sarà 2, perché essendo .c.d. 1, sarà la .d.g. 4 perché (per essere l'angolo .f. retto) tanto può la .c.d. in .d.g. quanto la .f.d. in sé, et essendo .f.d. 2, et .d.g. 4 .d.e. sarà 8, perché tanto può .f.d. in .d.e. quanto .d.g. in sé, per essere l'angolo .g. retto.



Come abbiamo detto, uno dei fatti per i quali Bombelli viene considerato, a ragione, uno dei fondatori dell'algebra moderna è la sua esplicita trattazione teorica dei numeri immaginari.

Egli espone la sua scoperta trattando di un caso delle formule date dal Cardano per la risoluzione della equazione cubica.

Si tratta del caso della equazione che si potrebbe scrivere nella forma

$$x^3 = ax + N \quad (a,\ N \text{ positivi})$$

che Bombelli indica con la espressione « Capitolo di cubo eguale a tanti e numero » dove con la espressione « tanti », come vedremo, egli indica il termine ax.

Quando tra i coefficienti a *ed* N *sussista una certa relazione, che vedremo, le espressioni date da Cardano conducono ad estrarre le radici cubiche da numeri complessi; ciononostante si hanno tre radici reali della* *equazione, radici che sono espresse come somme di coppie di numeri complessi coniugati.*

Ecco le parole di Bombelli:

Ho trovato un'altra sorte di R.c.[20] legate molto differenti dall'altre,[21] la qual nasce dal Capitolo di cubo eguale a tanti e numero, quando il cubato del terzo delli tanti è maggiore del quadrato della metà del numero [22] come in esso Capitolo si dimostrarà, la qual sorte di R.q.[23] ha nel suo Algorismo diversa operatione dell'altre e diverso nome; perché quando il cubato del terzo delli tanti è maggiore del quadrato della metà del numero, lo eccesso loro non può chiamarsi né piú né meno, però lo chiamarò piú di meno quando egli si dovrà aggiongere, e quando si dovrà cavare lo chiamarò men di meno, e questa operatione è necessarijssima piú che l'altre di R.c.L.[24] per rispetto delli Capitoli di potenze di potenze accompagnati con li cubi, o tanti, o con tutti due insieme, che molto piú sono li casi dell'agguagliare dove ne nasce questa sorte di R.[25] che quelli dove nasce l'altra, la quale parerà a molti piú tosto sofistica che reale, e tale opinione ho tenuto anch'io, sin che ho trovato la sua dimostratione in linee (come si dimostrarà nella dimostratione del detto Capitolo in superficie piana) [26] e prima trattarò del moltiplicare, ponendo la regola del piú et meno.

Per intendere le espressioni seguenti, vale la pena di tener presente che Bombelli indica con « piú » la unità positiva e con « meno » la unità negativa, che noi indichiamo oggi semplicemente con i simboli $+1$ *e* -1 *rispettivamente; inoltre egli indica con le espressioni « piú di meno » e « men di meno » la unità immaginaria positiva e negativa, cioè ciò che noi oggi indichiamo con i simboli* $+i$ *e* $-i$ *rispettivamente; infine la espressione « via » indica la operazione di moltiplicazione.*

---

[20] Radici cubiche.

[21] Bombelli chiama « radici cubiche legate » quelle che hanno come radicandi delle somme di numeri razionali e di radici quadrate.

[22] Cioè quando sia valida la relazione

$$(a/3)^3 > (N/2)^2.$$

[23] Radice quadrata.

[24] Radici cubiche legate.

[25] Radici.

[26] Cioè con costruzioni geometriche che riguardino soltanto delle figure giacenti nel piano.

Ecco le parole di Bombelli:

Piú via piú di meno, fa piú di meno
Meno via piú di meno, fa meno di meno
Piú via meno di meno, fa meno di meno
Meno via meno di meno, fa piú di meno
Piú di meno via piú di meno, fa meno
Piú di meno via men di meno, fa piú
Meno di meno via piú di meno, fa piú
Meno di meno via men di meno fa meno.

Queste regole possono essere tradotte con i simboli attualmente adottati mediante la seguente tabella:

$(+1)\,(+i) = +i$	$(+i)\,(+i) = -1$
$(-1)\,(+i) = -i$	$(+i)\,(-i) = +1$
$(+1)\,(-i) = -i$	$(-i)\,(+i) = +1$
$(-1)\,(-i) = +i$	$(-i)\,(-i) = -1.$

È interessante osservare che Bombelli non fa disquisizioni astratte e pseudofilosofiche sulla « natura » di queste nuove entità (si limita a dire, come abbiamo visto, che sono « ... molto differenti dall'altre *»), ma invece dà le leggi con le quali si opera su di esse.*

Oltre al merito di aver stabilito le regole per il calcolo dell'unità immaginaria, Bombelli ha anche quello di aver iniziato il calcolo che oggi si può chiamare dei « polinomi in una indeterminata ».

Bombelli riconosce la necessità di dare un calcolo delle « incognite » e sceglie anzitutto il nome di « tanto » per la quantità indeterminata, che era già stata chiamata « cosa » da Tartaglia.

Bombelli poi adotta anche un simbolo per tale quantità e per le sue potenze: precisamente ciò che per esempio noi indichiamo con il simbolo x^3*, cioè il cubo della quantità indeterminata* x*, egli lo indica con il simbolo* $\overset{3}{\smile}$.

Libro secondo

Si maravigliaranno forse alcuni, che contra l'antico uso de' Scrittori Italiani, i quali fino a questo giorno hanno scritto di questa scientia dell'Arimetica, quando gli è occorso di trattare di quantità incognita: essi sempre l'hanno nominata sotto questa voce di Cosa come voce commune a tutte le cose incognite, ed io chiami hora queste quantità Tanti, ma chi bene considerarà il fatto, conoscerà che piú se le conviene questa voce di Tanto che di Cosa, perché se diremo Tanto è voce appropriata a quantità di numeri, il che non si può dire di Cosa, essendo quella voce universalissima e commune ad ogni sostantia cosí ignota come nota. In oltre io trovo che Diofante[27] Auttor Greco cosí la noma, il ch'è di non picciolo argomento, questa essere la sua propria e vera voce, essendo egli Scrittore cosí antico, e di tanto valore (come dissi nel primo libro). Dunque non si maravigli il Lettore di questa mia voce se nuova parerà a moderni, perché antichissima è per gli antichi, ma accioché meglio possa operare in queste quantità incognite delle quali intendo di trattare in questo mio secondo libro, cerchi di benissimo farsi capace di questi capitoletti, i quali (come per regole) ho posto nel principio di esso dando brevemente la diffinitione di ciascuna di loro e seguitando con l'ordine proportionale e dovuto in queste quantità, segnando ciascuna col suo segno, o caratero, col quale dipoi mai sempre si noterà, e haverà quella forza e valore che qui sotto nelle sue diffinitioni e proprietà si vede, e per non piú dilattarmi in parole verrò ad esse diffinitioni, e prima dirò del Tanto.

Diffinitione del sudetto Tanto

Il Tanto adunque è una quantità incognita, con la quale con il fine dell'operare, si viene a trovare un numero che li sia pari, overo eguale, e venuto a questo fine si ritrova quanto è un Tanto (come nell'agguagliatione si mostrarà) il qual Tanto si segnarà con questo caratero $\overset{1}{\smile}$.

Diffinitione della potenza

Perché nell'operare bisogna assai volte moltiplicare li Tanti infra di loro, e il produtto fassi di diversa spetie, da molti tal produtto è stato nominato censo, voce tanto sconvenevole, che piú dir non si potrebbe, perché pare che punto non si confaccia in materia de' numeri sapendosi generalmente che cosa significhi questa voce di censo senza che io lo dichi. Da altri è stato chiamato poi quadrato, il qual nome è atto a generare confusione perché bisogna poi nominare li numeri quadrati e le superficie quadrate: però mi son risoluto di seguitare Diofante (come ho fatto nel restante) e chiamarlo potenza,

[27] Matematico greco vissuto a Alessandria verso il 250 d.C., scrisse tredici libri di *Aritmetica* e un libro sui *Numeri poligonali*.

la quale potenza quando è uno si fa quadrato del Tanto, e si segnarà con questo caratero $\overset{2}{\smile}$.

Diffinitione del cubo

Il cubo è il produtto di una potenza moltiplicata via un Tanto, che viene a servare l'ordine de' cubi, che il produtto d'un numero quadrato moltiplicato via il suo lato, fa numero cubo, parimente la potenza, ch'è quadrata, moltiplicata via il Tanto suo lato, produce il cubo, il quale si segnarà con questo caratero $\overset{3}{\smile}$.

Diffinitione della potenza di potenza

La potenza di potenza è il quadroquadrato del Tanto, overo il quadrato della potenza, overo il produtto del cubo via il Tanto, la quale sarà segnata con questo caratero $\overset{4}{\smile}$, e tutti questi nomi saranno chiamati dignità, le quali (per non dilattarmi troppo) ma seguendo la solita brevità, non diffinirò particolarmente, parendomi che queste bastino, poiché l'altre tutte nascono da questo, e solo porrò li nomi loro qui sotto, e il suo caratero.

Nomi delle dignità e forma delle loro abbreviature

Tanto $\overset{1}{\smile}$
Potenza $\overset{2}{\smile}$
Cubo $\overset{3}{\smile}$
Potenza di potenza $\overset{4}{\smile}$
Primo relato $\overset{5}{\smile}$
Potenza cuba, o cubo di potenza $\overset{6}{\smile}$
Secondo relato $\overset{7}{\smile}$
Potenza di potenza di potenza $\overset{8}{\smile}$
Cubo di cubo $\overset{9}{\smile}$
Potenza del primo relato $\overset{10}{\smile}$
Terzo relato $\overset{11}{\smile}$
Cubo di potenza di potenza $\overset{12}{\smile}$

Sí come nella parte minore dell'Arimetica occorrono quattro atti, cioè Moltiplicare, Partire, Sommare e Sotrare, cosí nella parte maggiore ne occorrono cinque, li quattro detti di sopra, e lo aggua-gliare, ch'è il quinto, il qual è il piú difficile ed importante. Però mi forzarò di porlo in guisa che sia inteso da ciascuno, o sia dell'arte, overo li voglia dar opera, ma prima verrò al moltiplicare.

Del moltiplicare delle dignità fra di loro semplicemente

Tutte le dignità che si moltiplicaranno via numero non cangeranno il segno della dignità, perché il numero non ha segno alcuno e tutte le quantità che non haveranno il segno faranno l'effetto del numero, se bene saranno Radici quadrate, o cube, overo legate, o di qual sorte si voglia.

Quando si haverà a moltiplicare dignità si sommaranno i numeri delle abbreviature posti di sopra, e di quelli si formarà una abbreviatura di dignità ed il numero che sarà disparo a esse dignità si moltiplicarà semplicemente (come si moltiplicano gli altri numeri) e per piú chiarezza porrò gli infrascritti essempij. Moltiplichisi 20 via $3\,\overset{1}{\smile}$ fa $60\,\overset{1}{\smile}$, perché si moltiplica il numero via il numero e il produtto riserba la dignità delli $\overset{1}{\smile}$, perché numero via dignità non fa mutatione la dignità (come ho detto). Moltiplichisi $3\,\overset{1}{\smile}$ via $10\,\overset{1}{\smile}$, farà $30\,\overset{2}{\smile}$, perché $\overset{1}{\smile}$ sommato con $\overset{1}{\smile}$ fa $\overset{2}{\smile}$ et il 3 via 10 fa 30, che si gli pone al pari la $\overset{2}{\smile}$ in questa guisa $30\,\overset{2}{\smile}$, e senza altro comento (essendo il modo facile per sé) non mi dilattarò in piú longhezza di parole, ma solo per piú chiarezza porrò questi essempij, i quali faranno il medesimo effetto che il picciolo abbachino suol far nell'arte minore di questa disciplina per scorta ed intelligentia de' principianti.

È interessante osservare che egli dà chiaramente le regole che oggi si chiamano della « riduzione dei termini simili » nell'algebra elementare. Si vedano, per esempio, queste avvertenze tratte dal Libro II, che noi riproduciamo con il simbolismo dell'algebra di oggi:

Sommare di dignità[28]

Le dignità non si possono sommare (se non sono tutte di una spetie) se non per via del piú (come si è insegnato nel primo libro nel sommare di numeri con radici quadrate), come sarebbe se si havesse a sommare $6\,x$ con $8\,x$, essendo simili faranno $14\,x$. Ma se si havesse a sommare $4\,x$ con 10, non si possono sommare, se non dire $4\,x + 10$ overo $10 + 4\,x$, che in questo caso non rilieva qui[29] quale si mette prima, e quanto al sommare questo esempio bastarà.

---

[28] Cioè somma di potenze della indeterminata.
[29] Non ha importanza qui.

Capitolo III

La nascita della matematica moderna

INTRODUZIONE

Abbiamo seguito la nascita dell'algebra attraverso l'introduzione da parte di Leonardo Pisano del simbolismo arabo-indiano per la rappresentazione dei numeri e le scoperte di Cardano, Tartaglia e Bombelli; questo evento può essere considerato come la premessa necessaria alla nascita nel secolo XVII di nuove idee che hanno dato alla matematica un corso del tutto nuovo. Queste nuove idee si possono ricondurre da un lato alla invenzione della geometria analitica e agli studi che sfoceranno nel calcolo infinitesimale, e dall'altro nel riconoscimento della funzione della matematica come linguaggio fondamentale di ogni scienza che si voglia considerare esatta e in particolare di quella scienza della natura che stava sorgendo.

Per quanto riguarda la invenzione della geometria analitica, ci troviamo di fronte ad un fenomeno che è reso possibile dal progresso dell'algebra e dalla maturazione dei suoi metodi; si potrebbe descrivere il fatto dicendo che tradizionalmente vigeva la distinzione della matematica in due rami che si ritenevano distinti ed in qualche modo anche separati: la geometria e la aritmetica, rispettivamente definite come scienza della quantità continua e scienza della quantità discreta.

Un fenomeno importante è dato dalla commistione dei due metodi, quelli della geometria e quelli dell'algebra; in certo senso la fisionomia radicale della geometria analitica è data dal fatto che viene stabilito una specie di parallelismo tra le due scienze grazie al quale le convenzioni della geometria analitica permettono di tradurre con il linguaggio dell'algebra ogni « fatto » geometrico: i punti sono rappresentati da numeri, i luoghi geometrici sono rappresentati da relazioni matematiche, ed in definitiva i problemi geometrici vengono tradotti in problemi dell'algebra o dell'analisi matematica.

Questo procedimento sarebbe stato molto difficile in un periodo precedente, prima che l'algebra avesse maturato gli strumenti per la risoluzione dei suoi problemi; semmai, nell'epoca classica, la geometria veniva utilizzata per risolvere dei problemi che oggi vengono considerati come di competenza dell'algebra.

Questa operazione che si potrebbe chiamare di « commistione » di *metodi, iniziata con la invenzione della geometria analitica, ha avuto dei risultati di una fecondità straordinaria. Tra le tante conseguenze che ne sono scaturite basterà ricordare che, da questo parallelismo tra metodi, la matematica è stata portata a porre uno dei problemi che sono stati all'origine del calcolo infinitesimale: il problema della determinazione della tangente ad una curva in un suo punto, che ha condotto Newton alla nozione di « derivata » di una funzione.*

In certo senso si potrebbe dire che la geometria ha posto alla matematica i problemi del continuo e quindi ha posto le premesse della trattazione degli infinitamente piccoli e degli infinitamente grandi, che hanno dato origine al calcolo infinitesimale e quindi all'analisi matematica modernamente intesa.

Non va però dimenticato che allo sviluppo di questi nuovi metodi, che apriranno la strada alla matematica moderna, hanno contribuito anche le nuove concezioni riguardanti la materia.

Si può dire che la nascita della matematica moderna è stata anche provocata dalle ricerche di Galileo, il quale ha escogitato dei metodi per risolvere i problemi riguardanti la determinazione del volume della sfera e per trattare i problemi di meccanica razionale che chiaramente preludono al calcolo infinitesimale.

Già la matematica greca, soprattutto con Archimede, aveva risolto in maniera impeccabile alcuni problemi riguardanti le figure a contorno non rettilineo: cerchio, parabola, sfera ecc. Ma con Galileo troviamo chiaramente impostata la ricerca di algoritmi nuovi, ci accorgiamo di respirare aria diversa da quella respirata dai greci. In particolare è anche da ricordare che con Galileo si imposta un problema riguardante gli insiemi infiniti che avevano condotto ai paradossi sui quali si era arenata la ricerca dei greci; Galileo invece arriva a soluzioni rigorose sulla strada della critica della nostra capacità di espressione e della portata dei nostri ragionamenti. Si potrebbe dire che la trattazione dei problemi meccanici ha posto a Galileo chiaramente la necessità di « inventare » una nuova matematica; un insieme di metodi che erano ispirati dalla intuizione della materia considerata come un « continuo ».

È anche da osservarsi che la formulazione rigorosa del concetto di continuità sarà data soltanto dalla matematica del secolo XIX; se si pensa a questo si comprende meglio quale sia la portata e l'importanza che la intuizione spaziale, la immaginazione, la fantasia possono avere nella ricerca matematica.

La concezione della materia considerata come continua e le nuove esigenze poste dalla trattazione dei fenomeni della meccanica razionale condurranno il genio di Newton a porre le basi della nuova matematica: il concetto fondamentale di « funzione » che chiaramente entra per la prima volta in modo esplicito nella matematica e la dominerà per *tutto il seguito, insieme con la concezione della continuità, aprono finalmente la strada alla introduzione di metodi che dominano l'infinitamente piccolo e l'infinitamente grande.*

Va detto che anche in questo campo la formulazione precisa e la presentazione rigorosa di questi algoritmi sarà compito della matematica del secolo XIX; ma questi scopritori di terre nuove dimostrano di avere una intuizione che li salva dagli errori, una aderenza alla realtà ed una capacità di creare che, accoppiate, li portano a conquistare dei territori che soltanto molto tempo dopo saranno definitivamente posseduti dalla matematica.

Accanto al genio di Newton va ricordato quello di Leibnitz, che da parte sua « inventò » il simbolismo per trattare questi nuovi enti di cui la matematica andava arricchendosi e fece fare un passo importantissimo al calcolo infinitesimale; ciò si comprende ricordando quanto abbiamo detto a proposito dei simboli e della loro importanza nel progresso della scienza.

L'invenzione della geometria analitica e la nascita del calcolo infinitesimale fanno passare in secondo piano lo sviluppo di altri rami, che si presentavano allora quasi come delle curiosità o delle questioni legate al gioco (si ricordi la nascita del calcolo delle probabilità, occasionata da un problema di gioco) ma che diventarono poi dei capitoli fondamentali della matematica di oggi. Basti pensare alla importanza che ha la statistica per la scienza di oggi, e non soltanto per la cosiddetta scienza pura, ma soprattutto per l'economia, per le scienze sociali, insomma per tutte quelle attività intellettuali che hanno una incidenza cosí grande per la nostra vita, anche quella di tutti i giorni.

Infine è da ricordare che in questo tempo incomincia anche la fisica propriamente detta, con la meccanica dei fluidi, accanto alla meccanica dei corpi rigidi.

Il genio di Pascal lo condusse ad un'analisi critica radicale delle concezioni che si avevano sull'aria e lo condusse addirittura a « pesare » tutta l'aria esistente al mondo, con un procedimento che ci appare di una semplicità sconcertante e che si presenta come il lampo di luce che rischiara i brancolamenti nell'oscurità della metafisica e del ragionamento capzioso e infondato che erano comuni a molti scienziati suoi contemporanei.

In sintesi potremmo dire che i secoli XVI e XVII videro la nascita della matematica moderna, nel senso che vennero posti e risolti quei problemi che condussero alla analisi dell'infinitamente piccolo e dell'infinitamente grande, cioè alla matematica come la conosciamo oggi.

Gli scritti dei protagonisti di questa fioritura imponente che segna la nascita della scienza di oggi sono straordinariamente interessanti: le *pagine di Galileo, de Fermat, Descartes, Pascal, Newton, Leibnitz che abbiamo scelto sono solo alcune di quelle che si possono presentare nell'ordine di idee che abbiamo esposto.*

GALILEO GALILEI

Galileo Galilei (1564-1642), la cui figura è ben nota, è considerato a ragione uno dei fondatori della scienza nella accezione moderna del termine. Matematico, filosofo, astronomo, fisico, egli dette prova di una penetrazione e di una capacità creativa che ne fecero un gigante del pensiero di tutti i tempi e di tutte le genti.

Sono rimaste celebri le sue scoperte di astronomia e la difesa che egli fece del sistema copernicano, insieme con le vicissitudini a cui tale difesa diede luogo e con le persecuzioni che egli dovette subire in conseguenza, da parte dei teologi suoi contemporanei.

Al suo nome è collegata una certa concezione della scienza che proclama anzitutto di fondarsi sull'esperimento come unica fonte di informazione primaria sulla natura, e in secondo luogo rifiuta gli schemi di una metafisica legata alle idee aristoteliche e preconizza l'appello alla esperienza come unico criterio per la accettazione o il rifiuto di una ipotesi e di una teoria.

Le sue opere sono classiche, non soltanto per la filosofia della scienza, ma anche per la letteratura italiana, perché, in un secolo che era dedito al manierismo, egli diede un esempio forse insuperato di prosa scientifica priva di fronzoli, ma dotata di una vivezza eccezionale di espressione.

L'abilità espressiva e la forza polemica lo resero capace di mettere in ridicolo gli avversari e di combattere con grandissima efficacia per le proprie idee, forse anche provocando non poche delle inimicizie che gli amareggiarono la vita e specialmente la vecchiaia.

Egli coltivò la matematica non come vocazione per cosí dire primaria, ma con l'atteggiamento di chi vuole perfezionare lo strumento piú potente che ha a disposizione per la conoscenza della natura. Pertanto egli può essere considerato soprattutto come un fisico ed un filosofo della scienza, e come un cultore di matematica applicata. Ma, come vedremo, egli ebbe anche delle intuizioni acutissime nel campo della matematica pura; inoltre i suoi enunciati metodologici a proposito delle scienze fisiche (per esempio la classica pagina che riportiamo in cui è contenuto *l'enunciato di quello che si chiama oggi il « principio di relatività galileiana ») interessano direttamente anche la matematica, la quale, a partire dall'epoca di Galileo, è diventata il mezzo principale di espressione della meccanica e della fisica.*

Si può dire, con una certa presunzione di certezza, che si deve proprio a Galileo l'affermazione che il linguaggio della scienza è la matematica, cioè l'affermazione piú chiara di uno dei caratteri fondamentali della scienza modernamente intesa. Si potrebbe dire che questo atteggiamento ispira anche le sue polemiche contro la scienza del suo tempo, polemiche che si trovano sparse in tutte le sue opere, ma specialmente nel Dialogo sopra i due massimi sistemi.

Qui si scontrano continuamente le due metodologie: quella della scienza ufficiale di allora, che adottava le categorie ed i metodi della metafisica aristotelica, e quella di Galileo, che voleva che si adottassero i metodi moderni, che le osservazioni fossero piú precisamente tradotte in misure e fossero espresse con i simboli matematici, che le deduzioni fossero non ragionamenti, ma piú precisamente calcoli o deduzioni geometriche, che infine ogni deduzione fosse confrontata con la realtà mediante altre misure.

A ben guardare, si hanno qui delle impostazioni metodologiche le quali vanno ben al di là della semplice affermazione della necessità del metodo sperimentale: si va piú al fondo e si afferma la necessità di un certo linguaggio della scienza.

Il passo che segue è tratto dal dialogo Il saggiatore *con il quale Galileo risponde al Padre gesuita Orazio Grassi il quale aveva scritto un'opera intitolata* La libra *(cioè la bilancia); il titolo della risposta galileiana è già polemico di per sé, perché il saggiatore è la bilancia dell'orefice, in grado quindi di misurare i pesi con una precisione molto maggiore di quella della semplice « libra ».*

« ... La filosofia [1] è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto ».

---

1 Qui il termine « filosofia » vuole indicare quella che allora si chiamava « filosofia naturale », cioè quella che noi oggi chiamiamo piuttosto semplicemente « scienza » o anche « scienza della natura ».

Per uscire dal « laberinto », Galileo si trovò a confrontarsi con alcuni tra i problemi piú importanti della matematica, problemi che erano stati sfiorati dalla matematica classica e che costituiscono anche i punti chiave della matematica modernamente intesa.

Uno tra questi problemi si potrebbe chiamare il problema dell'infinito.

Ricordiamo che già la matematica classica aveva avuto la necessità di trattare degli insiemi di elementi in numero infinito (tipico l'insieme dei numeri interi) e che Euclide aveva dimostrato che il numero dei numeri primi è infinito facendo vedere che l'ipotesi che si possano enumerare tutti i numeri primi conduce ad una conclusione assurda (cfr. pag. 35).

Anche la geometria classica aveva posto dei problemi che erano sfociati nella analisi degli insiemi infiniti; i matematici si erano trovati di fronte al fatto che non è possibile enumerare tutti i punti di un segmento e che, dati che siano due punti qualisivogliano, tra essi ne esiste sempre almeno un altro.

D'altra parte la scoperta, che si fa risalire alla scuola pitagorica, della esistenza di coppie di segmenti incommensurabili tra loro, ha come conseguenza la dimostrazione del fatto che non esiste, per cosí dire, un « atomo » dello spazio geometrico e che quindi una linea qualesivoglia, in particolare un segmento, è da intendersi come indefinitamente divisibile.

Ma Galileo non si urtò solo con queste difficoltà: dovette anche scontrarsi con la mentalità di tipo filosofico dei suoi contemporanei e con gli ostacoli posti da una strana concezione della teologia del suo tempo secondo la quale ogni discorso che riguardasse l'infinito era da considerarsi come sospetto di eresia.

Galileo, precorrendo la concezione che nel secolo XIX il genio di G. Cantor ebbe dell'infinito, propone una soluzione apparentemente paradossale, che sembra contraddire l'assioma di Euclide che afferma: « ... il tutto è maggiore di ogni sua parte ».[2]

Infatti Galileo osserva che se si considera un insieme infinito, e precisamente quello dei numeri interi, e si considera un sottoinsieme proprio di questo, e precisamente quello degli interi che sono dei quadrati di altri, questo secondo insieme costituisce a pieno diritto una parte del tutto sopra considerato.

Ma non si può dire che il « tutto » sia maggiore della sua parte; perché è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca la quale associa ad ogni elemento del tutto un elemento della parte, e ciò a buon diritto porta a concludere che il tutto è uguale a quella sua parte che si considera.

La soluzione che Galileo dà del paradosso è da considerarsi valida ancora oggi: analizzando quale sia il significato della relazione di « uguaglianza », che pare tanto intuitiva e semplice, ma che nel caso di insiemi

---

[2] Cfr. pag. 33 (versione del Vacca).

infiniti rivela delle strane difficoltà, egli è portato a concludere che nel caso di insiemi infiniti la relazione deve essere definita in modo specifico; può avvenire infatti che le categorie che sono valide per gli insiemi finiti (come l'enunciato dell'assioma euclideo che abbiamo ricordato) non siano valide per gli insiemi infiniti.

Il passo che segue è tratto dai Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, *giornata I. A proposito dei personaggi che Galileo introduce nel suo dialogo, va ricordato che Filippo Salviati, nobile fiorentino, fu discepolo di Galileo, ed in seguito divenne suo amico; nel* Dialogo sopra i due massimi sistemi *Salviati rappresenta Galileo stesso; Giovanfrancesco Sagredo, patrizio veneto, fu pure discepolo di Galileo e divenne suo amico; nei dialoghi galileiani Sagredo rappresenta in certo modo l'interlocutore che non è competente, ma è dotato di spirito libero e critico; Simplicio non rappresenta un personaggio storico, vissuto all'epoca di Galileo: egli riecheggia nel nome un celebre commentatore di Aristotele, del VI secolo dopo Cristo; le sue argomentazioni sono ispirate alla filosofia aristotelico-scolastica dominante all'epoca di Galileo; pertanto egli rappresenta il « tipo » del dotto, contemporaneo di Galileo, e quindi una classe e la sua mentalità, piuttosto che una persona determinata.*

SALVIATI – Queste son quelle difficoltà che derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno a gl'infiniti, dandogli quegli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate; il che penso sia inconveniente, perché stimo che quegli attributi di maggioranza, minorità ed egualità non convenghino a gl'infiniti, de i quali non si può dire, uno esser maggiore o minore o uguale all'altro. Per prova di che già mi sovvenne un sí fatto discorso, il quale per piú chiara esplicazione proporrò al sig. Simplicio, che ha mossa la difficoltà. Io suppongo che voi benissimo sappiate quali sono i numeri quadrati e quali i non quadrati.

SIMPLICIO – So benissimo che il numero quadrato è quello che nasce dalla moltiplicazione d'un altro numero in se medesimo: e cosí il quattro, il nove etc. sono numeri quadrati, nascendo quello dal due, e questo dal tre, in se medesimi moltiplicati.

SALVIATI – Benissimo: e sapete ancora, che sí come i prodotti si dimandano [3] quadrati, i producenti, cioè quelli che si multiplicano, si chiamano lati [4] o radici; gli altri poi, che non nascono da

[3] Chiamano.
[4] Questa nomenclatura, già incontrata, è di evidente significato.

numeri multiplicati in se stessi, non sono altrimenti quadrati. Onde se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser piú che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è cosí?

SIMPLICIO – Non si può dire altrimenti.

SALVIATI – Interrogando io di poi, quanti siano i numeri quadrati, si può con verità rispondere, loro esser tanti quante sono le proprie radici, avvenga che [5] ogni quadrato ha la sua radice, ogni radice il suo quadrato, né quadrato alcuno ha piú d'una sola radice, né radice alcuna piú di un quadrato solo.

SIMPLICIO – Cosí sta.

SALVIATI – Ma se io domanderò, quante siano le radici, non si può negare che elle siano quante tutti i numeri, poiché non vi è numero alcuno che non sia radice di qualche quadrato; e stante questo, converrà dire che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri, poiché tanti sono quante le lor radici, e radici son tutti i numeri; e pur da principio dicemmo, tutti i numeri esser assai piú che tutti i quadrati, essendo la maggior parte non quadrati. E pur tuttavia si va la moltitudine de i quadrati sempre con maggior proporzione diminuendo, quanto [6] a maggior numeri si trapassa; perché sino a cento vi sono dieci quadrati, che è quanto a dire la decima parte esser quadrati; in dieci mila solo la centesima parte son quadrati, in un millione solo la millesima: e pur nel numero infinito, se concepir lo potessimo, bisognerebbe dire, tanti essere i quadrati quanti tutti i numeri insieme.

SAGREDO – Che dunque si ha da determinare in questa occasione?

SALVIATI – Io non veggo che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le lor radici, né la moltitudine de' quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, né questa maggiore di quella, ed in ultima conclusione, gli attributi di eguale maggiore e minore non aver luogo ne gl'infiniti, ma solo nelle quantità terminate.[7]

Abbiamo visto come Galileo concepisse l'importanza della matematica per la scienza della natura; questa posizione è stata espressa nella celebre pagina che abbiamo riportato.

[5] Perché.
[6] Quanto piú.
[7] Finite.

L'acutezza della sua osservazione e la sua estrema inventività nella sperimentazione lo portarono ad enunciare anche dei principi fondamentali per la meccanica e per la fisica dei secoli successivi.
Uno di questi principi viene ancora oggi chiamato « principio di relatività galileiana ».
In sostanza Galileo, nel suo intento di dimostrare il fatto che la Terra si muove, giunse a porsi il problema se abbia senso rilevare con esperimenti il fatto che si muove un certo corpo, con il quale l'osservatore sia solidale (corpo che quindi costituisce un « sistema di riferimento » per l'osservatore), tenendo conto del fatto che gli esperimenti debbono riguardare soltanto il riferimento e quindi l'ambiente nel quale l'osservatore si trova. Egli giunse quindi ad enunciare la invarianza delle leggi della meccanica razionale quando siano espresse rispetto ad un riferimento che oggi viene chiamato « inerziale » con il vocabolario della scienza moderna.
La pagina che segue è tratta dal Dialogo sopra i due massimi sistemi, *II giornata. Salviati, che abbiamo già incontrato nei* Discorsi, *espone una esperienza abbastanza immediata, che permette appunto di dedurre la legge di relatività galileiana.*
In questo passo c'è da osservare non soltanto l'acutezza delle osservazioni, ma anche la particolare vivacità della descrizione; qualità questa che fa comprendere con quanta ragione Galileo sia da ricordare, come abbiamo detto, non soltanto come scienziato, ma anche come scrittore e creatore della lingua italiana.

SALVIATI – ... Riserratevi con qualche amico nella maggior stanza che sia sotto coverta di qualche gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; sospendasi anco in lato qualche secchiello, che a goccia a goccia vada versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso; e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando [8] indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non piú gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno eguali; [9] e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazii passerete da

[8] Nuotando.
[9] Cioè se la nave sta ferma, per gettare un oggetto verso una qualunque direzione occorre sempre la stessa forza; inoltre gli animali si muovono in tutte le direzioni indifferentemente e le gocce d'acqua cadono in direzione perfettamente verticale.

tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre il vassello [10] sta fermo non debbano succeder cosí, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme [11] e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprendere se la nave cammina o pure sta ferma; voi saltando passerete nel tavolato i medesimi spazii che prima, né, perché [12] la nave si muova velocissimamente, farete maggior salti verso la poppa che verso la prua, benché, nel tempo che voi state in aria, il tavolato sottopostovi scorra verso la parte contraria al vostro salto; e gettando alcuna cosa al compagno, non con piú forza bisognerà tirarla, per arrivarlo [13] se egli sarà verso la prua e voi verso poppa, che se voi fuste situati per l'opposito; le gocciole cadranno come prima nel vaso inferiore, senza caderne pur una verso poppa, benché, mentre la gocciola è per aria, la nave scorra molti palmi; i pesci nella lor acqua non con piú fatica noteranno verso la precedente che verso la sussequente parte del vaso, ma con pari agevolezza verranno al cibo posto su qualsivoglia luogo dell'orlo del vaso; e finalmente le farfalle e le mosche continueranno i lor voli indifferentemente verso tutte le parti, né mai accaderà che si riduchino [14] verso la parte che riguarda la poppa, quasi che fussero stracche in tener dietro al veloce corso della nave, dalla quale per lungo tempo, trattenendosi per aria, saranno state separate; e se abbruciando alcuna lagrima d'incenso si farà un poco di fumo, vedrassi ascendere in alto ed a guisa di nuvoletta trattenervisi, e indifferentemente muoversi non piú verso questa che quella parte. E di tutta questa corrispondenza d'effetti ne è cagione l'esser il moto della nave comune a tutte le cose contenute in essa e all'aria ancora, che perciò dissi io che si stesse sotto coverta; ché quando si stesse di sopra e nell'aria aperta e non seguace del corso della nave,[15] differenze piú e men notabili si vedrebbero in alcuni de gli effetti nominati; e non è dubbio che il fumo resterebbe in dietro, quanto l'aria stessa; le mosche pari-

---

[10] Vascello.
[11] Questa è l'ipotesi essenziale della relatività galileiana: i due riferimenti debbono muoversi di moto rettilineo ed uniforme l'uno rispetto all'altro. Allora non vi sono esperimenti che possano far decidere che l'uno si muove e l'altro sta fermo.
[12] Nonostante che.
[13] Colpirlo.
[14] Riducano.
[15] Non trascinata con sé dalla nave.

mente e le farfalle, impedite dall'aria, non potrebber seguire il moto della nave, quando da essa per spazio assai notabile si separassero; ma trattenendovisi vicine, perché la nave stessa, come di fabbrica anfrattuosa, porta seco parte dell'aria sua prossima, senza intoppo o fatica seguirebbon la nave, e per simil cagione veggiamo tal volta, nel correr la posta,[16] le mosche importune e i tafani seguir i cavalli, volandogli ora in questa ed ora in quella parte del corpo; ma nelle gocciole cadenti pochissima sarebbe la differenza, e ne i salti e ne i proietti gravi, del tutto impercettibile.

SAGREDO – Queste osservazioni, ancorché navigando non mi sia caduto in mente di farle a posta, tuttavia son piú che sicuro che succederanno nella maniera raccontata; in confermazione di che mi ricordo essermi cento volte trovato, essendo nella mia camera, a domandar se la nave camminava o stava ferma, e tal volta, essendo sopra fantasia, ho creduto che ella andasse per un verso, mentre il moto era al contrario...

Le qualità di osservatore e di esperimentatore di Galileo sono state già rilevate; è interessante ricordare che egli le esercitò nei campi piú svariati servendosi delle occasioni che ad una persona disattenta apparirebbero del tutto banali, per dedurre o per confermare delle leggi della fisica. Per esempio la circostanza della pulitura di una lastra di ottone con lo scalpello e l'osservazione del fatto che lo scalpello talvolta emette un sibilo, lasciando contemporaneamente una striatura sul metallo, serve a Galileo per confermare le leggi dell'acustica e per acquisire una ulteriore chiarezza sul fenomeno della emissione del suono.

Nel passo che segue, tratto dai Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, *Giornata I, siamo di fronte alle difficoltà della registrazione delle onde sonore, registrazione che era impossibile alla tecnica dell'epoca e che invece Galileo supera con la sua straordinaria capacità di osservazione e di coordinazione dei vari fenomeni.*

SALVIATI – Bellissima osservazione per poter distinguere ad una ad una le onde nate dal tremore del corpo che risuona, che son poi quelle che, diffuse per l'aria, vanno a far la titillazione de'l timpano del nostro orecchio, la quale nell'anima ci doventa suono. Ma dove che il vederle ed osservarle nell'acqua non dura se non quanto dura la confricazione[17] del dito, ed anco in questo tempo

[16] Nel correre delle carrozze.
[17] Agitazione.

non sono permanenti, ma continuamente si fanno e si dissolvono, non sarebbe bella cosa quando se ne potesse far con grand'esquisitezza di quelle che restassero lungo tempo, dico mesi ed anni, sí che desser commodità di poterle misurare ed agiatamente numerare?

SAGREDO – Veramente io stimerei sommamente una tale invenzione.

SALVIATI – L'invenzione fu del caso, e mia fu solamente l'osservazione e 'l far di essa capitale e stima come di nobil contemplazione, ancor che di fattura in se stessa assai vile. Raschiando con uno scarpello di ferro tagliente una piastra d'ottone per levarle alcune macchie, nel muovervi sopra lo scarpello con velocità, sentii una volta o due, tra molte strisciate, fischiar ed uscirne un sibilo molto gagliardo e chiaro; e guardando sopra la piastra, veddi un lungo ordine di virgolette sottili, tra di loro parallele e per egualissimi intervalli l'una dall'altra distanti. Tornando a raschiar di nuovo piú e piú volte, m'accorsi che solamente nelle raschiate che fischiavano lasciava lo scarpello le 'ntaccature sopra la piastra, ma quando la strisciata passava senza sibilo, non restava pur minima ombra di tali virgolette. Replicando poi altre volte lo scherzo, strisciando ora con maggiore ora con minor velocità, il sibilo riusciva di tuono [18] or piú acuto ed or piú grave; ed osservai, i segni fatti nel suono piú acuto esser piú spessi, e quelli del piú grave piú radi, e tal volta ancora, secondo che la strisciata medesima era fatta verso 'l fine con maggior velocità che nel principio, si sentiva il suono andarsi inacutendo, e le virgolette si vedeva esser andate inspessendosi, ma sempre con estrema lindura e con assoluta equidistanza segnate; ed oltre a ciò, nelle strisciate sibilanti sentivo tremarmi il ferro in pugno, e per la mano scorrermi certo rigore: ed in somma si vede e sente fare al ferro quello appunto per che facciamo noi nel parlar sotto voce e nell'intonar poi il suono gagliardo, che, mandando fuora il fiato senza formare il suono, non sentiamo nella gola e nella bocca farsi movimento alcuno, rispetto però ed in comparazione del tremor grande che sentiamo farsi nella laringe ed in tutte le fauci nel mandar fuora la voce, e massime in tuono grave e gagliardo...

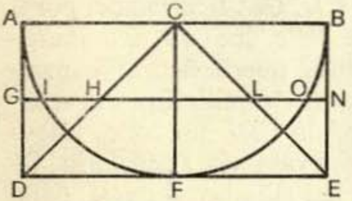
Tornando ad argomenti di matematica, ricordiamo che Galileo e la sua scuola portarono un contributo fondamentale al nascere di quell'im-

[18] Tono.

portante capitolo della matematica che è l'analisi matematica, prima con Galileo stesso e poi con Evangelista Torricelli,[19] *allievo di Galileo, che fu uno dei fondatori di quella geometria degli indivisibili che, attraverso le idee di Bonaventura Cavalieri*[20] *e di Luca Valerio,*[21] *portò al concetto di integrale, così come è oggi concepito.*

Alla base della intuizione di Galileo sta il procedimento che porta, per esempio, a dividere un solido in « fettine » e a ritenere equivalenti (cioè di uguale volume) due solidi che siano secati da piani appartenenti ad un fascio di piani paralleli in figure di aree eguali. Il caso tipico dell'applicazione di questo criterio è dato dal procedimento di Galileo per ottenere il volume della sfera, procedimento che porta alla considerazione della figura che viene da lui stesso chiamata « scodella ».

Il ragionamento di Galileo, esposto in forma moderna e riferito alla figura, è sostanzialmente il seguente: consideriamo un semicerchio avente



per diametro il segmento AB *e sia* CF *il raggio perpendicolare al diametro stesso. Sia* ABDE *il rettangolo avente* AB *come base, ed avente il lato opposto ad* AB *tangente al semicerchio. Facendo ruotare il semicerchio attorno alla retta su cui sta il segmento* CF *si ottiene una semisfera di diametro* AB*; lo stesso movimento di rotazione fa descrivere al rettangolo* ABDE *il cilindro avente come asse la stessa retta su cui sta* CF*. Si suppone di conoscere il volume del cilindro; è chiaro che il volume della sfera sarà noto quando sia noto il volume del solido (« scodella » per l'appunto) compreso tra il cilindro e la sfera.*

Ora il procedimento di Galileo per calcolare il volume della « scodella » è il seguente: consideriamo il cono che ha vertice nel punto C*, centro della sfera e come cerchio di base quello descritto dal lato* DE *del rettangolo; orbene si verifica che la « scodella » ha lo stesso volume del cono ora nominato; e ciò perché se si tagliano il cono e la «scodella» con un piano quale si voglia, perpendicolare all'asse di rotazione, si ottengono delle aree equivalenti. Precisamente tagliando il cono si ottiene ovviamente un cerchio, tagliando la « scodella » si ottiene una*

---

19 1608-1647; proseguí e estese le ricerche di Cavalieri.

20 1598?-1647; frate dell'ordine dei Gesuati di S. Gerolamo; docente all'Università di Bologna; delineò il procedimento che fu poi completato da Torricelli, comprendendone l'importanza, come mostrano le seguenti parole scritte a Galileo: « Ho perfettionato un'opera di geometria... et è cosa nova, non solo quanto alle cose trovate, ma anco al modo di trovarle... ».

21 1552-1618; Galileo lo chiamò, come vedremo (pag. 107) « nuovo Archimede dell'età nostra ».

corona circolare, che ha come circonferenza esterna quella del cilindro e che ha area uguale a quella del cerchio secato dal piano sul cono.

Il passo che segue è tratto dai Discorsi e ragionamenti sopra due nuove scienze, *Giornata I. Salviati (che, come abbiamo già detto, impersona Galileo nel dialogo) espone la costruzione della « scodella » e la dimostrazione del fatto che il cono ha lo stesso volume del solido che si ottiene dal cilindro togliendo la « scodella »; la dimostrazione è basata sugli « indivisibili », cioè viene ottenuta sostanzialmente immaginando i solidi come costituiti da « fettine » sottilissime; idea che sarà poi sviluppata nel calcolo integrale moderno con perfetto rigore.*

SALVIATI – È necessario farne la figura, perché la prova è pura geometrica. Per tanto intendasi [22] il mezzo cerchio *AFB*, il cui centro *C*, ed intorno ad esso il parallelogrammo rettangolo *ADEB*, e dal centro a i punti *D*, *E* siano tirate le rette *CD*, *CE*; figuriamoci poi il semidiametro *CF*, perpendicolare ad una delle due *AB*, *DE* immobile, intendiamo intorno a quello girarsi tutta questa figura: è manifesto che dal rettangolo *ADEB* verrà descritto un cilindro, dal semicircolo *AFB* una mezza sfera, e dal triangolo *CDE* un cono. Inteso questo, voglio che ci immaginiamo esser levato via l'emisferio, lasciando però il cono e quello che rimarrà del cilindro, il quale, dalla figura che riterrà simile a una scodella, chiameremo pure scodella: della quale e del cono prima dimostreremo che sono eguali; [23] e poi un piano tirato parallelo al cerchio che è base della scodella, il cui diametro è la linea *DE* e centro *F*, dimostreremo, tal piano, che passasse, v.g.[24] per la linea *GN*, segando la scodella ne i punti *G*, *I*, *O*, *N*, ed il cono ne' punti *H*, *L*, tagliare la parte del cono *CHL*, eguale sempre alla parte della scodella, che è come se dicessimo un nastro di larghezza quanta è la linea *GI* (notate che cosa sono le definizioni de i matematici, che sono una imposizione di nomi, o vogliam dire abbreviazioni di parlare, ordinate ed introdotte per levar lo stento tedioso che voi ed io sentiamo di presente per non aver convenuto insieme di chiamar v.g. questa superficie *nastro circolare*, e quel solido acutissimo della scodella *rasoio rotondo*): [25] or comunque...

---

22 Si consideri.
23 Beninteso in volume.
24 Verbigrazia, cioè per esempio.
25 Questo atteggiamento nei riguardi delle definizioni della matematica si ritrova esattamente in B. Pascal, come si può constatare nel passo riportato dalla sua opera *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader* (cfr. pag. 123).

Qui Salviati prosegue nel dimostrare che le due aree, quella circolare, secata dal piano sul cono, e quella della corona circolare, secata dal piano sulla « scodella », sono tra loro uguali, quale che sia il piano secante. La dimostrazione è elementare ed alla portata di chiunque conosca la geometria euclidea elementare.
Salviati, dopo aver dimostrato questo, non dimostra che i due solidi sono tra loro uguali, ma rimanda per la dimostrazione alla

« ... duodecima proposizione del libro secondo *De centro gravitatis solidorum* posta dal Sig. Luca Valerio, nuovo Archimede dell'età nostra [...] il quale per un altro suo proposito se ne serví, sí perché nel caso nostro basta l'aver veduto come le superficie già dichiarate [26] siano sempre eguali, e che, diminuendosi sempre egualmente, vadano a terminare l'una in un sol punto e l'altra nella circonferenza d'un cerchio, maggiore anco di qualsivoglia grandissimo, perché in questa consequenza sola versa la nostra meraviglia ».

In altre parole, la cosa che meravigliava Galileo era che si potesse avere un'area (quella della corona circolare) che tende verso lo zero, nonostante il fatto che una sua dimensione non si annulli, mentre nel caso del cerchio secato dal piano sul cono la cosa appare evidente, perché qui il raggio stesso del cerchio tende allo zero.
È da osservarsi che il problema della valutazione del volume della sfera era già stato risolto da Archimede con un procedimento molto piú rigoroso. La novità dell'atteggiamento di Galileo sta nell'aver adottato dei procedimenti che oggi si chiamerebbero « euristici », cioè adatti piuttosto a scoprire la verità di una proposizione che a garantirne la validità in modo rigoroso.
La storia poi si incaricherà, con la scoperta di certi libri di Archimede che Galileo non poteva conoscere, di dimostrare che lo stesso Archimede aveva adottato dei procedimenti di questo tipo per la scoperta, esponendo poi i risultati in forma classica e rigorosa.
Soltanto la matematica dei secoli successivi riuscirà a garantire con perfetto rigore la validità dei procedimenti che la matematica dell'epoca galileiana aveva intuito.
Vogliamo infine richiamare l'atteggiamento di Galileo nei riguardi delle definizioni degli enti studiati dalla matematica, già delineato nel passo al quale si riferisce la nota n. 25 riportando un passo dei Discorsi e dimostrazioni matematiche... *che riguarda un certo tipo di proporzione che Galileo per bocca di Salviati vorrebbe chiamare « composta » e che invece Simplicio non vuole chiamare cosí: Salviati taglia corto, in modo*

[26] Cioè quella del cerchio e quella della corona circolare.

un po' rude, come di chi sta perdendo la pazienza perché gli avversari continuano ad opporgli delle obiezioni senza molto senso; l'atteggiamento di Galileo è quello di chi consideri le definizioni della matematica come puramente nominali, cioè delle pure imposizioni di nomi alle cose di cui si tratta.

« ... ma qui finalmente [27] non vanno contemplazioni né dimostrazioni, imperocché è una semplice imposizione di nome. Quando alla Signoria Vostra non piacesse il vocabolo di *composta*, chiamiamola incomposta, o impastata, o confusa, o in qualunque modo piú aggrada a Vostra Signoria, solo accordiamoci in questo, che quando poi avremo tre grandezze dello stesso genere, ed io nominerò la proporzione incomposta, o impastata, o confusa, vorrò intendere la proporzione che ànno le estreme di quelle grandezze e non altro... Ora intesa e stabilita la difinizione della proporzione composta in questo modo (la quale non consiste in altro fuori che nell'accordarsi che sorta di roba noi intendiamo sotto quel nome)... ».

[27] In fin dei conti.

RENÉ DESCARTES

René Descartes Du Perron,[1] *il cui nome fu latinizzato in « Cartesius » (e di qui italianizzato in « Cartesio »), è uno dei filosofi piú rappresentativi della storia del pensiero umano, nel quale ha lasciato un'impronta indelebile.*

Della sua vastissima produzione filosofica viene ricordato soprattutto il Discorso sul metodo *(Discours de la méthode), che inizia una nuova era nei riguardi del problema della conoscenza umana. In appendice a questa celebre opera, nella prima edizione (1637), Descartes scrisse anche delle pagine intitolate* La Géométrie, *nelle quali egli espose quelle idee che diedero inizio ad una intera branca della matematica succes-*

[1] Nato nel 1596 e morto nel 1650, filosofo e matematico francese; abbracciò da giovane la carriera militare, che abbandonò in seguito per dedicarsi interamente alla scienza.

siva: la geometria analitica, a proposito della quale non è esagerato il dire che la sua invenzione ha costituito un passo fondamentale nello svolgimento della storia della matematica.

Ovviamente, per questa invenzione, come per molte altre, si potrebbe dire che era « nell'aria » come conseguenza degli sviluppi della matematica delle epoche anteriori; questo può essere dedotto anche dal fatto che esistono ancora oggi delle incertezze sulla attribuzione della priorità della invenzione a Cartesio oppure a P. de Fermat, oltre che dall'individuazione di diversi « precursori ».

Prescindendo dalle questioni di attribuzione del merito dell'invenzione, ci interessa osservare che non si poteva avere geometria analitica senza che i progressi dell'algebra avessero resa possibile la risoluzione in forma simbolica di determinati problemi che precedentemente venivano trattati in un contesto geometrico. È infatti noto che i greci sapevano risolvere dei problemi geometrici che, tradotti in simboli con l'algebra di oggi, danno luogo ad equazioni di secondo grado, ma che la risoluzione generale di problemi che conducono ad equazioni di grado superiore al secondo ha dovuto attendere, come si è visto (cfr. pag. 54), fino al secolo XVI.

Nella impostazione che Descartes dà alla sua esposizione, e soprattutto nello spirito che animava la sua ricerca, la invenzione della geometria analitica assume l'aspetto della acquisizione, di primaria importanza per la scienza, di un metodo, *mediante il quale un problema geometrico viene trasformato in un problema algebrico, il quale viene poi a sua volta risolto con i metodi propri dell'algebra.*

Questa trasformazione di un problema geometrico in un problema di algebra viene fatta mediante la scelta di certe rette, che Descartes chiama « di riferimento », e che oggi vengono chiamate « assi cartesiani ».

L'occasione ad una impostazione cosí nuova e feconda dei problemi geometrici è stata offerta da un problema classico, che aveva suscitato l'interesse dei geometri greci.

In linguaggio moderno si potrebbe enunciare tale problema nel modo seguente: sono date in un piano certe rette: indichiamole con a, b, c,...; *fissiamo un punto* O *del piano e mandiamo da esso certe rette, chiamiamole* a', b', c',... *in modo che esse formino degli angoli assegnati rispettivamente con le rette* a, b, c,... *Si avranno dei punti di intersezione che possiamo indicare rispettivamente con* A, B, C,... *Orbene si tratta di determinare il punto* O *in modo che i segmenti* OA, OB, OC *soddisfino a certe relazioni algebriche stabilite; per esempio, se le rette sono soltanto tre:* a, b, c, *si vuole avere* $OA^2 = OB \cdot OC$.

Descartes con la sua impostazione metodica studia il luogo dei punti O *e ne trova anche alcune caratteristiche.*

Da questo punto di vista appare naturale anche l'impostazione di un altro problema, tipicamente metodologico, che è quello della classificazione delle linee curve; appare quindi del tutto naturale che Cartesio l'abbia affrontato e che abbia portato avanti la sua risoluzione quel tanto che era consentito dai mezzi della scienza sua contemporanea, in particolare dell'algebra.

Per ben capire queste questioni occorre ricordare che già la matematica greca aveva affrontato certi problemi che oggi vengono chiamati « classici »; tra gli altri la duplicazione del cubo, la trisezione dell'angolo e la quadratura del cerchio.

Per presentare i problemi stessi nel vocabolario di oggi (in modo che sia compreso anche da chi non è un tecnico della matematica), ricordiamo che il problema della duplicazione del cubo consiste nella ricerca del lato di un cubo che abbia volume doppio di quello di un cubo dato, di cui si conosce quindi il lato.[2]

Il problema della trisezione dell'angolo consiste nella ricerca di un angolo che sia la terza parte esatta di un angolo dato qualesivoglia; infine il problema della quadratura del cerchio consiste nella determinazione di un quadrato (cioè del lato di un quadrato) che abbia area eguale a quella di un cerchio dato.

Ovviamente, perché i problemi abbiano senso occorre precisare quali sono gli strumenti che si intendono dati per risolverli; se si ammette che per la risoluzione sia accettabile soltanto l'uso di quelli che vengono chiamati gli « strumenti elementari », cioè la riga ed il compasso, è stato dimostrato che tali problemi non sono risolubili. Tuttavia niente vieta che si possa risolverli con altri strumenti, che ovviamente occorre descrivere e dei quali occorre precisare l'impiego.

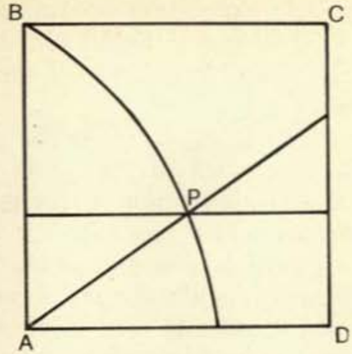
Per esempio, è chiaro che la riga (che è stata nominata qui sopra) deve essere impiegata soltanto per tracciare la retta che congiunge due punti e che è univocamente determinata da essi; non si ammette che, per esempio, la riga sia anche impiegata per trovare, per tentativi, il punto di contatto delle tangenti mandate da un punto ad una circonferenza, o in qualche altro modo.

In mancanza di queste precisazioni, la geometria greca aveva tentato di risolvere in vari modi i problemi di cui abbiamo detto, riconducendoli a certe operazioni che si supponevano eseguibili; tali operazioni erano, per esempio, la ricerca delle intersezioni di certe linee curve, che si supponevano tracciate o il cui tracciamento si supponeva eseguibile.

Celebre è stata, per esempio, la soluzione del problema della quadratura del cerchio che venne data dal geometra greco Ippia:[3] *conside-*

---

[2] Si veda quanto è stato riportato nella parte dedicata a R. Bombelli.
[3] Ippia d'Elide, nato verso la metà del quinto secolo a.C.



rato il quadrato di vertici A, B, C, D, *si supponga di far girare con velocità uniforme il lato* AB *attorno al vertice* A *in modo da portarlo sul lato* AD; *contemporaneamente si supponga che il lato* BC *trasli parallelamente a se stesso, sempre con velocità uniforme; supponiamo anche che le due velocità siano tali che, quando il lato che ruota uniformemente attorno ad* A *cade su* AD, *anche il lato che trasla cada su* AD.

Allora la retta ruotante e la retta traslante si incontrano ad ogni istante in un punto P, *che descrive una curva nota come « Quadratrice di Ippia ».*

Infatti quando tale curva sia supposta tracciata, il problema della quadratura può essere risolto con mezzi elementari. Tuttavia si nota subito che in questo caso il problema è soltanto spostato e non risolto. Infatti per determinare, non in via empirica, ma in via teorica, un mezzo meccanico che realizzi non soltanto la uguaglianza delle due velocità ma soprattutto il contemporaneo arrivo dei due segmenti sul segmento AD *occorre aver risolto il problema della quadratura.*

Per quanto riguarda gli altri metodi che erano stati proposti dai greci per la risoluzione degli altri problemi, va detto che il loro significato è stato completamente compreso soltanto in epoca a noi molto vicina; precisamente soltanto dopo la introduzione dei metodi della geometria analitica si è potuto giungere ad una classificazione delle curve piane e pertanto si è verificato che molti metodi proposti conducono ad equazioni di grado superiore al secondo. Descartes stesso descrive uno strumento che permette di risolvere il problema della duplicazione.

Ovviamente si tratta di strumenti che non sono così semplici come il compasso, perché contengono alcune parti che sono mobili l'una sull'altra con scivolamenti e con conservazione di angoli.

Presentiamo qui di seguito alcuni passi del secondo libro della Géométrie *in cui Descartes pone il problema metodologico della classificazione delle linee curve, ed espone le proprie idee a proposito della soluzione del problema stesso.*

Della natura delle linee curve

Gli antichi hanno bene osservato che tra i problemi di geometria ve ne sono alcuni che sono piani, altri che sono solidi ed altri infine che sono lineari,[4] cioè che gli uni (problemi) possono essere risolti

[4] Il significato di questa classificazione dei Greci era il seguente: venivano

tracciando soltanto delle rette e dei cerchi, mentre i secondi non possono essere risolti che impiegando anche delle sezioni coniche ed infine i problemi del terzo tipo richiedono delle linee piú complicate.

Ma io mi stupisco che gli antichi non abbiano in piú fatto distinzione tra diversi gradi di complicazione tra queste linee piú complicate, e non so capire perché essi le hanno chiamate « linee meccaniche » piuttosto che linee geometriche.

Perché se si dicesse che per descrivere queste linee occorre impiegare degli strumenti, occorrerebbe allora classificare nello stesso modo anche le rette ed i cerchi, perché per tracciare queste linee occorre impiegare la riga o il compasso, e questi due sono pure degli strumenti.

Non credo inoltre che sia per il fatto che gli strumenti necessari per tracciare queste linee sono piú complicati della riga e del compasso e quindi non permettono l'accuratezza dei disegni che si ottiene con la riga o col compasso.

Perché proprio per questa ragione occorrerebbe allora rifiutare tali strumenti nella meccanica, perché proprio là viene richiesta la esattezza delle costruzioni, mentre nella geometria ciò che viene richiesta è soltanto la esattezza del ragionamento, ed in quanto a questo essa può essere presente anche nelle altre linee (oltre che nelle rette e nei cerchi). Non penso neppure che essi non abbiano voluto aumentare il numero dei loro postulati [5] e che si siano con-

---

chiamati « problemi piani » quelli che fanno intervenire per la loro soluzione soltanto delle linee chiamate « piane », cioè rette o circonferenze. Venivano chiamati « problemi solidi » quelli che facevano intervenire per la loro soluzione delle curve che erano state definite da Apollonio come sezioni del cono rotondo, quelle che nelle matematiche di oggi vengono chiamate « sezioni coniche » o piú semplicemente « coniche » *tout court*. Infine venivano chiamati « lineari » i problemi per la cui soluzione si dovevano far intervenire delle curve di un tipo diverso da uno dei due finora considerati. La classificazione era abbastanza rudimentale, ma occorre dire che non esistevano i mezzi algebrici ed analitici per darne una migliore.

[5] Ricordiamo che tra i postulati del I libro di Euclide ci sono: quello che richiede che si possa tracciare una retta che congiunge due punti quali si vogliano, quello che richiede che tale retta (oggi si direbbe segmento di retta) possa comunque essere prolungata indefinitamente, ed infine quello che richiede che si possa tracciare un cerchio avente un centro qualunque ed un raggio qualunque. Qui Descartes dà al termine « postulato » il significato originario di « domanda »; non si tratta di proposizioni che si enunciano senza dimostrazione, ma di « domande » che il geometra fa ad un oppositore o ad un interlocutore; egli domanda che questi ammetta tali proposizioni impegnandosi poi ad accettarne le conseguenze.

tentati che gli si accordasse di poter congiungere due punti con una retta e di poter tracciare un cerchio con un centro dato e passante per un punto dato. Ma nel trattare delle sezioni coniche, non si sono fatti scrupolo di domandare che un cono qualsiasi possa essere intersecato con un piano qualunque. Ora non vi è bisogno per le linee che io vorrei introdurre qui, di supporre niente altro che due o piú linee possano essere mosse l'una sull'altra e che le loro intersezioni determinino delle altre curve; e questo non mi pare per nulla piú difficile da ammettere che quello che gli antichi hanno domandato di ammettere.

È vero che gli antichi non hanno mai completamente accettato le sezioni coniche, e io non voglio per nulla cercare di cambiare i nomi, che sono confermati dall'uso; ma è chiaro, mi sembra, che se si accetta, come si usa fare, la geometria come esatta e la meccanica come quella che non lo è, e se si considera la geometria come una scienza, che generalmente insegna a conoscere le misure di tutti i corpi,[6] allora non possiamo escludere le linee complicate e conservare quelle semplici, purché si possa immaginare che le linee complicate siano descritte con un movimento continuo, oppure da vari movimenti continui che si susseguono, purché i movimenti che seguono siano interamente regolati da quelli che li precedono; perché in questo modo si può sempre avere una conoscenza esatta delle loro misure. Ma può darsi che la ragione che ha condotto gli antichi Geometri a non accettare le linee che fossero piú complicate delle sezioni coniche sia data dal fatto che le linee del primo tipo (cioè le complicate) che essi hanno considerato sono state la Spirale, la Quadratrice, ed altre simili, che a dire il vero appartengono solo alla meccanica e non appartengono alla classe di quelle curve che io vorrei considerare qui, perché si immagina che esse siano descritte da due movimenti separati distinti e tali che non si possa misurare esattamente il loro rapporto.[7]

Ciononostante essi (gli antichi) hanno preso in considerazione la Concoide, la Cissoide, ed alcune altre curve, che invece possono essere considerate appartenenti alla classe delle curve che io pro-

---

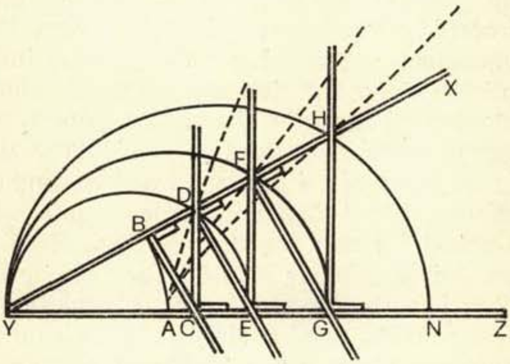
6 Ecco una definizione che Descartes dà della geometria; non come una scienza astratta, si noti, ma come una scienza che razionalizza le nostre esperienze concrete a proposito dei corpi.

7 Della quadratrice abbiamo già detto; la spirale, di cui Archimede ha trattato, è la curva descritta da un punto il quale si muove di moto uniforme su una retta, la quale ruota con moto pure uniforme attorno ad un suo punto.

pongo di accettare; ma essi le hanno prese in considerazione piú di quelle che abbiamo sopra chiamate meccaniche, perché gli antichi non conoscevano le proprietà di queste linee molto bene. Oppure il fatto è che, constatando che essi non conoscevano molte proprietà delle sezioni coniche e ignoravano anche molte cose che si potevano fare con la riga ed il compasso, essi non hanno osato attaccare dei problemi piú difficili. Ma io spero che coloro i quali saranno capaci di servirsi del calcolo geometrico che io propongo qui, non troveranno ostacoli capaci di arrestarli nei problemi piani o solidi.[8] E quindi io li invito a ricercare oltre, in modo che essi non mancheranno mai di materia di investigazione e di esercizio.

Qui Descartes presenta lo strumento che è rappresentato dalla figura.

Al ruotare del regolo YX *le squadre che hanno i loro vertici in* C, D, E, F, G *scorrono sui regoli* YZ *ed* YX, *in modo che gli angoli nei punti nominati siano sempre retti.*



Allora i punti B, D, F, H, *descrivono delle curve; il punto* B *descrive una circonferenza che ha come raggio il segmento* YB; *gli altri descrivono delle curve che sono rappresentate, in coordinate cartesiane, da equazioni di grado superiore al secondo.*

Pertanto la posizione di Descartes è quella di ammettere che linee cosiffatte siano considerate come note, allo stesso modo come gli antichi hanno accettato come note le curve descritte con la riga e con il compasso. In tal modo egli mostrerà che il problema della trisezione dell'angolo e quello della duplicazione del cubo diventano solubili.

Descartes espone poi altri procedimenti per tracciare curve che siano sezioni coniche.

Egli non rigetta neppure il metodo che fa intervenire alcuni fili. Tut-

[8] La nomenclatura e la classificazione dei problemi è quella che abbiamo presentato sopra. Descartes è quindi pienamente cosciente di presentare un nuovo metodo; e si rende ben conto della differenza tra il presentare un metodo e il presentare certi risultati. Questi non dicono altro da se stessi, mentre un metodo contiene e racchiude in se stesso possibilità infinite, che Descartes offre ai futuri ricercatori.

tavia egli mette in guardia dall'accettare delle linee che sono « simili a corde » per il fatto che hanno dei tratti rettilinei e dei tratti curvi e ciò perché:

« ... la proporzione che sussiste tra la retta e la curva non è conosciuta e non può essere scoperta da mente umana, e quindi non si può accettare alcun rapporto come razionale se fosse rigoroso ed esatto ».

Descartes riporta infine molti risultati che riguardano le equazioni algebriche e che sono rimasti classici nella matematica successiva; e ciò è ben comprensibile e coerente con il metodo che egli sta esponendo, metodo secondo il quale i problemi geometrici, attraverso le convenzioni di rappresentazione che egli ha introdotte, vengono ricondotti a problemi algebrici; in generale, i problemi riguardanti elementi della geometria (punti, rette, linee, ecc.) vengono tradotti in problemi che riguardano gli elementi numerici che li rappresentano.

Riportiamo qui la conclusione del libro, conclusione che è indicativa dello spirito di Descartes ed insieme della coscienza che egli aveva di aver aperto una nuova era nella matematica per il fatto di aver esposto metodi piuttosto che risultati, per quanto numerosi ed importanti:

« Spero che i nostri nipoti mi saranno grati, non soltanto per le cose che ho qui presentato e spiegato, ma anche per quelle che ho volontariamente omesso, per lasciar loro il piacere di scoprirle ».

PIERRE DE FERMAT

Il nome del magistrato tolosano Pierre de Fermat[1] *è ricordato nella storia della matematica soprattutto per le sue ricerche di aritmetica; in questo campo il suo apporto è stato fondamentale per passare dalla aritmetica dell'età classica all'aritmetica moderna ed ai suoi metodi.*

Ricordiamo tra l'altro la celebre proposizione, che viene abitualmente chiamata « il grande teorema di Fermat », secondo la quale non pos-

---

[1] Nato probabilmente nel 1601, trascorse gran parte della sua vita a Tolosa, dove fu consigliere di quel parlamento; morí nel 1665. È considerato uno dei matematici piú insigni del secolo XVII.

sono esistere tre numeri interi diversi da zero x, y, z *tali che si abbia*

$$x^n + y^n = z^n$$

quando n *è un intero positivo non minore di 3.*

Questa proposizione è stata scritta dal Fermat sul margine del volume di Diofanto che egli utilizzava, insieme con l'annotazione che egli ne aveva dato la dimostrazione, ma che questa era troppo lunga per essere scritta su quel margine.

Dopo di allora, per circa tre secoli, i matematici hanno cercato inutilmente la dimostrazione della proposizione di Fermat; tuttavia, nonostante l'esistenza di mezzi di calcolo di grandissima potenza, non si è trovato neppure un caso nel quale la proposizione di Fermat cada in difetto.

Si tratta quindi di una proposizione della quale, nonostante tutti gli sforzi, non si sa ancora se sia vera oppure falsa.

Tuttavia la grandezza di Fermat si è manifestata anche in campi diversi da quello dell'aritmetica; celebre è per esempio il suo scambio di lettere con B. Pascal a proposito del calcolo delle probabilità. Egli inoltre viene a ragione considerato come uno dei fondatori della geometria analitica per quanto scrisse sull'argomento piú o meno contemporaneamente a Cartesio, e in particolare per l'opera scritta in latino col titolo Ad locos planos et solidos isagoge, *cioè* Introduzione ai luoghi piani e solidi,[2] *nella quale egli introduce esplicitamente le convenzioni e i metodi della geometria analitica e risolve con tali metodi alcuni problemi classici; da questa opera sono tratti i passi che seguono, nei quali si è adottato il simbolismo moderno per renderli piú facilmente comprensibili.*

Non si può dubitare sul fatto che gli antichi abbiano lungamente trattato dei luoghi; lo sappiamo da Pappo,[3] il quale, all'inizio del Libro VII, dice che Apollonio aveva scritto sui luoghi piani e che Aristeo[4] aveva trattato dei luoghi solidi. Ma, se non andiamo errati, la loro ricerca non è stata abbastanza facile; e ciò lo deduciamo dal fatto che essi non diedero un enunciato abbastanza generale per molti luoghi, come vedremo.

Pertanto applicheremo a questa teoria un metodo di analisi che

2 Ricordiamo che a quell'epoca si chiamavano «luoghi piani» le rette e le circonferenze, mentre le curve sezioni piane del cono (che oggi vengono chiamate «coniche») venivano chiamate «luoghi solidi» (cfr. nota 4 a pag. 111).

3 Pappo di Alessandria, geometra greco probabilmente del III secolo d.C., scrisse una *Collezione matematica.*

4 Matematico greco di poco precedente a Euclide.

le è proprio e particolare, metodo che apre la strada generale per la ricerca sui luoghi.

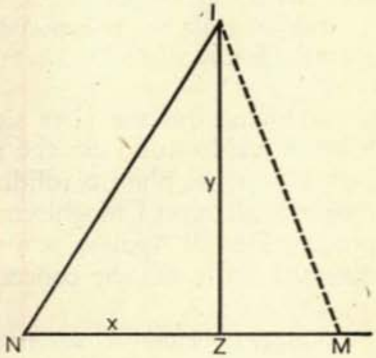
Ogni volta che in una equazione finale[5] si hanno due quantità incognite, si ha un luogo, poiché l'estremità di una di esse descrive una retta oppure una curva.

La linea retta è semplice ed unica nel suo genere; le specie di curve sono in numero infinito: cerchio, parabola, iperbole, ellisse, ecc.

Ogni volta che l'estremità della quantità incognita che descrive il luogo segue una linea retta oppure circolare, il luogo viene detto « piano ». Se tale estremità descrive una parabola, un'iperbole oppure una ellisse, il luogo viene detto « solido »; per altre curve il luogo viene chiamato « di linea ». Non aggiungeremo nulla su questo ultimo caso, perché la conoscenza di un luogo « di linea » si deduce molto facilmente per mezzo di riduzioni,[6] dallo studio dei luoghi piani e solidi.

Per stabilire le equazioni, è comodo prendere le due quantità incognite sotto un angolo dato, angolo che abitualmente supporremo retto, e fissare la posizione e l'estremità di una di esse.

Sia NZM una retta[7] di cui è data la posizione e sulla quale è stato fissato il punto N. Si ponga NZ uguale alla quantità incognita x, e si ponga la retta ZI (condotta perpendicolarmente alla NZ per I) uguale all'altra quantità incognita y.



Sia

$$d\,x = b\,y$$

Allora il punto I sarà su una retta, la cui posizione è nota.

[5] Fermat chiama « equazione finale » la relazione che si ottiene come conclusione di una catena di deduzioni. La « estremità » risulta quella di un segmento che ha come misura il valore di una delle variabili e che si sposta in funzione del valore dell'altra.

[6] È difficile farsi un'idea di questo procedimento « di riduzione » con il quale Fermat crede di poter ricondurre lo studio di ogni curva a quello di certe curve appartenenti ad una classe molto ristretta.

[7] Come abbiamo detto, esprimiamo le cose con le notazioni moderne; è facile riconoscere nella retta NZM quello che noi chiamiamo « l'asse delle ascisse » e nella retta su cui sta il segmento ZI una parallela all'« asse delle ordinate »; pertanto x ed y sono le coordinate del punto I.

Dopo di aver trattato delle rette che (per esprimerci in linguaggio moderno) passano per l'origine delle coordinate, Fermat passa a trattare le rette che sono in posizione generica rispetto al riferimento e conclude la parte riguardante le rette dicendo:

Questa equazione contiene dentro di sé anche la bella proposizione che segue e che abbiamo scoperto per mezzo di essa:

« Siano date delle rette qualisivogliano; da un punto si conducano ad esse delle altre rette sotto angoli dati. Se la somma dei segmenti intersezioni, moltiplicato ciascuno per una costante data, è uguale ad un'area data, il punto dal quale le rette sono state mandate sarà su una retta ».

Fermat passa poi a trattare i casi in cui le relazioni che egli dà sono di secondo grado e quindi conducono a luoghi che sono circonferenze oppure sezioni coniche; egli ripetutamente dimostra di rendersi conto della arbitrarietà della scelta delle convenzioni adottate, perché sottolinea il fatto che, per esempio, la natura di un certo luogo (cioè il fatto che sia una circonferenza piuttosto che una ellisse) dipende dalla scelta dell'angolo in Z.

Egli si rende anche ben conto della potenza dello strumento che sta creando perché dice:

Abbiamo dunque visto sinteticamente con un enunciato unico, breve e lucido, tutto ciò che gli antichi hanno lasciato di non spiegato sui luoghi piani o solidi. In seguito si riconoscerà immediatamente quali sono i luoghi che danno tutti i diversi casi dell'ultima proposizione di Apollonio, e si scoprirà, in generale e senza grande difficoltà, tutto ciò che concerne questa materia.

Fermat conclude il suo trattato dicendo:

Vi è per la scienza un certo interesse a non nascondere alla posterità le opere ancora immature dello spirito; infatti l'opera che è agli inizi semplice e rudimentale cresce e si rafforza a causa delle scoperte sempre nuove. Ed è anche utile per lo studio il poter contemplare pienamente i progressi nascosti dello spirito e lo sviluppo spontaneo dell'arte.

Al trattato della Introduzione *Fermat aggiunse una « Appendice »* *nella quale egli impiegò i suoi metodi per risolvere alcuni dei problemi classici della matematica.*

Egli infatti mostrò come ogni equazione cubica o di 4° grado può essere interpretata geometricamente come la equazione che dà le intersezioni di due coniche: una parabola ed un cerchio oppure una parabola ed una iperbole; pertanto egli concluse che ogni equazione di 3° o di 4° grado può essere risolta mediante la intersezione di due coniche.

In particolare egli fece vedere che il problema classico della duplicazione del cubo, che gli antichi avevano ricondotto al problema della inserzione di due medie proporzionali tra due grandezze, viene risolto con la ricerca delle intersezioni tra una parabola ed una iperbole.

BLAISE PASCAL

Tra le grandi figure della storia del pensiero umano, campeggia nel secolo XVII quella di Blaise Pascal:[1] *genio precocissimo, si dedicò alla matematica nella prima gioventú, ottenendo dei risultati che stupirono i suoi contemporanei; si dedicò poi alla filosofia ed alla teologia, lasciando la matematica per ricerche che gli apparivano piú difficili e che gli davano l'impressione di essere ben piú importanti per se stesso e per gli altri.*

Il passo che segue è tratto dalla biografia che di Blaise Pascal scrisse la sorella Gilberte, maritata Périer; questa biografia rimane la fonte principale delle conoscenze che abbiamo sulla vita di B. Pascal, anche se l'ammirazione che la sorella aveva per lui (ammirazione del resto piú che giustificata) ha fatto dubitare qualcuno della piena obiettività delle notizie che vi si danno.

Fino dalla sua infanzia si risolveva ad accettare per vero soltanto ciò che tale gli appariva in modo evidente; cosí che, quando gli si davano delle ragioni che non erano buone, ne cercava lui da solo delle buone...

---

1 Nato a Clermond (poi Clermond-Ferrand) nel 1623 e educato dal padre Etienne (matematico di un certo valore al quale, tra l'altro, si deve lo studio di una interessante curva algebrica del quarto ordine che viene chiamata « lumaca di Pascal »), pubblicò nel 1640 un *Essai sur les coniques* che fu molto apprezzato e realizzò tra il 1642 e il 1644 una macchina calcolatrice (la pascalina). Morí a Parigi nel 1662.

... una volta che, per caso, fu percosso un piatto di porcellana con un coltello, Blaise osservò che la cosa aveva provocato un forte suono, che si arrestò quando qualcuno mise la mano sul piatto. Egli ne volle conoscere la causa, e questa osservazione lo condusse a farne altre sui suoni, cosí numerose che, all'età di 11 anni, ne fece un trattato, che fu giudicato molto ragionevole.

Il suo genio per la geometria incominciò a mostrarsi quando egli non aveva che 12 anni, e per un caso cosí straordinario che merita di essere raccontato per disteso.

Mio padre era abbastanza esperto di Matematica e corrispondeva ed aveva relazioni con tutti gli scienziati di questo ramo, che erano spesso ospiti presso di lui. Ma, poiché aveva intenzione di istruire mio fratello nelle lingue e sapeva che la Matematica è una cosa che riempie lo spirito e lo soddisfa, non voleva che mio fratello la conoscesse, temendo che questa lo rendesse negligente nei riguardi del latino e delle altre lingue, nelle quali voleva che Blaise si perfezionasse. Quindi aveva messo sotto chiave tutti i libri che parlavano di Matematica e si asteneva dal parlarne con gli amici in presenza di Blaise; ma questo silenzio non impediva alla curiosità del ragazzo di accendersi, tanto che egli pregava spesso mio padre di insegnargli la Matematica. Ma mio padre gli rifiutava questo insegnamento, promettendoglielo come un premio: gli prometteva di insegnargli la Matematica non appena avesse imparato il latino ed il greco. Allora mio fratello, vedendo questa resistenza, gli domandò una volta che cosa fosse questa scienza di cui si parlava e mio padre gli rispose in modo generico dicendo che era il modo per fare delle figure esatte, e di trovare le relazioni delle figure tra loro, ma contemporaneamente gli proibí di parlarne ancora e addirittura di pensarci.

Ma questo spirito che non poteva accettare di essere costretto entro i limiti di queste proibizioni, non appena ebbe questo spiraglio, datogli dalla proposizione secondo la quale la Matematica insegna a fare delle figure assolutamente esatte, si mise a pensare su questo argomento; e nelle sue ore di ricreazione, in una stanza nella quale aveva l'abitudine di giocare, preso del carbone, faceva delle figure sul pavimento, cercando i mezzi, per esempio, di disegnare un cerchio perfettamente rotondo, un triangolo i cui lati ed i cui angoli fossero assolutamente uguali tra loro e altre cose come queste. Trovava tutto da solo, senza fatica, e poi cercava le proporzioni delle figure tra loro.

Ma poiché mio padre aveva avuto grandissima cura di nascondergli le cose, delle quali Blaise ignorava addirittura i nomi, egli fu costretto a inventarne da solo: chiamava il cerchio un « tondo » ed una retta una « sbarra » e cosí via.[2]

Dopo aver dato questi nomi, egli enunciò degli assiomi e poi costruí delle dimostrazioni perfette; e poiché in queste cose si va avanti, egli spinse la sua ricerca fino alla 32ª proposizione del primo libro di Euclide.[3]

Stava pensando a questa, quando mio padre entrò per caso nella stanza, senza che mio fratello si accorgesse; mio padre lo trovò talmente concentrato che rimase nella stanza molto tempo senza che Blaise fosse cosciente della sua venuta.

Non si può dire chi fu il piú sorpreso tra i due; o il figlio, a causa della esplicita proibizione che il padre gli aveva fatto, o il padre, nel vedere il figlio in mezzo a tutte queste cose. Ma la sorpresa del padre fu ben piú grande quando, avendo domandato al figlio che cosa faceva, si sentí rispondere che cercava una certa cosa, che era poi la 32ª proposizione del primo libro di Euclide.

Mio padre gli domandò come mai avesse pensato a quelle cose, e, dopo che ebbe ripetuto la domanda, Blaise gli disse di qualche dimostrazione che aveva fatta; andando all'indietro e servendosi sempre dei nomi da lui inventati, di « tondi » e di « sbarre », egli venne alle sue definizioni e agli assiomi.

Mio padre fu talmente spaventato dalla grandezza e dalla potenza di quel genio che se ne andò senza piú dire niente, e si recò a trovare il signor Le Pailleur, che era suo intimo amico; arrivato là rimase immobile e in silenzio, come folgorato. Il signor Le Pailleur, vedendo che mio padre non parlava e anzi addirittura piangeva un poco, lo pregò di non nascondergli la causa del suo dispiacere. Al che mio padre gli disse: « Piango non per dolore, ma per la gioia; voi sapete la cura che ho messo per nascondere a mio figlio la conoscenza della geometria, per paura che questa lo distogliesse dagli altri studi; ora guardate che cosa ha fatto ». E cosí gli spiegò quello che aveva visto, dal che si poteva dedurre che Blaise aveva scoperto da solo la Matematica.

[2] Rispettivamente: « rond » e « barre » invece degli abituali « cercle » e « droite ».
[3] La 32ª proposizione del primo libro di Euclide dice: Se in un triangolo (qualunque) si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno (che si ottiene) è uguale alla somma dei due angoli (interni) del triangolo non adiacenti, e la somma dei tre angoli interni è uguale a due angoli retti.

Il signor Le Pailleur non fu meno sorpreso di mio padre e disse che non gli sembrava giusto trattenere ancora questo spirito e nascondergli la conoscenza della Matematica, e che invece occorreva lasciarlo libero e dargli i libri (che richiedeva).

Mio padre, avendo acconsentito a questo, gli diede gli *Elementi* di Euclide da leggere durante le ore di ricreazione. Egli li lesse e li capí da solo, senza bisogno dell'aiuto di alcuno che glie li spiegasse...

Riconosciuto cosí, sia pure attraverso le affettuose parole della sorella, il genio di Pascal, vogliamo considerare innanzitutto quello che è per lui il codice della ricerca rigorosa e della deduzione impeccabile: si potrebbe dire che il rigore delle definizioni e delle dimostrazioni è una delle condizioni essenziali per poter fare della scienza, e che Pascal, riflettendo a fondo su questo, ha enunciato delle regole che ancora oggi potrebbero essere accettate come valide, per qualunque scienziato. Su questo argomento riportiamo passi di due diversi scritti di Pascal.

Il primo brano è tratto da una « risposta » che B. Pascal scrisse in polemica con il Padre Etienne Noël, superiore dei Gesuiti di Parigi, il quale aveva criticato la interpretazione di B. Pascal dei celebri esperimenti che condussero alla determinazione delle leggi che regolano la pressione in seno ad un fluido; tra queste leggi, ancora oggi, vi è il famoso « principio » che prende appunto il nome dal Pascal, e che è tuttora enunciato nei libri di testo di fisica e di meccanica razionale.

Il Padre Noël non accettava la spiegazione del fatto che, per esempio nella famosa esperienza di Torricelli, la colonna di mercurio nel tubo verticale di vetro è piú alta del livello della superficie del mercurio esposto all'aria a cagione della pressione dell'aria esterna sulla superficie stessa.

Il Padre Noël sosteneva la spiegazione classica che attribuiva la salita del mercurio ad un certo « orrore del vuoto » che regna in natura.

« Molto reverendo Padre,

« ... permettetemi di presentarvi una regola universale, che si applica a tutti i casi particolari, quando si tratta di conoscere la verità. Non ho alcun dubbio che anche voi siate d'accordo, perché questa regola è accettata da tutti coloro che guardano alle cose senza pregiudizi; e perché essa costituisce il modo di trattare le scienze in ogni scuola, ed è inoltre la regola che è applicata da tutte le persone che cercano ciò che è veramente ben fondato e che soddisfa lo spirito: non bisogna mai giudicare in senso negativo oppure affermativo di alcuna proposizione, a meno che ciò che si afferma oppure si nega non soddisfi a queste due condizioni: cioè o che la proposizione appaia talmente chiara al senso oppure alla ragione – a seconda che il soggetto della proposizione cada sotto l'uno oppure sotto l'altra – che lo spirito non abbia alcuna ragione di dubitare della sua certezza; ed in questo caso si tratta di quelli che chiamiamo *principi* oppure *assiomi*; come, per esempio, se si aggiungono a cose uguali delle cose uguali anche i risultati saranno uguali. Oppure che la proposizione venga dimostrata con un procedimento rigoroso come conseguenza necessaria di principi o di assiomi dalla cui certezza dipende quella delle conseguenze che se ne traggono, quando la deduzione sia ineccepibile.

« Come questa proposizione: "la somma degli angoli di un triangolo vale due angoli retti", la quale, pur non essendo immediatamente evidente di per sé, viene dimostrata come una conseguenza ineccepibile degli assiomi della geometria.

« Tutto ciò che soddisfa ad una di queste due condizioni è vero e certo, mentre tutto ciò che non soddisfa a queste condizioni viene considerato incerto e soggetto a dubbio. E noi giudichiamo senza dubbio alcuno delle cose del primo tipo, mentre lasciamo nel dubbio le cose del secondo tipo e le chiamiamo a seconda della loro qualità, a volte visioni, a volte capricci, a volte fantasie o idee, al massimo le chiamiamo belle trovate, e poiché non si può affermarle senza temerità, tendiamo piuttosto a negarle; ma siamo tuttavia sempre pronti a ricrederci e ad adottare l'opinione opposta se una dimostrazione evidente ce ne accerta e dimostra la verità ».

I passi che seguono sono presi dal trattato De l'esprit géométrique et de l'art de persuader, *titolo che potrebbe essere tradotto* Lo spirito matematico e l'arte di persuadere.[4]

SEZIONE I - *Il metodo delle dimostrazioni matematiche, ossia metodiche e perfette.*

Non saprei come spiegare meglio la condotta che occorre tenere per rendere convincenti le dimostrazioni che spiegano le regole seguite dalla Matematica; ed ho scelto questa scienza per raggiungere il mio scopo perché essa è la sola che conosca le vere regole del

[4] Traduciamo « géométrique » con matematico (qui e nel seguito) perché con « géométrie » B. Pascal intende chiaramente designare la matematica pura e applicata.

ragionamento; essa, senza fermarsi sulle regole del sillogismo, che sono talmente naturali che non si possono ignorare, si ferma e si fonda sul vero metodo di ragionare in ogni argomento, metodo che quasi tutti ignorano e che invece è tanto utile a conoscersi che noi constatiamo per esperienza che, tra due persone aventi intelligenze uguali, ed a parità di altre condizioni, colui che possiede l'arte insegnata dalla Matematica la vince e assume il sopravvento. Voglio dunque far capire che cosa si intende per dimostrazione prendendo esempio da quelle della Matematica, che è quasi la sola delle scienze umane che faccia delle dimostrazioni infallibili, perché è la sola che utilizza il vero metodo della dimostrazione, mentre le altre scienze sono avvolte, per una sorta di necessità naturale, in una specie di confusione, che soltanto i matematici sanno riconoscere. [...]

Questo metodo, che darebbe luogo a dimostrazioni insuperabili, se si potesse arrivarci, consisterebbe soprattutto in due cose: l'una di non utilizzare alcun termine di cui non sia stato prima spiegato nettamente il senso; l'altra di non enunciare mai alcuna proposizione che non sia dimostrata appoggiandosi su verità già note; cioè in poche parole il metodo consiste nel definire tutti i termini e nel dimostrare tutte le proposizioni.

Ma, per ubbidire alle regole che sto spiegando, occorre che io spieghi che cosa intendo per definizione.

In Matematica si accettano come definizioni soltanto quelle che i logici chiamano definizioni nominali, cioè quelle che sono dirette ad imporre dei nomi alle cose che sono chiaramente designate con termini perfettamente noti; ed io parlo soltanto di queste definizioni.

La loro utilità e il loro uso consiste nel chiarire e nell'abbreviare il discorso esprimendo, con una sola parola, ciò che richiederebbe un discorso molto piú lungo. Ma tuttavia in modo tale che il nome (imposto) è sempre sprovvisto di ogni senso diverso (se ne ha uno) da quello che gli è stato dato.

Per esempio: se occorre distinguere tra i numeri quelli che sono esattamente divisibili in due parti eguali da quelli che invece divisi per due dànno resto uno, per evitare di ripetere spesso questa condizione, si dà a quei numeri un nome in questo modo: chiamo pari un numero che sia esattamente divisibile per due.

Ecco una definizione matematica: perché dopo aver chiaramente designato una cosa, cioè ogni numero esattamente divisibile per due, gli si dà un nome che risulta d'ora innanzi sprovvisto di ogni altro senso, se ne aveva uno, per dargli quello della cosa designata.

Di qui si trae che le definizioni sono libere, e che non possono mai essere contraddette; perché non vi è nulla che sia piú permesso che dare un nome che si desidera a una cosa che è stata chiaramente designata. Occorre soltanto stare attenti a non abusare di questa libertà che si ha di imporre dei nomi, dando lo stesso nome a due cose diverse. Non che questo sia vietato, ma occorre stare attenti a non confondere tra loro le conseguenze (dei nomi dati) e non applicare all'una delle cose le proprietà dell'altra.

Pascal prosegue nella sua argomentazione, ricercando la tecnica per ottenere il rigore perfetto nella ricerca scientifica e nella esposizione. Egli riassume il suo pensiero in certe regole che sintetizzano ai suoi occhi i precetti fondamentali per ben applicare l'arte della persuasione.

Regole per la definizione

1. - Non definire nessuna delle cose che sono conosciute cosí bene che non vi siano termini piú chiari per spiegarle;

2. - Non ammettere alcun termine che sia anche solo un poco equivoco oppure oscuro, senza definirlo;

3. - Non impiegare, nella definizione dei termini, che le parole perfettamente conosciute, oppure già spiegate prima.

Regole per gli assiomi

1. - Non ammettere nessuno dei principi necessari (per la dimostrazione), senza aver domandato se esso viene ammesso anche dagli altri, anche se esso è chiaro ed evidente;

2. - Non richiedere che si ammettano come assiomi se non le cose che siano per se stesse perfettamente evidenti.

Regole per le dimostrazioni

1. - Non intraprendere a dimostrare nessuna cosa che sia talmente evidente di per se stessa che non vi sia alcun modo piú chiaro per dimostrarla;

2. - Dimostrare tutte le proposizioni che siano anche solo un poco oscure, e utilizzare per la loro dimostrazione soltanto gli assio-

mi molto evidenti, oppure le proposizioni che sono state ammesse (dagli avversari) oppure dimostrate prima;

3. - Sostituire sempre mentalmente le definizioni al posto dei termini definiti per non commettere errori, col significato equivoco dei termini, il cui significato è stato ristretto con le definizioni.

Ecco dunque le otto regole che contengono i precetti per avere dimostrazioni perfette ed immutabili. Tra queste regole ve ne sono di quelle che sono assolutamente necessarie e che non possono essere trascurate senza commettere errori; tuttavia è difficile e quasi impossibile osservarle sempre perfettamente, benché osservandole piú che si può ci si avvicini alla perfezione: sono le prime di ciascuna parte.

Per le definizioni: non definire alcun termine che sia già perfettamente noto.

Per gli assiomi: non domandare agli avversari che accettino gli assiomi che sono perfettamente evidenti e semplici.

Per le dimostrazioni: non dimostrare alcuna proposizione che sia nota per se stessa.

B. Pascal ha portato anche un contributo essenziale alla spiegazione dei fenomeni fisici, e ha codificato il metodo della ricerca sperimentale della causa dei fenomeni nella fisica, aiutando a demolire (come si è accennato in relazione alla risposta a Padre Noël) le spiegazioni di tipo metafisico e antropomorfico che circolavano negli ambienti dotti del suo tempo.

Egli ha dimostrato, con l'esperimento e con il ragionamento, che l'aria che grava sulla Terra preme su ogni corpo e che, considerata una superficie, la forza che l'aria esercita sulla superficie stessa in un punto qualunque è uguale al peso della colonna d'aria che sta sopra la superficie.

Egli ha dimostrato inoltre che il peso della colonna d'aria che sta sull'elemento di superficie è uguale al peso di una certa colonna d'acqua. Ora, certo della sua interpretazione della pressione dell'aria e dell'equivalenza tra la pressione esercitata dall'aria e quella che sarebbe provocata da un opportuno spessore d'acqua, intraprende a pesare tutta l'aria dell'atmosfera.

Abbiamo già visto che Archimede ha contato il numero dei granelli di sabbia che riempirebbero l'universo; la presentazione di Archimede dei propri calcoli era anche piena di orgoglio e di sfida, perché egli stava dimostrando con i suoi calcoli che la mente umana riesce a compiere delle imprese che superano anche i dubbi e le presunzioni negative.

In modo quasi analogo B. Pascal, a conclusione dei suoi studi, si *lancia in una impresa che poteva sembrare assolutamente impossibile e fantastica per i sapienti della sua epoca; una impresa che superava ogni immaginazione di allora e che si contrapponeva a tutte quelle che erano le convinzioni radicate nella scienza che lo precedeva.*

E se la cava con una semplicità ed una eleganza di procedimenti che fa toccare con mano in lui il genio, che emerge dal proprio tempo e dissipa con un solo atto le tenebre e vince i dubbi in contrario.

Il passo che segue è tratto dal Traité de la pesanteur de la masse de l'air *(Cap. IX).*

Quanto pesa la intera massa dell'aria che c'è al mondo

Da queste esperienze [5] abbiamo imparato che l'aria che è al di sopra del livello del mare pesa come l'acqua che abbia una altezza di 31 piedi e due pollici; [6] ma l'aria pesa meno sui luoghi alti che al livello del mare, e pertanto non pesa ugualmente su tutti i punti della terra, ed addirittura pesa in modo diverso da punto a punto; perciò non si può dare un valore comune che dia il peso dell'aria (compensando i valori da un punto all'altro); ma si può assumerne uno, con una certa buona presunzione di essere vicini al giusto: per esempio, si può far conto che ogni punto della terra, compensando i valori in eccesso con quelli in difetto, sia caricato d'aria come se portasse dell'acqua alla altezza di 31 piedi; e si può essere certi che in questa approssimazione non vi è un errore maggiore di un mezzo piede d'acqua di altezza. Ora noi abbiamo visto che l'aria che è al disopra delle montagne che sono alte 500 tese sul livello del mare pesa come l'acqua alta 26 piedi e 11 pollici. Quindi l'aria che esiste dal livello del mare fino all'altezza delle montagne alte 500 tese pesa come l'acqua che è alta 4 piedi ed un pollice, che è press'a poco un settimo della altezza totale; quindi si ha che l'aria compresa tra il livello del mare e l'altezza di queste montagne è press'a poco la settima parte dell'intera massa dell'aria.

B. Pascal prosegue la sua argomentazione sviluppando i calcoli che, come egli ha affermato, sono assolutamente elementari. Non stiamo a riportare qui tutti gli sviluppi e ci limitiamo a ricordare che B. Pascal

[5] Quelle che ha esposto in precedenza.

[6] Non interessa qui precisare quale sia l'equivalente in termini moderni delle unità di misura utilizzate da B. Pascal: il nostro scopo è presentare il procedimento logico da lui sviluppato.

adotta come valore approssimato di π *il numero razionale 22/7, che già era stato indicato da Archimede; adottando questo valore si commette un errore che è minore di 14 unità su 10 mila. B. Pascal conclude i suoi calcoli dimostrando che il peso di tutta l'aria esistente al mondo è 8283889440000000000 libbre.*
Ma si potrebbe dire che a B. Pascal piú che il risultato numerico interessava il metodo, il criterio che si deve seguire nell'interpretare le osservazioni e le esperienze.
A questo proposito riportiamo il seguente passo, tratto dalla Conclusione *dei due trattati sull'equilibrio dei fluidi e sul peso dell'aria.*
In questo passo Pascal sconfigge la interpretazione dei fenomeni fisici che è data da concetti antropomorfici (come quello di « orrore del vuoto ») e combatte per la spiegazione scientifica dei fenomeni fisici.

Nel trattato precedente ho riferito su tutto ciò che secondo il pensiero di qualcuno la natura fa per evitare il vuoto; ho fatto vedere che è assolutamente falso che queste cose avvengano per questa ragione immaginaria (che è l'orrore del vuoto). Ed ho dimostrato invece che il peso dell'aria è la vera ed unica causa di questi fenomeni, ottenendo la dimostrazione con esperimenti e con ragionamenti assolutamente convincenti; quindi è assolutamente sicuro d'ora innanzi che in tutta la natura non esiste nessun effetto che sia provocato per evitare il vuoto.

Da questo punto, a cui siamo arrivati, non sarà difficile passare a dimostrare che non esiste orrore del vuoto; infatti questo modo di esprimersi non è appropriato, perché la natura creata, che è quella che agisce, non è animata e quindi non è capace di avere delle passioni; quindi questo modo di esprimersi è metaforico, e pertanto con questa espressione non si intende dire altro che la natura fa gli stessi sforzi per evitare il vuoto che essa farebbe se ne avesse orrore; e quindi, nelle intenzioni di coloro che parlano cosí, è la stessa cosa dire che la natura ha orrore del vuoto oppure dire che la natura fa dei grandi sforzi per evitare il vuoto.

Dunque, poiché ho dimostrato che essa non fa nulla per fuggire il vuoto, ne segue che essa non ha orrore del vuoto; perché per continuare ad usare la stessa immagine, come si dice di un uomo che una certa cosa gli è indifferente, quando non si osserva nelle sue azioni alcun movimento di desiderio oppure di avversione per quella cosa, si deve dire anche della natura che essa ha una estrema indifferenza per il vuoto, perché non si vede che essa faccia alcuna azione, né per cercarlo né per fuggirlo. (Continuo a intendere con « vuoto » uno spazio che sia vuoto di ogni corpo che cada sotto i nostri sensi.)

È ben vero (ed è ciò che ha indotto gli antichi in errore) che l'acqua sale in una pompa quando non vi sia alcun foro per cui possa entrare l'aria, e che vi sarebbe il vuoto se l'acqua non seguisse il pistone, ed anche è vero che l'acqua non sale nella pompa non appena vi sono delle fessure per le quali l'aria possa entrare per riempire la pompa; e di qui sembra che l'acqua monti per impedire il vuoto, perché essa sale soltanto quando vi sarebbe del vuoto.

Vogliamo, infine, ricordare che si deve a B. Pascal ed al grande matematico suo contemporaneo Pierre de Fermat la fondazione del calcolo delle probabilità, cioè di un ramo di importanza fondamentale della matematica moderna, pura ed applicata. A questo proposito ricordiamo, per esempio, l'importanza che la statistica ha per la vita sociale e per la scienza di oggi, l'importanza che la tecnica delle assicurazioni ha per la nostra società, e ricordiamo che tutti questi rami della matematica applicata hanno avuto origine dalla intuizione dei matematici che abbiamo ricordato.

Nella lettera che B. Pascal scrive a Fermat il giorno 29 luglio 1654 si dice che l'occasione per le ricerche teoriche fu fornita da un certo Cavaliere di Méré, il quale voleva risolvere un problema di gioco di azzardo.

Tale problema potrebbe essere designato come il « problema della ripartizione delle poste »; si cade su questo problema ogni volta che due giocatori interrompono la partita di gioco d'azzardo prima della sua fine e vogliono trovare un criterio per la suddivisione equa delle poste in denaro che sono state versate e messe sul tavolo.

Ricordiamo che un problema dello stesso tipo si ha, per esempio, quando in un contratto di assicurazione il contraente vuole scindere il contratto prima del suo termine e vuole la restituzione almeno parziale delle somme che egli ha versato.

Meditando su queste questioni Pascal giunse ad enunciati di una estrema chiarezza, e tra l'altro fu anche stimolato alle ricerche sul celebre « triangolo aritmetico » che viene anche chiamato « triangolo di Tartaglia » e che è formato dai coefficienti delle potenze delle variabili nello sviluppo della potenza di un binomio.

Le pagine che seguono sono prese dal Trattato sull'uso del triangolo aritmetico per determinare la ripartizione delle poste tra due giocatori (Usage du triangle arithmétique pour déterminer les partis qu'on doit faire entre deux joueurs qui jouent en plusieurs parties).

Per capire le regole della ripartizione la prima cosa che si deve prendere in considerazione è il fatto che il denaro che i giocatori hanno scommesso non è piú loro perché hanno rinunciato alla sua proprietà; ma hanno ricevuto in cambio il diritto di attendersi ciò che il caso può loro dare, secondo le condizioni che sono state convenute prima del gioco.

Ma poiché si tratta di un contratto volontario, lo possono rompere quando vogliono; e cosí, quale che sia la situazione del gioco, essi lo possono interrompere; e, diversamente e contrariamente a ciò che hanno fatto incominciando a giocare, possono rinunciare ad attendere il responso del caso e quindi rientrare ciascuno in possesso di qualche cosa; ed in questo caso il regolamento deve essere tale che ciascuno dei giocatori trovi perfettamente uguale prendere quello che gli si assegna, oppure continuare l'avventura del gioco; e questa giusta distribuzione la chiameremo la « ripartizione (equa) ».

Il primo principio che occorre salvare quando si fa una equa ripartizione è il seguente: se uno dei due giocatori si trova in tale condizione che, quale che sia il futuro, una certa somma gli deve appartenere in caso di perdita oppure di guadagno, senza che il caso glie la possa togliere, tale somma non deve entrare nella ripartizione, ma si deve considerare come somma assicurata, perché, dato che la ripartizione deve essere proporzionale al caso, e poiché non vi è alcuna probabilità di perdere, egli deve poter ritirare tutto senza ripartire con gli altri.

Il secondo principio è il seguente: se due giocatori si trovano nella seguente situazione: se uno vince, può appropriarsi di una certa somma, se perde, la stessa somma dovrà appartenere all'altro; se il gioco si basa soltanto sulla sorte e se ci sono uguali probabilità in favore dell'uno oppure dell'altro dei due giocatori, e quindi non vi sono ragioni per attendersi che l'uno vinca piuttosto che l'altro, se vogliono separarsi senza giocare e prendere ciò che a loro spetta legalmente, la regola della equa ripartizione è che essi si dividano metà per uno la somma che costituisce la posta del gioco...

ISAAC NEWTON

Isaac Newton,[1] *famoso per la trattazione della dinamica, è anche a ragione considerato come uno dei fondatori del calcolo infinitesimale. Non è possibile, in un'opera come questa, dare un'idea completa della estensione e della profondità dell'opera di Newton, perché ciò implicherebbe delle conoscenze di matematica superiore che non possiamo supporre possedute dal nostro lettore. Ci limitiamo quindi a presentare i passi in cui egli espone alcune idee che sono rimaste come fondamentali per tutta la matematica successiva a lui.*

Il passo che segue è tratto dalla Introduzione al Trattato sulla quadratura delle curve (Tractatus de quadratura curvarum) *del 1704;*[2] *va tenuto presente che, anche nella nomenclatura moderna, l'operazione di « quadratura » può avere come significato quello della ricerca dell'area compresa tra una curva ed una retta; qui Newton collega questo problema, come si fa spesso anche ora, alle relazioni che intercedono tra quelle che egli chiama le « fluenti » (e che oggi si indicano come « funzioni ») e le « flussioni » (che oggi vengono indicate come « derivate »).*

Considero in questo lavoro le grandezze matematiche non come costituite di parti piccole a piacere ma come generate da un moto continuo.[3]

Le linee vengono descritte non mediante addizione di parti, ma per moto continuo di punti; le superficie per moto di linee; i solidi per moto di superficie; gli angoli per rotazione dei loro lati; i tempi per flusso continuo e cosí in altri casi analoghi.

Queste generazioni hanno veramente luogo in natura, e si osservano ogni giorno nel movimento dei corpi. In questo modo gli an-

---

1 Nato nel 1642, nel 1660 fu ammesso a studiare al Trinity College dell'Università di Cambridge, dove nel 1669 fu chiamato alla cattedra di matematica; nel 1672 fu proposto come socio alla Royal Society, ma, per difficoltà economiche, poté entrarvi solo nel 1675. Nel 1693 fu nominato ispettore alla Zecca di Londra e nel 1697 ne fu nominato direttore; nel 1701 rinunciò alla cattedra nell'Università di Cambridge. Nel 1705 fu nominato « sir ». Morí nel 1727.

2 Il passo è ripreso da *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna* di Guido Castelnuovo, Bologna, Zanichelli, 1938.

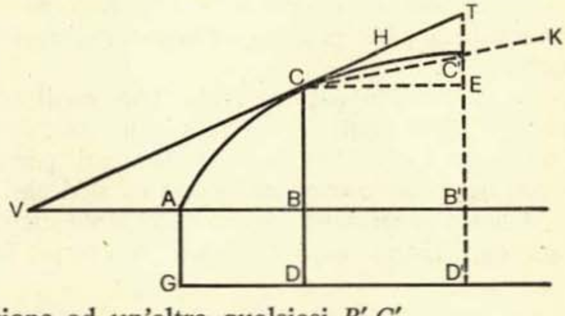
3 La concezione delle grandezze matematiche come costituite di parti « piccole a piacere » era stata alla base del « Metodo degli indivisibili » inventato da Bonaventura Cavalieri e sviluppato da Evangelista Torricelli (cfr. pag. 105); Newton vede, invece, le grandezze matematiche come « generate da un moto continuo ». Ciò gli permette di definire le « flussioni » come le « ragioni ultime », cioè, — secondo il linguaggio moderno — come i limiti dei rapporti di certe grandezze.

tichi indicarono le generazioni del rettangolo come descritto da un segmento mobile perpendicolare ad un segmento fisso.

Considerando dunque che quantità generate, crescendo in tempi uguali, riescono maggiori o minori secondo la velocità maggiore o minore con cui crescono, ho cercato un metodo per determinare le grandezze dalle velocità dei moti o degli incrementi con cui si generano; chiamando *flussioni* queste velocità di accrescimento, e *fluenti* le quantità generate, giunsi a poco a poco negli anni 1665 e 1666 al metodo delle flussioni del quale qui faccio uso nella quadratura delle curve.

Le flussioni si possono considerare con approssimazione arbitrariamente grande come gli incrementi delle fluenti, generati durante intervalli uguali di tempo piccoli a piacere; in modo piú preciso sono direttamente proporzionali agli incrementi istantanei delle fluenti, e si possono poi rappresentare mediante linee qualsiasi ad esse proporzionali.

Cosí, per esempio, l'area del triangolo mistilineo *ABC* e l'area del rettangolo *ABDG*, siano generate dal moto uniforme delle ordinate *BC* e *BD* che avanzano sulla base *AB*; allora le flussioni di queste aree staranno fra loro come le ordinate *BC* e *BD* che le generano; perché quelle ordinate stanno fra loro come gli incrementi istantanei delle aree.[4]



Avanzi l'ordinata *BC* dalla sua posizione ad un'altra qualsiasi *B' C'*.

Si completi il parallelogramma *BCEB'* e si conduca la retta *VT* tangente alla curva in *C*, che incontri i prolungamenti di *B'C'* e *BA* rispettivamente nei punti *T* e *V*. E gli incrementi ora ottenuti del-

[4] Questa proposizione viene chiamata, in qualche trattato, il teorema fondamentale del calcolo infinitesimale; per esprimere il suo contenuto con linguaggio moderno si potrebbe dire che, considerando l'area compresa tra la curva e l'asse delle ascisse come una funzione dell'ascissa, la derivata di tale funzione è l'ordinata che corrisponde all'ascissa variabile. Ne consegue il legame classico tra le due operazioni di calcolo della derivata e di determinazione dell'integrale di una funzione.

l'ascissa AB, dell'ordinata BC e della curva $\overset{\frown}{ACC'}$ saranno rispettivamente BB', EC', e l'arco CC'. E direttamente proporzionali a questi incrementi istantanei sono i lati del triangolo CET; e perciò le flussioni delle stesse AB, BC e $\overset{\frown}{AC}$ sono rispettivamente proporzionali ai lati di quel triangolo CET: CE, ET, TC, e si possono rappresentare mediante quegli stessi lati, o ciò che fa lo stesso mediante i lati del triangolo simile al primo VBC.

Si ricade negli stessi risultati se si trovano le flussioni applicando il metodo delle ultime ragioni di grandezze evanescenti.[5] Si conduca la retta CC' e la si prolunghi sino a un punto K. Ritorni l'ordinata $B'C'$ nella sua posizione primitiva BC e venendo a coincidere i punti C e C', la retta CK coinciderà con la tangente CH, e il triangolo evanescente CEC' nell'ultima sua forma diventerà simile al triangolo CET, ed i suoi lati evanescenti CE, CE', $C'C$, saranno infine proporzionali ai lati dell'altro triangolo CET: CE, ET, TC, e perciò saranno proporzionali a tali segmenti anche le flussioni delle linee AB, BC, $\overset{\frown}{CA}$. Se i punti C e C' distano di un intervallo comunque piccolo, la retta CK divergerà di un piccolo angolo dalla tangente CH. Perché la retta CK coincida con la tangente CH e si trovino le ragioni ultime delle linee CE, EC', $C'C$, devono sovrapporsi e coincidere i punti C e C'. Gli errori, anche minimi, in matematica non sono da trascurarsi.

Come si può ben capire, le questioni poste dal nuovo metodo di calcolo, e soprattutto dai problemi che portavano al calcolo del limite del rapporto di due grandezze che tendono verso zero erano molte e potevano suscitare dubbi ed obiezioni, anche in relazione al citato « metodo degli indivisibili » di Bonaventura Cavalieri e Evangelista Torricelli.

Riportiamo qui di seguito lo scolio che chiude la sezione I del libro I dei Principi matematici della filosofia naturale (Philosophiae naturalis principia mathematica), *in cui Newton affronta ulteriormente i dubbi che potrebbero sorgere a proposito del significato dei suoi procedimenti, e fa menzione del metodo degli indivisibili.*[6]

---

[5] Come abbiamo già detto, quelle che qui Newton chiama le « ultime ragioni » di grandezze evanescenti in linguaggio moderno vengono indicate come limiti di rapporti di funzioni che tendono a zero.

[6] La traduzione è di Alberto Pala (Torino, UTET, 1965).

Le cose che sono state dimostrate circa le linee curve e le superfici in esse comprese, si applicano facilmente anche alle superfici curve e ai volumi dei solidi. In verità ho premesso questi lemmi per sfuggire alla noia di dedurre, secondo l'usanza dei vecchi geometri, lunghe dimostrazioni per assurdo. Col metodo degli indivisibili le dimostrazioni sono rese piú brevi. Ma poiché l'ipotesi degli indivisibili è ardua, e poiché quel metodo è stimato meno geometrico, ho preferito ridurre le dimostrazioni delle cose seguenti alle prime e ultime somme e ragioni di quantità evanescenti e nascenti, ossia ai limiti delle somme e ragioni, e premettere, perciò, il piú brevemente possibile, le dimostrazioni di quei limiti. Questo stesso, infatti, viene fatto anche col metodo degli indivisibili; ed essendo stati dimostrati i principi, li possiamo già usare in modo piú sicuro. Perciò, se nel séguito mi capiterà di considerare le quantità come costituite da particelle determinate, o mi capiterà di prendere segmenti curvilinei come retti, vorrò significare non particelle indivisibili ma divisibili evanescenti, non somme e ragioni di parti determinate, ma sempre limiti di somme e ragioni; e la forza di tali dimostrazioni si richiamerà sempre al metodo dei lemmi precedenti.

Si obietta che non esiste l'ultimo rapporto di quantità evanescenti, in quanto esso, prima che le quantità siano svanite non è l'ultimo, e allorché sono svanite non c'è affatto. Ma con lo stesso ragionamento si può giustamente sostenere che non esiste la velocità ultima di un corpo che giunga in un certo luogo, dove il moto finisce. La velocità, infatti, prima che un corpo giunga nel luogo non è l'ultima, e quando vi giunge non c'è. La risposta è facile: per velocità ultima si intende quella con la quale il corpo si muove, non prima di giungere al luogo ultimo nel quale il moto cessa, né dopo, ma proprio nel momento in cui vi giunge; [7] ossia, quella stessa velocità con la quale il corpo giunge al luogo ultimo e con la quale il moto cessa. Similmente, per ultime ragioni delle quantità evanescenti si deve intendere il rapporto delle quantità non prima di diventare nulle e non dopo, ma quello col quale si annullano. Pari-

[7] Qui Newton fa appello alla intuizione dei fatti elementari della meccanica per respingere le critiche contro la operazione del calcolo del limite del rapporto tra due grandezze che tendono a zero, operazione che è alla base della definizione di ciò che con linguaggio moderno si chiama la « derivata » della funzione. La intuizione ci assicura della possibilità di concepire la velocità di un mobile in un istante qualsiasi. Le precisazioni critiche definitive sul concetto di continuità e sulle operazioni del nuovo calcolo saranno conquista del secolo XIX.

menti, anche la prima ragione delle quantità nascenti è il rapporto col quale nascono. E la prima e l'ultima somma è quella con cui iniziano e cessano di essere (ossia di essere aumentate o di essere diminuite). Esiste un limite che la velocità alla fine del moto può raggiungere ma non superare. Questa è l'ultima velocità. E un identico limite è il rapporto di tutte le quantità e proporzioni incipienti ed evanescenti. E poiché questo limite è certo e definito, il problema di determinarlo è veramente geometrico. In quanto, tutto ciò che è geometrico può essere assunto legittimamente per determinare e dimostrare gli altri problemi geometrici.

Si può anche obiettare che se vengono date le ultime ragioni delle quantità evanescenti, saranno date anche le ultime grandezze, e in tal modo ogni quantità sarà costituita da indivisibili, contro quanto Euclide dimostrò circa gli incommensurabili nel decimo libro degli *Elementi*. Questa obiezione, però, si basa su una falsa ipotesi. Le ultime ragioni con cui quelle quantità si annullano non sono in realtà le ragioni delle ultime quantità, ma i limiti ai quali le ragioni delle quantità decrescenti si avvicinano sempre, illimitatamente, e ai quali si possono avvicinare per piú di qualunque differenza data, e che, però, non possono mai superare, né toccare prima che le quantità siano diminuite all'infinito. La cosa si capisce piú chiaramente nell'infinitamente grande. Se due quantità, delle quali è data la differenza, vengono aumentate all'infinito, sarà data la loro ultima ragione, soprattutto la ragione di eguaglianza, e, tuttavia, non saranno date le quantità ultime o massime delle quali questa è la ragione. Nel séguito, dunque, allorché per essere capito facilmente, menzionerò le quantità minime o evanescenti o ultime, non bisognerà supporre che si tratti di quantità di determinata grandezza, ma bisognerà pensare sempre a quantità che diminuiscono illimitatamente.

Diamo qui di seguito alcune pagine dell'opera già citata, nella quale la meccanica riceve la sua prima sistemazione scientifica, con una trattazione che ricorda quella che Euclide diede della geometria: enunciazione di definizioni e di assiomi, deduzione delle conseguenze.[8]

DEFINIZIONE I - *La quantità di materia è la misura della medesima ricavata dal prodotto della sua densità per il volume.*

[8] La traduzione è sempre ripresa dal testo indicato alla nota n. 6.

Aria di densità doppia, in uno spazio a sua volta doppio, diventa quadrupla; in uno triplice, sestupla. La medesima cosa si capisca per la neve e la polvere condensate per compressione e liquefazione. E la norma di tutti i corpi, che siano diversamente condensati per cause qualsiasi, è identica. Qui non mi occupo del mezzo che liberamente penetra attraverso gli intervalli delle parti, ammesso che ci sia. In séguito indicherò questa quantità indifferentemente con i nomi di corpo o massa. Tale quantità diviene nota attraverso il peso di ciascun corpo. Per mezzo di esperimenti molto accurati sui pendoli, trovai che è proporzionale al peso, come in séguito mostrerò.

DEFINIZIONE II - *La quantità di moto è la misura del medesimo ricavata dal prodotto della velocità per la quantità di materia.*

Il movimento totale è la somma dei movimenti delle singole parti; perciò in un corpo doppio, con velocità uguale, la quantità di moto è doppia; con velocità doppia è quadrupla.

DEFINIZIONE III - *La forza insita (vis insita) della materia è la sua disposizione a resistere; per cui ciascun corpo, per quanto sta in esso, persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.*

Questa forza è sempre proporzionale al corpo, né differisce in alcunché dall'inerzia della massa altrimenti che per il modo di concepirla. A causa dell'inerzia della materia, accade che ogni corpo è rimosso con difficoltà dal suo stato di quiete o di moto. Per cui anche la forza insita può essere chiamata col nome molto espressivo di forza di inerzia. Il corpo, in verità, esercita questa forza solo nel caso di mutamento del suo stato per effetto di una forza impressa dall'esterno; e quell'azione è, sotto diversi rispetti, di resistenza e di impulso: di resistenza, in quanto il corpo per conservare il proprio stato si oppone alla forza impressa; di impulso, in quanto il medesimo corpo, poiché la forza di resistenza dell'ostacolo cede con difficoltà, tenta di mutare lo stato di quell'ostacolo. Comunemente si attribuisce la resistenza ai corpi in quiete e l'impulso ai corpi in moto; ma moto e quiete, come sono comunemente concepiti, sono distinti solo relativamente l'uno dall'altro. Non sempre, invece, sono in quiete le cose che comunemente sono considerate in quiete.

DEFINIZIONE IV - *Una forza impressa è un'azione esercitata sul corpo al fine di mutare il suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.*

Questa forza consiste nell'azione in quanto tale, e, cessata l'azione, non permane nel corpo. Infatti un corpo persevera in ciascun nuovo stato per la sola forza di inerzia. La forza impressa ha varie origini: l'urto, la pressione, e la forza centripeta.

Definizione V - *La forza centripeta è la forza per effetto della quale i corpi sono attratti, o sono spinti, o comunque tendono verso un qualche punto come verso un centro.*

Di questo genere è la gravità, per effetto della quale i corpi tendono verso il centro della Terra; la forza magnetica, per effetto della quale il ferro va verso la calamita; e quella forza, qualunque essa sia, per effetto della quale i pianeti sono continuamente deviati dai moti rettilinei e sono costretti a ruotare secondo linee curve. Una pietra, fatta ruotare nella fionda, tende ad allontanarsi dalla mano che si muove in cerchio; col suo sforzo, essa tende la fionda tanto piú fortemente quanto maggiore è la velocità di rotazione, e allorché non è piú trattenuta, vola via. Chiamo centripeta la forza, contraria a tale sforzo, per effetto della quale la fionda di continuo riporta la pietra verso la mano e la trattiene entro un cerchio, giacché è diretta verso la mano come verso il centro di un cerchio. Identica è la norma di tutti i corpi che si muovono secondo una circonferenza. Tentano tutti di allontanarsi dai centri delle orbite; e se non vi fosse una qualche forza contraria a quella tendenza, per effetto della quale sono frenati e trattenuti nelle orbite, e che per questo chiamo centripeta, se ne andrebbero via con moto rettilineo uniforme. Un proiettile, se non fosse per la forza di gravità e se venisse eliminata la resistenza dell'aria, non ricadrebbe sulla Terra, ma se ne andrebbe via nei cieli con moto rettilineo uniforme. A causa della propria gravità, tale proiettile è di continuo deviato dalla direzione rettilinea e di continuo piegato verso la Terra, e ciò in misura maggiore o minore, proporzionalmente alla propria gravità e alla velocità del moto. Quanto minore sarà la gravità, in relazione alla quantità di materia, o maggiore la velocità con cui viene lanciato, tanto meno devierà dalla sua direzione rettilinea e tanto piú a lungo andrà avanti. Se una palla di piombo scagliata dalla cima di un monte per mezzo di un cannone e con una velocità data, proseguisse secondo una linea orizzontale lungo una linea curva fino alla distanza di due miglia prima di ricadere sulla Terra, essa palla, purché si eliminasse la resistenza dell'aria, con velocità doppia andrebbe lontano del doppio, e con una velocità decupla andrebbe quasi dieci volte piú lontano. E aumentando la velocità si potrebbe aumentare a piacere la distanza alla quale può essere scagliata, e diminuire la curvatura della linea descritta, cosicché cadrebbe ad una distanza di 10, 30 o 90 gradi, oppure potrebbe descrivere un'orbita intorno alla Terra, o infine andarsene nei cieli e proseguire il suo moto rettilineo all'infinito. Per la stessa ragione per cui un proiettile può essere piegato lungo un'orbita dalla forza di gravità e viaggiare intorno alla Terra, anche la Luna, purché sia pesante, o per effetto della forza di gravità, o per effetto di qualche altra forza che la spinga verso la Terra, può essere deviata dal cammino rettilineo verso la Terra, e può essere piegata lungo una propria orbita: e senza tale forza la Luna non vi potrebbe essere trattenuta in alcun modo.[9] Se questa forza fosse minore del dovuto, la Luna non devierebbe abbastanza dalla sua direzione rettilinea; se tale forza fosse maggiore del dovuto la devierebbe piú del necessario e la tirerebbe via dalla sua orbita verso la Terra. Viene richiesto per l'appunto che la forza sia di una giusta grandezza ed è compito dei matematici determinare la forza per effetto della quale un corpo può essere esattamente trattenuto in un'orbita data con una velocità data; e, reciprocamente, determinare la curva lungo la quale un corpo una volta proiettato da un qualunque luogo con una data velocità, viene deviato da una data forza. La quantità di questa forza centripeta è, inoltre, di tre generi: *assoluta*, *acceleratrice*, *motrice*.

Newton prosegue questa parte con altre definizioni e la conclude con una osservazione che precisa quale sia la portata del discorso matematico utilizzato nella fisica: non si pretende con questo discorso di dare delle definizioni metafisiche degli enti di cui si parla, ma soltanto di dare delle denominazioni che servano per appoggiare il discorso matematico successivo, il solo che abbia significato perché circoscrive le leggi che reggono gli enti di cui si parla.

Per il futuro chiamerò le attrazioni, cosí come gli impulsi, acceleratrici e motrici essendo identico il significato. In verità userò le parole attrazione, impulso, o propensione di qualcosa verso un centro indifferentemente e promiscuamente l'una per l'altra; visto che queste forze sono considerate non fisicamente ma matematicamente.

[9] Le concezioni che Newton sta esponendo non riguardano soltanto i corpi sui quali possiamo esperimentare; esse reggono il moto di qualunque corpo, ed anche quello dei corpi celesti.

Per cui, il lettore si guardi dal credere che io con queste parole abbia voluto definire una specie o un modo d'azione o una causa o una ragione fisica, o che io, se per caso parlerò di centri che attirano o di centri muniti di forza, attribuisca le forze, in un senso reale e fisico, a centri (che sono soltanto punti matematici).

Questa parte riguardante le definizioni è conclusa da uno scolio, nel quale Newton chiarisce il significato che nella sua teoria hanno i concetti di spazio e di tempo; queste concezioni newtoniane dello spazio e del tempo assoluti sono state considerate fondamentali per la meccanica in particolare e per tutta la fisica fino all'avvento delle concezioni della teoria della Relatività.

Scolio

Fin qui è stato indicato in quale senso siano da intendere, nel seguito, parole non comunemente note. Non definisco, invece, tempo, spazio, luogo e moto, in quanto notissimi a tutti. Va notato tuttavia, come comunemente non si concepiscano queste quantità che in relazione a cose sensibili. Di qui nascono i vari pregiudizi, per eliminare i quali conviene distinguere le medesime quantità in assolute e relative, vere e apparenti, matematiche e volgari.

I. - Il tempo assoluto, vero, matematico, in sé e per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, scorre uniformemente, e con altro nome è chiamato durata; quello relativo, apparente e volgare, è una misura (esatta o inesatta) sensibile ed esterna della durata per mezzo del moto, che comunemente viene impiegata al posto del vero tempo: tali sono l'ora, il giorno, il mese, l'anno.

II. - Lo spazio assoluto, per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, rimane sempre uguale e immobile; lo spazio relativo è una dimensione mobile o misura dello spazio assoluto, che i nostri sensi definiscono in relazione alla sua posizione rispetto ai corpi, ed è comunemente preso al posto dello spazio immobile; cosí la dimensione di uno spazio sotterraneo o aereo o celeste viene determinata dalla sua posizione rispetto alla Terra. Lo spazio assoluto e lo spazio relativo sono identici per grandezza e specie, ma non sempre permangono identici quanto al numero. Infatti se la Terra, per esempio, si muove, lo spazio che contiene la nostra aria, e che, relativamente alla Terra, rimane sempre identico, ora sarà una data parte dello spazio assoluto attraverso cui l'aria passa, ora un'altra parte di esso; e cosí, senza dubbio, muterà incessantemente.

III. - Il luogo è la parte dello spazio occupata dal corpo, e, a seconda dello spazio, può essere assoluto o relativo. Dico parte dello spazio, non posizione del corpo o superficie che lo circonda. Infatti i luoghi di solidi eguali sono sempre eguali; invece le superfici, a causa della dissomiglianza delle figure, sono molto spesso ineguali; le posizioni, a rigore, non hanno quantità, e non sono tanto luoghi quanto proprietà dei luoghi. Il movimento dell'insieme è identico alla somma del movimento delle parti, ossia, la traslazione del tutto dal proprio luogo è identica alla somma della traslazione delle parti dai propri luoghi; quindi il luogo dell'intero è identico alla somma dei luoghi parziali e pertanto è interno ed in tutto il corpo.

IV. - Il moto assoluto è la traslazione di un corpo da un luogo assoluto in un luogo assoluto, il relativo da un luogo relativo in un luogo relativo. Cosí in una nave spinta dalle vele, il luogo relativo di un corpo è quella parte della nave in cui il corpo giace, ossia quella parte dell'intera cavità che il corpo riempie e che dunque si muove insieme alla nave: e la quiete relativa è la permanenza del corpo in quella medesima parte della nave o parte della cavità. Ma la quiete vera è la permanenza del corpo nella medesima parte di quello spazio immobile nella quale la stessa nave si muove insieme alla propria cavità e all'intero suo contenuto.[10]

Newton prosegue nella sua analisi dei concetti di spazio e di tempo ed afferma:

Come è immutabile l'ordine delle parti del tempo, cosí lo è anche l'ordine delle parti dello spazio. Le si faccia uscire dai propri luoghi e sarà come se uscissero (se cosí posso dire) da se stesse. Infatti i tempi e gli spazi sono come i luoghi di se stessi e di tutte le cose. Tutte le cose sono collocate nel tempo quanto all'ordine della successione, nello spazio quanto all'ordine della posizione. È nella loro essenza essere luoghi: ma è assurdo che i luoghi primari siano

---

[10] Quindi Newton ritiene che abbia senso il parlare della « parte dello spazio immobile » nella quale si trova la nave. Questa concezione, che si accorda con una certa elaborazione fantastica delle nostre esperienze, verrà radicalmente cambiata dalla critica di Albert Einstein (1879-1955).

mossi. Questi sono dunque i luoghi assoluti, e i moti assoluti sono le sole traslazioni da questi luoghi.

Vero è che, in quanto queste parti dello spazio non possono essere viste e distinte fra loro mediante i nostri sensi, usiamo in loro vece le loro misure sensibili. Definiamo, infatti, tutti i luoghi dalle distanze e dalle posizioni delle cose rispetto a un qualche corpo, che assumiamo come immobile; ed in séguito, con riferimento ai luoghi predetti valutiamo tutti i moti, in quanto consideriamo i corpi come trasferiti da quei medesimi luoghi in altri. Cosí, invece dei luoghi e dei moti assoluti usiamo i relativi; né ciò riesce scomodo nelle cose umane: ma nella filosofia occorre astrarre dai sensi. Potrebbe anche darsi che non vi sia alcun corpo in quiete al quale possano venire riferiti sia i luoghi, sia i moti.[11]

Le quantità relative, quindi, non sono le stesse quantità dei cui nomi si fanno belle, ma sono le misure sensibili di esse (vere o sbagliate) comunemente usate in luogo delle quantità misurate. Ma se i significati delle parole devono essere definiti dal loro uso, con i nomi di tempo, spazio, luogo e movimento dovranno propriamente intendersi queste misure sensibili; e sicuramente sarà un fatto inconsueto, e puramente matematico, se le quantità misurate saranno capite. Per cui fanno violenza al rigore del linguaggio, coloro che interpretano queste parole come misure di quantità. Né di meno corrompono la matematica e la filosofia coloro che confondono le vere quantità con le loro relazioni e con le misure comuni.

È difficilissimo in verità conoscere i veri moti dei singoli corpi e distinguerli di fatto dagli apparenti: e ciò perché le parti dello spazio immobile, in cui i corpi veramente si muovono, non cadono sotto i sensi. La cosa tuttavia non è affatto disperata. Gli argomenti, infatti, possono essere desunti in parte dai moti apparenti, che sono le differenze dei moti veri, in parte dalle forze, che sono cause ed effetti dei moti veri.

Newton conclude la parte che riguarda le definizioni enunciando il programma del suo trattato; va osservato che le sue parole sono state

---

11 Si potrebbe intravvedere qui uno spiraglio nel quale si insinua il dubbio critico; si potrebbe dire che la critica di Einstein fa leva proprio su questo punto. Esso d'altra parte non era sfuggito a Newton, che analizza in seguito il rapporto tra quelle che egli chiama le quantità assolute che non « cadono sotto i sensi » come dirà tra poco, e le quantità che egli chiama « relative », che sono le sole che danno luogo alla possibilità di misura.

adottate per secoli nel seguito come la definizione della parte della meccanica che viene chiamata « dinamica ».

Come i moti veri siano da dedurre dalle loro cause, dagli effetti e dalle differenze apparenti, e per contro come dai moti sia veri che apparenti si deducano le loro cause ed effetti, verrà insegnato largamente in seguito. A questo fine è stato infatti composto il seguente trattato.

Dopo le definizioni, Newton enuncia i suoi celebri « assiomi » che sono stati considerati dopo di lui le leggi fondamentali, ed i principi della meccanica classica.

Assiomi o leggi del movimento

Legge I - *Ciascun corpo persevera nel proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, eccetto che sia costretto a mutare quello stato da forze impresse.*[12]

I proiettili perseverano nei propri moti salvo che siano rallentati dalla resistenza dell'aria, e sono attratti verso il basso dalla forza di gravità. Una trottola, le cui parti, a causa della coesione, di continuo si deviano l'un l'altra dal movimento rettilineo, non cessa di ruotare, salvo che venga rallentata dalla resistenza dell'aria. I corpi piú grandi dei pianeti e delle comete conservano piú a lungo i propri moti, sia progressivi, sia circolari, effettuati in spazi meno resistenti.

Legge II - *Il cambiamento di moto è proporzionale alla forza motrice impressa, ed avviene lungo la linea retta secondo la quale la forza è stata impressa.*[13]

Posto che una qualche forza generi un movimento qualsiasi, una forza doppia ne produrrà uno doppio, e una tripla uno triplo, sia che sia stata impressa di colpo e in una sola volta, sia gradatamente ed in tempi successivi. E questo moto (poiché è sempre determinato lungo la stessa direzione della forza generatrice) se è concorde e se il corpo era già mosso, viene aggiunto al moto di quello; sottratto se contrario, oppure aggiunto solo in parte se obliquo, cosí da pro-

---

12 Questa legge viene abitualmente indicata come « legge d'inerzia ».
13 Questa seconda legge, che stabilisce la proporzionalità fra l'accelerazione e la forza impressa, viene spesso indicata come la « legge fondamentale della dinamica ».

durre un nuovo movimento composto dalla determinazione di entrambi.

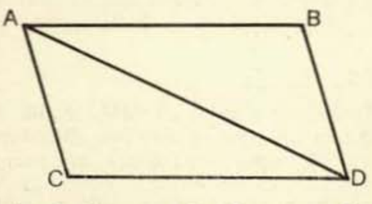
LEGGE III - *Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria: ossia, le azioni di due corpi sono sempre uguali fra loro e dirette verso parti opposte.*

Qualunque cosa pressi o tiri un'altra cosa, è pressata e tirata da essa nella stessa misura. Se qualcuno preme una pietra col dito, anche il suo dito viene premuto dalla pietra. Se un cavallo tira una pietra legata ad una fune, anche il cavallo è tirato ugualmente (se cosí posso dire) verso la pietra: infatti la fune distesa tra le due parti, per lo stesso tentativo di allentarsi, spingerà il cavallo verso la pietra e la pietra verso il cavallo; e di tanto impedirà l'avanzare dell'uno di quanto promuoverà l'avanzare dell'altro. Se un qualche corpo, urtando in un altro corpo, in qualche modo avrà mutato con la sua forza il moto dell'altro, a sua volta, a causa della forza contraria, subirà un medesimo mutamento nel proprio moto in senso opposto (ciò a causa della eguaglianza della mutua pressione). A queste azioni corrispondono uguali mutamenti, non di velocità ma di moto: sempre che sui corpi non agisca nessun altro impedimento esterno. I mutamenti di velocità, infatti, effettuati allo stesso modo in direzioni contrarie, in quanto i moti sono modificati in eguale misura, sono inversamente proporzionali ai corpi.

Questa legge si verifica anche nelle attrazioni, come sarà provato nel prossimo scolio.

COROLLARIO I - *Un corpo spinto da forze congiunte, descriverà la diagonale di un parallelogramma nello stesso tempo nel quale descriverebbe separatamente i lati.*[14]

Se un corpo, a causa della sola forza *M* impressa sul punto *A*, viene trasportato in un dato tempo con moto uniforme da *A* in *B*; e per effetto della sola forza *N* impressa sul medesimo punto, viene trasportato da *A* in *C*: descriverà il parallelogramma *ABCD* e quel corpo sarà trasportato da entrambe le forze lungo la diagonale da *A* a *D* nel medesimo tempo.



Infatti poiché la forza *N* agisce secondo la linea *AC* identica alla

[14] Viene qui enunciata la celebre legge che viene spesso ricordata come « regola del parallelogrammo » per la composizione delle forze.

parallela *BD*, questa forza, per la II legge, non muterà per nulla la velocità di avvicinamento a quella linea *BD* generata dall'altra forza. Il corpo dunque si accosterà nel medesimo tempo alla linea *BD*, sia che la forza *N* vi venga impressa, sia che no; per la qual cosa alla fine di quel tempo sarà in qualche punto di quella linea *BD*. Per lo stesso argomento, alla fine del medesimo tempo esso sarà in qualche punto della linea *CD*, ed è necessario che sia ritrovato nel punto di intersezione *D* di entrambe le linee. Il corpo continuerà a muoversi di moto rettilineo da *A* a *D* per la prima legge del movimento.

GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNITZ

Gottfried Wilhelm von Leibnitz, o Leibniz,[1] *è ben noto come uno dei maggiori pensatori dei tempi moderni per i suoi studi di filosofia, di logica e di matematica, che lo portarono, per quanto interessa in particolare qui, oltre che a importanti risultati matematici, a significative riflessioni sul significato degli enti e delle proposizioni matematiche e sui rapporti tra logica e matematica.*

Per quanto riguarda gli enti e le proposizioni matematiche ci sembrano abbastanza interessanti alcuni passi del dialogo che riportiamo qui di seguito.[2]

In questo dialogo vengono fatte delle osservazioni interessanti a proposito dei simboli matematici e della loro utilità per il ragionamento; inoltre si afferma esplicitamente che le figure della geometria hanno un carattere analogo a quello dei simboli dell'aritmetica e dell'algebra. Gli interlocutori sono indicati da Leibnitz con le lettere A *e* B.

---

1 Nato a Lipsia nel 1646, studiò filosofia e matematica e si laureò in giurisprudenza nel 1666 a Altdorf. Anche per la protezione di diversi principi raggiunse una certa potenza politica, con vari incarichi ufficiali, che contribuí anche alla sua fama. Negli ultimi anni della sua vita, per la morte dei suoi protettori e per la polemica con Newton sulla scoperta del calcolo infinitesimale, potenza e fama declinarono e Leibnitz morí quasi dimenticato, per il momento, nel 1716.

2 Il dialogo è datato agosto 1677 ed è ripreso dall'opera intitolata *Leibniz e la logica simbolica* di Massimo Mugnai (Firenze, Sansoni, 1973); a questa opera rimandiamo per ulteriori notizie.

[...]

B – Questo soltanto mi crea imbarazzo: che senza aver presenti nella mente vocaboli o altri segni (*nisi vocabulis vel aliis signis in animo adhibitis*) non si possa conoscere, scoprire e provare nessuna verità.

A – Anzi, se mancassero i caratteri non potremmo pensare niente in modo distinto, né potremmo ragionare.

B – Ma quando osserviamo le figure della geometria, spesso noi raggiungiamo delle verità mediante una accurata riflessione su di esse.

A – Certamente, ma bisogna sapere che anche queste figure sono da ritenersi caratteri: il circolo disegnato sulla carta non è infatti il vero circolo e non è neppure necessario che lo sia, ma è sufficiente che esso sia ritenuto tale da noi.

B – Tuttavia esso ha una certa somiglianza col vero circolo e sicuramente essa non è arbitraria.

A – Lo ammetto e proprio per questo le figure sono tra tutti i caratteri le piú utili. Ma quale somiglianza tu pensi sussista tra il dieci e il carattere 10?

B – Vi è una certa relazione ovverosia ordine nei caratteri che sussiste anche nelle cose, innanzitutto se i caratteri sono stati escogitati in modo opportuno.

A – E sia; ma quale somiglianza hanno gli stessi primi elementi con le cose, cioè lo « 0 » con lo zero, oppure « a » con una linea? Sei costretto ad ammettere dunque che almeno in questi elementi non vi è bisogno di alcuna somiglianza con le cose.

Dopo poche battute B *riprende:*

... mi rendo conto di questo: che se si possono impiegare i caratteri per il ragionamento, c'è in essi un complesso di mutue relazioni e un ordine che conviene anche alle cose, se non nelle singole parole (per quanto, se ciò fosse, sarebbe meglio), almeno nella connessione e nella flessione delle parole. E benché variato, quest'ordine ha una certa rispondenza in tutte le lingue. Ed è proprio questo a darmi la speranza di uscire dalla difficoltà. Infatti, per quanto i caratteri siano arbitrari, tuttavia il loro uso e la loro connessione ha qualcosa di non arbitrario, vale a dire una certa proporzione tra caratteri e cose e le relazioni che sussistono tra caratteri differenti i quali però esprimono le medesime cose. E questa proporzione o relazione è il fondamento della verità. Essa infatti fa sí che qualora impieghiamo questi o quei caratteri, il risultato sia lo stesso o equivalente o corrispondente in proporzione. Per quanto sia sempre necessario ricorrere ad alcuni caratteri per pensare.

A – Perfettamente! Ti sei saputo trarre d'impaccio in modo egregio. E il calcolo analitico o aritmetico conferma la tua opinione. Nei calcoli numerici infatti si ottiene sempre lo stesso risultato sia che venga utilizzato il sistema decimale, sia quello duodecimale, come hanno fatto alcuni matematici; e inoltre, se eseguirai i calcoli già compiuti con sistemi diversi, ricorrendo questa volta a dei granelli o ad altri oggetti numerabili, il risultato sarà ancora lo stesso.

Ed A *conclude il suo ragionamento nel modo seguente:*

Vedi dunque che per quanto arbitrariamente possano venir assunti i caratteri, purché si osservino un certo ordine e una certa regola nel loro uso, tutti i risultati sono concordi tra loro. Quindi, per quanto le verità presuppongano necessariamente alcuni caratteri, e anzi talvolta parlino degli stessi caratteri (come i teoremi che trattano dell'eliminazione del nove), esse non consistono tuttavia in ciò che nei caratteri è arbitrario, ma in ciò che in essi è permanente, vale a dire nella relazione rispetto alle cose; ed è sempre vero, indipendentemente da ogni nostro arbitrio, che posti tali caratteri ne risulta un certo ragionamento e che postine altri, di cui sia nota la relazione rispetto ai primi, risulterà invece un altro ragionamento il quale tuttavia manterrà ancora quella relazione risultante dal rapporto dei nuovi caratteri con i precedenti, relazione che diventa evidente mediante sostituzione o comparazione.

Ricordiamo inoltre che Leibnitz può a ragione essere considerato come un precursore nel campo della logica simbolica; nelle sue opere si trovano adottati dei simboli grafici per rappresentare la dipendenza logica dei concetti, con un atteggiamento che prelude a quelli che oggi vengono chiamati i « diagrammi di Eulero-Venn ».[3]

---

[3] Dai nomi di L. Euler e del logico inglese John Venn (1834-1923).

Inoltre troviamo anche enunciate delle regole per il calcolo mediante simboli che preludono alle ricerche di algebra applicata alla logica che si ritroveranno circa due secoli dopo in G. Boole.

In questo ordine di idee l'atteggiamento di Leibnitz è confermato dalla testimonianza di J. Hadamard, il quale nella sua opera La psicologia della invenzione nel campo della matematica *scrive:*

« ... Insisto che le parole sono totalmente assenti dalla mia mente quando penso realmente... Credo di dover dire che la penso cosí non solo delle parole ma anche dei segni algebrici... Uso rappresentazioni concrete ma di una natura completamente diversa. Un esempio di questo genere è già noto nella storia della scienza. Fu dato da Euler per spiegare a una principessa svedese le proprietà del sillogismo. Egli rappresenta le idee generali mediante cerchi... Personalmente, dovendo pensare a un sillogismo non penserei in termini di parole (le parole difficilmente ti permetterebbero di vedere se il sillogismo è giusto o sbagliato) ma con una rappresentazione analoga a quella di Euler, solo che userei non cerchi ma figure di forma indefinita perché non ho necessità di una forma definita per pensare a figure interne o esterne l'una all'altra ».

Particolare interesse hanno per noi i contributi che Leibnitz ha dato alla nascita del calcolo infinitesimale (differenziale e integrale), a proposito dei quali F. Enriques ha scritto:[4]

... i quali [Leibniz e Newton]... vengono considerati come fondatori del moderno calcolo infinitesimale.

Leibniz ha fissato soprattutto in maniera sistematica le regole della derivazione (derivate del prodotto, del quoziente, della funzione di funzione e della funzione inversa, nonché derivate delle funzioni piú semplici), usando di un simbolismo espressivo che è stato adottato dopo di lui dai matematici del continente e ha finito poi con l'imporsi anche in Inghilterra, dove si è serbata per circa un secolo la tradizione del linguaggio newtoniano. La derivazione della funzione $y = f(x)$ viene considerata da lui come quoziente di due « *differentiae* » o (come si è detto in seguito secondo Giov.

[4] F. Enriques, *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Bologna, Zanichelli, 1938, pp. 60-61.

Bernoulli [5] e L. Eulero) di due differenziali:

$$\frac{dy}{dx}$$

cioè dell'incremento infinitesimo della funzione a quello della variabile indipendente: se questi infinitesimi vadano intesi soltanto in senso *potenziale*, cioè come quantità variabili evanescenti, ovvero staticamente come *infinitesimi attuali*, non appare chiaramente nell'opera di Leibniz. Sembra che egli comprendesse che l'infinitesimo potenziale è sufficiente alla costruzione del calcolo, ma d'altra parte ragioni metafisiche portavano nella sua mente l'infinito e l'infinitesimo attuale: « Je suis tellement pour l'infini actuel qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu' elle l'affecte partout pour mieux marquer la perfection de son Créateur ».

Riportiamo qui la traduzione di E. Carruccio[6] *di alcuni passi di* Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fracta nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus *(1684); si potrebbe dire a ragione che queste pagine, insieme con altre classiche di Newton, segnano l'inizio di una nuova epoca per la matematica, perché, tra l'altro, non solo vengono qui indagati dei concetti nuovi, ma viene anche cercato un simbolismo atto a rappresentarli, e vengono anche stabilite le leggi formali fondamentali dei simboli adottati.*

Nuovo metodo per i massimi e i minimi come pure per le tangenti, che non si indugia intorno a quantità frazionarie e irrazionali, ed un singolare genere di calcolo per quei problemi.

Sia dato l'asse AX, e piú curve come VV, WW, YY, ZZ, e le ordinate di un loro punto, normali all'asse, siano VX, WX, YX, ZX: queste si dicono rispettivamente v, w, y, z; ed il segmento AX

[5] Johann Bernoulli (1667-1748), svizzero, fratello di Jacob, raggiunse importanti risultati nel calcolo infinitesimale e nella meccanica.
[6] « Periodico di Matematiche », serie IV, vol. VII (1927), pagg. 289-301, ove la traduzione è preceduta da una introduzione e accompagnata da note qui non riportate. Nella numerazione qui data per le figure, la fig. 1 è tratta dalla traduzione tedesca di G. Kowalewski delle opere di Leibniz (*Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften*, Leipzig, 1908), la fig. 3 si trova nella *Opera omnia* (Fratres de Tournes, Genevae, 1768), t. III, pag. 167.

tagliato sull'asse, sia detto x. Le tangenti siano VB, WC, YD, ZE, le quali incontrano l'asse rispettivamente nei punti B, C, D, E (fig. 1).

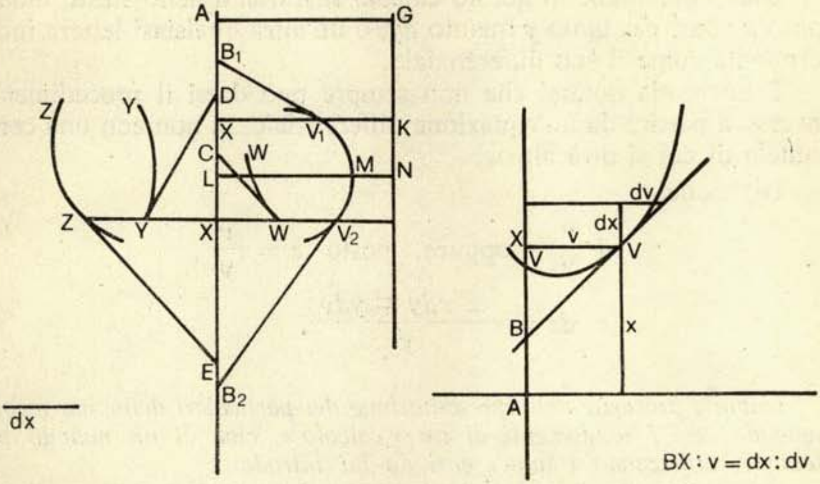


Fig. 1 Fig. 2

Ora un segmento preso ad arbitrio, sia detto dx ed un segmento (fig. 2) che sta a dx, come v (o w, o y, o z) sta a BX (o CX, o DX, o EX) sia detto dv (o dw, o dy, o dz) ossia differenza delle stesse v (o delle stesse w, o y, o z).

Ciò posto le regole del calcolo saranno queste:

Sia a una quantità data costante, sarà

$$da = 0 \quad \text{e} \quad dax = adx$$

Se abbiamo $y = v$ (ossia un'ordinata qualsiasi della curva YY, è uguale ad una qualsiasi ordinata corrispondente della curva VV) sarà: $dy = dv$.

Addizione o sottrazione: se si ha

$$z - y + w + x = v$$

sarà

$$d(z - y + w + x) = dv = dz - dy + dw + dx$$

Moltiplicazione:

$$dxv = xdv + vdx$$

ovvero posto $y = xv$ sarà $dy = xdv + vdx$.

Infatti è ad arbitrio impiegare un'espressione come xv, oppure brevemente una sola lettera come y.

È da notarsi che in questo calcolo si trattano nello stesso modo, tanto x come dx, tanto y quanto dy, o un'altra qualsiasi lettera indeterminata come il suo differenziale.

È anche da notarsi che non sempre può darsi il procedimento inverso a partire da un'equazione differenziale, se non con una certa cautela di cui si dirà altrove.

Divisione:

$$d\frac{v}{y}; \text{ oppure, posto } z = \frac{v}{y},$$

$$dz = \frac{\pm\, vdy \mp ydv}{y^2}.$$

Leibnitz prosegue nella presentazione dei particolari della sua regola, ponendo cosí i fondamenti di un « calcolo », cioè di un metodo per dedurre, utilizzando i nuovi enti da lui introdotti.

Egli tratta con i suoi metodi vari casi particolari e li applica a vari problemi concreti.

Ci pare interessante riportare la sua trattazione del problema della rifrazione della luce attraverso la superficie di separazione di due mezzi.

Leibnitz ritrova con il suo metodo un risultato che era già noto a P. Fermat il quale osserva che « La natura agisce sempre in modo da scegliere le strade piú corte »;[7] *la legge della rifrazione potrebbe infatti essere enunciata dicendo che il percorso della luce è tale che il tempo impiegato a percorrerlo è minimo, se confrontato a quello occorrente per un altro percorso qualesivoglia.*

Ora è meglio mostrarne l'uso[8] in esempi piú evidenti per l'intelletto.

Siano dati due punti C ed E ed una retta SS complanare con essi; cercasi un punto F sulla retta SS, tale che congiunti C con F, ed F con E, la somma dei rettangoli, CF per una data h, ed EF per una data r, sia minima di tutte le possibili. Cosí avviene se SS è la linea di separazione di due mezzi, ed h rappresenta la densità di un mezzo, come l'acqua, dalla parte di C, ed r la densità di un mezzo,

---

[7] La nature agit toujours pour les voies les plus courtes. (Lettera di Fermat al medico Cureau de La Chambre (1594-1669) del 1° genn. 1662).

[8] Cioè mostrare applicazioni del metodo.

come l'aria, dalla parte di *E*; si cerca un punto *F* tale che la via da *C* ad *E* per *F*, sia la piú facile di tutte le possibili (fig. 3).

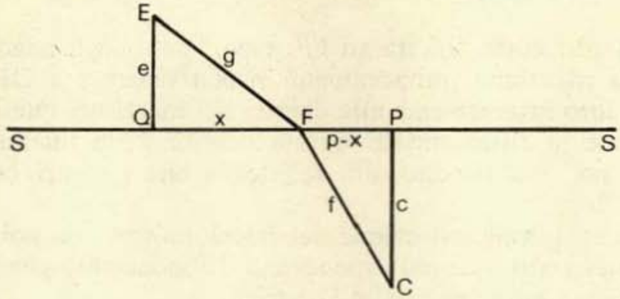


Fig. 3

Poniamo che tutte queste possibili somme di rettangoli, o tutte le difficoltà delle vie possibili, siano rappresentate dalle stesse *KV* ordinate della curva *VV*, normali alla retta *GK* (fig. 1); le chiameremo ω, e si cerchi la minima di esse *NM*.

Poiché si danno i punti *C* ed *E* si daranno anche i segmenti perpendicolari ad *SS*, vale a dire *CP* (che chiameremo *c*), *EQ* (che chiameremo *e*), ed inoltre *PQ* (che diremo *p*), la stessa *QF* poi, che è uguale a *GN* (o ad *AX*) sarà chiamata *x* e *CF* *f*, ed *EF* *g*. Sarà $FP = p - x$, $f = \sqrt{c^2 + p^2 - 2px + x^2}$ o brevemente $\sqrt{l}$, e $g = \sqrt{e^2 + x^2}$ o brevemente $\sqrt{m}$. 2

Abbiamo dunque:

$$\omega = h\sqrt{l} + r\sqrt{m}$$

e la sua equazione differenziale (posto $d\omega = 0$ in caso di minimo) è

$$0 = -\,hdl : 2\sqrt{l} - rdm : 2\sqrt{m}$$

per le regole già esposte del nostro calcolo.

Ora è

$$dl = -\,2\,(p - x)\,dx \quad \text{e} \quad dm = 2\,xdx$$

sarà dunque:

$$h\,(p - x) : f = rx : g\,.$$

Ora se queste considerazioni si applicano alla diottrica, e se si pone $f = g$, ossia $CF = EF$, poiché rimane invariata la rifrazione, comunque si ponga la lunghezza del segmento CF; sarà:

$$h\,(p - x) = rx \quad \text{ossia} \quad h : r = x : (p - x)$$

ossia h sta ad r come QF sta ad FP; cioè, i seni degli angoli d'incidenza e di rifrazione (proporzionali rispettivamente a QF ed FP) stanno fra loro inversamente alle densità dei mezzi nei quali avviene l'incidenza e la rifrazione. E questa densità è da intendersi non rispetto a noi, ma rispetto alla resistenza che i mezzi offrono ai raggi della luce.

E si ha cosí la dimostrazione del calcolo, altrove da noi indicato in questi stessi atti, quando esponevano il fondamento generale dell'Ottica, della Catottrica e della Diottrica.

Leibnitz conclude la sua esposizione facendo rilevare la semplicità e la fecondità del suo metodo e dimostrando di essere cosciente di aver aperto delle strade nuove ed importantissime per la scienza futura.

Ed in tutti questi casi ed in altri assai piú complicati, molto maggiore di quel che si crede è la rarissima semplicità del nostro metodo.

E questi invero sono soltanto gl'inizi d'una geometria molto piú sublime, che si estende a qualunque dei problemi piú difficili e piú belli anche della matematica mista, che senza il nostro calcolo differenziale nessuno ragionevolmente tratterebbe con pari facilità.

CAPITOLO IV

Momenti della matematica moderna

INTRODUZIONE

Come abbiamo detto ripetutamente, è chiaramente impossibile dare un'idea di tutta la matematica moderna, delle sue caratteristiche, dei suoi sviluppi e delle sue tendenze: ci limitiamo quindi a presentare certi « momenti », sempre attraverso le parole dei matematici che scrivono della propria scienza e del proprio lavoro.

Ripetiamo anche che la nostra scelta non significa una valutazione di merito, e in particolare che non intendiamo con la nostra presentazione dare anche una indicazione che autorizzi il lettore a ritenere che i momenti qui presentati siano i soli momenti principali e fondamentali della matematica moderna.

Le nostre scelte riguardano anzitutto l'evoluzione critica, che dalla concezione classica della matematica ha portato alla concezione che di questa scienza abbiamo oggi: questa evoluzione è introdotta secondo il suo realizzarsi, attraverso quella della geometria, che, partendo dall'opera di Saccheri rivolta a « emendare Euclide da ogni neo », giunge fino all'opera di Lobacevskij, il quale « osa » enunciare un postulato che riguarda la parallela totalmente diverso da quello di Euclide, che era stato considerato « evidente » durante secoli di storia della scienza.

Questa posizione di Lobacevskij appare del tutto rivoluzionaria nei riguardi di una tradizione che aveva considerato fino a quell'epoca la geometria euclidea come una scienza determinata dai suoi contenuti e tale da partire da enunciati « evidenti » per dedurre altri enunciati (i teoremi) meno « evidenti ». Il contributo della geometria e della critica dei suoi fondamenti ha permesso di giungere alla concezione moderna della geometria e della matematica in generale: la concezione secondo la quale la matematica non è specificata da certi contenuti (numeri, spazio geometrico o altro) ma dai suoi procedimenti.

La geometria ritorna poi con le pagine di F. Klein, che introduce esplicitamente una struttura algebrica (quella di « gruppo ») che fornisce un criterio per la unificazione delle ricerche di geometria che a quel tempo erano in crescita disordinata e tumultuosa.

In secondo luogo presentiamo la nascita di nuovi rami sul vecchio tronco della matematica; anche in questo caso la presentazione può *essere soltanto parziale: tuttavia pensiamo che la scelta sia abbastanza significativa per far cogliere quegli aspetti di scienza viva della matematica dei quali si è detto nella prefazione e che dovrebbero essere emersi nei primi tre capitoli. Qui vogliamo solo osservare che la inventiva e la fantasia conservano il loro ruolo anche nella alta specializzazione tecnica contemporanea e che lo studio e il ripensamento sui processi psicologici della ricerca matematica hanno un notevole interesse, come mostrano anche alcune pagine di Poincaré e Hadamard che presentiamo in questo capitolo.*

Per quanto riguarda i nuovi rami dei quali ci occuperemo, diamo qui brevi indicazioni a proposito degli Autori e dei passi riportati.

Della vastissima produzione di L. Euler riportiamo una nota che segna l'inizio degli studi di topologia, cioè di un ramo della matematica che ha oggi una importanza fondamentale; la trattazione di L. Euler è al livello di « geometria qualitativa », cioè di considerazioni che tengono conto della sola posizione reciproca degli elementi in oggetto e che non dipendono dalle condizioni, abitualmente e tradizionalmente considerate, di grandezze e misure.

Di P. Laplace ricordiamo in particolare la prima codificazione rigorosa della teoria delle probabilità, che apriva alla matematica l'analisi della situazione psicologica dell'uomo di fronte a eventi incerti e quindi delle azioni e delle situazioni umane.

Di J. B. Fourier riportiamo alcune pagine sulla teoria del calore, cioè su una applicazione della matematica a campi diversi da quello, considerato classico, della meccanica razionale, osservando che i fenomeni termici appartengono al campo della fisica, ma presentano tuttavia un aspetto del tutto nuovo, dovuto alla essenziale irreversibilità del fenomeno della trasmissione del calore; Fourier non soltanto applicò la matematica a questi fenomeni, ma ancora codificò in qualche modo un aspetto tipico dell'impiego della matematica. Infatti egli affermò che l'analisi che la matematica faceva di questi fenomeni era in certo modo indipendente dalla questione sulla natura del calore ed era valida quale che fosse la natura di questo.

Di G. Boole riportiamo alcune pagine nelle quali sono indagate le leggi fondamentali di quelle operazioni della mente mediante le quali si realizza il pensiero umano, pagine che fanno entrare la matematica nel campo della logica, la cui trattazione era stata fino a quel tempo sviluppata con il linguaggio comune.

Di G. Cantor riportiamo alcune pagine relative al concetto di insieme, che è fondamentale per ogni ragionamento; purtroppo non è possibile arrivare qui all'analisi di Cantor del concetto di « insieme infinito », già affrontato da Galileo con geniali intuizioni, e alla sua costruzione di una aritmetica dei numeri transfiniti, che permette alla matematica di oggi *di analizzare l'infinito cosí come la vecchia aritmetica dominava il numero finito.*

Di G. Frege riportiamo alcune pagine relative all'analisi dei fondamenti dell'aritmetica nelle quali è esposta la necessità di giustificarne in modo rigoroso i procedimenti. Frege giunse cosí alla formalizzazione dei procedimenti elementari del ragionamento, sulla scorta del lavoro di pioniere di Boole.

Di H. Poincaré riportiamo alcune pagine di riflessione sul significato della matematica e dei suoi procedimenti, alle quali si collegano – almeno in parte – le pagine riportate qui di J. Hadamard sulla psicologia dei matematici.

Di D. Hilbert riportiamo alcuni passi del classico discorso al congresso internazionale dei matematici del 1900, nel quale riassunse i problemi fondamentali rimasti insoluti nella matematica per tracciare la strada ai ricercatori del futuro attraverso il collegamento tra problemi da risolvere e ricerche da sviluppare.

Concludiamo la rassegna con uno scritto di F. Enriques sull'errore nelle matematiche, importante per il suo significato ai fini che ci siamo proposti.

Ripetiamo che la rassegna che noi abbiamo dato non ha alcuna pretesa di completezza: non sono presentati per esempio dei giganti come K. F. Gauss,[1] *K. Weierstrass,*[2] *B. Riemann;*[3] *tra gli italiani, in particolare, non compaiono qui dei matematici come G. Castelnuovo*[4] *e F. Se-*

---

1 Karl Friedrich Gauss (1777-1855), fu direttore dell'Osservatorio astronomico di Gottinga dal 1807 e professore di aritmetica in quella Università. I contributi di Gauss alla matematica hanno importanza fondamentale e riguardano l'aritmetica, l'algebra e la geometria. Egli lasciò pure un'orma indelebile nell'astronomia, nella geodesia e nella fisica matematica.

2 Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), passato alla matematica dagli studi di giurisprudenza, insegnò in alcune scuole prima di divenire professore all'Università di Berlino (straordinario dal 1856, ordinario dal 1864). Fu uno dei matematici piú eminenti della seconda metà del secolo XIX e uno dei fondatori della moderna teoria delle funzioni.

3 Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), concluse gli studi e insegnò all'Università di Gottinga, nella quale divenne professore nel 1859. I suoi studi ebbero profonda influenza su diversi rami della matematica, e in particolare sulla geometria e sulla teoria delle funzioni.

4 Guido Castelnuovo (1865-1952), veneziano, fu professore all'Università di Roma (geometria analitica e proiettiva, geometria superiore, matematiche complementari, calcolo delle probabilità) dal 1891 al 1935, quando lasciò l'insegnamento per sopravvenuti limiti di età. Nel 1938 dovette lasciare la sua casa per le leggi razziali e fu aiutato dai suoi molti allievi. Nel dopoguerra fu chiamato a dirigere il Consiglio Nazionale delle Ricerche, a riorganizzare l'Accademia dei Lincei, della quale fu presidente fino alla morte; fu nominato senatore a vita della Repubblica Italiana.

veri,[5] *che furono tra i piú importanti dell'ultimo secolo e che, insieme con F. Enriques, furono tra le figure piú rappresentative di quel ramo della geometria algebrica che viene spesso indicato, per merito loro e della corrente da loro capeggiata, la « scuola italiana » di geometria algebrica. Tuttavia pensiamo che la rassegna che abbiamo qui presentato corrisponda agli scopi che ci proponevamo: anzitutto quello di dimostrare che (come abbiamo ripetuto anche poco fa), la matematica è una scienza vivente, ed in secondo luogo quello di stimolare i ricercatori e le persone di cultura a accostare i classici ed a constatare personalmente la vitalità del fluire storico della evoluzione che è tipico di ogni scienza, ma che è particolarmente interessante e stimolante nel caso della matematica.*

---

5 Francesco Severi (1879-1961), aretino, vinse a 25 anni la cattedra di geometria proiettiva e descrittiva dell'Università di Parma; l'anno dopo passò a Padova e nel 1922 passò a Roma. Nel 1939 fondò l'Istituto nazionale di alta matematica. Fu accademico d'Italia, socio nazionale dei Lincei, membro di numerose accademie italiane e straniere.

GEROLAMO SACCHERI

Il nome di Giovanni Gerolamo Saccheri[1] *è passato alla storia della matematica per il suo originalissimo contributo allo sviluppo della geometria; egli viene unanimemente considerato come un precursore della geometria non-euclidea e quindi come uno di coloro che hanno aperto la strada per una concezione del tutto nuova della geometria in particolare e della matematica in generale; infatti nella sua classica opera* Euclide emendato da ogni neo (Euclides ab omni naevo vindicatus sive conatus geometricus quo stabiliuntur ipsa universae Geometriae principia) *egli stabilisce, per la prima volta nella storia, una successione di proposizioni, logicamente collegate tra loro in modo ineccepibile, le quali partono da postulati diversi da quelli enunciati da Euclide nei suoi* Elementi.

---

1 Nato a Sanremo nel 1667, entrò nella Compagnia di Gesú e fu ordinato sacerdote nel 1694; filosofo, teologo, matematico, ebbe nel 1699 dal Senato milanese la cattedra di matematica nell'Università di Pavia, cattedra che tenne fino alla morte. Morí a Milano nel 1733.

Come si è visto, l'opera di Euclide incomincia con l'enunciazione di certe proposizioni che sono state considerate come delle definizioni degli enti di cui si tratta e prosegue con la enunciazione di certe proposizioni che sono date senza dimostrazione e che sono chiamate « postulati » e « nozioni comuni ». Tra i postulati, il quinto riguarda la relazione tra due rette complanari che non si incontrano, e sostanzialmente stabilisce la unicità della parallela ad una retta data passante per un punto dato.

L'atteggiamento classico nei riguardi della geometria potrebbe essere descritto in modo approssimativo dicendo che non si avevano dubbi sul fatto che la geometria dicesse delle verità intorno ai suoi oggetti e che in particolare non si avevano dubbi sulla verità dell'enunciato del quinto postulato. Tuttavia sono stati fatti, nel corso della storia, numerosi tentativi per « dimostrarlo », cioè per ricondurlo ad altre proposizioni che venivano giudicate come piú « evidenti ».

G. Saccheri non si sottrae alla posizione psicologica comune alla scienza del suo tempo, cioè non mette minimamente in dubbio la « verità » del postulato; d'altra parte egli dimostra una estrema originalità nel procedimento che segue: egli infatti non accetta i tentativi di dimostrazione che erano stati tentati prima di lui, e sceglie una strada che si fonda sul potere della sola logica: la strada della dimostrazione per assurdo.

La originalità della sua posizione lo conduce quindi a considerare come vere certe proposizioni che sono le negazioni della proposizione euclidea ed a dedurre una certa quantità di conseguenze da queste ipotesi; egli ottiene cosí uno scopo, che è diverso da quello che si proponeva, ma che lo fa entrare egualmente nella storia della matematica; come abbiamo già detto, egli dà per primo un insieme di proposizioni di geometria non-euclidea, che si sostengono cioè con la sola coerenza logica delle premesse, senza alcun appoggio in quella che egli credeva essere la realtà della sola geometria vera.

*Le pagine che seguono sono tratte da quella parte dell'*Euclide emendato[2] *che viene abitualmente presa in considerazione per i suoi rapporti con il quinto postulato degli* Elementi.

Riportiamo anzitutto dei brani della prefazione nella quale l'Autore precisa la sua intenzione, e quali siano i « nei » dai quali egli vuole emendare Euclide (cioè il trattato degli Elementi *di Euclide).*

La prefazione è interessante per varie ragioni: intanto traspare da questa, come da tutto il resto dell'opera, la convinzione che la geometria euclidea fosse la sola ed unica geometria « vera »; dovevano infatti

---

[2] Le pagine riportate sono tratte da *L'Euclide emendato del P. Girolamo Saccheri*, traduzione e note del prof. G. Boccardini (Milano, Hoepli, 1904), ad eccezione dell'ultimo periodo qui riportato che, trascritto in latino dal Boccardini, è stato tradotto da noi.

passare piú di cento anni perché i matematici raggiungessero la certezza del fatto che le geometrie non-euclidee hanno la stessa coerenza logica della geometria euclidea. In secondo luogo si può vedere che Saccheri si rende ben conto degli errori logici che erano stati commessi da altri, i quali avevano cercato di « dimostrare » il postulato euclideo della parallela con la introduzione di altri postulati, oppure addirittura assumendo come « evidenti » certe proposizioni, senza curarsi di annoverarle esplicitamente tra i postulati, cioè tra le proposizioni che si danno senza dimostrazione.

Prefazione dell'Autore

Nessun cultore delle scienze matematiche può ignorare quanto sia il pregio e l'eccellenza degli *Elementi* di Euclide; ne fanno fede Archimede, Apollonio, Teodosio[3] ed altri innumerabili matematici fino ai nostri giorni, i quali si servono degli *Elementi* come di dottrina da lungo tempo e su basi sicure stabilita. Ciò peraltro non impedí che molti tra gli antichi ed i moderni celebrati cultori della geometria non vi trovassero qualche cosa a ridire; e infatti si notano tre nèi.

Il primo riguarda la definizione delle parallele e con essa il postulato V del libro I « due rette segate da una terza, se formano con questa angoli interni da una medesima parte la cui somma è minore di due retti, si incontrano da questa parte ».

Nessuno per certo vi ha che dubiti della verità di questo postulato,[4] ma la sola accusa che si muove ad Euclide è di averlo chiamato con il nome di assioma, come se al solo enunciarlo esso riuscisse evidente.

Gli è perciò che in seguito non pochi, pur accettando la definizione euclidea delle parallele, ne tentarono la dimostrazione, servendosi di quelle sole proposizioni del libro I che precedono la 29ª, per la quale incomincia ad essere indispensabile l'uso del controverso postulato.

Ma poiché gli sforzi degli antichi riuscirono vani a raggiungere l'intento, ne venne che molti esimii geometri a noi piú vicini ritennero necessaria una nuova definizione di rette parallele; pertanto alla definizione euclidea « Linee rette parallele sono quelle le quali

[3] Teodosio detto di Tripoli, geometra e astronomo greco vissuto non dopo il primo secolo a.C.
[4] Questa frase svela la posizione intellettuale del Saccheri, che non aveva alcun dubbio sulla verità della proposizione euclidea.

essendo in un medesimo piano, prolungate indefinitamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano mai »,[5] pensarono di sostituire la seguente: « Linee rette parallele sono quelle le quali essendo in un medesimo piano e prolungate indefinitamente sono sempre tra loro equidistanti ».

Senonché alcuni, e sono i piú acuti, cercarono di provare che esistono linee cosiffatte, per passare poi a dimostrare la verità del controverso postulato, su cui, a partire dalla proposizione 29ª, poggia tutta la geometria; altri invece (non senza peccare gravemente contro la logica) assumono linee rette cosiffatte come date, e di poi passano senz'altro a dimostrare le rimanenti proposizioni della geometria.[6]

Questi sono gli argomenti che offriranno materia al primo libro del mio opuscolo, libro che dividerò in due parti.

Nella prima imiterò gli antichi geometri, cioè non mi preoccuperò né della natura né del nome di quella linea, i cui punti sono equidistanti da una retta data; ma soltanto mi fermerò a dimostrare il postulato V al di fuori di ogni petizione di principio, e ciò facendo uso solo delle prime 26 proposizioni del libro I.

Nella seconda parte, per dare nuova conferma del postulato, proverò che il luogo dei punti equidistanti da una retta data è una linea retta, ed allora si vedrà come sia necessario sottoporre i principi fondamentali della geometria ad una rigorosa disamina.

La strada, del tutto originale, che il Saccheri segue per giungere alla

---

[5] Si ricordi che per Euclide e per i suoi seguaci, la « linea retta » era considerata quella figura che noi oggi chiamiamo « segmento di retta » e quindi ha senso per loro la frase « prolungare una retta » che nella abitudine moderna appare sprovvista di senso, perché si definisce come retta la figura infinita, che si ottiene prolungando comunque il segmento.

[6] Qui il Saccheri dimostra la acutezza del suo spirito critico. Infatti, considerando il luogo L dei punti che hanno una distanza data da una retta data, non è detto che tale luogo sia una retta; anzi si dimostra facilmente che il postulato euclideo della parallela può essere sostituito dalla proposizione seguente: « Il luogo dei punti che hanno tutti uguali distanze da una data retta qualsiasi è pure una retta ». Se non è stato enunciato il postulato euclideo né è stata enunciata la proposizione di cui sopra, la sola cosa che si può dire è che il luogo L è una linea, a priori diversa dalla retta, e che con nomenclatura moderna viene chiamata « iperciclo ». Saccheri farà l'analisi delle proprietà di questa figura, il che dimostra la sua acutezza di critica, anche se giungerà a conclusioni sbagliate proprio nel calcolo della lunghezza di questa linea.

sua dimostrazione, è quella della dimostrazione per assurdo, consistente nel supporre che il postulato non sia vero e nel tentare di dedurre da questa negazione una contraddizione.

La prefazione prosegue poi a presentare gli altri due « nèi » del trattato di Euclide, che il Saccheri si propone di eliminare logicamente, costituiti da due proposizioni: quelle che egli indica come la definizione 6 del libro V e la definizione 5 del libro VI.

Non intendiamo esporre qui le questioni che riguardano la denominazione delle proposizioni,[7] né le questioni storiche riguardanti la loro autenticità; ci limitiamo quindi a presentare le proposizioni cosí come esse sono prese in considerazione da Saccheri.

Euclide V, 6 – Quattro grandezze formano proporzione, ovvero la prima ha alla seconda lo stesso rapporto che la terza ha alla quarta quando, presi degli equimultipli qualisivogliano della prima e della terza e degli equimultipli qualisivogliano della seconda e della quarta, ogni volta che il multiplo della prima è maggiore, uguale o minore del multiplo della seconda, anche il multiplo della terza è maggiore o rispettivamente uguale o minore del multiplo della quarta.

Euclide VI, 5 – Una ragione[8] si dice composta di altre quando risulta dal prodotto di queste.

Diamo ora alcune proposizioni del trattato di G. Saccheri, per far vedere la tecnica da lui seguita: egli infatti considera una figura chiamata « quadrilatero birettangolo isoscele »; due degli angoli di tale quadrilatero sono retti; sugli altri due (che Saccheri dimostra uguali tra loro) possono essere emesse tre ipotesi; la prima, che Saccheri chiama « ipotesi dell'angolo retto » conduce alla dimostrazione del postulato euclideo della parallela. Le altre due vengono chiamate « ipotesi dell'angolo acuto » ed « ipotesi dell'angolo ottuso ».

È chiaro che se queste due ipotesi risulteranno invalide, risulterà vera per conseguenza l'ipotesi dell'angolo retto, cioè il postulato euclideo risulterà dimostrato.

Ora per dimostrare che le due ipotesi sono invalide, si può procedere « per assurdo »; in altre parole si può accettare provvisoriamente una delle ipotesi e trarre le conseguenze da essa, fino ad arrivare ad una

---

7 A titolo di esempio diremo che quella che Saccheri indica come definizione 5 del libro VI è ritenuta da vari storici autorevoli come non dovuta ad Euclide, ma come un risultato di una interpolazione posteriore fatta sui testi.

8 Rapporto.

conseguenza che sia palesemente falsa. Questa falsità porterà come conseguenza la invalidità della ipotesi. È questa la strada che Saccheri intende seguire.

Ecco le parole di Saccheri che seguono la sua IV proposizione.

DEFINIZIONI

Poiché in ogni quadrilatero birettangolo isoscele gli angoli ai vertici sono uguali, si possono distinguere tre ipotesi circa la natura di questi angoli; chiameremo « ipotesi dell'angolo retto, ipotesi dell'angolo ottuso, ipotesi dell'angolo acuto ».

Proposizione V

Se in un solo caso è vera l'ipotesi dell'angolo retto, essa è vera in ogni altro caso.[9]

Dim. - Nel quadrilatero birettangolo isoscele *ABCD* (fig. 1) oltre gli angoli in *A* e in *B* sieno retti gli angoli in *C* e in *D*. Sarà *CD* eguale ad *AB*.

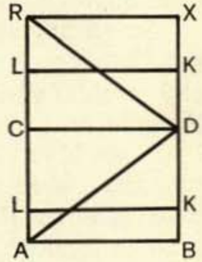


Fig. 1

Sui lati *AC* e *BD* prolungati si prendano due segmenti *CR* e *DX* uguali ad *AC* e *BD* e si congiunga *RX*. Ripiegando la figura intorno a *CD* il punto *A* vien portato in *R* e il punto *B* in *X*, il che dimostra che *RX* è uguale ad *AB* e che gli angoli in *R* e in *X* sono retti. Piú elegantemente possiamo dimostrare che gli angoli *R* ed *X* sono retti nel seguente modo: nei triangoli *ACD*, *RCD* uguali (Euclide, I, 4) i lati *AD*, *RD* sono uguali e sono uguali gli angoli *ADC*, *RDC* e perciò uguali sono pure i loro complementi *ADB*, *RDX* e quindi (Euclide I, 4) nei triangoli *ADB*, *RDX* sarà *RX* uguale ad *AB* e però gli angoli in *R* ed *X* saranno retti.

Cosí è dimostrato che, sotto la stessa base AB, i lati AC e BD possono essere prolungati indefinitamente, sempre sussistendo l'ipotesi dell'angolo retto. Dimostriamo ora che la stessa ipotesi seguiterà

[9] Si noti la importanza fondamentale di questa proposizione e della seguente: in esse si dimostra che dalla validità *in un solo caso* della ipotesi si può trarre la validità della ipotesi stessa *in ogni caso.*

a sussistere anche nel caso di una diminuzione qualsiasi dei lati *AC* e *BD*. Infatti in *AR* e *BX* si prendano due segmenti uguali *AL* e *BK* e si congiunga *LK*. Se gli angoli in *L* e in *K* non sono retti, sono tuttavia uguali e saranno da una banda, p. es. verso *AB*, ottusi e dall'altra acuti e quindi per la proposizione III sarà *LK* maggiore di *RX* e minore di *AB*, il che è falso, essendo *RX* uguale ad *AB*. Dunque gli angoli in *L* e in *K* sono retti.

È poi manifesto che prendendo nel quadrilatero *ABXR* per base *BX* e per lati eguali *AB* ed *RX* l'ipotesi dell'angolo retto rimarrà immutata per qualsiasi aumento o diminuzione della base *AB*; cosí che il teorema è dimostrato completamente.

Proposizione VI

Se in un solo caso è vera l'ipotesi dell'angolo ottuso, essa è vera in ogni altro caso.

Dim. - Nel quadrilatero birettangolo isoscele *ABCD* (fig. 2) gli angoli in *C* e in *D* sieno ottusi. Sarà *CD* minore di *AB*. Sui lati *AC* e *BD* prolungati si prendano due segmenti *CR*, *DX* uguali ad *AC*, *BD* e si congiunga *RX*.

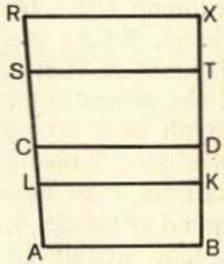


Fig. 2

Se gli angoli in *R* ed *X* sono ottusi abbiamo l'asserto; ora retti non possono essere perché sarebbe verificata in un caso l'ipotesi dell'angolo retto e quindi anche gli angoli in *C* e in *D* sarebbero retti, contro l'ipotesi. Ma non possono essere neanche acuti. Infatti, in tal caso sarebbe *RX* maggiore di *AB* e perciò molto maggiore di *CD*; e allora se il quadrilatero *CDXR* si intende riempito di rette, staccanti dalle rette *CR*, *DX* parti rispettivamente uguali, si passerebbe dalla retta *CD*, che è minore di *AB*, alla retta *RX* che è maggiore di *AB*, passando per una certa retta *ST* uguale alla stessa AB e in questo passaggio si verificherebbe un caso a favore dell'ipotesi dell'angolo retto, il quale non lascerebbe piú luogo all'ipotesi fatta dell'angolo ottuso. Dunque gli angoli in *R* e in *X* sono ottusi.

Si prendano ora in *AC* e *BD* due parti uguali *AL* e *BK* e si congiunga *LK*; si dimostra, come sopra, che gli angoli in *L* e in *K* non possono essere né retti, né acuti; dunque sono ottusi. Cosí è dimostrato che, sotto la stessa base *AB*, aumentando o diminuendo a piacere i lati *AC* e *BD*, sussiste sempre l'ipotesi dell'angolo ottuso. Ma questa ipotesi seguita a sussistere sotto qualsiasi base. Infatti nel quadrilatero birettangolo isoscele *ABRX* (fig. 3), in cui gli angoli in *R* e in *X*, come abbiamo visto precedentemente, sono ottusi, si prenda per base *BX*. Si dividano *AB* ed *RX* per metà nei punti *M* ed *H* e si congiunga *MH* che sappiamo essere perpendicolare ad *AB* e a *RX*. Il quadrilatero *MBXH* ha tre angoli retti e uno ottuso in *X*. Si costruisca l'angolo retto *BXP*; il lato *XP* dell'angolo retto incontrerà *MH* in un punto *P* situato tra *M* ed *H* perché l'angolo *BXH* è ottuso e l'angolo *BXM*, che si ottiene congiungendo *X* con *M*, è (Euclide I, 17) acuto; allora poiché il quadrilatero *XBMP* ha tre angoli retti e uno ottuso (Euclide I, 16) in *P*, sarà, per il corollario I, dopo la proposizione III, *XP* minore del lato opposto *BM*; laonde, prendendo in *BM* una parte *BF* uguale a *XP*, gli angoli *BFP*, *XPF* saranno uguali, cioè ottusi essendo l'angolo *BFP* (Euclide I, 16) maggiore di *FMP* che è retto. Dunque sotto qualsiasi base *BX* sussiste l'ipotesi dell'angolo ottuso. Cosí il teorema è dimostrato completamente.

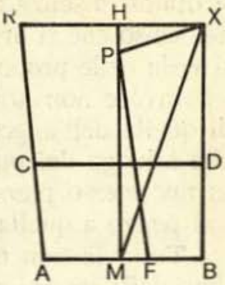


Fig. 3

*Pensiamo che le proposizioni riportate fin qui siano sufficienti per dare un'idea del modo di procedere di Saccheri e della impostazione del suo lavoro. Non vogliamo tuttavia tralasciare di ricordare che la parte dell'*Euclide emendato *riguardante il quinto postulato si conclude con un paragrafo nel quale Saccheri dimostra di avere qualche dubbio circa la completa validità delle conclusioni alle quali egli è pervenuto.*

In effetti questi dubbi erano fondati, perché la sua deduzione non si conclude affatto con l'assurdo al quale egli tendeva; per sua giustificazione si potrebbe dire che il suo errore è basato sulla non giusta soluzione del problema della determinazione della lunghezza del luogo dei punti che hanno distanze uguali da una retta (luogo che, come si è detto, nella nomenclatura di oggi viene chiamato « iperciclo »). Effettivamente per la risoluzione di questo problema occorrerebbe adottare dei metodi di calcolo differenziale ed integrale che all'epoca non erano ancora perfettamente maneggiati da tutti gli studiosi.

La manifestazione dei suoi dubbi può tuttavia essere considerata come una prova della sua assoluta onestà intellettuale.[10]

[10] Come abbiamo già detto, la traduzione del passo che segue è nostra.

... infatti per quanto riguarda l'ipotesi dell'angolo ottuso, la cosa è chiara come la luce del giorno; infatti se la si assume come vera, si dimostra senza ombra di dubbio che il postulato euclideo è vero, nel senso che si arriva ad accertare la falsità di quella ipotesi, come si vede nelle proposizioni XIII e XIV di questa trattazione.

Invece non arrivo a dimostrare la falsità dell'altra ipotesi, cioè di quella dell'angolo acuto se non dimostrando prima che la curva, che è luogo dei punti che hanno distanze uguali da una retta e sta in uno stesso piano con questa retta, ha lunghezza uguale (*in ogni sua parte*) a quella della retta (*nella parte corrispondente*).

Tuttavia non mi pare che questa dimostrazione sgorghi dall'intimo della ipotesi ammessa, come occorrerebbe per una perfetta confutazione della ipotesi stessa.

LEONHARD EULER

Leonhard Euler,[1] *il cui nome è anche italianizzato in « Eulero », è stato giudicato come il piú grande matematico del secolo XVIII.*

Innumerevoli sono i contributi fondamentali che egli apportò a molti rami della matematica, alla analisi matematica, alla teoria dei numeri, alla geometria ecc. In particolare ricordiamo che a lui si deve la utilizzazione di schemi grafici per rappresentare i rapporti logici che ancora oggi vengono chiamati « diagrammi di Eulero » o anche « diagrammi di Eulero-Venn ».[2]

È molto difficile dare un'idea dell'opera di Eulero senza utilizzare il linguaggio tecnico della matematica; ci limitiamo pertanto a presentare alcuni passi del suo saggio nel quale egli risolve il problema che viene detto « dei sette ponti di Königsberg ».[3] *Infatti, viene riconosciuto da*

---

1 Nato a Basilea nel 1707, nel 1727 fu chiamato da Caterina I alla Accademia di Pietroburgo, dove nel 1730 divenne professore di fisica e nel 1733 divenne professore di matematica. Nel 1741 fu chiamato da Federico di Prussia a Berlino, dove fu nominato direttore della classe matematica di quella accademia. Nel 1766 ritornò a Pietroburgo ed ivi rimase fino alla sua morte, avvenuta nel 1783.

2 Cfr. pag. 146.

3 *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis,* presentato alla Accademia delle Scienze di Pietroburgo il 26 agosto 1736, pubblicato nei *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* (pp. 128-140 del volume 8, relativo al 1736 ma

molte parti che Eulero con questa opera dà inizio ad una nuova branca della matematica: questa, che oggi viene chiamata « topologia » e viene considerata come fondamentale per tutta la matematica, viene da lui presentata come una analisi « qualitativa » dei rapporti geometrici.

In questo lavoro Eulero non solo dà la soluzione del « problema » e delle sue possibili generalizzazioni ma pone anche le basi di un metodo di portata ben piú vasta, che, usando il modo di esprimersi di oggi, possiamo cosí presentare, facendo riferimento all'enunciato del problema stesso: le regioni sono sostituite con punti *e i ponti con* archi *che congiungono i punti; i punti vengono chiamati* vertici *e un vertice viene detto pari o dispari a seconda che il numero di archi che escono da esso è pari o dispari; questa rappresentazione viene chiamata* grafo.

Il problema, dei sette ponti di Königsberg o di un numero qualsiasi di ponti e regioni, si traduce in un problema di percorrenza di grafi e i risultati di Eulero valgono per qualsiasi problema che ammetta la stessa rappresentazione.

1. - La branca della geometria che si occupa delle grandezze è stata accuratamente studiata già nel passato, ma c'è un'altra branca ancor oggi quasi sconosciuta: di essa parlò per primo Leibnitz, chiamandola « geometria di posizione » (*geometria situs*).[4] Questa branca della geometria tratta delle relazioni che dipendono solo dalla posizione e studia le proprietà di posizione; essa non prende in considerazione le grandezze e non coinvolge calcoli con quantità. Ma finora non sono state date soddisfacenti definizioni dei problemi appartenenti a questa geometria di posizione o dei metodi da usare per risolverli. Recentemente è stato proposto un problema che, per quanto sicuramente appartenente alla geometria, non richiede la determinazione di una grandezza e non può essere risolto con calcoli su quantità; conseguentemente, non ho esitato ad assegnarlo alla geometria di posizione, soprattutto perché la risoluzione richiede solo considerazioni di posizione e i calcoli non sono di alcuna utilità. In questo saggio esporrò il metodo che ho scoperto per risolvere questo tipo di problemi, metodo che può servire come esempio della geometria di posizione.

---

pubblicato nel 1741) e ristampato in *Leonhardi Euleri Opera Omnia,* Series prima – opera mathematica – volumen septimum, Lipsiae et Berolini, Typis et in aedibus B. G. Teubneri, MCMXXIII; una traduzione inglese intitolata *The Seven Bridges of Königsberg* è riportata in *The World of Mathematics* di James R. Newman, London, George Allen and Unwin Ltd., 1960 (pp. 573-580, volume primo).

[4] Conserviamo, qui e nel seguito, la dizione originale di Eulero anche se oggi è normalmente sostituita con « topologia ».

2. - Il problema, che so essere ben noto, è il seguente. Nella città di Königsberg in Prussia c'è una isola *A*, chiamata « Kneiphof », circondata da due rami di un fiume (Pregel) nel modo indicato nella figura 1. Ci sono sette ponti, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, che attraversano i due rami.

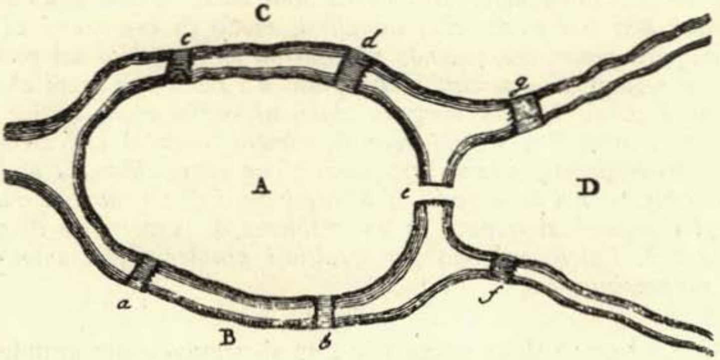


Fig. 1

La domanda è se una persona può programmare una passeggiata in modo da passare su ciascun ponte una e una sola volta. Mi fu detto che mentre alcuni negavano la possibilità di fare una tale passeggiata e altri erano in dubbio, non c'era alcuno che sostenesse la possibilità di farla.

A partire dal precedente, ho formulato per me stesso il seguente problema generale: data una qualsiasi configurazione di rami nei quali si dirama un fiume e un qualsiasi numero di ponti, determinare se è o non è possibile passare su ciascun ponte esattamente una volta.

3. - Il problema particolare dei sette ponti di Königsberg può essere risolto con una accurata elencazione di tutti i cammini possibili e il rilevamento di quelli, se ce ne sono, che soddisfano la condizione.

Questo metodo di risoluzione è però troppo tedioso e difficile a causa del gran numero di combinazioni possibili, e in altri problemi con un numero molto maggiore di ponti non potrebbe essere usato. Una analisi fatta con il detto metodo porta a un gran numero di dettagli irrilevanti per il problema, ed è per questo che il metodo è tanto pesante.

Di conseguenza l'ho scartato e ne ho cercato un altro piú rivolto allo scopo, cioè un metodo che mostrasse solo la possibilità di trovare una passeggiata soddisfacente alla condizione vista; un tal approccio, ero convinto, sarebbe stato piú semplice.

4. - Tutto il mio metodo si basa su un appropriato e conveniente modo di indicare la traversata sui ponti, nel quale uso lettere maiuscole, *A*, *B*, *C*, *D*, per indicare le diverse regioni che il fiume separa l'una dall'altra. Il passaggio dalla regione *A* alla regione *B* attraverso il ponte *a* o *b* lo indico con le lettere *AB*, delle quali la prima indica la regione di provenienza e la seconda la regione d'arrivo rispetto al passaggio del fiume.

Se il viaggiatore passa poi da *B* a *D* attraverso il ponte *f*, il passaggio è indicato con le lettere *BD*; indico i due passaggi *AB* e *BD* fatti successivamente semplicemente con le tre lettere *ABD*, dato che la lettera di mezzo *B* indica la regione di arrivo del primo passaggio e quella di partenza del secondo.

5. - Analogamente, se il viaggiatore prosegue da *D* a *C* attraverso il ponte *g*, indico i tre successivi passaggi con le quattro lettere *ABDC*.

Queste quattro lettere significano che il viaggiatore che era inizialmente in *A* è passato in *B*, poi in *C* e infine in *D*: poiché queste quattro regioni sono separate l'una dall'altra dal fiume, il viaggiatore deve necessariamente aver passato tre ponti.

Il passaggio di quattro ponti sarà rappresentato con cinque lettere e il passaggio di un numero qualsiasi di ponti sarà rappresentato con un numero di lettere maggiore di uno del numero di ponti.

Ad esempio, otto lettere sono necessarie per indicare il passaggio di sette ponti.

6. - Con questo metodo non presto attenzione al ponte che viene usato; ciò significa che se il passaggio da una regione a un'altra può essere fatto per mezzo di piú ponti, non importa quale viene usato, purché porti alla regione voluta.

Cosí, se ci fosse un cammino attraverso i sette ponti di Königsberg che passasse su ciascun ponte una e una sola volta, dovremmo poterlo descrivere usando otto lettere, e nella successione delle lettere la combinazione *AB* (o *BA*) dovrebbe comparire due volte, poiché ci sono due ponti *a* e *b* che collegano le regioni *A* e *B*; similmente dovrebbe comparire due volte la combinazione *AC*, mentre le combinazioni *AD*, *BD*, *CD* dovrebbero comparire ciascuna una volta.

7. - La domanda è ora quella di stabilire se è possibile formare con le quattro lettere *A*, *B*, *C*, *D* una successione di otto lettere nella

quale compaiano tutte le combinazioni ricordate il numero di volte richiesto.

Tuttavia, prima di fare lo sforzo di tentare di trovare una tale successione, è opportuno vedere se la sua esistenza è teoricamente possibile.

Infatti, se potesse essere dimostrato che la successione è di fatto impossibile allora ogni sforzo per trovarla sarebbe sprecato.

Per questo ho pensato a una regola per determinare facilmente se la richiesta successione di lettere è possibile, nel nostro caso e in casi analoghi.

8. - Per trovare una tal regola, prendo una regione A alla quale si può arrivare attraverso un numero arbitrario di ponti, a, b, c, d, etc. (fig. 2). Di questi ponti considero dapprima solo a. Se il viaggiatore attraversa questo ponte deve partire da A o arrivare in A, e, in base al modo di indicare i passaggi, la lettera A dovrà comparire esattamente una volta.

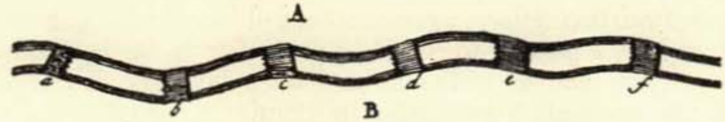


Fig. 2

Se ci sono tre ponti a, b, c, che portano a A e il viaggiatore li attraversa tutti, allora la lettera A dovrà comparire due volte, indipendentemente dal fatto che il viaggiatore parta da A o da un'altra regione.

E se ci sono cinque ponti che portano ad A, la successione per un cammino che li attraversi tutti una sola volta contiene tre volte la lettera A.

Se il numero di ponti è dispari, lo si aumenta di uno e si prende la metà della somma: il risultato rappresenta il numero di presenze della lettera A.

9. - Riprendiamo ora il problema dei ponti di Königsberg (fig. 1).

Poiché ci sono cinque ponti, a, b, c, d, e, che portano a (e da) l'isola A, la lettera A deve comparire tre volte nella successione che descrive il cammino.

La lettera B deve comparire due volte, poiché tre ponti portano a B; analogamente, C e D devono comparire ciascuna due volte.

Questo significa che la successione di otto lettere che rappresenta gli attraversamenti dei sette ponti deve contenere *A* tre volte, e *B*, *C*, *D* ciascuna due volte: ma questo è impossibile con una successione di otto lettere.

È quindi evidente che un attraversamento dei sette ponti di Königsberg nel modo richiesto non può essere effettuato.

10. - Usando questo metodo siamo in grado, quando il numero di ponti che portano in una data regione è dispari, di stabilire se è possibile attraversare in una passeggiata ogni ponte esattamente una volta.

Una tal passeggiata esiste se il numero dei ponti aumentato di una unità dà la somma dei numeri che indicano quante volte deve comparire ciascuna lettera. [...]

11. - Quando il numero dei ponti che portano a *A* è pari, dobbiamo considerare se il cammino comincia da *A* o no. [...]

Nei passi che non riportiamo Eulero sviluppa e generalizza le considerazioni precedenti.

20. - Cosí, per ogni configurazione che si può presentare, il modo piú semplice per determinare se è possibile attraversare ciascun ponte una sola volta è quello di applicare le seguenti regole:

Se ci sono piú di due regioni alle quali arriva un numero dispari di ponti, non è possibile trovare alcun cammino che soddisfi le condizioni poste.

Se ci sono solo due regioni alle quali arriva un numero dispari di ponti, il cammino può essere fatto pur di partire da una di queste regioni.

Se, infine, non ci sono regioni alle quali arriva un numero dispari di ponti, il cammino può essere fatto, indipendentemente dalla regione di partenza.

Queste regole risolvono completamente il problema proposto inizialmente.

21. - Dopo aver stabilito che un cammino effettivamente esiste, siamo portati al problema di determinarlo. Per questo scopo serve la regola seguente:

Quando è possibile, eliminiamo mentalmente le coppie di ponti che collegano le stesse due regioni; questo riduce normalmente il numero di ponti in modo considerevole.

Poi, e questo dovrebbe non essere difficile, passiamo a tracciare il cammino richiesto tra i ponti restanti. Il modello di questo cammino, una volta trovato, non sarà sostanzialmente influenzato dal reinserimento dei ponti inizialmente eliminati, come mostra un semplice ragionamento; per questo non penso di dover dire altro sulla determinazione dei cammini.

PIERRE-SIMON (Marquis de) LAPLACE

Pierre-Simon (Marquis de) Laplace[1] *fu uno dei matematici piú importanti della sua epoca, e portò, in particolare, significativi contributi agli studi sulla meccanica celeste e sul calcolo delle probabilità.*

La sua concezione meccanicistica della natura è bene espressa da un suo detto, che viene spesso citato: « Tutti i fenomeni della natura sono soltanto le conseguenze matematiche di poche leggi immutabili ».

Qui non è possibile riportare le sue pagine riguardanti la meccanica celeste e il sistema solare, che egli studiò sulle orme di Isaac Newton, esponendo i suoi risultati nel trattato classico Mécanique céleste*: il simbolismo matematico sarebbe troppo difficile e renderebbe il discorso poco comprensibile per quanti non hanno una preparazione matematica specifica.*

Riportiamo invece alcune pagine del trattato Essai philosophique sur les probabilités *(saggio filosofico sulle probabilità), apparso nel 1819, che mostrano il livello dei suoi studi sui fondamenti del calcolo delle probabilità, in armonia con la sua concezione delle leggi naturali, e le capacità di espositore brillante, oltre che di matematico di altissimo rango.*

Ricordiamo che, come si è visto, il problema del calcolo delle probabilità ha avuto origine nella ricerca di B. Pascal e che la trattazione rigorosa del problema ha costituito un passo molto importante per la matematica; essa infatti ha permesso di estendere il campo della applicazione di questa scienza da quello classico, che riguardava la mecca-

---

1 Nato in Normandia nel 1749, nel 1767 divenne professore all'École Militaire di Parigi. Nel 1799 Napoleone lo designò ministro degli interni, ma lo congedò dopo sei settimane. Portato al senato, fu poi fatto conte dell'impero e, dopo la restaurazione dei Borboni, marchese. Morí nel 1827 a Parigi.

nica e la fisica, a quello dei fenomeni aleatori; questi possono apparire infatti non pienamente conoscibili ad un primo esame, ma ubbidiscono a certe leggi che permettono all'uomo di conoscere razionalmente tutto ciò che è conoscibile su di essi.

Di qui ha avuto origine l'applicazione della matematica ai fatti umani, attraverso la statistica, e è nata di conseguenza l'analisi matematica dei fenomeni economici e sociali. Si potrebbe dire quindi che la matematica ha esteso cosí il suo dominio, acquistando la fisionomia che le si attribuisce oggi.

Laplace ha un posto particolare in questo sviluppo; a lui infatti si deve la enunciazione dei principi sui quali si basa il calcolo delle probabilità, attraverso la codificazione dei principi e degli sviluppi logici che si possono trarre dai principi stessi.

... Presento qui, senza far ricorso alla analisi,[2] i principi ed i risultati generali di questa teoria,[3] applicandoli ai problemi piú importanti della vita, che in concreto, nella loro maggioranza, non sono che dei problemi di probabilità.

Si potrebbe addirittura dire, a rigore, che quasi tutte le nostre conoscenze sono soltanto probabili; e anche nelle pochissime cose che noi possiamo conoscere con certezza, cioè nelle scienze matematiche, i principali mezzi per raggiungere la verità, cioè l'induzione e l'analogia, si fondano sulla probabilità; quindi l'intero sistema delle conoscenze umane si fonda sulla teoria che esponiamo in questo saggio.

Pertanto sarà interessante constatare, considerando gli stessi principi eterni della ragione, della giustizia e della umanità, le probabilità favorevoli che vi si riattaccano; c'è un grande vantaggio a seguire questi principi e vi sono dei grandi inconvenienti a distaccarsene; perché le probabilità favorevoli a questi principi, cosí come quelle delle lotterie, finiscono sempre per prevalere in mezzo alle oscillazioni del caso.

Desidero che le riflessioni che sono sparse in questo saggio possano conquistare l'attenzione dei filosofi e dirigerla verso un oggetto che è degno di interessarli.[4]

---

2 Cioè alla analisi matematica del tempo.
3 Cioè la teoria della probabilità.
4 A quest'epoca evidentemente il vocabolario della scienza ha registrato una certa evoluzione: per Laplace i « filosofi » non sono le stesse persone che Galileo indicava con questo nome. Per Galileo infatti la « filosofia » era semplicemente la scienza della natura. Laplace invece distingue tra scienziati e filosofi, assegnando

Sulla probabilità

Tutti gli avvenimenti, anche quelli che sembrano insignificanti e quindi paiono non coinvolgere le grandi leggi della natura, ne sono delle conseguenze necessarie, cosí come le rivoluzioni del Sole.[5]

Nella ignoranza dei legami che collegano gli avvenimenti al sistema completo di tutto l'universo, si pensa che gli avvenimenti dipendano dalle cause finali, oppure dal caso, a seconda che essi (avvenimenti) si succedano con regolarità oppure senza un ordine apparente; ma queste cause immaginarie[6] sono state di volta in volta allontanate e spinte ai margini, insieme con le frontiere delle nostre conoscenze, e spariscono interamente di fronte alla sana filosofia, la quale non vede in esse[7] che la espressione della ignoranza delle vere cause nella quale noi ci troviamo.[8]

Gli eventi presenti sono legati a quelli che li precedono da un legame che è fondato su un principio evidente, secondo il quale una cosa non può incominciare ad esistere senza che esista una causa che la produce.

Questo assioma, che è conosciuto come *principio della ragion sufficiente*, si estende anche alle azioni che vengono giudicate indifferenti. Infatti anche la volontà piú libera non può provocarle[9] senza un motivo determinante.

Perché se tutte le circostanze di due situazioni fossero esattamente uguali tra loro e la volontà agisse in favore di una situazione e si astenesse di agire nell'altra, la sua scelta sarebbe un effetto senza causa; e quindi sarebbe, secondo quello che Leibnitz dice, il caso cieco degli epicurei.

---

alla filosofia evidentemente un campo diverso da quello della scienza; si direbbe che egli assegni alla filosofia, tra l'altro, anche la competenza sulla metodologia della scienza, cioè l'analisi dei procedimenti di questa e dei fondamenti sui quali essa costruisce le proprie certezze.

5 Abbiamo dunque qui una concezione deterministica della natura, concezione secondo la quale ogni avvenimento per quanto insignificante, ubbidisce a leggi ben precise.

6 Cioè le cause finali, che fanno intervenire una visione globale e finalistica dell'universo, oppure il caso.

7 Cioè nelle cause che abbiamo elencato poco fa.

8 In altre parole la nostra ignoranza delle cause « vere » dei fenomeni, anche trascurabili, ci induce ad attribuire questi fenomeni al caso oppure a certe « cause finali » che tradurrebbero le « intenzioni » di certe potenze direttive del mondo.

9 Cioè provocare le azioni anche quelle giudicate indifferenti.

L'opinione contraria è una illusione dello spirito, che perde di vista le ragioni fuggitive che spingono la volontà nelle cose indifferenti, e si persuade quindi che la volontà si è determinata da se stessa e senza motivi.

Quindi noi dobbiamo considerare lo stato attuale dell'universo come un effetto del suo stato anteriore e come una causa del suo stato futuro.

Una intelligenza che in un determinato istante conoscesse tutte le forze che animano la natura, e la posizione relativa degli esseri che la compongono, se (questa intelligenza) fosse talmente potente da poter analizzare tutti questi dati, allora abbraccerebbe con una stessa formula i movimenti dei piú grandi corpi dell'universo e quelli dell'atomo piú leggero; nulla sarebbe incerto per questa intelligenza ed il futuro sarebbe a lei presente cosí come il passato.[10]

Lo spirito umano ci offre una pallida idea di una intelligenza di questo tipo con la perfezione che ha saputo dare alle leggi della astronomia. Le sue scoperte nel campo della meccanica e della geometria, insieme a quelle della gravitazione universale, gli hanno permesso di comprendere sotto le stesse espressioni matematiche gli stati passati e futuri del sistema dell'universo.

Applicando lo stesso metodo ad altri oggetti di conoscenza, è riuscito a ricondurre i fenomeni osservati a leggi generali ed a prevedere quelli che saranno occasionati dalle circostanze. Tutti gli sforzi nella ricerca della verità tendono ad avvicinare incessantemente lo spirito umano alla comprensione di ciò che concepiamo, ma da cui resterà sempre infinitamente distante.

Questa tendenza è propria della specie umana, ed è ciò che la rende superiore agli animali; ed i progressi in questo campo distinguono le nazioni ed i secoli e costituiscono la loro vera gloria.

Ricordiamo che in un'epoca diversa dalla nostra, ma neppure troppo lontana da essa, una pioggia od una siccità straordinarie, una cometa con una coda particolarmente lunga, le eclissi, le aurore boreali, generalmente tutti i fenomeni straordinari, erano considerati come segni della collera celeste.

---

[10] È questa la celebre enunciazione della possibilità di conoscere tutto, che sarebbe a disposizione di una intelligenza abbastanza vasta e potente da conoscere tutti i dati e tutte le leggi; tale intelligenza conoscerebbe anche il futuro, che è determinato dalle leggi ferree che non lasciano alcuno spazio alla libertà ed alla spontaneità di alcun essere vivente o comunque esistente.

Si invocava il cielo per essere protetti dalla loro funesta influenza; non lo si invocava di sospendere il corso dei pianeti e del sole, perché l'osservazione avrebbe ben presto dimostrato la inutilità di preghiere cosiffatte.

Ma poiché invece questi fenomeni celesti avvenivano e sparivano a lunghi intervalli di tempo, essi parevano contrari all'ordine della natura; ed allora si supponeva che il cielo li facesse avvenire e li potesse modificare a suo capriccio, per punire i delitti della terra. Cosí per esempio la lunga coda della cometa del 1456 sparse il terrore in Europa, già costernata per i rapidi successi dei turchi che avevano abbattuto il Basso Impero. Questo astro, dopo quattro sue riapparizioni, eccitò tra noi una curiosità del tutto diversa.

La conoscenza delle leggi del sistema dell'universo, conoscenza acquisita nel frattempo, aveva dissipato i timori generati dall'ignoranza dei veri rapporti dell'uomo con l'universo; ed Halley,[11] dopo di aver riconosciuto che si trattava della stessa cometa comparsa nel 1531, nel 1607 e nel 1682 annunziò il suo ritorno per la fine del 1758 o per l'inizio del 1759.

Il mondo della scienza attese con impazienza questo ritorno, che doveva confermare una delle piú grandi scoperte che fosse stata fatta nella scienza, e verificare la predizione di Seneca, che, parlando di questi astri che ci vengono da distanze enormi, disse:

« Verrà giorno in cui dopo uno studio di vari secoli, le cose attualmente segrete ci appariranno evidenti; ed i nostri posteri si meraviglieranno per il fatto che verità cosí chiare ci siano sfuggite ».

Clairaut allora incominciò a calcolare le perturbazioni che la cometa aveva subito per effetto dell'attrazione dei due maggiori pianeti: Giove e Saturno; dopo lunghissimi calcoli egli fissò la data del suo prossimo passaggio al perielio verso l'inizio di aprile del 1759 e l'osservazione non tardò a verificare questa predizione.

Ora la regolarità che l'astronomia ci mostra nei movimenti delle comete ha luogo certamente in ogni altro fenomeno.[12]

Infatti la curva descritta da una molecola di aria o di un vapore è regolata in modo altrettanto certo delle orbite dei pianeti; la sola differenza tra i due fenomeni è quella che vi è messa dalla nostra ignoranza.

---

[11] Edmund Halley (1656-1742), astronomo inglese.

[12] È qui ribadita la tesi deterministica, che appare un dato costante della concezione che Laplace aveva della natura.

La probabilità ha relazione da una parte con questa ignoranza e dall'altra parte con le nostre conoscenze.

Noi sappiamo infatti che, su tre o piú eventi possibili uno solo deve verificarsi; ma nulla ci induce a credere che si verificherà l'uno oppure l'altro di essi.

In questo stato di ignoranza e di indecisione, ci è impossibile pronunciarci con certezza sul verificarsi futuro di un avvenimento piuttosto che di un altro.

È tuttavia probabile che uno di questi eventi scelto a volontà non si verifichi; perché noi sappiamo che moltissimi casi, tutti ugualmente possibili, escludono il suo verificarsi, mentre un solo caso è favorevole.

La teoria del caso consiste nel ridurre tutti gli eventi dello stesso genere ad un certo numero di eventi tutti ugualmente possibili, tali cioè che noi siamo ugualmente indecisi sulla loro esistenza, e nel determinare il numero dei casi favorevoli all'evento di cui si cerca la probabilità.

Il rapporto del numero dei casi favorevoli a quello di tutti gli eventi possibili, è la misura di questa probabilità; essa pertanto non è che una frazione il cui numeratore è il numero degli eventi favorevoli, e il denominatore è il numero di tutti gli eventi possibili.[13]

La nozione che abbiamo dato di probabilità suppone che se si fanno crescere nello stesso rapporto i numeri degli eventi possibili e quello degli eventi favorevoli la probabilità rimanga la stessa.

Per convincersi di questo si pensi a due urne *A* e *B*, la prima delle quali contenga quattro palline bianche e due nere, la seconda due bianche ed una nera. Si può immaginare che le due palline nere della prima siano attaccate da un filo, che si rompe quando si estrae una pallina; e la stessa cosa si può pensare a coppie delle quattro bianche. Ora tutti gli eventi che conducono alla estrazione di una pallina nera sono costituiti dall'unico evento, rappresentato dal sistema nero.

Pensiamo ora che i fili non si rompano quando si estrae una pallina; è chiaro che il numero degli eventi possibili non cambierà cosí come non cambierà il numero dei casi favorevoli; soltanto, in questo caso, si estrarranno dall'urna due palline alla volta; ma la probabilità di estrarre una pallina nera sarà sempre la stessa.

---

13 Questa celebre definizione che Laplace dà della probabilità di un evento è stata oggetto di discussioni, di analisi e di critiche.

Ma allora si ricade nel caso dell'urna *B*, con la sola differenza che le tre palline di quest'ultima siano sostituite da tre sistemi di coppie di palline, unite tra loro in modo inscindibile.

Quando tutti i casi possibili sono anche favorevoli ad un certo evento, la probabilità di questo si cambia in certezza, e la sua espressione diventa uguale ad 1.

Da questo punto di vista la certezza e la probabilità sono due stati paragonabili tra loro, con la sola differenza tra i due stati d'animo, che si ha quando una verità è rigorosamente dimostrata, oppure quando si intravede ancora una piccola possibilità di errore.

Nelle cose che sono soltanto verosimili la differenza delle informazioni che ciascun uomo ha su di esse è una delle principali ragioni della diversità delle opinioni che regnano a proposito dello stesso oggetto. Supponiamo per es. di avere tre urne *A*, *B*, *C* tali che una contenga soltanto palline nere, mentre le altre due contengono soltanto palline bianche: si deve estrarre una pallina dall'urna *C* e ci si domanda quale sia la probabilità che questa pallina sia nera.

Se non si sa quale sia l'urna delle tre che contiene soltanto delle palline nere, in modo che non ci sia ragione di credere che essa sia l'urna *A* piuttosto che la *B* oppure la *C*, queste tre ipotesi ci appariranno ugualmente possibili; e poiché una pallina nera non può essere estratta che nella prima ipotesi, la probabilità di estrarla sarà uguale ad $\frac{1}{3}$.

Ma se si sa che l'urna *A* contiene soltanto delle palline bianche, allora l'indecisione riguarda soltanto le urne *B* e *C* e la probabilità che la pallina estratta dall'urna *C* sia nera diventa $\frac{1}{2}$. Infine questa probabilità diventa la certezza se si sa che le urne *A* e *B* contengono soltanto delle palline bianche.

In modo analogo uno stesso discorso, fatto davanti ad una assemblea numerosa, ottiene diversi gradi di assenso, a seconda della estensione delle conoscenze degli uditori.

Se l'uomo che parla è intimamente persuaso delle proprie opinioni, e se, per il suo stato e per il suo carattere ispira una grande fiducia, il suo racconto, anche se straordinario, avrà per gli uditori sprovvisti di conoscenza, lo stesso grado di verosimiglianza di un fatto ordinario raccontato dallo stesso uomo, ed essi gli faranno credito.

Ma se uno di essi sa che lo stesso fatto è messo in dubbio e respinto da altri uomini ugualmente rispettabili, questi sarà nel dubbio; ed il fatto sarà giudicato falso da quegli uditori illuminati che lo troveranno contrario sia a degli altri fatti ben accertati, sia alle leggi immutabili della natura.

La diffusione degli errori che, nei tempi della ignoranza, hanno invaso tutta la faccia del mondo è dovuta alla influenza delle opinioni di coloro che sono giudicati dalla moltitudine come piú istruiti, di coloro ai quali la moltitudine ha l'abitudine di far credito a proposito delle cose piú importanti della propria vita.

La magia e l'astrologia ci offrono degli esempi importanti di questo fenomeno.

Questi errori, inculcati fin dalla infanzia, adottati senza esame e che hanno come base soltanto la convinzione generale, si sono mantenuti durante molto tempo; fino a che, da ultimo, il progresso delle scienze li ha distrutti nello spirito degli uomini illuminati, la cui opinione li ha fatti sparire anche dallo spirito dello stesso popolo, proprio in forza del potere della imitazione e della abitudine, che era stato quello che aveva aiutato la diffusione degli errori.

Questo potere della imitazione e della abitudine, la molla piú potente del mondo morale, stabilisce e conserva in tutta una nazione delle idee interamente contrarie a quelle che mantiene in altri posti, con la stessa fermezza.

Dobbiamo dunque avere molta indulgenza per le opinioni diverse dalle nostre; perché questa differenza di opinioni dipende spesso soltanto dalla diversità dei punti di vista in cui ci troviamo.

Illuminiamo coloro i quali non sono abbastanza istruiti; ma prima esaminiamo severamente le nostre opinioni, e pesiamo con imparzialità le loro rispettive probabilità.

La differenza di opinioni dipende anche dal modo in cui si determina l'influenza dei dati che sono conosciuti. La teoria della probabilità affronta questioni talmente delicate, che non c'è da stupirsi del fatto che, partendo dagli stessi dati, due diverse persone arrivino a diverse conclusioni, soprattutto nelle questioni molto complicate. Esporremo qui i principi di questa teoria.[14]

---

[14] Questa è la prima enunciazione completa dei principi su cui si basa il calcolo classico delle probabilità.

Principi generali del calcolo delle probabilità

1° principio – Il primo di questi principi è la definizione stessa della probabilità, definizione che, come abbiamo visto, porta a definire la probabilità come rapporto tra il numero dei casi favorevoli e quello dei casi possibili.

2° principio – Ma questa definizione è basata sulla ipotesi che i diversi casi siano tutti ugualmente possibili. Se essi non sono ugualmente possibili, bisogna prima determinare le relazioni che intercedono tra le rispettive possibilità, e il giusto apprezzamento di queste relazioni è uno dei punti piú delicati della teoria del caso. Allora la probabilità sarà la somma delle probabilità di ogni caso favorevole.

Chiariremo questo principio con un esempio.

Supponiamo di lanciare in alto una moneta, larga ma molto sottile, le cui due facce opposte, che chiameremo « testa » e « croce », siano perfettamente simili tra loro.

Cerchiamo la probabilità di fare « croce » almeno una volta in due lanci. È chiaro che possono presentarsi quattro casi, tutti ugualmente possibili: e cioè: « croce » al primo ed al secondo lancio; « croce » al primo e « testa » al secondo; « testa » al primo lancio e « croce » al secondo; ed infine « testa » in tutti e due i lanci. I tre primi casi sono favorevoli all'evento del quale stiamo cercando la probabilità e questa è dunque uguale a $\frac{3}{4}$; quindi si può scommettere 3 contro 1 che si troverà almeno una volta « croce » in due lanci.

Questo gioco potrebbe anche essere analizzato in altro modo: precisamente si possono considerare soltanto tre casi: « croce » al primo lancio, il che ci risparmia di farne un secondo; « testa » al primo lancio e « croce » al secondo; infine « testa » al primo ed al secondo lancio.

Quindi la probabilità avrebbe il valore $\frac{2}{3}$, se (come fa D'Alembert)[15] si considerano questi tre casi come ugualmente possibili. Ma si vede subito che la probabilità di avere « croce » al primo lancio è $\frac{1}{2}$, mentre la probabilità di ciascuno degli altri due

[15] Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783), matematico e filosofo francese.

casi è $\frac{1}{1}$; e ciò perché il primo caso può essere considerato come un evento, che è composto da due altri: quello che dà « croce » al primo ed al secondo lancio e quello che dà « croce » al primo e « testa » al secondo.

Quindi si ottiene la probabilità uguale a $\frac{3}{4}$ se si somma la probabilità di $\frac{4}{2}$, che è quella dell'evento di « croce » al primo lancio, alla possibilità di « testa » al primo e di « croce » al secondo, che è $\frac{1}{4}$; e ciò si accorda con la ipotesi che si facciano due lanci. Questa ipotesi non cambia in nulla la sorte di chi scommette per questo evento; serve soltanto a ridurre i diversi casi possibili ad altri che sono tutti ugualmente possibili.

3° principio – Uno dei punti piú importanti della teoria della probabilità, ed un punto che provoca la maggior parte delle illusioni, è quello che si riferisce al modo in cui cambiano le probabilità, aumentando e diminuendo, a seconda delle loro mutue combinazioni.

Se gli avvenimenti sono tra loro indipendenti, allora la probabilità del sussistere del loro insieme è il prodotto delle loro singole probabilità.

Cosí per es. poiché la probabilità di avere il punto « uno » con un solo dado è $\frac{1}{9}$, la probabilità di avere due punti « uno » lanciando contemporaneamente due dadi è $\frac{1}{36}$. Infatti ciascuna faccia dell'uno dei dadi può essere accoppiata con ciascuna faccia dell'altro; ci sono quindi 36 casi ugualmente possibili, uno solo dei quali dà i due punti « uno ».

In generale la probabilità che un avvenimento elementare si verifichi un certo numero di volte di seguito, sempre nelle stesse circostanze, è uguale alla probabilità dell'evento elementare, elevata ad una potenza che ha come esponente il numero di volte (in cui l'evento si deve verificare).[16]

16 Questo caso era già stato preso in considerazione; esso costituisce quello che oggi si chiama lo « schema di Bernoulli degli eventi ripetuti » [dal nome di Jacob Bernoulli (1654-1705), matematico svizzero, fratello di Johann], tutti aventi la stessa probabilità.

E poiché le potenze successive di un numero minore di 1 diventano sempre piú piccole, si conclude che un evento il quale dipende da un numero molto grande di probabilità può diventare molto poco verosimile. Supponiamo per es. che un certo fatto ci sia stato trasmesso da 20 testimoni, di modo che il primo testimonio l'ha trasmesso al secondo, il secondo al terzo e cosí via.

Supponiamo che la probabilità di ciascuna testimonianza sia uguale a 0,9. Quella del fatto, che risulta dalle testimonianze, sarà minore di $\frac{1}{8}$.

Si può paragonare questa diminuzione di probabilità al fenomeno della diminuzione della chiarezza degli oggetti, che avviene quando si interpongono piú strati di vetro tra l'occhio ed un oggetto; molti pezzi di vetro possono offuscare la vista dell'oggetto, che invece non viene impedita da un solo strato.

Si direbbe che gli storici non hanno fatto abbastanza attenzione a questa degradazione della probabilità dei fatti, trasmessi attraverso un grande numero di generazioni successive. Molti avvenimenti storici, che sono considerati come certi, perderebbero molta della loro certezza se fossero considerati da questo punto di vista.

Nelle scienze puramente matematiche le conseguenze, anche le piú remote, partecipano della stessa certezza del principio da cui sono tratte.

Nelle applicazioni dell'analisi matematica alla fisica le conseguenze hanno tutta la certezza dei fatti o degli esperimenti.

Ma nelle scienze morali, in cui ogni conseguenza è tratta da quella che la precede soltanto con una certa verosimiglianza, si ha che, benché ciascuna delle deduzioni sia probabile ed anche molto probabile, la probabilità dell'errore cresce con il numero delle deduzioni e finisce per superare la probabilità della verità, nelle conseguenze che sono molto lontane dai principi.

4° principio – Quando due eventi dipendono l'uno dall'altro, la probabilità dell'evento composto è data dal prodotto della probabilità del primo per la probabilità che, essendosi verificato il primo evento, si verifichi anche il secondo.[17] [...]

[17] È questo l'enunciato del principio che viene oggi detto « principio delle probabilità degli eventi subordinati ».
Laplace aggiunge delle considerazioni analoghe a quelle che egli ha già esposto in precedenza, per giustificare questo principio sulla base dello schema concreto

5° principio – Se si calcola « a priori » la probabilità di un evento che si è verificato, e la probabilità d'un evento composto da questo e da un altro che si attende, la seconda probabilità divisa per la prima, sarà la probabilità dell'evento atteso, tratta dall'evento osservato.

Qui si presenta il problema, discusso dai filosofi, della influenza del passato sulle probabilità dell'avvenire. Supponiamo che al gioco di « testa o croce » la faccia che porta « croce » sia comparsa piú frequentemente che « testa »; allora noi siamo portati a credere che nella struttura della moneta ci sia qualche causa costante che favorisce « croce ». Cosí nella condotta della vita il successo è una prova di abilità; il che dovrebbe condurci a far conto sulle persone di successo.

Ma se per la instabilità delle circostanze noi siamo ricondotti sempre ad uno stato di indecisione assoluta, se per es. si cambia di moneta ad ogni lancio al gioco di « testa o croce », il passato non può gettare alcuna luce sull'avvenire, e sarebbe quindi assurdo tenerne conto.

6° principio – Ciascuna delle cause dalle quali dipende un certo evento è indicata con tanto maggiore verosimiglianza quanto maggiore è la probabilità che l'evento abbia luogo quando tale causa si suppone esistere.

La probabilità del sussistere di una qualunque di queste cause è dunque una frazione il cui numeratore è la probabilità dell'avvenimento ed il cui denominatore è la somma delle probabilità analoghe relative a tutte le cause: se tali cause considerate « a priori » sono inegualmente probabili occorre introdurre, al posto della probabilità dell'evento risultante da ciascuna causa, il prodotto di questa probabilità per quelle della causa stessa. È questo il principio fondamentale di questa branca dell'analisi del caso, che consente di risalire dagli eventi alle loro cause.[18] [...]

---

della estrazione di palline da certe urne. È questo un modo di ragionare che è stato adottato con molta frequenza dagli studiosi di calcolo delle probabilità, e che aiuta a schematizzare i problemi concreti in certi schemi elementari di eventi aleatori.

[18] È questo il principio che conduce alla formula che classicamente viene attribuita al matematico inglese Thomas Bayes (1702-1761), per la ricerca della causa (fra tante possibili) che ha prodotto un certo fenomeno. Laplace aggiunge altri commenti per spiegare la sua enunciazione: ne riportiamo solo alcuni.

Noi vediamo su un tavolo alcuni caratteri di stampa disposti in modo da formare la parola « COSTANTINOPOLI », e giudichiamo che questa disposizione non è opera del caso, non perché tale disposizione sia meno possibile delle altre in quanto, se tale parola non fosse impiegata in alcuna lingua, noi non le attribuiremmo alcuna causa particolare; ma sta di fatto che questa parola è utilizzata tra noi, e quindi è piú probabile che una persona abbia disposto i caratteri in quel modo piuttosto che la disposizione sia dovuta al caso. [...]

È giunto il momento di definire il significato della parola « straordinario »; se col pensiero noi ordiniamo tutti gli avvenimenti possibili in diverse classi, consideriamo come straordinari gli eventi appartenenti alle classi che comprendono pochi eventi. Cosí al gioco di « testa o croce » l'uscita di « testa » cento volte di seguito ci appare come un evento straordinario. Perché il numero quasi infinito di combinazioni che possono verificarsi in cento lanci può essere diviso in serie regolari (cioè quelle nelle quali vediamo regnare un ordine che si rileva facilmente) oppure in serie irregolari; e queste ultime sono incomparabilmente piú numerose. [...]

7° principio – La probabilità di un evento futuro è la somma dei prodotti delle probabilità di ciascuna causa da cui l'evento dipende, per le probabilità che l'evento abbia luogo quando la causa sussiste. [...]

Della speranza matematica [19]

La probabilità di un evento serve per determinare la speranza o il timore delle persone interessate al suo verificarsi. Il termine « speranza » ha diversi significati: esso esprime generalmente il vantaggio di colui che attende un bene qualunque, in certe circostanze che sono soltanto probabili. Nella teoria del caso, questo vantaggio è misurato dal prodotto della somma (presumibilmente di denaro) che si spera di ottenere per la probabilità di ottenerla.

È questa la somma parziale che si deve ricevere quando non si vuole correre l'alea dell'attesa dell'evento, supponendo che la ripar-

[19] Il problema della « speranza matematica » è il problema fondamentale del collegamento tra la questione puramente teorica della probabilità di un evento e la scelta economica di chi deve prendere decisioni in condizioni che coinvolgono valutazioni di probabilità.

tizione si faccia proporzionalmente alla probabilità.[20] Questa ripartizione è la sola che sia equa, quando si faccia astrazione da ogni circostanza esterna; perché un grado uguale di probabilità dà un uguale diritto sulla somma sperata. Chiameremo questo vantaggio *speranza matematica*.

8° principio – Quando un vantaggio dipenda da molti eventi, lo si ottiene prendendo la somma dei prodotti delle probabilità di ciascun evento per il bene che è attaccato al suo verificarsi.

Laplace applica i suoi principi all'analisi delle leggi della natura, che ci appaiono casuali (secondo la sua concezione) semplicemente a causa della nostra ignoranza. A questo proposito egli analizza anche lo stato d'animo di coloro i quali credono di poter arricchirsi con le lotterie, cercando di puntare sui numeri « in ritardo » o con altre tattiche cervellotiche, che conducono invece il giocatore ad una rovina sempre maggiore.

Gli avvenimenti regolari della natura non sono strettamente analoghi alla uscita di certi numeri da una lotteria, nella quale tutti i numeri sono rimescolati dopo ogni estrazione, in modo da rendere sempre esattamente uguali tra loro le probabilità. La frequenza di uno di questi eventi della natura sembra indicare la esistenza di una causa passeggera che favorisce l'evento, il che aumenta la probabilità di un suo prossimo verificarsi; e la sua ripetizione, cosí come la ripetizione di molti giorni piovosi, può sviluppare la convinzione della esistenza delle cause sconosciute del suo cambiamento; in modo che, in corrispondenza di ogni evento atteso, noi non siamo nella stessa situazione di spirito che abbiamo di fronte alle estrazioni di una lotteria, in cui siamo sempre nella stessa situazione di indecisione.

Ma piú si moltiplicano gli avvenimenti piú aumenta la somiglianza tra questi risultati della natura e le estrazioni di una lotteria.

A causa di una illusione contraria a quella precedente si cercano nelle estrazioni passate della lotteria francese i numeri usciti piú frequentemente per formare delle combinazioni sulle quali si crede di poter scommettere con vantaggio.

---

[20] È questo un argomento sul quale aveva già indagato B. Pascal, giungendo a risultati definitivi per quanto riguarda il problema della equa ripartizione delle poste.

Ma, dato il modo in cui si rimescolano i numeri prima di ogni estrazione, il passato non deve avere alcuna influenza sull'avvenire. Il fatto che certi numeri siano sorteggiati piú frequentemente di certi altri, dipende solo dalle anomalie del caso; ho fatto dei calcoli in vari casi e ho trovato che queste anomalie erano comprese sempre nei limiti consentiti dalla ipotesi non inverosimile di una uguale probabilità di sorteggio di ogni numero.

Laplace si addentra anche nella discussione che oggi si chiamerebbe piú propriamente filosofica della validità del procedimento che si potrebbe definire di induzione, cioè del procedimento che ci induce a pensare che la natura abbia certe leggi, avendone verificato la validità in un certo numero di casi; questo procedimento è stato oggetto di analisi da parte di filosofi e scienziati e il calcolo delle probabilità ha naturalmente una sua parola da dire, soprattutto dal punto di vista della metodologia della scienza.

Dei diversi modi di avvicinarsi alla certezza

L'induzione, l'analogia, le ipotesi continuamente fondate sui fatti e rettificate da nuove osservazioni, un « fiuto » felice dato dalla natura e rafforzato da numerose analisi comparative e dalle indicazioni della esperienza; questi sono i mezzi principali per arrivare alla verità.

E qui Laplace si addentra nell'analisi della induzione nel campo delle scienze fisiche, rilevandone anche i limiti.

Tuttavia l'induzione sa scoprire i principi generali delle scienze, ma non basta per stabilirli in modo rigoroso. Occorre sempre confermarli con dimostrazioni, oppure con esperienze decisive; perché la storia della scienza ci mostra che l'induzione ha condotto talvolta a risultati inesatti.

Citerò come esempio un teorema sui numeri primi dovuto a Fermat: questo grande matematico, che aveva profondamente meditato sulla loro teoria, cercava una formula che esprimesse dei numeri primi, dando direttamente un numero primo piú grande di quale si voglia numero assegnabile.

L'induzione lo condusse a pensare che il 2, elevato ad un esponente che fosse a sua volta una potenza di 2, addizionato alla unità, desse sempre un numero primo. Cosí si ha

$$2^2 + 1 = 5$$
$$2^{2^2} + 1 = 17\,.$$

Egli trovò che la cosa era ancora vera per la ottava potenza e per la sedicesima potenza del 2, aumentate della unità.

Questa induzione, confortata da numerose considerazioni di aritmetica, gli fece pensare che il risultato fosse generale. Tuttavia egli confessa di non essere mai riuscito a dimostrare tale risultato. Infatti Euler stesso riconobbe che la proprietà non era vera per la 32ª potenza del 2, che, aumentata di 1, dà 4.294.967.297, numero che è divisibile per 641.

JEAN BAPTISTE JOSEPH (Baron) FOURIER

Il nome di Jean Baptiste Joseph (Baron) Fourier[1] *è entrato nella storia della scienza per le sue scoperte di matematica pura, ma soprattutto per lo studio della diffusione del calore che egli diede nella sua* Théorie analitique de la chaleur.

Abbiamo già accennato nell'introduzione a questo capitolo all'aspetto di novità che lo studio del calore ha rispetto ai problemi della meccanica razionale, dovuto essenzialmente alla irreversibilità del fenomeno della trasmissione del calore. Si usa dire infatti che le leggi della meccanica razionale sono « reversibili »; quando per esempio si studia il movimento dei pianeti del sistema solare, si potrebbe cambiar il segno della variabile tempo senza cambiare la forma matematica delle leggi stesse: si otterrebbe semplicemente la descrizione del passato del sistema solare.

Invece quando si prendono in considerazione i fenomeni nei quali

[1] Nato a Auxerre (Francia) nel 1768, studiò alla scuola militare della città natale, dove divenne professore di matematica. Insegnò matematica alla École Normale dal 1795 (anno della sua istituzione), poi analisi alla École Polytechnique. Nel 1798 seguí Napoleone nella spedizione d'Egitto, ricoprendo incarichi amministrativi, politici e scientifici. Fu anche prefetto del dipartimento dell'Isère dal 1802 al 1815. Nel 1816 si stabilí a Parigi e nel 1817 divenne membro dell'Accademia delle Scienze. Morí a Parigi nel 1830.

interviene il calore si ha una sostanziale dissimmetria del tempo, perché tali fenomeni sono « irreversibili ».

Pertanto il momento in cui la matematica inizia ad occuparsi del calore potrebbe essere qualificato come l'inizio di una nuova epoca per la scienza, epoca nella quale la matematica fa un ulteriore passo verso il dominio della realtà della fisica.

Nel « discorso preliminare » Fourier fa delle acutissime riflessioni sul significato dello studio matematico delle leggi della natura e sullo stimolo che la fisica dà alla matematica, nel proporre dei soggetti di intuizione e di studio.

Le cause primissime delle cose ci sono ignote, ma tuttavia esse sono sottoposte a leggi semplici e costanti, che possono essere scoperte con la osservazione e che sono oggetto di studio da parte della filosofia naturale.

Il calore penetra, come la gravità, ogni sostanza dell'universo; i suoi raggi occupano ogni parte dello spazio.

Lo scopo della nostra opera è quello di esporre le leggi matematiche alle quali ubbidisce questo elemento.

Questa teoria formerà, d'ora innanzi, una delle parti piú importanti della fisica generale.[2]

Non ci sono pervenuti i risultati che i popoli antichi hanno potuto conseguire a proposito della meccanica razionale, e la storia di questa scienza, se si fa eccezione dei primi teoremi sull'armonia, non risale al di là delle scoperte di Archimede.[3]

Questo grande geometra spiegò i principi matematici dell'equilibrio dei solidi e dei fluidi.

Dovettero passare quasi 18 secoli perché Galileo, primo inventore delle teorie della dinamica, scoprisse le leggi di moto dei gravi.

Newton poi fece entrare in questa scienza nuova tutto il sistema dell'universo.

I successori di questi filosofi hanno dato a queste teorie una meravigliosa estensione ed una grandissima perfezione; ci hanno inse-

---

2 Come si vede, Fourier ha una coscienza molto precisa della importanza dello studio dei fenomeni del calore per la fisica; la cosa piú interessante è che i risultati di Fourier sono validi anche se il calore non è un « elemento » come egli dice. Si potrebbe infatti dire che il significato dello studio matematico attinge il livello puramente fenomenologico, e rimane valido quale che sia la « natura » ovvero la « sostanza » degli enti studiati.

3 I teoremi sull'armonia a cui fa cenno Fourier sono probabilmente le leggi della vibrazione delle corde tese, che vengono attribuite a Pitagora.

gnato che i fenomeni piú diversi tra loro sono sottoposti a pochissime leggi fondamentali, che si riproducono in ogni atto della natura. Essi hanno riconosciuto che gli stessi principi regolano i moti degli astri, la loro forma, le ineguaglianze dei loro corsi, l'equilibrio e le oscillazioni dei mari, le vibrazioni armoniche dell'aria e dei corpi sonori, le azioni capillari, le onde nei liquidi ed infine i fenomeni piú complicati di tutte le forze naturali. E si è ottenuta la conferma di questo pensiero di Newton: « La geometria si gloria per il fatto che tante conseguenze si possano trarre da tanto pochi principi ».

Ma, quale che sia la estensione e la potenza delle teorie della meccanica, esse non possono essere applicate agli effetti del calore. Questi costituiscono una classe speciale di fenomeni, che non possono essere spiegati per mezzo dei principi che reggono il moto e l'equilibrio. Da molto tempo possediamo degli strumenti che servono per misurare gli effetti del calore; abbiamo raccolto dei risultati preziosi, ma non conosciamo la dimostrazione matematica delle leggi che comprendono sotto di sé tutti i fenomeni di questo tipo.

Io ho dedotto queste leggi da un lungo studio e dal confronto di tutti i fatti conosciuti fino ad oggi: li ho osservati tutti di nuovo, nel corso di diversi anni, con gli strumenti piú precisi che siano stati usati.

Per fondare questa teoria era anzitutto necessario distinguere e definire con precisione le proprietà elementari che determinano l'azione del calore. Ho riconosciuto in seguito che tutti i fenomeni che dipendono dalla azione del calore si risolvono in un piccolo numero di fatti semplici e generali; e, come conseguenza di questo fatto, ogni questione fisica di questo tipo è ricondotta ad una ricerca di analisi matematica. Sono giunto alla conclusione che, per determinare i moti piú vari del calore, basta sottomettere ogni sostanza a tre osservazioni fondamentali.

Infatti i vari corpi non posseggono affatto nello stesso grado la facoltà di contenere, di ricevere o di trasmettere il calore attraverso la loro superficie, oppure di condurlo nell'interno della loro massa. La nostra teoria insegna a distinguere chiaramente ed a misurare queste tre quantità specifiche.

È facile constatare quanto queste ricerche interessino le scienze fisiche e la economia civile, e quanta possa essere la loro influenza sul progresso delle arti che richiedono la utilizzazione e la distribuzione del fuoco.

Queste ricerche sono anche in relazione necessaria con il sistema del mondo; e queste relazioni possono essere facilmente riconosciute considerando i grandi fenomeni che avvengono alla superficie del globo terrestre.

Fourier prosegue ricordando tutti i fenomeni che avvengono quando il calore del Sole viene ricevuto dalla superficie terrestre, penetra nell'interno della Terra, oppure viene trasportato dall'aria e dall'acqua nei loro movimenti; ed analogamente egli ricorda i fenomeni dell'irraggiamento del calore della Terra nello spazio.
E ritorna a ricordare l'importanza che le ricerche su questo argomento hanno per la tecnica, e la novità delle sue ricerche.

Questi sono i problemi principali che io ho risolto, e che non erano ancora stati trattati per mezzo del calcolo.

E si potrà riconoscere tutta la importanza e la estensione di questa teoria se si prenderanno in considerazione tutte le relazioni che essa ha con gli usi civili e le arti tecniche.

È chiaro infatti che questa teoria abbraccia una grandissima quantità di fenomeni, e che non si potrebbe tralasciare lo studio di questi senza ignorare una parte importantissima della scienza della natura.

I principi di questa teoria sono stati dedotti, come quelli della meccanica, da un piccolissimo numero di fatti elementari, dei quali i matematici non indagano le cause, ma che essi ammettono come risultati di osservazioni comuni e confermate da tutte le esperienze.

Le equazioni differenziali della propagazione del calore esprimono le condizioni piú generali e riconducono i problemi fisici a problemi della matematica, il che è sostanzialmente lo scopo di questa teoria. Esse sono state dimostrate altrettanto rigorosamente di quelle generali dell'equilibrio e del moto. Per rendere ancora piú chiaro questo confronto abbiamo sempre preferito dare dimostrazioni dei teoremi analoghe a quelle che servono da fondamento per la statica e la dinamica.

Queste equazioni del calore sussistono ancora, ma hanno una forma diversa, a seconda che esse descrivano la distribuzione del calore raggiante nei corpi diafani, oppure i moti generati nell'interno dei fluidi dai cambiamenti di temperatura e di densità.

I coefficienti che entrano in queste equazioni sono soggetti a certe variazioni la cui misura precisa è ancora ignota; ma in tutti i problemi che piú ci interessano le temperature oscillano entro limiti cosí bassi che si possono trascurare le variazioni di questi coefficienti.

Le equazioni del movimento del calore, cosí come quelle che descrivono le vibrazioni dei corpi sonori, oppure le oscillazioni elementari dei liquidi, appartengono ad una delle branche piú recenti della matematica, branca che sarebbe molto importante poter perfezionare.

Infatti, dopo aver scritto queste equazioni differenziali occorreva trovarne le soluzioni; e ciò significa passare da una soluzione generale ad una soluzione particolare, che tenga conto delle condizioni date.[4] Questa ricerca difficile ha reso necessario sviluppare un nuovo tipo di analisi matematica fondata su dei teoremi nuovi che qui non possiamo esporre; il metodo che se ne trae non lascia nulla di vago e di indeterminato nelle soluzioni; ma invece le porta fino alle ultime applicazioni numeriche, condizione questa necessaria in ogni ricerca, perché senza di essa non si farebbero che delle inutili trasformazioni.

Fourier prosegue dicendo che i nuovi teoremi di analisi matematica da lui dimostrati sono utili anche in altri problemi, rimasti fino ad allora insoluti, di analisi matematica generale e di dinamica. E poi prosegue con il passo al quale abbiamo accennato.

Lo studio approfondito della natura è la sorgente piú feconda delle scoperte matematiche.

Non soltanto questo studio esclude i problemi vaghi e senza costrutto, offrendo alle ricerche uno scopo determinato, ma è anche un mezzo sicuro per formare la stessa analisi matematica, e per scoprirne gli elementi piú importanti, che questa scienza deve sempre conservare, perché tali elementi si riproducono in ogni fenomeno naturale.

Per es. si può constatare che una stessa espressione, che i matematici avevano studiato in astratto e che, da questo punto di vista, appartiene al campo della analisi matematica generale, rappresenta anche il moto della luce nell'atmosfera, oppure le leggi della diffusione del calore nei solidi ed entra anche nelle questioni principali di calcolo delle probabilità.

---

[4] Le condizioni « al contorno » di ciascun problema particolare.

I problemi di analisi, ignorati dagli antichi matematici, e che Descartes ha introdotto per primo nello studio delle curve e delle superfici, non riguardano soltanto le proprietà delle figure e i teoremi della meccanica razionale; essi interessano tutti i fenomeni, anche i piú generali.

E non vi è linguaggio che sia piú universale e piú semplice, piú libero da errori e da oscurità, cioè non vi è linguaggio che sia piú degno di esprimere le relazioni invariabili tra enti naturali.

Considerata da questo punto di vista, la analisi matematica ha la stessa estensione della natura: definisce tutti i rapporti sensibili, misura i tempi, gli spazi, le forze, le temperature.

Questa scienza si forma lentamente, ma conserva ogni suo principio, dal momento in cui l'ha conquistato; cresce e si afferma continuamente, tra la folla di errori e di cambiamenti dello spirito umano.

Il suo attributo principale è la chiarezza: essa non ha simboli per le idee confuse.

Essa accosta i fenomeni piú diversi e ne scopre le analogie segrete che li unificano.

Se anche la materia ci sfugge per la sua estrema tenuità, come quella che costituisce l'aria o la luce, se i corpi che studiamo sono molto lontani da noi, nell'immensità dello spazio, se l'uomo vuole conoscere quale sarà lo spettacolo del cielo in tempi futuri, dai quali ci separano moltissimi secoli, se le azioni della gravità e del calore si esercitano nell'interno di un globo solido, a delle profondità che saranno sempre inaccessibili, l'analisi matematica può sempre dominare le leggi di questi fenomeni.

La analisi matematica ci rende i fenomeni presenti e misurabili, e ci appare come la facoltà con cui la ragione umana supera la brevità della vita e le imperfezioni dei sensi; e (ancor piú) essa adotta sempre lo stesso metodo per tutti i fenomeni; li esprime con lo stesso linguaggio, come per testimoniare dell'unità e della semplicità del piano della natura e rendere ancora piú visibile quell'ordine immutabile che presiede a tutte le cause naturali.

Dopo questa solenne presentazione, che richiama irresistibilmente il celebre passo in cui Galileo proclama che la matematica è il linguaggio della scienza, Fourier continua la presentazione del suo lavoro, che non possiamo riportare qui.

Ci limitiamo a riprendere due passi nel corso dell'opera; nel primo

Fourier si dimostra perfettamente conscio della novità dei suoi studi, per il fatto che i fenomeni del calore sono di natura del tutto diversa da quella dei fenomeni che la meccanica razionale aveva studiato con tanto successo fino a quel tempo:

Da ciò che precede si trae immediatamente la conclusione che esistono dei fenomeni appartenenti ad una classe molto estesa, che non sono prodotti da forze meccaniche, ma che dipendono soltanto dalla presenza e dalla accumulazione del calore.

Pertanto questa parte della filosofia naturale non può essere ricondotta alle teorie della dinamica; essa parte da certi principi che le sono propri ed esclusivi ed è fondata su metodi che sono analoghi a quelli delle altre scienze esatte.

Per esempio il calore solare che penetra nell'interno del globo terrestre vi si distribuisce secondo una legge regolare che è assolutamente indipendente da quelle del moto e che non può essere determinata per mezzo dei principi della meccanica razionale.

Infatti è ben vero che le dilatazioni provocate dalla forza repulsiva del calore, e che servono a misurare le temperature, sono delle azioni dinamiche; ma non sono queste dilatazioni che vengono calcolate quando si ricercano le leggi della propagazione del calore.

E nell'altro passo Fourier riafferma uno dei caratteri della conoscenza matematica della natura: la rinuncia alla ricerca della « natura » degli oggetti studiati, e l'analisi degli aspetti puramente fenomenologici della ricerca.

A proposito della natura del calore si possono formulare soltanto delle ipotesi molto poco sicure; ma la conoscenza delle leggi matematiche le quali reggono i suoi effetti è indipendente da qualunque ipotesi; questa conoscenza richiede soltanto l'esame attento dei fatti principali rivelati dalle osservazioni e confermati dalle esperienze precise.

NICOLAJ IVANOVIC LOBACEVSKIJ

Il nome di Nicolaj Ivanovic Lobacevskij[1] *è ricordato soprattutto come quello di uno tra i fondatori della « geometria non-euclidea ».*

Con questa espressione si usa oggi indicare un insieme di proposizioni le quali sono valide indipendentemente dalla validità del postulato V di Euclide e precisamente quel postulato che è equivalente alla affermazione della unicità della retta parallela ad una retta data, passante per un punto dato.

Presentando l'opera di G. Saccheri abbiamo avuto occasione di dire che l'atteggiamento classico a proposito della proposizione euclidea potrebbe essere esposto dicendo che i matematici erano generalmente convinti del fatto che la proposizione fosse « vera », ma ne cercavano la dimostrazione, perché ritenevano l'enunciato euclideo non sufficientemente « evidente ».

Ovviamente questo atteggiamento aveva le sue radici in una certa concezione della geometria, che veniva press'a poco considerata come una scienza la quale (come tutte le scienze) diceva delle cose « vere » a proposito di certi enti che venivano considerati come suoi « oggetti ». In altre parole la « verità » della geometria veniva concepita come adeguamento degli enunciati di questa scienza a certi « fatti » che esistono fuori di noi. Soltanto verso la fine del XVIII secolo si cominciò a « dubitare » della validità del postulato euclideo della parallela.

La situazione maturò rapidamente, tanto da condurre due giovani studiosi, János Bolyai[2] *e N. I. Lobacevskij, indipendentemente l'uno dall'altro, a costruire dei sistemi di proposizioni che prescindessero dalla validità o dalla non validità del postulato euclideo.*

A risultati analoghi era già arrivato il grandissimo matematico K. F. Gauss[3] *il quale nel 1846, scrivendo all'astronomo Heinrich Christian Schumacher a proposito dell'opera di Lobacevskij, dice:*

« ... voi sapete che da 54 anni (cioè dal 1792) io sono convinto delle stesse cose... Non ho dunque trovato nell'opera di Lobacevskij

---

1 Nato a Nizhni-Novgorod nel 1792, studiò all'Università di Kazan dove cominciò a insegnare nel 1812 e fu professore dal 1822 al 1846 e rettore dal 1827 al 1846. Nel 1842 fu eletto alla società scientifica di Gottinga. Morí a Kazan nel 1856.

2 János Bolyai (1802-1896), di Bolya in Ungheria, spinto dagli studi del padre Wolfango sul postulato delle parallele pubblicò nel 1829 come appendice al *Tentamen* del padre la sua opera dal significativo titolo *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem...*

3 Cfr. nota 1 a pag. 157.

nessuna cosa che fosse per me nuova, ma l'esposizione della materia è del tutto diversa da quella che avrei fatto io, e l'autore ha trattato il soggetto con mano di maestro e con vero spirito geometrico... ».

N. I. Lobacevskij dimostra di avere un coraggio che potrebbe essere chiamato « rivoluzionario » nell'impostare su principi del tutto nuovi la geometria, in modo completamente diverso da quello che l'umanità aveva accettato per piú di 2000 anni. La sua opera ha aperto la strada che conduce alla concezione moderna della geometria; secondo tale concezione questa scienza non è piú un insieme di proposizioni che dicono qualche cosa di « vero » su certi « oggetti », ma è un « sistema ipotetico deduttivo », cioè una successione di proposizioni che inizia con certe proposizioni non dimostrate che non sono accettate in forza della loro « evidenza », ma che sono scelte come « ipotesi » per le proposizioni successive.

Di conseguenza anche gli « enti » che vengono nominati non sono considerati come « dati » fuori di noi, ma sono definiti implicitamente dal sistema di proposizioni scelto come sistema iniziale. Nulla di strano quindi che uno stesso nome, per esempio il termine « retta », designi degli enti che hanno un comportamento diverso e magari apparentemente contraddittorio in teorie diverse; infatti i sistemi di assiomi dai quali si parte sono diversi e conseguentemente risultano diverse anche le definizioni implicite degli enti considerati, anche se i nomi appaiono sempre gli stessi.

Il passo che segue è tratto dall'opera Studi geometrici sulla teoria delle parallele.

Alcune teorie della geometria elementare lasciano ancora oggi qualche cosa a desiderare, e penso che si debba a queste imperfezioni il fatto che la geometria ha progredito tanto poco dopo Euclide, se non si considerano le applicazioni dell'analisi matematica.

Tra i punti difettosi della geometria ricordo l'oscurità che regna sul concetto di grandezze geometriche e sul modo di rappresentare la misura delle grandezze, ed anche l'importante lacuna rappresentata dalla teoria delle parallele, lacuna non ancora colmata dai lavori dei geometri. Gli sforzi di Legendre [4] non hanno portato nulla a questa teoria, perché questo autore è stato costretto ad abbandonare

[4] Adrien Marie Legendre (1752-1833), francese, portò significativi contributi in diversi campi della matematica.

la strada del ragionamento rigoroso per scegliere delle considerazioni complicate e contorte e ad adottare certi principi che (senza alcuna ragione sufficiente) egli cerca di far passare per assiomi necessari.

Il mio primo saggio sui fondamenti della geometria è comparso nel « Corriere di Kazan » nel 1829. Poiché desidero soddisfare a tutte le esigenze dei lettori, mi sono occupato in seguito di presentare la redazione completa del mio lavoro, ed ho pubblicato le mie ricerche a puntate nelle « Memorie dell'Università di Kazan » negli anni 1836, 1837 e 1838 col titolo *Nuovi principi di geometria, con una teoria completa delle parallele.*

L'estensione di questo lavoro ha impedito forse ai miei compatrioti di apprezzare questo studio il quale, dopo i lavori di Legendre, pareva aver perso ogni interesse.

Tuttavia io continuo a credere che la teoria delle parallele continua ad essere interessante per i geometri, e quindi mi propongo ora di esporre qui le cose essenziali che appaiono nelle mie ricerche, facendo rilevare che (contrariamente all'opinione di Legendre) le altre imperfezioni che affliggono i principi, cosí come la definizione della retta, non ci devono preoccupare qui, e non hanno alcuna conseguenza sulla teoria delle parallele.

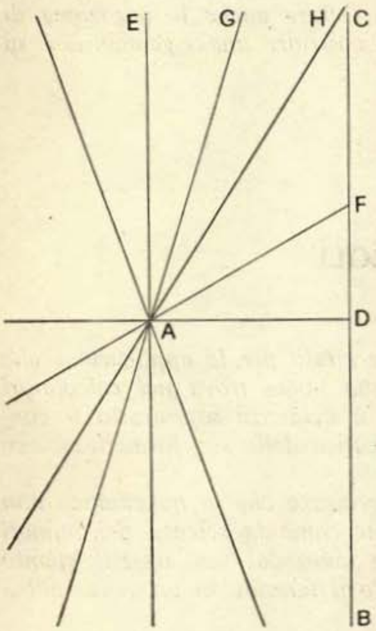
Per non stancare il lettore con una grande quantità di proposizioni facilissime da dimostrare, mi limiterò ad enunciare quelle proposizioni la cui conoscenza è necessaria per poter seguire il nostro discorso.

Qui Lobacevskij enuncia 15 proposizioni le quali (secondo quanto egli ha detto) sono molto facili da accettarsi come assiomi oppure si possono dimostrare facilmente. Infine egli giunge ad enunciare la parte veramente rivoluzionaria del suo lavoro.

In questa, contrariamente a quella che era stata la convinzione di tutti i matematici per almeno 2000 anni, egli ammette che, data una retta in un piano ed un punto fuori di essa, possano esistere delle rette per il punto che non secano la retta, pur non essendo ad essa parallele.

Tutte le rette passanti per un dato punto in un piano dato possono distribuirsi, rispetto ad una retta data in questo piano, in due classi e cioè: rette che incontrano la retta data e rette che non la incontrano. La retta che è limite comune delle rette di queste due classi sarà detta parallela alla retta data.

Dal punto *A* si abbassi la perpendicolare *AD* sulla retta *BC*, e dal punto *A* si elevi la perpendicolare *AE* alla retta *AD*. Nell'angolo retto *EAD* può avvenire o che ogni retta che passa per *A* incontri la retta *BC*, come avviene per la retta *AF*, per esempio,[5] o che qualche retta, come la *AE*, non incontri la *DC*. Nella incertezza che la retta perpendicolare *AE* sia la sola che non incontra la *DC* ammetteremo che esistano altre rette, come la *AG*, che non incontrano la *DC*, comunque vengano prolungate. Quando si passi dalle rette come *AF*, che incontrano *CD*, alle rette come *AG*, che non la incontrano, si troverà necessariamente una retta come *AH*, che è parallela a *DC*; cioè una retta tale che le rette che stanno da una parte rispetto ad essa non incontrano *DC*, mentre quelle che stanno dall'altra parte la incontrano necessariamente.[6]



L'angolo *HAD*, compreso tra la parallela *HA* e la perpendicolare *AD*, sarà detto angolo di parallelismo; indicando con *p* la distanza *AD*, indicheremo questo angolo con π (p).

E Lobacevskij continua imperturbabile a trarre tutte le conseguenze, perfettamente rigorose, dalle ipotesi audacissime che egli ha enunciato.

Abbiamo visto che anche G. Saccheri ha costruito un sistema di proposizioni di geometria non euclidea; ma la differenza essenziale tra

[5] La accettazione di questa prima ipotesi equivale ad accettare la validità del postulato euclideo della parallela.

[6] Ecco enunciata la ipotesi rivoluzionaria: che possano esistere delle rette per *A*, diverse dalla *AE*, che certamente non incontra la *DC*, le quali non incontrano la *DC*. Questa proposizione sarebbe stata considerata come assurda e addirittura pazzesca soltanto un secolo prima di Lobacevskij. E certamente questi ha dimostrato un coraggio intellettuale grandissimo nell'enunciarla, anche soltanto come « ipotesi ».

le posizioni di G. Saccheri e quella di N. I. Lobacevskij è che mentre il primo era profondamente convinto che la proposizione euclidea fosse « vera », Lobacevskij invece prende coscientemente una posizione superiore a quella di Euclide, perché si libera dalla suggestione della « verità » della proposizione euclidea, per accettare anche la negazione di essa e per non rifiutare la possibilità di costruire una « geometria » su queste ipotesi.

GEORGE BOOLE

George Boole[1] *è oggi frequentemente citato per le applicazioni che l'algebra abitualmente indicata con il suo nome trova nei calcolatori elettronici, ma a noi interessa mettere in evidenza soprattutto il contributo portato allo sviluppo della matematica dalla sua formalizzazione dei procedimenti del ragionare umano.*

Oggi è abbastanza diffusa la consapevolezza che la matematica non può piú essere considerata semplicemente come la scienza dei numeri o delle quantità ed è caratterizzata non tanto dai suoi oggetti quanto dai suoi procedimenti, ovvero, prendendo il termine in un senso abbastanza generico, dalle sue strutture.

Tra le origini di questa situazione hanno indiscutibile rilievo gli sviluppi della cosiddetta logica simbolica, la quale ha dimostrato, per esempio, che anche certe leggi del pensiero sono soggette a regole formali che, per certi aspetti, sono di competenza della matematica: George Boole ha una importanza di primo piano in questi studi per il modo nel quale analizzò gli aspetti formali delle operazioni del pensiero e dei nostri ragionamenti e rilevò esplicitamente le analogie tra queste leggi formali e le leggi dell'algebra dei numeri, fondando quel capitolo della matematica che ancora oggi viene chiamato « algebra di Boole ».

Questa algebra traduce i procedimenti di formazione delle nostre idee; e ciò è provato dal fatto che da questa algebra vengono regolate le operazioni elementari di intersezione e di riunione di due insiemi, che oggi vengono insegnate anche nelle scuole sotto la qualifica di « insie-

---

1 Nato a Lincoln (Inghilterra) nel 1815, cominciò a insegnare a 16 anni e aprí una scuola. Dal 1849 fu professore di matematica al Queen's College di Cork. Morí nel 1864. Oltre all'opera della quale riportiamo qui alcuni passi, ricordiamo gli studi di Boole sulle equazioni differenziali e sulle equazioni alle differenze finite.

mistica » (o sotto altre qualifiche equivalenti). Inoltre questa algebra è quella che regola le operazioni logiche dei circuiti elettrici e elettronici, che sono alla base degli strumenti potentissimi che la scienza e la tecnica mettono oggi a disposizione dell'uomo, permettendogli cosí di eseguire calcoli assolutamente impossibili nell'epoca precedente e di ampliare le possibilità di deduzione in modo tale da ispirare l'idea che non si scorgano ancora i confini dell'universo che stiamo cosí conquistando.

Vale quindi la pena di cogliere nel suo nascere questa corrente di pensiero, che tanta parte ha nella concezione scientifica dell'uomo di oggi, attraverso alcuni passi dell'opera di G. Boole Una ricerca sulle leggi del pensiero (An Investigation of the Laws of Thought), *che segue un trattato intitolato* Analisi matematica della logica.

Nel capitolo I, prima di entrare nei dettagli e di presentare gli strumenti che intende utilizzare, l'Autore dichiara:

1. - Lo scopo del presente trattato è quello di investigare le leggi fondamentali di quelle operazioni della mente mediante le quali si realizza il pensiero; di esprimere tali leggi nel linguaggio simbolico analogo ad un calcolo e su queste premesse di fondare la scienza della logica e di costruire il suo metodo; di fare di questo metodo della logica a sua volta la base per un metodo generale per la applicazione della teoria matematica della probabilità; ed infine quello di raccogliere, dai vari elementi di verità emersi nel corso di queste indagini, qualche presunzione abbastanza probabile sulla natura e sulla costituzione della mente umana.

Nei passi che seguono, tratti dal secondo capitolo, Boole introduce i principi e le operazioni fondamentali di quella che sarà chiamata l'« algebra di Boole », giustificandone le regole. Vogliamo richiamare in particolare l'attenzione sul fatto che Boole non si è arrestato di fronte alla « stranezza » delle regole stesse, e pertanto ha accettato una visione molto estesa di algebra (o « calcolo » come lui lo chiama); visione che è diventata abituale per i matematici soltanto in epoca relativamente recente.

È una verità generalmente ammessa che il linguaggio sia uno strumento della ragione umana, e non soltanto un mezzo per esprimere il pensiero.

Il proposito di questo capitolo è quello di ricercare che cosa rende il linguaggio uno strumento cosí adatto per le piú importanti facoltà intellettuali.

Nei vari passi che compiremo verso questo scopo saremo condotti a prendere in considerazione il linguaggio come un insieme finalizzato, cioè adattato ad uno scopo o fine; ad analizzare i suoi elementi; a ricercare le loro mutue relazioni e i rapporti di dipendenza; ed a ricercare in che modo queste parti giungono allo scopo al quale essi elementi sono ordinati, come parti di un sistema.

In queste analisi non sarà necessario prendere partito nella discussione, che data da lungo tempo tra i dotti, a proposito del famoso problema se il linguaggio debba essere considerato come un elemento *essenziale* per il ragionamento oppure se sia possibile ragionare senza di esso.

La mia ipotesi è che questo problema è al di fuori degli scopi del presente trattato e ciò per la seguente ragione: il compito della scienza è quello di ricercare delle leggi; e che sia che noi consideriamo i segni come dei rappresentanti delle cose e delle loro relazioni, sia che noi concepiamo i segni come rappresentanti dei concetti e delle operazioni dell'intelletto umano, quando noi studiamo le leggi dei segni noi stiamo studiando in effetti le leggi del ragionamento, cosí come esse si manifestano.

Anche se esiste una differenza tra le due analisi, questa differenza non ha conseguenze sulle espressioni scientifiche della legge formale, espressioni che sono i soli oggetti della analisi presente; la differenza di concezione ha importanza soltanto sul modo in cui i risultati della analisi sono presentati alla considerazione della mente. Perché se si analizzano le leggi dei segni « a posteriori » il soggetto immediato della analisi è il linguaggio, insieme con le leggi che governano il suo impiego; mentre se si fanno oggetto di analisi diretta i procedimenti interiori del pensiero, dobbiamo fare appello immediatamente alla nostra introspezione personale; in ogni caso comunque si trova che i risultati ottenuti sono formalmente equivalenti.

Infatti non possiamo facilmente accettare il fatto che le innumerevoli lingue, i numerosissimi dialetti, abbiano conservato tante cose in comune durante una successione talmente lunga di tempi se non si accetta come accertata la esistenza di certe profonde radici comuni della loro analogia nella mente, quale essa è.

2. - Gli elementi costituenti di una qualunque lingua sono dei segni ovvero simboli. Le parole sono dei segni. Talvolta si dice che esse rappresentano le cose; talvolta si dice che esse rappresentano

le operazioni con le quali la mente forma dei concetti complessi partendo da certi concetti semplici; talvolta esse esprimono le relazioni di azione, passione, o anche la qualità che noi percepiamo negli oggetti della nostra esperienza; talvolta le emozioni dello spirito che percepisce.

Tuttavia le parole, benché nei modi or ora ricordati o anche in altri modi esse siano dei simboli, che rappresentano qualche cosa, non sono i soli simboli che noi utilizziamo. Vi sono anche dei simboli di altra specie, come certi segni arbitrari che parlano soltanto all'occhio, o suoni ed atti convenzionali; anche questi sono da classificarsi come dei simboli, purché si sia definito il loro significato e questo sia compreso.

Nella scienza matematica si usano come segni delle lettere e dei simboli, come per es. « + » oppure « – » oppure « = » ecc.; per quanto sia da rilevarsi che qui il termine « segni », applicato ai simboli dell'ultima classe ricordata, rappresenti piuttosto dei simboli di operazioni e di relazioni piuttosto che numeri e quantità, che sono rappresentati dai simboli della prima classe ricordata.

La forma o la espressione di un segno non ha alcuna importanza; cosí come non hanno importanza le leggi che regolano il suo impiego.

Tuttavia in tutto il presente trattato il termine « segno » sarà impiegato esclusivamente per indicare dei segni scritti. Le qualità fondamentali dei segni sono enumerate dalla seguente definizione: « Un "segno" è un simbolo arbitrario, che ha una interpretazione fissata, e che può essere combinato con altri segni con certe leggi fissate, che dipendono dalla interpretazione dei segni stessi ».

3. - Analizziamo ora la precedente definizione nei suoi particolari.

1) Anzitutto un segno è un simbolo arbitrario; è infatti del tutto indifferente quale sia la parola o il simbolo grafico che noi associamo ad una idea, purché si sia sempre coerenti al collegamento tra simbolo ed idea una volta che è stato fatto. I Romani indicavano con la parola « civitas » ciò che noi oggi indichiamo con la parola « stato »; ma tanto loro che noi avremmo potuto utilizzare delle altre parole; perché non vi è nulla nella natura del linguaggio che ci impedisca di indicare la stessa cosa con una unica lettera. Se facessimo cosí, le leggi che reggono la utilizzazione di questa lettera sarebbero le stesse che regolano la utilizzazione della parola « civitas » in latino oppure della parola « stato » nella nostra lingua; e ciò fino

a che i principi generali che governano tutti i linguaggi rimangono gli stessi.

2) In secondo luogo occorre che ogni segno abbia sempre la stessa interpretazione, almeno nell'ambito di uno stesso discorso o ragionamento.

La necessità di questa condizione è del tutto ovvia, e fondata sulla natura stessa delle cose che stiamo indagando. Tuttavia si discute sulla precisa natura del compito significante che le parole o i segni hanno nel processo del ragionamento; infatti alcuni sostengono che i segni rappresentano i concetti della mente, altri invece sostengono che essi rappresentano le cose. La questione non ha molta importanza qui e comunque non riguarda le leggi con le quali i segni stessi sono adoperati.

Tuttavia per parte mia penso che la risposta generale a questo problema e ad altri analoghi sia che i segni, nel processo del ragionamento, stanno a rappresentare i concetti e le operazioni della nostra mente; ma che, poiché questi concetti e queste operazioni rappresentano le cose, i segni in definitiva rappresentano le cose, insieme con le loro connessioni e relazioni; ed infine penso che i segni, tenendo il posto delle operazioni della mente e dei suoi concetti, sono soggetti alle regole alle quali ubbidiscono i concetti e le operazioni della mente.

Spiegheremo meglio questa tesi nel prossimo capitolo; qui essa ci serve per spiegare la terza circostanza che viene sottolineata a proposito dei segni, e cioè il fatto che essi sono soggetti a certe leggi formali, dipendentemente dalla natura della loro interpretazione.

4. - L'analisi e la classificazione dei segni con i quali si esprimono le leggi del ragionamento è data dalla seguente

Proposizione I

Tutte le operazioni del linguaggio, considerato come uno strumento del ragionamento, possono essere riprodotte da un sistema di segni, composto con i seguenti elementi:

1) simboli letterali, come x, y, z ecc., che rappresentano le cose, in quanto soggetti dei nostri concetti;

2) simboli di operazioni, come « $+$ », « $\times$ », « $-$ » ecc., che tengono il posto di quelle operazioni della mente con le quali i con-

cetti vengono combinati, oppure decomposti (nei loro elementi), per formare dei nuovi concetti che riguardano gli stessi elementi;

3) il simbolo di identità « = ».

E questi simboli della logica ubbidiscono, quando sono utilizzati, a certe leggi ben determinate le quali sono in parte coincidenti ed in parte diverse dalle leggi che valgono per i simboli corrispondenti dell'algebra.

Boole prosegue nella analisi delle tre classi di segni che egli ha presentato e delle regole per la loro combinazione; egli pone cosí le basi, come abbiamo detto, di quella che oggi viene universalmente chiamata l'« algebra di Boole ».

Ed è proprio qui che Boole dimostra quella qualità che si potrebbe chiamare « coraggio intellettuale », cui si è accennato: egli non viene arrestato dalla « stranezza » delle leggi che stabilisce, ma prosegue nella sua strada costruendo un nuovo capitolo della matematica.

Particolarmente interessanti sono i punti nei quali egli stabilisce le leggi delle operazioni di « somma » e di « prodotto », basandosi sui significati delle operazioni logiche che vengono rappresentate dai simboli da lui analizzati.

6. - Ora che abbiamo stabilito che un segno è un simbolo arbitrario, possiamo sostituire ogni segno della specie ora descritta con una lettera. Conveniamo di rappresentare la classe degli individui a cui si può applicare una certa descrizione o un certo nome con una lettera, per es. « x »; per es. se il nome è « uomo » allora il simbolo x rappresenterà la classe degli uomini. Notiamo che usualmente con il nome di « classe » si vuole intendere una collezione, un raggruppamento di individui, a ciascuno dei quali si può applicare una certa descrizione o si può dare un certo nome; ma in questo libro il termine avrà un significato piú esteso e sarà usato anche nel caso in cui esiste un solo individuo che risponde al nome o alla descrizione fatta; ed anche ai casi che vengono denotati con « nulla » e con « universo », i quali debbono essere interpretati come significanti rispettivamente « nessun individuo » e « tutti gli esseri ».

Di nuovo, se un aggettivo, come per es. « buono », è usato come un termine di descrizione, rappresentiamo con una lettera, per es. « y », tutte le cose alle quali si può applicare tale descrizione, cioè la classe di tutte le cose buone. Allora conveniamo che la combinazione « xy » rappresenti la classe di tutte le cose alle quali entrambe le descrizioni sono contemporaneamente applicabili. Cosí per es. se x da solo sta per « cosa bianca » ed y sta per « pecora », conveniamo che xy rappresenti « pecora bianca »; e di nuovo, se z sta per « cosa con le corna », allora xyz rappresenterà la classe delle pecore bianche dotate di corna, cioè la classe di quegli esseri ai quali sono contemporaneamente applicabili le descrizioni che competono ai termini « bianco », « dotato di corna » e « pecora ».

Consideriamo ora le leggi alle quali sono soggetti i simboli che abbiamo introdotti.

Boole prosegue introducendo le proprietà di quella operazione che ancora da qualcuno viene chiamata « prodotto logico » e che viene oggi piú spesso indicata come l'operazione di « intersezione » di due o piú classi. Egli verifica che questa operazione ha la proprietà commutativa, osservando che questa proprietà è posseduta anche dalla operazione di prodotto di due numeri che viene studiata dall'algebra (ordinaria).

Egli passa poi a presentare una proprietà che potrebbe essere considerata come nuova.

9. - Poiché la combinazione di due simboli letterali, del tipo xy, indica la classe degli enti ad ognuno dei quali si possono applicare le proprietà indicate dai due simboli x ed y ne segue che, se entrambi i simboli hanno lo stesso significato, la loro combinazione non esprime niente di piú di quanto viene espresso da ciascuno dei simboli singolarmente preso. In tale caso avremo dunque

$$xy = x$$

E poiché si suppone che y abbia lo stesso significato di x, si può sostituire x nella precedente equazione al posto di y e scrivere

$$xx = x$$

Ora nell'algebra (ordinaria) la combinazione xx è indicata piú brevemente con il simbolo x^2. Conveniamo di adottare la stessa convenzione di notazione, perché il modo di esprimere una particolare successione di operazioni mentali è in se stesso largamente arbitrario, cosí come il modo di esprimere una singola idea o una singola operazione. Dunque, coerentemente con questa convenzione, avremo che la equazione ora scritta avrà la forma

$$x^2 = x$$

ed abbiamo cosí la espressione della seconda legge generale alla quale sono soggetti i simboli che esprimono nomi, qualità o descrizioni. [...]

La legge espressa da questa equazione trova i suoi esempi nel linguaggio comune. Infatti il dire « buono buono » con relazione ad un determinato soggetto è un pleonasmo inutile, e viene a dire la stessa cosa che « buono »; per es. un uomo buono buono è lo stesso che un uomo buono.

Queste ripetizioni di parole sono spesso utilizzate per rinforzare una idea o una affermazione; ma questo effetto è puramente secondario e convenzionale e non è fondato sulle relazioni intrinseche del pensiero e del linguaggio.

Boole passa poi a presentare quella operazione che ora viene chiamata « riunione » di due insiemi e che egli rappresenta come somma.

11. - Noi siamo capaci non soltanto di considerare gli oggetti, caratterizzati da certi nomi o da certi aggettivi che si applicano a ogni individuo di un determinato gruppo, ma anche di formarci la idea di un gruppo che si ottiene per aggregazione e che viene formato da altri gruppi singoli e parziali, ognuno dei quali viene denominato separatamente. Per questo scopo noi utilizziamo i termini « e » ed « oppure »; per es. quando diciamo « alberi e minerali » oppure « montagne sterili o fertili vallate ».

Parlando rigorosamente, le parole « e » ed « oppure » messe tra i termini che descrivono due o piú classi di oggetti implicano che queste due classi siano distinte, in modo tale che non esista alcun elemento dell'una che appartiene ad un'altra. Da questo punto di vista le parole « e » ed « oppure » sono analoghe al segno « + » dell'algebra e le loro leggi sono le stesse.

Boole introduce la proprietà commutativa dell'associazione di concetti e la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma, poi prosegue le sue considerazioni introducendo i simboli « 0 » ed « 1 ».

13. - Il simbolo « 0 » che viene usato in algebra soddisfa alla seguente legge formale

$$0\,y = 0$$

quale che sia il numero y. Se vogliamo che questa legge sia soddisfatta anche nel sistema di logica dobbiamo assegnare al simbolo « 0 » un significato tale che la classe $0y$ sia sempre identica con la classe « 0 », quale che sia la classe y.

Una breve riflessione ci porta a concludere che questa condizione è soddisfatta se « 0 » rappresenta il nulla.

In accordo con una definizione che è stata già data possiamo considerare il nulla come una classe. Infatti il nulla e l'universo sono i due limiti della possibile estensione di una classe, perché sono i due limiti di una interpretazione possibile di nomi generali, nessuno dei quali può essere applicato a meno individui di quanti appartengano alla classe « nulla » oppure a piú individui di quanti appartengano alla classe « universo ».

Ora, quale che sia la classe indicata con y, gli individui che sono comuni con questa classe e con la classe « nulla » sono tanti quanti quelli compresi nella classe « nulla », cioè nessuno.

Boole prosegue spiegando le leggi formali dei simboli che egli intende interpretare come concetti o come classi; trattando le equazioni tra questi simboli e insegnando a risolverle. Non possiamo presentare tutte le sue argomentazioni, ma ripetiamo che le sue idee hanno aperto una strada nuova all'algebra ed alla logica, e che molte delle novità e degli aspetti caratteristici della matematica di oggi trovano la loro radice nel pensiero originale di questo ricercatore.

GEORG FERDINAND LUDWIG PHILIP CANTOR

Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor[1] *viene a ragione considerato come uno dei fondatori della matematica moderna; troppo lungo sarebbe fare un elenco dei contributi geniali che Cantor apportò alla scienza, e*

[1] Nato nel 1845 a Pietroburgo da genitori danesi, passò in Germania con la famiglia durante l'infanzia. Fu professore di matematica all'Università di Halle (Wittenberg), straordinario dal 1872 e ordinario dal 1879. Morí nel 1918. I suoi importanti e vari contributi allo sviluppo della matematica non gli procurarono grande fama durante la sua vita.

soprattutto questa impresa richiederebbe il ricorso ad un linguaggio tecnico che non possiamo supporre noto al lettore al quale ci rivolgiamo.
Ricordiamo che si deve a Cantor una delle formulazioni, in termini rigorosi, di un concetto che la geometria ha sempre utilizzato, prendendolo dalla intuizione: il concetto di continuità. Si potrebbe dire che veniva cosí compiuto un passo essenziale nella direzione che porta a dare alla matematica un assetto logicamente rigoroso e formalmente ineccepibile. Si deve inoltre a Cantor la fondazione di quella « Teoria degli insiemi » che tanta parte ha nella matematica moderna, e nella quale vengono esaminati i fondamenti del ragionare umano.

Le pagine che seguono riguardano appunto questo argomento e sono prese da due articoli di Cantor (comparsi nel 1895 e nel 1897) ed aventi come titolo: Contributo alla fondazione della teoria dei numeri transfiniti (Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre).

Si deve infatti a Cantor la introduzione del concetto di « numero transfinito » mediante il quale la matematica riesce a dominare anche gli insiemi aventi infiniti elementi e a sottoporli ad una analisi logica rigorosa e formale, nei limiti entro i quali questa impresa è possibile.

Parlando di Galileo, abbiamo già avuto occasione di osservare che i concetti della logica che sono validi per gli insiemi finiti possono non essere applicabili agli insiemi infiniti; grande merito di Galileo è stato quello di aver intravisto la soluzione di questi che ai suoi tempi potevano essere considerati come problemi superiori alle forze umane; il genio di Cantor ha dato compimento a questa impresa.

Il concetto di potenza ovvero di numero cardinale

Col nome di « insieme » intendiamo indicare ogni collezione M di oggetti definiti e distinti m della nostra intuizione o del nostro pensiero, considerata come un tutto unico.[2]

In simboli esprimeremo questi concetti scrivendo

$$M = \{m\}. \tag{1}$$

[2] Ovviamente con questa proposizione Cantor implicitamente considera come noto il significato del termine « collezione », cosí come quelli dei termini « oggetti » e « tutto unico ». Oggi si preferisce seguire un'altra strada e giungere a quella che si chiama la « definizione implicita » del concetto di « insieme » attraverso l'enunciazione di opportuni postulati.
A questa posizione si è stati condotti dagli sviluppi critici della teoria degli insiemi, sviluppi che riguardano da vicino la matematica e la logica.

Indicheremo la riunione di vari insiemi $M, N, P, \dots$ che non hanno elementi in comune, in un unico insieme con il simbolo

$$(2)\qquad \{M, N, P, \dots\}.$$

Pertanto gli elementi di questo insieme sono gli elementi di M oppure di N oppure di $P, \dots$ considerati come elementi di un unico insieme (presi congiuntamente).

Chiameremo « parte » oppure « sottoinsieme » di un insieme M ogni altro insieme M_1. i cui elementi sono pure elementi di M.

Se M_2 è sottoinsieme di M_1, ed M_1 è sottoinsieme di M, allora anche M_2 è sottoinsieme di M.

Ogni insieme M ha una sua determinata « potenza » che chiameremo anche « numero cardinale » dell'insieme.

Chiameremo « potenza » o anche « numero cardinale » dell'insieme M quel concetto generale che nasce, per azione del nostro pensiero, quando facciamo astrazione dalla natura degli elementi m dell'insieme e dall'ordine nel quale essi sono dati.

Indicheremo con il simbolo

$$(3)\qquad \overline{\overline{M}}$$

il risultato di questo duplice atto di astrazione, cioè il numero cardinale dell'insieme M.

Poiché ogni singolo elemento m dell'insieme M, quando facciamo astrazione dalla sua natura, si presenta come una « unità », il numero cardinale $\overline{\overline{M}}$ di un insieme M è un certo ben definito insieme composto da unità e questo numero esiste nella nostra mente come una immagine intellettuale ovvero una rappresentazione dell'insieme M.

Diremo che due insiemi M ed N sono equivalenti e scriveremo

$$(4)\qquad M \sim N \quad \text{oppure} \quad N \sim M$$

se è possibile dare una legge che ponga i due insiemi in una relazione tale che ogni elemento dell'uno corrisponda ad uno ed un solo elemento dell'altro.[3]

---

[3] Anche in questo caso, ovviamente, Cantor suppone che sia noto il significato del termine « corrispondenza » o del verbo « corrispondere ».

Come abbiamo detto, non possiamo riprodurre ulteriormente il contenuto degli articoli, per la necessità dell'impiego di un vocabolario tecnico specializzato.

GOTTLOB FREGE

Gottlob Frege[1] *fu uno dei fondatori della logica matematica moderna e dedicò la sua opera, apprezzata soprattutto dopo la sua morte, a costruire l'aritmetica come sviluppo della logica.*

Si potrebbe dire che l'opera di Frege conclude in certo modo un'epoca di sviluppo della matematica, epoca nella quale questa scienza, pur non cessando di progredire con la costruzione di nuovi capitoli e con l'estensione delle proprie ricerche, ha impostato anche la risoluzione del problema dell'analisi critica dei propri contenuti e dei propri procedimenti.

Questa analisi critica può essere situata in modo molto approssimativo nel secolo XIX, e segue il periodo di rapida evoluzione dei metodi dell'analisi infinitesimale, che hanno avuto la loro origine (come si è visto) sostanzialmente nell'epoca di Newton e di Leibnitz. Un grande stimolo a questa revisione critica è stato portato dalle ricerche concernenti il celebre V postulato di Euclide (come si trae dall'esame dell'opera di G. Saccheri e di N. I. Lobacevskij) e dal conseguente cambiamento del significato della matematica.

Appare quindi naturale che, a conclusione di questo lavoro di critica, i matematici ed i filosofi siano giunti ad analizzare i fondamenti stessi di tutta la matematica, cioè il concetto di numero intero naturale e i procedimenti logici che consentono all'aritmetica di fondare le proprie conclusioni.

Il passo che segue è tratto dalla premessa all'opera Die Grundlagen der Arithmetik;[2] *come si vedrà, in questa premessa Frege espone la propria visione a proposito della necessità di giustificare in modo rigoroso i procedimenti dell'aritmetica, raggiungendo cosí, a proposito di questo*

---

[1] Nato nel 1848, fu professore all'Università di Jena e morí nel 1925. Oltre ai *Grundlagen der Arithmetik* (1884), dei quali riporteremo alcune pagine, ricordiamo i *Grundgesetze der Arithmetik* (1893 e 1903).

[2] *I fondamenti dell'Aritmetica.* Il passo è ripreso da *Aritmetica e logica* di G. Frege, Torino, Einaudi, 1948, traduzione di Ludovico Geymonat. Le note sono di G. Frege, escluse quelle relative a Grassmann e Hankel.

ramo della matematica, un rigore analogo a quello che vigeva nella geometria fino dai tempi di Euclide.

§ 1. *Nella matematica dei tempi recenti è riconoscibile una netta tendenza verso il rigore delle dimostrazioni e l'esatta determinazione dei concetti.*

Dopo che la matematica si allontanò per lungo tempo dal rigore euclideo, ora è tornata ad esso e tende anzi a superarlo. Nell'aritmetica, già in conseguenza dell'origine indiana di molti fra i suoi metodi e concetti, era tradizionale un modo di procedere meno preciso che non quello in uso nella geometria, elaborata in forma cosí perfetta dai Greci. Esso si accentuò ancora maggiormente dopo la scoperta dell'analisi superiore; da un lato infatti parvero elevarsi delle difficoltà gravi, quasi insormontabili, contro ogni tentativo di esporre l'analisi in forma rigorosa, dall'altro parve che il superamento di esse non dovesse dar luogo a risultati capaci di ricompensare gli sforzi compiuti. Tuttavia gli sviluppi ulteriori mostrarono in modo sempre piú chiaro, che in matematica non è sufficiente una pura e semplice persuasione morale, fondata sul gran numero di applicazioni riuscite. Oggi si richiede pertanto una dimostrazione per molte proprietà che prima furono ritenute evidenti; anzi, solo questo fu il modo di scoprire, in molti casi, i limiti della loro validità. I concetti di funzione, di continuità, di limite, di infinito rivelarono la necessità di una piú precisa determinazione; il numero negativo e l'irrazionale, già da lungo tempo entrati a far parte della matematica, dovettero sottoporsi ad un piú preciso esame della loro giustificazione.

Cosí si incontra ovunque la tendenza a dare dimostrazioni rigorose, a tracciare con esattezza i limiti di validità dei diversi teoremi, e, per poter raggiungere questo scopo, a determinare con precisione i concetti.

§ 2. *L'esame deve estendersi, finalmente, anche al concetto di numero naturale. Scopo delle dimostrazioni.*

Sviluppandosi ulteriormente, questa via deve condurci infine al concetto di numero naturale, e alle piú semplici proposizioni sugli interi positivi, proposizioni che costituiscono il fondamento di tutta l'aritmetica. È certo che formule numeriche come $5 + 7 = 12$, e leggi come quella associativa per l'addizione, trovano cosí innumerevoli conferme in infinite giornaliere applicazioni, che può quasi sembrare ridicolo elevare qualche dubbio su di esse coll'esigerne una dimostrazione. Ma è nell'essenza stessa della matematica che, ovunque è possibile una dimostrazione, la si ritenga preferibile ad una semplice verifica induttiva. Euclide dimostra molte cose, che chiunque ammetterebbe come immediate. Nei tempi recenti, per non essersi piú accontentati nemmeno del rigore euclideo, si fu condotti alle famose ricerche connesse al postulato delle parallele.

Cosí è accaduto che la tendenza verso un rigore sempre piú perfetto oltrepassò varie volte le esigenze primieramente sentite, e le nuove richieste andarono crescendo di continuo in forza ed estensione.

In realtà il processo dimostrativo non ha esclusivamente lo scopo di elevare al di sopra di qualsiasi dubbio la verità dei singoli teoremi, ma anche di farci comprendere la dipendenza di queste verità le une dalle altre. Una volta convinti dell'immobilità di una roccia per aver tentato invano di spostarla, ci si può chiedere, inoltre, che cosa la sostenga con tanta saldezza. Quanto piú si proseguono queste ricerche, tanto piú piccolo risulta il numero delle verità-base a cui viene ricondotto l'intero edificio; e questa semplificazione è, già per se stessa, uno scopo assai degno delle nostre ricerche. Forse, portando a consapevolezza ciò che gli uomini hanno istintivamente compiuto nei casi piú semplici e ponendo in rilievo ciò che possiede una validità generale, si rinvigorisce anche la speranza di poter raggiungere un giorno dei metodi generali, per la formazione dei concetti e la loro fondazione, che risultino pure applicabili in casi piú complessi.

Frege prosegue esponendo le ragioni filosofiche della sua ricerca, ed analizzando il significato delle verità analitiche o sintetiche, a priori ed a posteriori. Egli conclude la prefazione enunciando lo scopo dell'opera.

§ 4. *Còmpito della presente opera.*

Partendo da questi problemi, ci troviamo costretti a porre la stessa richiesta, che, per vie affatto diverse, si è pure venuta affermando nel campo della matematica: la richiesta, cioè, di dimostrare col massimo rigore – posto che ciò sia possibile – le proposizioni fondamentali dell'aritmetica. Ed invero: soltanto se si è riusciti ad evitare qualsiasi lacuna nella catena dei ragionamenti, è possibile dire con esattezza su quali verità-base si fondano le dimostrazioni dell'aritmetica; e soltanto se si conoscono queste verità, è possibile trovare una risposta ai suddetti problemi.

Orbene: quando si cerca di assecondare la richiesta ora accennata, si perviene ben presto a proposizioni, che risultano dimostrabili unicamente se si riesce a scindere i concetti – dei quali esse si servono – in altri concetti piú semplici, o se si riesce a ricondurli a qualcosa di piú generale. Su questa via si incontra, prima di tutti gli altri, il concetto di numero naturale, che dovrà quindi, o venir definito, o venir riconosciuto come indefinibile.

L'esame del concetto di numero naturale costituirà, per l'appunto, il còmpito del presente libro.[3] Dal modo di risolverlo, dipenderà il verdetto sulla natura delle leggi aritmetiche.

Prima però di iniziare direttamente la discussione di questi problemi, voglio far precedere qualche notizia, capace di offrirci opportune indicazioni per il nostro assunto. Ed infatti: se da altri punti di vista si ricavano degli argomenti, per ritenere che le proposizioni fondamentali dell'aritmetica siano analitiche, questi potranno pure venir utilizzati in favore della loro dimostrabilità e quindi della possibilità di definire il concetto di numero naturale. Effetto contrario avranno invece gli argomenti, che militano per l'aposteriorità delle anzidette proposizioni. Ritengo perciò opportuno, prima di esaminare il concetto di numero, sottoporre ad un esame provvisorio questi problemi collaterali.

Il passo che segue, tratto dalla stessa opera, può servire per dare un'idea della tecnica seguita da Frege e della acutezza dell'analisi da lui svolta.

§ 6. *La dimostrazione, data da Leibniz, dell'eguaglianza* $2 + 2 = 4$ *presenta una lacuna. La definizione, dovuta a Grassmann,*[4] *della somma* $a + b$ *è erronea.*

---

[3] D'ora in poi nel presente studio non si parlerà dunque – salvo esplicito avvertimento contrario – di alcun altro numero, fuorché degli interi positivi, cioè di quei numeri che rispondono alla domanda: « quanti? ». (*N.d.A.*)

[4] Hermann Guenther Grassmann (1809-1877), matematico tedesco nato a Stettino (Polonia).

Altri filosofi e matematici hanno invece sostenuto che è possibile dimostrare le formule numeriche. Per es. Leibniz[5] scrive:

« Che due piú due dia quattro, non costituisce una verità immediata, supposto che 4 denoti 3 piú 1. Lo si può invece dimostrare; e precisamente col seguente ragionamento:

Definizioni: 1) 2 è 1 piú 1

2) 3 è 2 piú 1

3) 4 è 3 piú 1

Assioma: una eguaglianza continua a sussistere sostituendovi un termine con un altro eguale.

Dimostrazione:

$$2 + 2 \underset{\text{Def. 1}}{=} 2 + 1 + 1 \underset{\text{Def. 2}}{=} 3 + 1 \underset{\text{Def. 3}}{=} 4$$

Dunque, in base all'assioma si conclude:

$$2 + 2 = 4 \text{ ».}$$

A prima vista questa dimostrazione sembra fondata esclusivamente su definizioni, oltreché nell'assioma ivi riferito. Quest'ultimo potrebbe poi venir trasformato esso pure in una definizione, come fece lo stesso Leibniz in un altro scritto.[6] Pare dunque che, per concludere all'eguaglianza in esame, non si abbia bisogno di sapere altro, intorno ai numeri 1, 2, 3, 4, fuorché quanto è detto nelle precedenti definizioni. Però, ad un esame piú accurato, si scopre nel ragionamento di Leibniz una lacuna, che ci era finora sfuggita per aver tralasciato le parentesi. A rigore si sarebbe dovuto scrivere:

$$2 + 2 = 2 + (1 + 1)$$

$$(2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4$$

ove è palese che manca la proposizione

$$2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1$$

che costituisce un caso particolare della formula

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

[5] *Nouveaux Essais*, IV, § 10; Erdmann, p. 363. (*N.d.A.*)
[6] *Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis*, Erdm., p. 94. (*N.d.A.*)

Una volta presupposta questa legge, si vede facilmente che ogni formula riguardante l'aggiunta di una unità risulta dimostrabile; e in tal caso ogni numero può venir definito a partire dai precedenti. Di fatto io non vedo altro metodo capace di farci comprendere, meglio di quello ora esposto di Leibniz, che cosa sia il numero 437.986. Esso ce lo fa ottenere, anche senza la necessità di averne una precisa rappresentazione. La serie infinita dei numeri viene cosí ricondotta all'unità e all'addizione di unità, e ognuna delle infinite formule numeriche risulta in tal modo dimostrabile a partire da alcune proposizioni generali.

Questo è anche il parere di H. Grassmann e di H. Hankel.[7] Il primo di essi cerca di farci raggiungere, per mezzo di una definizione, la legge

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1$$

e scrive a tale scopo:[8]

« Se a e b sono termini qualunque della serie numerica fondamentale, intenderemo per somma $a + b$, quel termine di essa per cui è vera la formula

$$a + (b + e) = (a + b) + e \text{ »},$$

dove e denota l'unità positiva.

Contro un tal modo di procedere si possono però elevare due obiezioni. In primo luogo, che esso pretende spiegare la somma per mezzo di se medesima. Se ancora non è noto che significhi $a + b$, tanto meno si saprà che significato possegga $a + (b + e)$. Questa obiezione, però, potrebbe forse venir eliminata osservando che lo scopo di Grassmann non è propriamente di definire la somma, come ci dice il testo letterale del suo scritto, quanto piuttosto l'operazione del sommare. In secondo luogo si può muovere l'obiezione che il segno $a + b$ risulterebbe vuoto, qualora non esistesse alcun termine della serie naturale con la proprietà assegnata. Grassmann suppone che tale termine esista: non dimostra però la sua ipotesi, e quindi l'intero ragionamento perde l'apparente rigore.

---

7 Hermann Hankel (1839-1873), matematico tedesco.

8 *Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten*, Parte prima: aritmetica, Stettino, 1860, p. 4. (*N.d.A.*)

CHRISTIAN FELIX KLEIN

Il nome di Christian Felix Klein[1] *occupa un posto di rilievo nella storia della matematica, oltre che per le opere riguardanti vari rami di questa scienza, anche per quella analisi metodologica che egli espose nella « dissertazione inaugurale » pronunciata nel 1872 all'inizio dei suoi corsi presso l'Università di Erlangen, dissertazione che oggi viene abitualmente richiamata come « programma di Erlangen ».*

Per capire quale sia l'importanza e la profondità dell'analisi metodologica di Klein occorre ricordare che quando egli pronunciò la sua dissertazione la geometria aveva assunto un nuovo assetto, dovuto alla esistenza di varie « geometrie »; in particolare la geometria proiettiva si era presentata alla ribalta della scienza come una dottrina piú generale della geometria euclidea, intesa nel senso classico, ed erano anche apparse diverse ricerche, le quali sviluppavano « geometrie » che apparivano come abbastanza « strane » e che si presentavano anche in certo modo come episodiche e staccate tra loro.

Il merito di Klein fu di presentare un'idea unificatrice, la quale permetteva di dare una classificazione, e quindi una visione unitaria di tutti questi capitoli della geometria, che si erano originariamente presentati come abbastanza diversi e indipendenti tra loro.

Lo strumento di cui si serve Klein per tale unificazione è un concetto che appartiene all'algebra (e che fu studiato in seguito ad un livello molto piú astratto rispetto a quello che è stato presentato da Klein): il concetto di « gruppo » che Klein presenta sotto la sua realizzazione concreta di « gruppo di trasformazioni ».

Per capire ciò che intende Klein si può osservare che nello studio di determinate figure geometriche il matematico prescinde, in modo del tutto naturale, da certe realizzazioni concrete le quali particolarizzano la figura stessa; per esempio quando si studia il « quadrato » si considera come del tutto ovvio che le proprietà che interessano il matematico sono quelle che non si riferiscono ad un particolare quadrato, realizzato per esempio con gesso bianco su una lavagna nera, ma quelle comuni a tutti i quadrati che possono essere rappresentati da quel quadrato, e cioè, a seconda dei casi, ai quadrati che hanno lato di misura eguale a quello del particolare quadrato (indipendentemente dalla loro posizione nello spazio, posizione nella quale si può sempre pensare di

[1] Nato a Düsseldorf nel 1849, nel 1872 divenne professore di matematica all'Università di Erlangen dove rimase fino al 1875, poi insegnò a Monaco e fu professore alle Università di Lipsia (1880-1886) e di Gottinga (1886-1913). Dal 1872 fu tra i responsabili degli *Annali matematici* di Gottinga e nel 1895 fondò la grande *Encyklopaedie* matematica. Morí a Gottinga nel 1925.

averli mediante trasporto rigido) o addirittura a tutti i quadrati, prescindendo dalla misura del lato, indipendentemente dalla loro posizione nello spazio; qui oltre alla operazione di trasporto rigido può quindi esserci una operazione di cambiamento di lunghezza del lato.

Cosí, per esempio, il fatto che le diagonali del quadrato siano uguali tra loro e perpendicolari tra loro risulta vero per ogni *quadrato, cioè per quello che stiamo considerando e per ogni quadrato che si possa ottenere da quello con una operazione di trasporto rigido oppure con un cambiamento di lunghezza dei lati, che mantenga quella che viene di solito chiamata la « forma » della figura.*

Volendo presentare la stessa idea con altre parole, si potrebbe dire che per il matematico è indifferente considerare il quadrato in una posizione oppure in un'altra, e, per certe proprietà, con una dimensione oppure con un'altra; in quest'ultimo caso, tutti i vari quadrati, rispetto alle proprietà che interessano il matematico, sono « equivalenti ».

Orbene questo concetto abbastanza vago di « indifferenza » oppure di « equivalenza » fu precisato da Klein con il ricorso ad una struttura algebrica precisa, che è la struttura di « gruppo »: egli considera come « equivalenti », rispetto a certe proprietà, due figure le quali risultino trasformate l'una nell'altra mediante le trasformazioni che appartengono ad un determinato gruppo.

Ne consegue che le proprietà delle figure che interessano al matematico sono quelle che risultano essere invarianti *rispetto ad un determinato gruppo di trasformazioni.*

Pensiamo, per esempio, ad un piano riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali; consideriamo due punti P *e* Q *(distinti) quali si vogliano del piano; ciascuno di essi è determinato da due coordinate.*

Se pensiamo di cambiare il sistema di assi cartesiani, ovviamente le coordinate dei punti cambiano.

Tuttavia è possibile costruire mediante le coordinate dei due punti almeno una funzione che non cambia quando si passi dal primo al secondo sistema di riferimento: questa funzione esprime sostanzialmente la distanza tra i due punti e costituisce per il fatto della sua invarianza, la prima proprietà veramente fondamentale e « geometrica » della coppia di punti.

Va osservato che secondo le idee di Klein è anche possibile dare una classificazione *delle varie « geometrie », cioè delle varie dottrine geometriche, facendo riferimento ad un determinato gruppo di trasformazioni, il quale qualifica l'insieme delle proprietà invarianti che riguardano (o interessano) una determinata « geometria ». Si ottiene cosí un criterio per la classificazione dei vari rami della geometria e per unificare questi rami nel loro insieme.*

Per esempio, la geometria euclidea (o geometria elementare, come si suole anche dire) risulta caratterizzata dal fatto che le proprietà che essa studia sono invarianti rispettivamente per il gruppo dei movimenti rigidi o per il gruppo delle similitudini; la geometria proiettiva, che allora costituiva un ramo del tutto nuovo della scienza, risulta caratterizzata dal fatto che le proprietà da essa considerate sono invarianti per trasformazioni molto piú generali delle trasformazioni che caratterizzano la geometria elementare, e che si chiamano omografie;[2] *tali sono per esempio le trasformazioni che si potrebbero ottenere concretamente associando ad una figura piana la sua fotografia (priva di aberrazioni) o la sua « ombra » ottenuta mediante una sorgente luminosa puntiforme e proiettata su un piano che non sia parallelo al piano della figura originaria, o anche facendo fotografie di fotografie in modo qualsiasi.*

Va anche notato che, nel quadro di quella che viene chiamata la « subordinazione » delle geometrie, la geometria euclidea risulta essere un caso particolare della geometria proiettiva, perché il gruppo delle omografie contiene il gruppo delle similitudini, che contiene a sua volta quello dei movimenti rigidi.

Il passo che segue (limitato alle prime pagine di più agevole comprensione) è tratto dalla citata dissertazione dal titolo Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti (Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen), *nella traduzione datane da G. Fano (a sua volta geometra di notevole valore) sugli « Annali di matematica pura e applicata », serie II, t. XVII (1890), pagg. 307 e seguenti. Le note sono di F. Klein. In particolare la nota 5 è stata da lui aggiunta nella traduzione italiana. I due matematici citati nel testo sono il norvegese (Marius) Sophus Lie (1842-1899) e il francese Camille Jordan (1838-1922).*

Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti

di FELICE KLEIN (a Göttingen)

Programma pubblicato in occasione dell'accoglimento nella Facoltà filosofica e nel Senato dell'Università di Erlangen, 1872

Tradotto da GINO FANO

Fra i risultati ottenuti negli ultimi cinquant'anni nel campo della geometria occupa il primo posto lo sviluppo della *Geometria Proiettiva.* Benché da principio le cosí dette relazioni metriche, non

[2] Le omografie sono le piú generali trasformazioni che portano rette in rette (e piani in piani).

conservandosi invariate nelle proiezioni, sembrassero inaccessibili a questa disciplina, tuttavia recentemente si è riusciti ad abbracciarle anch'esse sotto il punto di vista proiettivo, di modo che ora i metodi proiettivi comprendono tutta quanta la geometria. Solo che le proprietà metriche vi compaiono non piú come proprietà degli oggetti in sé, ma come relazioni fra essi ed una forma fondamentale, il cerchio immaginario all'infinito (delle sfere).

Confrontando le nozioni della geometria ordinaria (elementare) con questo metodo, introdottosi gradualmente, di considerare le forme dello spazio, sorge la questione, se esista un principio generale, secondo cui ambo i metodi potrebbero organizzarsi. Tale questione appare tanto piú importante, in quanto che accanto alla geometria elementare ed alla proiettiva si presenta una serie di altri metodi ai quali, con tutto che meno sviluppati, convien concedere pari diritto di esistenza autonoma. Tali sarebbero la geometria dei raggi reciproci, quella delle trasformazioni razionali, ecc. le quali saranno in seguito menzionate ancora ed esposte.

Coll'assumerci di stabilire in seguito un sí fatto principio noi non veniamo certo a sviluppare alcuna idea essenzialmente nuova, ma solo delineiamo con chiarezza e precisione ciò che fu già pensato da taluno con piú o meno esattezza. Ma il pubblicare siffatte considerazioni comprensive appariva tanto piú giustificato, in quanto che la geometria, che pur è unica nella sua sostanza, nel rapido sviluppo cui andò soggetta negli ultimi tempi si è troppo suddivisa in discipline quasi separate, che vanno progredendo alquanto indipendentemente le une dalle altre. Aggiungasi a ciò l'intenzione particolare di esporre metodi e punti di vista che vennero svolti in lavori recenti di Lie e miei. I nostri lavori, per quanto fosser diversi gli oggetti a cui si riferivano, pure d'accordo sono entrati in questo modo generale di considerazione, sicché era una specie di necessità di discutere finalmente anche questo, caratterizzando dal suo punto di vista contenuto e tendenza di quei lavori.

Benché finora siasi parlato di sole ricerche geometriche, pure vi si devono intender comprese quelle relative a varietà comunque estese, le quali si sono svolte dalla geometria coll'astrarre dalla rappresentazione nello spazio, rappresentazione non essenziale per le considerazioni puramente matematiche. Nello studio delle varietà vi sono appunto dei tipi differenti come in geometria, e si tratta, come in geometria, di mettere in rilievo ciò che v'ha di comune e di diverso in ricerche intraprese indipendentemente le une dalle altre. In via astratta, basterebbe in seguito parlare semplicemente di varietà piú volte estese; ma, collegandola alle rappresentazioni geometriche piú familiari, l'esplicazione si fa piú semplice e piú facilmente intelligibile. Partendo dalla considerazione dei corpi geometrici, e sviluppando sopra di essi, come esempio, le idee generali, battiamo la stessa via che ha percorsa la scienza nel suo sviluppo, e che di solito nell'esposizione torna maggior conto di mettere a base.

Non è possibile far qui un'esposizione preliminare della materia di cui ci occuperemo in seguito, poiché essa mal si adatta ad una forma piú ristretta; [3] i titoli dei paragrafi mostreranno il progresso generale del pensiero. Ho aggiunto alla fine una serie di note, nelle quali ho maggiormente sviluppati alcuni punti particolari, quando ciò mi sembrava utile all'esplicazione generale del testo, ovvero sono stato costretto a separare da quelli affini il principio astrattamente matematico conforme alle considerazioni del testo medesimo.

§ 1. *Gruppo di trasformazioni dello spazio. Gruppo principale. Si pone un problema generale.*

Il concetto piú essenziale fra quelli necessari per quanto esporremo in seguito è quello di *gruppo* di trasformazioni dello spazio.

Componendo assieme quante si vogliano trasformazioni dello spazio,[4] si ha sempre di nuovo una trasformazione. Ora, se una data serie di trasformazioni gode della proprietà che ogni trasformazione risultante da composizioni di queste appartenga alla serie medesima, chiameremo quest'ultima un *gruppo di trasformazioni*.[5-6]

---

[3] Questa concisione di forma è un difetto dell'esposizione che faremo in seguito; difetto che, temo, renderà piú difficile l'intelligenza. Ma a ciò si sarebbe potuto ovviare solo con una trattazione molto piú estesa, nella quale le singole teorie, qui appena accennate, fossero ampiamente svolte.

[4] Noi supponiamo sempre soggetto simultaneamente alle trasformazioni tutto il complesso delle figure dello spazio, e parliamo perciò semplicemente di trasformazioni dello spazio. Le trasformazioni possono introdurre in luogo dei punti altri elementi, come fanno per esempio quelle reciproche; ma su ciò nel testo non si fa distinzione.

[5] [Questa definizione vuole ancor essere completata. Vale a dire, nei gruppi del testo si suppone tacitamente che essi, accanto ad ogni operazione che abbiano a contenere, ne contengano altresí sempre l'inversa; ora questo, nel caso che le operazioni siano in numero infinito, non è punto una conseguenza del concetto di gruppo come tale; la nostra supposizione doveva quindi aggiungersi espressamente alla definizione di questo concetto data nel testo.]

[6] La nozione e la denominazione si sono prese dalla *teoria delle sostituzioni*, nella

Un esempio di gruppo di trasformazioni ci è dato dal complesso dei movimenti (considerando ogni movimento come un'operazione eseguita su tutto lo spazio). Un gruppo contenuto in questo è per es. quello delle rotazioni attorno ad un punto.[7] Al contrario, un gruppo che comprende quello dei movimenti è costituito dall'insieme delle collineazioni. Invece il complesso delle trasformazioni reciproche non forma alcun gruppo, – perché due reciprocità assieme dan luogo ad una collineazione –; si ha però un gruppo considerando il complesso di tutte le trasformazioni reciproche e collineari.[8]

Ora vi sono nello spazio delle trasformazioni che non alterano affatto le proprietà geometriche dei corpi. Infatti, per la natura del concetto di proprietà geometriche, queste sono indipendenti dalla posizione che la figura da studiare occupa nello spazio, dalla sua grandezza assoluta, e finalmente anche dal senso[9] in cui sono disposte le sue parti. Le proprietà di una tale figura rimangono dunque inalterate in tutti i movimenti dello spazio, nelle sue trasformazioni per similitudine, nel processo di riflessione (specchiamento), come pure in tutte le trasformazioni che risultano da composizioni di queste. Il complesso di tali trasformazioni lo chiameremo *gruppo principale*[10] di trasformazioni dello spazio: *le proprietà geometriche non si alterano nelle trasformazioni del gruppo principale*. E inversamente possiamo anche dire: *le proprietà geometriche sono caratterizzate dalla loro invariabilità rispetto alle trasformazioni del gruppo principale*. Invero, se si considera per un istante lo spazio come immobile, ecc., come una varietà rigida, allora ogni figura avrà un interesse individuale; or bene, fra le proprietà ch'essa avrà come individuo, soltanto quelle propriamente geometriche si conserveranno nelle trasformazioni del gruppo principale. Questa nozione, for-

---

quale però in luogo delle trasformazioni di un campo continuo compaiono gli scambi di un numero finito di grandezze discrete.

7 Camille Jordan ha determinato in generale tutti i gruppi contenuti in quello dei movimenti: *Sur les groupes de mouvements*, Annali di Matematica, t. II.

8 Non è punto necessario, come però si verificherà sempre per i gruppi di cui faremo menzione nel testo, che le trasformazioni di un gruppo formino una successione continua. Costituisce un gruppo per esempio anche la serie finita di movimenti che possono far sovrapporre un corpo regolare a se stesso, ovvero la serie infinita ma discreta di quelli che sovrappongono una sinussoide a se medesima.

9 Per « senso » intendo qui la proprietà dell'ordinamento, su cui si fonda la differenza dalla figura simmetrica (immagine riflessa). Quindi ad esempio si distinguono riguardo al senso un'elica destrorsa ed una sinistrorsa.

10 Che queste trasformazioni formino un gruppo è necessario in causa della loro stessa definizione.

mulata qui in modo un po' indeterminato, apparirà piú chiara nel corso ulteriore delle considerazioni.

Facciamo ora astrazione dall'immagine sensibile, matematicamente non essenziale, e consideriamo lo spazio semplicemente come una varietà piú volte estesa, quindi a tre dimensioni se ci atteniamo alla solita rappresentazione del punto come elemento dello spazio. Per analogia colle trasformazioni dello spazio parliamo di trasformazioni della varietà; anch'esse formano dei *gruppi*. Solo che non c'è piú come nello spazio un gruppo distinto dagli altri pel suo significato; ogni gruppo è equivalente ad ogni altro. Come generalizzazione della geometria sorge cosí il seguente problema comprensivo:

È data una varietà e in questa un gruppo di trasformazioni; studiare le forme appartenenti alla varietà per quanto concerne quelle proprietà che non si alterano nelle trasformazioni del gruppo dato.

Secondo l'espressione moderna, la quale però non si suol riferire che ad un determinato gruppo, quello di tutte le trasformazioni lineari, possiamo anche dire cosí:

È data una varietà e in questa un gruppo di trasformazioni. Si sviluppi la teoria invariantiva relativa al gruppo medesimo.

Questo è il problema generale che comprende in sé non solo la geometria ordinaria, ma anche e in particolare i nuovi metodi geometrici che qui dobbiamo nominare, e le diverse maniere di trattazione delle varietà comunque estese. Ciò che conviene piú specialmente notare si è l'arbitrarietà che sussiste in quanto alla scelta del gruppo di trasformazioni da fissare; e l'egual diritto, che ne segue e che in questo senso va inteso, di tutte le specie di considerazioni che si raccolgono sotto quel punto di vista generale.

§ 2. *I gruppi di trasformazioni di cui l'uno abbraccia l'altro vengono subordinati fra loro. Diversi tipi di ricerche geometriche e loro reciproca relazione.*

Poiché le proprietà geometriche dei corpi rimangono inalterate in *tutte* le trasformazioni del gruppo principale, cosí, considerato da sé solo, è assurdo il ricercare quelle loro proprietà per cui ciò si verifica soltanto rispetto ad una parte delle trasformazioni stesse. Ma il porre una tale questione diventa giustificato, quantunque solo *formalmente*, se noi studiamo le forme dello spazio in relazione ad elementi immaginati fissi. Consideriamo ad es., come nella trigonometria sferica, gli enti geometrici con speciale riguardo ad un punto fisso. Allora la questione è anzitutto questa: Sviluppare le proprietà invariantive, rispetto al gruppo principale fissato, non piú dei corpi a sé, ma del sistema formato da essi e dal punto dato. Ma una tale questione possiamo metterla anche sotto quest'altra forma: Si studino le forme dello spazio in sé per quanto concerne le proprietà che non si alterano in quelle trasformazioni del gruppo principale che conservano fisso il punto proposto. In altri termini: È indifferente di studiare le forme dello spazio in relazione al gruppo principale, e aggiunger loro il punto dato, ovvero, senza aggiunger loro nulla di dato, di sostituire al gruppo principale quell'altro in esso contenuto, le cui trasformazioni lasciano inalterato il punto medesimo.

È questo un principio del quale spesso si fa uso in seguito, e che perciò enunceremo qui subito in generale, per es. nel modo seguente:

Sia data una varietà e, per la sua trattazione, un gruppo di trasformazioni ad essa relativo. Si ponga il problema di studiare le forme contenute nella varietà in relazione ad una data forma. *Allora noi possiamo o aggiungere al sistema delle forme quest'ultima data, e allora si richiederanno le proprietà del sistema cosí esteso in relazione al gruppo proposto; – ovvero non estendere il sistema, ma limitare le trasformazioni che si mettono a base della trattazione a quelle contenute nel gruppo medesimo che lasciano inalterata la proposta forma (e che necessariamente costituiscono ancora un gruppo).*

Contrariamente alla questione sollevata al principio del paragrafo, occupiamoci adesso dell'inversa, che si può comprendere fin d'ora. Cerchiamo quali siano le proprietà dei corpi che si conservano in un gruppo di trasformazioni comprendente quello principale come parte. Ogni proprietà che troviamo in una tale ricerca è una proprietà geometrica del corpo a sé, ma la reciproca non sussiste. In questa entra invece in vigore il principio testé riportato, nel quale ora il gruppo principale è il meno esteso. Si ha quindi:

Sostituendo al gruppo principale un altro gruppo piú ampio, le proprietà geometriche si conservano solo in parte. Le rimanenti appaiono come proprietà, non piú dei corpi a sé, ma del sistema che risulta aggiungendo a questi una forma speciale. Questa forma speciale (per quanto può essere determinata)[11] *è definita dal fatto che,*

[11] Si genera, per esempio, una tal forma applicando la trasformazione del gruppo

supposta fissa, concede allo spazio, fra le trasformazioni del gruppo proposto, solo quelle del gruppo principale.

Su questa proposizione riposa ciò che hanno di particolare i nuovi indirizzi geometrici che qui dobbiamo discutere, e il loro rapporto al metodo elementare. Il loro carattere è appunto quello di porre a base delle considerazioni, in luogo del gruppo principale, un altro gruppo piú esteso di trasformazioni dello spazio. La loro reciproca relazione è determinata da una proposizione analoga, finché i loro gruppi si comprendono l'un l'altro. Questo vale anche per i diversi metodi di trattazione di varietà piú volte estese che dobbiamo considerare. Ciò verrà ora mostrato pei singoli metodi, sui quali i teoremi stabiliti in generale in questo paragrafo e nel precedente troveranno spiegazione in oggetti concreti.

Si potrebbe dire infine che le idee di Klein hanno avuto influenza (o almeno che si ritrovano) anche in altri campi della scienza e che possono aiutare anche a capire e ad inquadrare certi atteggiamenti della ricerca scientifica posteriore.

Infatti nel quadro delle idee che abbiamo esposto si potrebbe inserire anche la ricerca di proprietà degli enti che si potrebbero chiamare « obbiettive » di fronte alle scelte dei sistemi di riferimento e quindi ai cambiamenti dei sistemi di riferimento.

Pensiamo per esempio ad un osservatore O, che descrive i fenomeni della fisica mediante un determinato sistema di riferimento spazio-temporale, e pensiamo anche ad un altro osservatore O', il quale dà la sua descrizione dei fenomeni della fisica con il suo riferimento spazio-temporale.

Possiamo capire che le coordinate spazio-temporali attribuite da ciascuno degli osservatori ad un medesimo fenomeno sono in generale variabili con i riferimenti (e quindi con gli osservatori); le cose che hanno un vero significato fisico sono quelle che risultano espresse in modo invariante rispetto a tutti i cambiamenti di sistema di riferimento che esprimono il cambiamento delle leggi quando si passi da un osservatore ad un altro.

Queste idee sono fondamentali per la comprensione di quella impostazione teorica che è alla base della teoria della relatività einsteiniana; si potrebbe dire addirittura che queste idee hanno influenzato anche la presentazione « geometrizzante » che Einstein stesso ha adottato nella esposizione delle proprie teorie.

---

principale a un elemento originale arbitrario, che non resti invariato in alcuna delle trasformazioni del gruppo proposto.

HENRI POINCARÉ

Henri Poincaré,[1] *che J. Hadamard qualifica come « ... il piú grande genio che la nostra scienza ha conosciuto nell'ultimo mezzo secolo », ha lasciato la sua impronta in moltissimi campi della matematica pura ed applicata: nella analisi matematica, nella topologia, nella meccanica celeste. Benché sia difficile classificare entro schemi molto stretti una intelligenza come la sua, si potrebbe dire che egli ha rappresentato un esempio abbastanza tipico di quella classe di matematici che (come vedremo), egli qualifica come « geometri ». Tuttavia è interessante osservare che egli ha voluto anche riflettere e meditare sui problemi logici e psicologici della matematica: sul problema della origine e dei fondamenti di questa scienza, e sul problema del procedimento mediante il quale lo spirito del matematico arriva alla scoperta ed alla dimostrazione.*

Riportiamo qui di seguito alcuni passi tratti dalla conferenza che Poincaré fece al congresso internazionale dei matematici di Parigi del 1900. Tale conferenza ha come titolo Sul compito della intuizione e della logica nella matematica (Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques).[2]

Sul posto della intuizione e della logica nella matematica

I. - È impossibile studiare le opere dei grandi matematici (e anche quelle dei piccoli) senza notare due tendenze opposte, o piuttosto due spiriti del tutto diversi.

Gli uni sono preoccupati della logica; a leggere i loro lavori, si direbbe che hanno camminato soltanto passo passo con il metodo di un Vauban[3] che spinge i suoi trinceramenti contro una piazzaforte, senza lasciare nulla al caso.

Gli altri si lasciano guidare dalla intuizione, e fanno delle conquiste rapide ed improvvise, ma talvolta precarie, come dei cavalleggeri d'avanguardia.

---

[1] Nato nel 1854 a Nancy, nel 1879 fu chiamato a insegnare matematica all'Università di Caen e nel 1881 si trasferí all'Università di Parigi. Nel 1908 fu eletto all'Académie Française. Morí a Parigi nel 1912. Era primo cugino di Raymond Poincaré, presidente della Repubblica Francese durante la prima guerra mondiale.

[2] *Compte rendu du deuxième congrès international des Mathématiciens* (Paris, 6-12 août 1900), Paris, Gauthier-Villars, 1902; ristampa Kraus Reprint Limited, Nendeln-Liechtenstein, 1967.

[3] Sebastien Le Prestre de Vauban (1633-1707), ingegnere militare, architetto. economista.

Non è la materia trattata che impone uno oppure l'altro metodo. Anche se i primi vengono spesso chiamati « analisti » e i secondi vengono chiamati « geometri », ciò non impedisce che i primi restino analisti anche quando fanno della geometria, ed i secondi restino geometri anche quando si occupano di analisi matematica pura. È la natura stessa della loro intelligenza che li rende logici oppure intuitivi, e non si possono spogliare della loro natura quando studiano un argomento nuovo.

Neppure è la educazione ricevuta che ha sviluppato in loro una delle due tendenze ed ha soffocato l'altra. Matematici si nasce, non si diventa; e si direbbe anche che si nasce geometri, oppure analisti.

Vorrei citare degli esempi, che certo non mancano...

Tralasciamo qui qualche pagina della conferenza, perché l'analisi che Poincaré fa dell'opera e dei modi di procedere dei matematici di cui egli parla richiederebbe delle conoscenze tecniche troppo specializzate per essere compresa in tutto il suo significato.

Noi possiamo constatare le stesse differenze nei nostri allievi; gli uni preferiscono risolvere i problemi « con l'analisi », gli altri invece « con la geometria ».

I primi sono incapaci di « vedere nello spazio », gli altri si stancherebbero immediatamente dei lunghi calcoli e resterebbero imbrogliati ed arenati.

Entrambi i tipi di intelligenza sono ugualmente necessari per il progresso della scienza; i logici, cosí come gli intuitivi, hanno fatto delle cose grandi, che nessun altro avrebbe potuto fare. Chi oserebbe dire che sarebbe meglio che Weierstrass non avesse scritto oppure che Riemann non fosse esistito? L'analisi e la sintesi hanno dunque entrambe il loro posto, ed il loro compito legittimo. Ma sarebbe interessante studiare davvicino nella storia della scienza la parte dell'una o dell'altra.

II. - È curioso notare che, rileggendo le opere degli antichi, saremmo tentati di dire che essi erano tutti degli intuitivi. E tuttavia la natura è sempre la stessa e è poco probabile che soltanto questo secolo abbia incominciato a creare degli spiriti amici della logica.

Se noi potessimo rivivere nella corrente di idee che valeva al loro tempo, ci accorgeremmo che molti tra questi vecchi matematici erano per tendenza logici.

Euclide, per esempio, ha costruito tutta un'ossatura ed una struttura, nelle quali i suoi contemporanei non poterono trovare alcun difetto. Ed in quest'opera vastissima, nella quale ogni parte è dovuta alla intuizione, noi possiamo anche oggi, senza troppo sforzo, riconoscere l'opera di un logico.

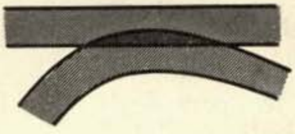
Non sono gli spiriti che sono cambiati: sono le idee; gli spiriti intuitivi sono sempre rimasti gli stessi, ma i loro lettori hanno richiesto loro un numero maggiore di concessioni. Quale è la ragione di questa evoluzione?

Non è difficile scoprirla. La intuizione non ci può dare il rigore, e neppure la certezza; ci si è accorti di questo ogni giorno di piú.

Citiamo qualche esempio. Noi sappiamo che esistono delle funzioni continue che non hanno derivata. Non vi è nulla di piú urtante per la intuizione di questa proposizione, la cui validità tuttavia ci è imposta dalla logica. I nostri padri non avrebbero esitato a dire: « È evidente che ogni funzione continua ha una derivata, perché ogni curva ha una tangente ».

Come può avvenire che la intuizione ci tradisca fino a questo punto? Si tratta del fatto che, quando cerchiamo di immaginare una curva, non possiamo immaginarcela senza spessore; ed analogamente, quando ci immaginiamo una retta, la vediamo sotto forma di una striscia rettilinea di una certa larghezza. Noi sappiamo molto bene che queste curve non hanno spessore; noi ci sforziamo di immaginarle sempre piú strette, e di avvicinarci in questo modo al limite; noi arriviamo, in certo modo, vicini a questo limite, ma non lo raggiungiamo mai.

E allora è chiaro che noi potremo sempre rappresentarci questi due nastri strettissimi, l'uno diritto, l'altro curvilineo, in una posizione tale che essi si sovrappongano leggermente senza attraversarsi.



Saremo cosí condotti, a meno di essere messi sull'avviso da una analisi rigorosa, a concludere che una curva ha sempre una tangente.

Omettiamo qui un secondo esempio.

L'intuizione non ci dà la verità; ecco perché la evoluzione doveva avvenire; vediamo ora come essa è avvenuta.

Si è giunti presto alla convinzione che non si può introdurre il rigore nei ragionamenti se non lo si introduce prima nelle definizioni. Ora per molto tempo gli oggetti di cui si occupava il matematico sono rimasti mal definiti; si credeva di conoscerli, perché ci si faceva una immagine di essi con il senso o con la immaginazione; ma era una immagine grossolana, e non una idea precisa sulla quale si potesse far presa con il ragionamento.

Su questo punto si sono dunque concentrati anzitutto gli sforzi dei logici. Ciò è avvenuto per il numero irrazionale. L'idea vaga di disuguaglianza che noi dobbiamo alla intuizione, si è risolta in un sistema complicato di disuguaglianze relative ai numeri interi. E con questo mezzo sono state chiarite in modo definitivo le difficoltà che nascevano dalla considerazione del passaggio al limite o delle quantità infinitesime.

Oggi l'analisi tratta soltanto dei numeri interi o sistemi finiti o infiniti di numeri interi, collegati da una rete di relazioni di uguaglianza o di disuguaglianza. La matematica (come abbiamo detto) si è aritmetizzata.

III. - Si pone ora un primo problema: questa evoluzione è finita? Abbiamo finalmente raggiunto il rigore assoluto? Anche i nostri padri credevano di averlo raggiunto, ad ogni stadio della evoluzione del pensiero matematico. E se essi sbagliavano non è forse vero che potremmo sbagliarci anche noi come loro?

Noi crediamo di non far piú ricorso alla intuizione nei nostri ragionamenti; ma i filosofi ci diranno che si tratta di una illusione. La sola logica pura ci condurrebbe soltanto a delle tautologie; non potrebbe creare nulla di nuovo; non è dalla logica che può nascere una scienza.

Questi filosofi hanno ragione in un senso; per fare l'aritmetica, come per fare la geometria, o per fare una scienza qualesivoglia, occorre qualche cosa di diverso dalla pura logica. E per designare questa « cosa diversa » abbiamo soltanto la parola « intuizione ». Ma quante idee diverse si nascondono dietro a questa parola?

Paragoniamo questi quattro assiomi:

1) Due quantità uguali ad una terza sono uguali tra loro.

2) Se un teorema è vero per il numero 1, e se si dimostra che esso è vero per $n + 1$ ogni volta che è vero per n, il teorema sarà vero per ogni numero intero.

3) Se su una retta il punto C sta fra A e B, ed il punto D tra A e C, allora il punto D starà tra A e B.

4) Per un punto si può condurre una sola parallela ad una retta data.

Tutti e quattro questi assiomi debbono essere attribuiti alla intuizione e tuttavia il primo è l'enunciato di una regola della logica formale; il secondo, un vero e proprio giudizio sintetico « a priori », è il fondamento della induzione matematica rigorosa; il terzo è un appello alla immaginazione; il quarto è una definizione nascosta.

L'intuizione non è necessariamente fondata sulla testimonianza dei sensi; i sensi diventerebbero immediatamente impotenti; noi non possiamo – per esempio – rappresentarci il chiliagono,[4] e tuttavia ragioniamo con l'intuizione sui poligoni in generale, che comprendono il chiliagono come caso particolare.

Voi sapete bene ciò che Poncelet[5] designava come « principio di continuità ». Poncelet era uno degli spiriti piú intuitivi di questo secolo; lo era con passione, quasi con ostentazione; egli considerava il principio di continuità come una delle sue concezioni piú ardite e tuttavia questo principio non si fondava sulla testimonianza dei sensi; perché assimilare l'iperbole alla ellisse era piuttosto contraddire la testimonianza dei sensi che fare appello a lei. In questo principio c'era soltanto una generalizzazione affrettata e istintiva, che non voglio difendere.

Abbiamo dunque vari tipi di intuizione. Anzitutto il richiamo ai sensi ed alla immaginazione; in secondo luogo la generalizzazione per induzione, ricalcata, per cosí dire, sui procedimenti delle scienze sperimentali. Infine abbiamo l'intuizione del numero puro, quella da cui è uscito quel secondo assioma che ho enunciato poco fa, e che può generare il vero ragionamento matematico.

I due primi tipi di intuizione non possono darci la certezza; l'ho dimostrato poco fa con degli esempi; ma chi potrà seriamente dubitare del terzo tipo di intuizione, chi potrebbe dubitare dell'aritmetica?

---

[4] Chiliagono, secondo la etimologia delle radici greche con le quali la parola è stata coniata, sarebbe il poligono regolare (convesso) con mille lati.

[5] Jean Victor Poncelet (1788-1867), francese, fu uno dei creatori della geometria proiettiva. Con l'enunciazione del « principio di continuità » egli ha cercato di dare una veste intuitiva a numerosi procedimenti geometrici che possono essere pienamente giustificati solo col ricorso alle proprietà del campo dei numeri complessi.

Ora, nell'analisi di oggi, quando si vuol darsi la pena di essere rigorosi, non si può far altro che ricorrere a dei sillogismi oppure a quella intuizione del numero puro che è la sola che non può condurci fuori strada. Si può dire che oggi abbiamo raggiunto il rigore assoluto.

IV. - I filosofi fanno ancora un'altra obiezione: « Ciò che voi acquisite in rigore (dicono) voi lo perdete in obbiettività. Voi potete elevarvi verso il vostro ideale logico soltanto tagliando i legami che vi legano alla realtà. La vostra scienza è impeccabile, ma può esserlo soltanto chiudendosi in una torre d'avorio e precludendosi ogni rapporto con il mondo esterno. Ma bisogna bene che essa esca da questa torre, se vuole tentare la minima applicazione ».

Voglio dimostrare, per esempio, che un certo oggetto (la cui nozione mi sembra indefinibile, tanto è intuitiva) ha una certa proprietà. Non ci riesco a tutta prima, oppure debbo accontentarmi di una dimostrazione approssimata; mi decido infine a dare una definizione ineccepibile al mio oggetto, e questo mi permette di stabilire la esistenza della proprietà in modo inconfutabile. « E dopo di ciò — dicono i filosofi — resta ancora da dimostrare che l'oggetto che risponde alla definizione data è lo stesso che l'intuizione vi aveva presentato; o, in altro modo, che l'oggetto reale e concreto del quale voi credete riconoscere immediatamente la conformità con la vostra idea intuitiva, risponde alla nuova definizione. Solo allora potrete dire che l'oggetto ha la proprietà in questione. Voi dunque spostate soltanto la difficoltà ».

Ora questo non è vero; noi non abbiamo spostato la difficoltà, ma l'abbiamo divisa. La proposizione di cui si trattava si componeva infatti di due proposizioni diverse, che a tutta prima non erano state distinte.

La prima era una verità matematica, e questa è ora rigorosamente stabilita. La seconda era una verità sperimentale; e solo l'esperienza può dirci se un certo oggetto reale e concreto risponde oppure no ad una certa definizione astratta. Questa seconda verità non è dimostrata matematicamente, ma non può neppure essere dimostrata in questo modo, cosí come non possono essere dimostrate cosí le leggi empiriche delle scienze fisiche e naturali. Sarebbe irragionevole domandare di piú.

Ebbene, non è forse un grande progresso quello che è stato fatto, distinguendo ciò che era prima confuso a torto? Bisogna forse dire che questa obiezione dei filosofi è da trascurare completamente?

Non è questo che voglio dire. Diventando rigorosa, la scienza matematica prende anche un carattere di artificialità che salta agli occhi di chiunque; essa dimentica le sue origini storiche; si vede come si risolvono i problemi, ma non si vede piú come e perché i problemi sono nati.[6]

Questo ci fa vedere che la logica non basta; che la scienza della dimostrazione non è tutta la scienza, che l'intuizione deve conservare il suo compito complementare; stavo dicendo come contrappeso o come contravveleno alla logica.

Su *L'enseignement mathématique* [...] ho già avuto occasione di insistere sul posto che la intuizione deve conservare nell'insegnamento delle scienze matematiche.

Senza di lei, le giovani intelligenze non potrebbero essere iniziate alla comprensione della matematica, non potrebbero imparare ad amarla e vedrebbero in essa una pura logomachia; e soprattutto senza di lei non sarebbero mai capaci di fare delle applicazioni della matematica.

Ma oggi vorrei soprattutto parlare del compito della intuizione nella scienza. Se è utile per lo studente, essa lo è ancora di piú per lo scienziato che crea.

V. - Noi cerchiamo la realtà; ma che cosa è la realtà?

I fisiologi ci insegnano che gli organismi sono formati da cellule; i chimici aggiungono che queste cellule sono a loro volta formate da atomi. Ma questo significa forse che questi atomi o queste cellule costituiscono tutta la realtà oppure la sola realtà?

Il collegamento delle cellule tra loro, da cui proviene l'unità dell'individuo, non è forse a sua volta una realtà, molto piú interessante di quella degli elementi isolati?

Un naturalista che abbia studiato l'elefante soltanto al microscopio crederà forse di conoscere abbastanza questo animale?

Ebbene, in matematica c'è qualche cosa di analogo. Il logico

---

[6] È interessante la posizione di Poincaré, il quale richiede che la esposizione della matematica non debba limitarsi alla esposizione dei problemi e delle loro soluzioni, ma debba anche contenere la motivazione di questi problemi e dei procedimenti seguiti, motivazione che nella maggior parte dei casi è data dalla situazione storica nella quale i problemi sono nati.

decompone (per cosí dire) ogni dimostrazione in moltissime operazioni elementari; e quando avremo esaminato queste operazioni una dopo l'altra, ed avremo constatato che ognuna di esse è giusta, crederemo forse di aver capito il vero senso della dimostrazione? Oppure lo avremo capito dopo che, con uno sforzo di memoria, saremo capaci di ripetere questa dimostrazione riproducendo le operazioni elementari nello stesso ordine nel quale le aveva compiute l'inventore?

Evidentemente no, noi non saremo in possesso di tutta la realtà; quel certo non so che, che dà unità alla dimostrazione, ci sfuggirà completamente.

In questi edifici complicati, costruiti dai maestri della scienza matematica, non basta constatare la solidità di ogni parte, ed ammirare l'arte del costruttore; bisogna comprendere il piano dell'architetto.

Ora per comprendere un progetto bisogna anzitutto avere presenti allo spirito tutte le parti di esso ed il mezzo per abbracciare con un solo colpo d'occhio tutto l'insieme è proprio l'intuizione.

L'analisi pura mette a nostra disposizione una folla di procedimenti, e di ognuno ci garantisce la infallibilità; ci apre mille sentieri diversi, che possiamo percorrere con la massima sicurezza; siamo certi di non incontrare ostacoli, ma, tra tutti questi sentieri, qual è quello che ci condurrà alla meta piú rapidamente? E chi ci dirà quale sentiero dobbiamo scegliere? Dobbiamo avere una facoltà che ci fa vedere la meta da lontano e questa facoltà è l'intuizione.

Essa è necessaria per l'esploratore che sceglie la propria strada, ma lo è pure per colui il quale segue le tracce dell'esploratore e vuole sapere perché egli ha scelta una certa strada.

Se assistete ad una partita di scacchi, non vi basta conoscere le regole delle mosse dei pezzi per capire la partita. La conoscenza delle regole vi basterà per capire se una mossa è stata fatta oppure no conformemente alle regole stesse; ma si tratta di ben poco. E tuttavia sarebbe ciò che fa un lettore di un libro di matematica se fosse soltanto un logico.

Capire la partita significa ben altro; è sapere perché un giocatore muove un pezzo piuttosto che un altro, che avrebbe pure potuto muovere senza infrangere le regole del gioco.

Ma soltanto la conoscenza della ragione intima fa della serie di mosse un tutto organizzato. Ed a maggior ragione questa facoltà è necessaria per il giocatore, cioè per l'inventore.

Lasciamo andare questo paragone e ritorniamo alla matematica. Consideriamo per es. ciò che è avvenuto a proposito dell'idea di funzione continua. All'inizio era solo una immagine sensibile, per es. quella di un disegno continuo tracciato col gesso sulla lavagna. Poi questa immagine si è poco a poco depurata; presto i matematici se ne sono serviti per costruire un insieme complicato di diseguaglianze che riproduceva (per cosí dire) tutte le linee della immagine primitiva; quando questa costruzione fu finita, si sono demolite le impalcature, per cosí dire, e si è allontanata quella grossolana rappresentazione sulla quale ci si era appoggiati e che era diventata ormai inutile; è rimasta soltanto la costruzione, da sola, irreprensibile agli occhi del logico.

E tuttavia, se l'immagine primitiva fosse veramente tutta dimenticata, come potremmo noi indovinare per quale capriccio tutte quelle diseguaglianze si sono concatenate insieme in questo modo?

Voi penserete forse che io abuso dei paragoni; concedetemene un altro. Voi certamente avete avuto occasione di vedere quelle trine delicate di aghi silicei che formano lo scheletro di certe spugne. Quando la materia organica sparisce, resta soltanto un delicato ricamo. C'è soltanto della silice, ma ciò che è piú importante è la forma che questa silice ha preso, e noi non potremmo capirla se non sapessimo che è la spugna vivente che ha impresso questa forma.

In un modo analogo, le antiche nozioni intuitive dei nostri padri, anche se noi le abbiamo abbandonate, imprimono ancora la loro forma alle strutture logiche che noi abbiamo messo al loro posto.

Questa veduta d'insieme è necessaria all'inventore; ma essa è necessaria pure a colui che vuole comprendere l'inventore; forse che la logica può fornircela? No. Il nome che i matematici le danno è d'altronde sufficiente per dimostrarlo. Infatti in matematica la logica si chiama « analisi » ed analisi vuol dire « divisione » o anche « dissezione ». Essa non può avere quindi altri strumenti diversi dal bisturi e dal microscopio.

Quindi logica ed intuizione hanno ciascuna la propria parte necessaria; ambedue sono indispensabili. La logica, che sola può darci la certezza, è lo strumento della dimostrazione; l'intuizione è lo strumento della invenzione.

VI. - Ma, nel momento in cui formulo questa conclusione, io sono preso da un certo scrupolo.

All'inizio ho fatto una distinzione, tra due tipi di spirito matematico; gli uni sono dei logici, gli altri sono degli intuitivi. Ebbene anche gli analisti sono stati degli inventori. I nomi di coloro che ho citato poco fa mi dispensano dall'obbligo di insistere.

Abbiamo quindi incontrato una contraddizione, almeno in apparenza, che dobbiamo analizzare.

Anzitutto, crediamo forse che i logici hanno sempre seguito il procedimento dal generale al particolare, come sembra che siano obbligati a fare dalle regole della logica?

Certamente cosí facendo essi non avrebbero potuto far avanzare le frontiere della scienza; perché si fa conquista scientifica soltanto con la generalizzazione.

In un lavoro, pubblicato sulla « Revue de Métaphysique et de Morale », ho avuto occasione di studiare la natura del ragionamento matematico, ed ho dimostrato che questo ragionamento, senza cessare di essere assolutamente rigoroso, potrebbe elevarci dal particolare al generale con il mezzo di un procedimento che io ho chiamato della induzione matematica.

Questo è il procedimento con il quale gli analisti hanno provocato il progresso della scienza, se si esaminano bene e minutamente le loro dimostrazioni, e si ritroverà questo procedimento ad ogni istante, accanto al sillogismo aristotelico.

Pertanto ci accorgiamo che gli analisti non sono dei semplici fabbricanti di sillogismo come lo erano gli scolastici.

Infatti come si potrebbe credere che essi abbiano camminato sempre passo passo, senza mai avere la visione della meta che volevano raggiungere?

Avranno ben avuto bisogno di indovinare la strada che conduceva alla meta, e per questo hanno avuto bisogno di una guida.

Questa guida è anzitutto l'analogia.

Per esempio, uno dei ragionamenti che sono cari agli analisti è quello fondato sulle funzioni maggioranti. Si sa che ha già servito a risolvere una grande quantità di problemi; in che cosa consiste allora la originalità dell'inventore che vuol applicare questo ragionamento ad un nuovo problema?

Occorre anzitutto che egli riconosca l'analogia che intercorre tra questo problema e quelli che sono già stati risolti con questo metodo; occorre poi che egli si accorga del fatto che il problema che lo interessa è diverso da quelli che sono già stati risolti e che tragga da questo le modifiche da apportare al metodo.

Ma come ci si può accorgere delle analogie e delle differenze? Nell'esempio che ho appena citato, queste sono quasi sempre evidenti, ma avrei potuto cercare degli esempi nei quali esse sarebbero state molto piú nascoste; spesso per scoprirle occorre avere una sagacia non comune.

Per non lasciarsi sfuggire queste analogie nascoste, cioè per poter essere degli inventori, gli analisti, con l'aiuto del senso e della immaginazione, devono avere il sentimento diretto di ciò che fa l'unità di un ragionamento, di ciò che (per cosí dire) ne costituisce l'anima e la vita intima.

Parlate con Hermite; [7] mai egli evocherà una immagine sensibile e tuttavia vi accorgerete subito che per lui le entità piú astratte sono come esseri viventi. Egli non le vede, queste entità, ma sente che non sono costruzioni artificiali, e che esse hanno una specie di principio di unità interna.

Ma, si dirà, si tratta ancora di intuizione.

Dovremo dunque concludere che la distinzione da noi fatta all'inizio era soltanto una apparenza, e che esiste soltanto un tipo di intelligenza e che tutti i matematici sono degli intuitivi, o almeno che lo sono quelli che sono capaci di inventare?

No; la nostra distinzione corrisponde a qualche cosa di reale. Ho detto poco fa che vi sono varie specie di intuizione. Ho anche fatto vedere quale sia la differenza tra la intuizione del numero puro, quella da cui può nascere la induzione matematica rigorosa e la intuizione sensibile, che vive a spese della immaginazione propriamente detta.

Forse l'abisso che separa questi due tipi di intuizione è meno profondo di quanto non si pensi a prima vista?

Forse con un po' di attenzione si riconoscerà che la stessa intuizione pura non può sussistere senza il soccorso dei sensi?

Questo problema è di competenza del metafisico e dello psicologo, e quindi io non lo affronterò. Ma basta che esista un dubbio perché io mi senta autorizzato a riconoscere e ad affermare che esiste una differenza essenziale tra i due tipi di intuizione; perché

[7] Charles Hermite (1822-1901), matematico francese, si distinse per le ricerche di teoria delle forme quadratiche e delle funzioni ellittiche e abeliane.

esse non hanno lo stesso oggetto e mettono in azione delle facoltà diverse della nostra anima: si potrebbe dire che sono due proiettori diversi, che puntano su due mondi diversi.

L'intuizione del numero puro, quella delle forme logiche pure, rischiara la strada di quelli che abbiamo chiamato « analisti ».

È lei che permette loro non soltanto di dimostrare, ma anche di inventare.

È per mezzo suo che essi colgono con un solo sguardo l'intero edificio logico nel suo schema generale, e ciò senza che apparentemente i sensi intervengano.

Respingendo il soccorso della immaginazione, che (l'abbiamo visto) non è sempre infallibile, essi possono avanzare senza timore di commettere degli sbagli.

Felici coloro i quali possono fare a meno dell'appoggio della immaginazione! Noi dobbiamo ammirarli, ma sono tanto pochi!

Quindi tra gli analisti ve ne saranno di quelli che sono degli inventori, ma saranno pochi.

La maggior parte tra noi, se volesse cercare di vedere lontano per mezzo della sola intuizione pura, sarebbe presa da vertigini. La nostra debolezza ha bisogno di un bastone piú forte e, malgrado le eccezioni di cui abbiamo appena parlato, resta sempre vero che la intuizione sensibile è in matematica lo strumento piú ordinario della invenzione creativa.

A proposito delle ultime riflessioni che ho fatto, sorge un problema che io non ho il tempo di discutere e di risolvere qui, e neppure di enunciare con gli sviluppi che comporta. Si tratta del problema seguente: tra gli analisti puri si può fare una seconda partizione e distinguere quelli che si servono soprattutto della intuizione pura da quelli che si preoccupano soprattutto ed anzitutto della logica formale?

Per es. Hermite, che ho citato poco fa, non può essere classificato tra i geometri che si servono della intuizione sensibile; ma non si potrebbe dire che egli è un logico, propriamente detto. Infatti egli non nasconde la sua antipatia per i procedimenti puramente deduttivi, che partono dal generale per andare al particolare.

Non pretendo di sottomettere questo problema alla vostra attenzione, perché il tempo stringe e questa conferenza è diventata anche troppo lunga.

DAVID HILBERT

Il nome del tedesco David Hilbert[1] *ha un posto particolare nella storia della matematica per l'importanza dei risultati che si debbono a lui e per la vastità degli interessi ed il numero dei campi in cui ha svolto le sue ricerche.*

Oltre alle sue ricerche di analisi matematica, di algebra, di teoria dei numeri, ricordiamo che Hilbert dedicò molte energie alle ricerche attorno ai fondamenti della matematica. In particolare egli meditò sui fondamenti della geometria e (insieme a suoi allievi) alla logica formale ed ai problemi riguardanti la teoria della dimostrazione.

Nel congresso internazionale dei matematici, tenutosi a Parigi nel 1900, Hilbert pronunciò una famosa conferenza nella quale elencava un certo numero di problemi non ancora risolti della matematica e faceva cosí in certo modo il punto sulla situazione della matematica di quel tempo.

Diversi di quei problemi non hanno ancora trovato una risposta oggi; altri hanno dato origine a ricerche fondamentali per tutta la matematica.

Da quella conferenza, rimasta celebre, sono tratti i passi che seguono.[2]

Chi non solleverebbe volontieri il velo che ci nasconde l'avvenire, per gettare un colpo d'occhio sui progressi della nostra scienza e per rendersi conto dei suoi sviluppi futuri?

In questo campo cosí fecondo e cosí vasto come la matematica, quali saranno le mete particolari che si prefiggeranno i maestri del pensiero matematico delle generazioni future?

Quali saranno, in questo campo, i nuovi metodi e le nuove verità che saranno scoperte, in questo secolo che sta cominciando?

La storia ci insegna la continuità dello sviluppo della scienza.

Sappiamo che ogni epoca ha i suoi problemi, che vengono risolti dall'epoca successiva, oppure vengono lasciati da parte come sterili, e sostituiti con altri.

Se cerchiamo di rappresentarci il presumibile sviluppo della

---

1 Nato a Koenigsberg nel 1862, studiò e iniziò la sua carriera di docente nella sua città natale; nel 1895 passò a Gottinga, dove fu professore fino al suo ritiro nel 1930 e dove morí nel 1943. Nel 1895 divenne membro dell'Accademia di Gottinga, dal 1902 fu tra i responsabili dei *Mathematische Annalen.*

2 Il testo utilizzato è la traduzione francese dell'originale (pubblicato in *Goettinger Nachrichten*, 1900), rivista da Hilbert, pubblicata in *Compte rendu du deuxième congrès international des Mathématiciens* (Paris, 6-12 août 1900), Paris, Gauthier-Villars, 1902; ristampa Kraus Reprint Limited, Nendeln-Liechtenstein, 1967.

scienza matematica nel prossimo futuro, dobbiamo rimeditare nel nostro spirito i problemi aperti e concentrare la nostra attenzione sui problemi che sono sorti recentemente e dei quali attendiamo la soluzione dall'avvenire.

Il momento presente, alle soglie del ventesimo secolo, mi sembra bene scelto per una rassegna di questi problemi.

Infatti le grandi divisioni del tempo non solo ci permettono di gettare uno sguardo sul passato, ma ci stimolano anche a pensare all'avvenire.

Non si può contestare il fatto che certi determinati problemi hanno avuto una grande parte nello sviluppo della scienza matematica, parte non minore di quella che hanno avuto nel lavoro dei singoli ricercatori. Fino a che una branca della scienza ha molti problemi da risolvere, essa è piena di vita.

La mancanza di problemi è un segno della morte o della fine dello sviluppo di una certa branca della scienza. Come in ogni ramo della attività umana è necessario avere un fine da raggiungere, cosí nella matematica è necessario avere dei problemi da risolvere.

La capacità e la forza del ricercatore si temprano nella risoluzione dei problemi; egli vi trova dei nuovi metodi e dei nuovi punti di vista; scopre orizzonti piú vasti e piú liberi.

È difficile e spesso addirittura impossibile giudicare « a priori » del valore di un problema; perché un giudizio sul valore può essere dato soltanto quando si conosce il profitto che la scienza ha tratto dal problema stesso. Tuttavia ci si può domandare se non esistano degli attributi generali, che caratterizzano un « bel » problema matematico.

Un matematico francese dei tempi passati ha detto: « Una teoria matematica non può essere considerata come perfetta se non quando si può farla capire al primo individuo che si incontra per la strada ».

Orbene, questa chiarezza, questa limpidità che viene richiesta ad una teoria matematica da questo enunciato, io vorrei richiederla ad un problema matematico perfetto.

Infatti ciò che è chiaro e limpido ci attira, ciò che è nebuloso e indeterminato ci respinge.

Perché un problema matematico sia attraente deve essere difficile, ma non irresolubile, altrimenti si ride dei nostri sforzi. Ma invece deve essere un vero e proprio filo conduttore attraverso il dedalo del labirinto delle verità nascoste, e ricompensarci dei nostri sforzi con la gioia che ci procura la scoperta della verità.

I matematici dei secoli andati si occupavano con ardore della ricerca della soluzione di certi problemi difficilissimi, e ne apprezzavano giustamente il valore. Mi contenterò di ricordare il problema della brachistocrona [3] di Giovanni Bernoulli.

Bernoulli, presentando il problema in pubblico, si esprime dicendo che l'esperienza ci dimostra come gli spiriti nobili non sono mai tanto stimolati al lavoro per far progredire la scienza, come quando si propongono loro dei problemi difficili ed utili; e, prosegue, egli spera di acquistare la riconoscenza del mondo matematico se, cosí come avevano fatto prima di lui Mersenne,[4] Pascal, Fermat, Viviani [5] e altri, pone un problema agli analisti del suo tempo, affinché essi possano, come con la pietra di paragone, verificare la eccellenza dei loro metodi e misurare le loro forze.

E proprio da questo problema, come da altri analoghi, ha preso inizio il calcolo delle variazioni.

Sappiamo che Fermat ha annunciato che la equazione di Diofanto [6]

$$x^n + y^n = z^n$$

(salvo per qualche caso che salta agli occhi) non è risolubile in numeri interi.

Il problema della dimostrazione di questa insolubilità ci offre un esempio molto chiaro della influenza che può avere sulla scienza una questione particolare ed a prima vista neppure troppo importante. [...]

Passando a un campo di studi del tutto diverso citerò il problema dei tre corpi. Poincaré, affrontando di nuovo questo difficile problema e cercando di portare avanti le indagini per la soluzione, ha scoperto dei metodi fecondi e di grande portata nella meccanica celeste, metodi che oggi sono accettati e impiegati dalla astronomia pratica.

---

[3] Linea che, per un dato tipo di movimento, rappresenta il percorso piú breve tra due punti.

[4] Marin Mersenne (1588-1648), matematico e teologo francese, frate minore, amico di Descartes.

[5] Vincenzo Viviani (1622-1703), allievo di Galileo, propose nel 1692 il problema di costruire in una cupola emisferica quattro finestre eguali in modo che l'area della superficie restante fosse esattamente quadrabile.

[6] Cfr. pagg. 88 e 116.

Questi due problemi, quello di Fermat e quello dei tre corpi, ci sembrano occupare come due poli opposti nell'insieme dei problemi; il primo è una libera creazione della pura ragione, il secondo è stato formulato dagli astronomi ed è indispensabile per la conoscenza dei fenomeni fondamentali piú semplici della natura.

Accade spesso che un certo problema particolare riveli dei legami con le branche piú diverse della scienza matematica.

Cosí per es. il problema delle geodetiche ha un posto importante dal punto di vista della storia e anche dal punto di vista dei principi della matematica, nei fondamenti della geometria, nella teoria delle curve e delle superfici, nella meccanica e infine nel calcolo delle variazioni. F. Klein, nel suo libro sull'icosaedro, ha mostrato molto bene l'importanza del problema dei poliedri regolari nella geometria elementare, nella teoria dei gruppi e delle equazioni, e nella teoria delle equazioni differenziali lineari. [...]

Dopo aver esposto la importanza dei problemi nella matematica, vorrei esaminare la questione delle sorgenti alle quali la matematica attinge i suoi problemi. I primi e piú vecchi problemi della matematica, in ogni sua branca, traggono la loro origine certamente dalla esperienza, e sono ispirati dalla conoscenza del mondo esterno.

Le regole delle operazioni sui numeri interi sono certamente state scoperte in uno stadio di sviluppo inferiore della cultura della umanità, cosí come ancora oggi il bambino impara in modo empirico ad applicare queste regole.

La stessa cosa si può dire a proposito dei primi problemi della geometria; problemi formulati nell'antichità, come la duplicazione del cubo e la quadratura del cerchio, e questi problemi che si sono presentati per primi nella teoria della risoluzione delle equazioni numeriche, delle curve, del calcolo differenziale ed integrale, del calcolo delle variazioni, delle serie di Fourier e del potenziale. Senza parlare della ricchezza e della abbondanza dei problemi che appartengono alla meccanica, alla astronomia, alla fisica.

Ma, nello sviluppo progressivo di una disciplina matematica, lo spirito umano, incoraggiato dalla scoperta delle soluzioni, prende coscienza della propria indipendenza; ed allora si crea da se stesso dei problemi nuovi e fecondi nel modo piú felice, senza un apparente pretesto esteriore, ma solo per combinazione logica, per generalizzazione e particolarizzazione, per separazione e per riunione di idee. È allora lo spirito che viene in primo piano e che pone dei problemi. [...]

E d'altra parte, mentre il potere creatore della ragione pura lavora, il mondo esterno fa di nuovo sentire la propria influenza, e ci conduce, con fatti esterni, a nuovi problemi, ci apre nuove regioni della scienza matematica.

E cosí, mentre cerchiamo di far rientrare questi nuovi domini della scienza nel regno della pura ragione, incontriamo spesso anche la risposta a vecchi problemi non risolti, e provochiamo il progresso delle vecchie teorie nel modo piú vantaggioso.

Mi sembra che tante analogie stupefacenti riposino proprio su questi scambi ripetuti tra ragione ed esperienza, cosí come questa armonia, che appare come prestabilita, che viene cosí spesso rilevata dai matematici nelle questioni, nei metodi, nelle concezioni di domini diversi della scienza.

Esaminiamo ancora rapidamente le esigenze e le condizioni alle quali deve soddisfare la soluzione di un problema matematico.

Al primo posto metterei la esattezza della soluzione, che deve essere ottenuta con un numero finito di passaggi logici e deve riposare su un numero finito di ipotesi, fornite dallo stesso problema e formulate in ogni caso con precisione.

Ora questa condizione di deduzione mediante un numero finito di passaggi logici non è altro che la condizione del rigore nella dimostrazione.

Infatti il rigore della dimostrazione, condizione che oggi è di importanza proverbiale nella matematica, corrisponde ad un bisogno filosofico generale del nostro spirito; d'altra parte i problemi manifestano completamente la loro portata e la loro fecondità soltanto soddisfacendo a questa condizione. Un nuovo problema che trae la sua origine dal mondo esterno, è come un ramo selvatico, il quale si sviluppa e porta frutto solo dopo che è stato innestato, con tutte le regole dell'arte del giardiniere, sulla pianta madre, cioè sulle conoscenze matematiche che noi possediamo completamente.

Del resto sarebbe errato credere che il rigore nelle dimostrazioni sia nemico della semplicità. Invece vi sono tanti esempi in contrario, i quali dimostrano che il metodo piú rigoroso è anche il piú semplice ed il piú facile a capirsi.

La ricerca del rigore ci conduce a scoprire ragionamenti sempre piú semplici, e ci apre inoltre la strada a metodi piú fecondi di quelli antichi, che erano meno rigorosi. [...]

Ma anche se io pongo il rigore come la prima condizione necessaria nel ragionamento per la risoluzione completa di un problema, tuttavia non posso non elevare la mia voce contro la opinione secondo la quale i soli problemi che ammettono di essere trattati in modo perfettamente rigoroso sono quelli di analisi matematica o di aritmetica.

Una concezione cosí ristretta del rigore ci condurrebbe infatti ad ignorare tutte le idee che sono state tratte dalla geometria, dalla meccanica e dalla fisica; una concezione cosiffatta sbarrerebbe l'entrata a tutto ciò che ci viene dal mondo esterno e, come ultima conseguenza, ci condurrebbe infine a respingere il concetto di continuo e di numero irrazionale. Quale sorgente di vita estirperemmo dalla matematica, se sopprimessimo la geometria e la fisica matematica! Al contrario invece io penso che ovunque si presentino delle idee matematiche, sia in filosofia (teoria della conoscenza), sia in geometria, sia in fisica, si pone il problema della discussione dei principi fondamentali, che sono alla base di queste idee e della enunciazione di un sistema completo e semplice di assiomi; e questo deve essere ottenuto in modo che il rigore delle definizioni nuove e la loro possibilità di applicazione non la cedano in nulla alle antiche definizioni aritmetiche.

A idee nuove corrispondono necessariamente dei simboli nuovi; noi dobbiamo scegliere questi ultimi in modo che essi ci richiamino i fenomeni dai quali le nuove idee sono state originate.

Cosí le figure della geometria sono dei simboli che ci richiamano l'intuizione dello spazio, ed in questo modo le figure sono impiegate da ogni matematico.

E chi è che, insieme con la doppia ineguaglianza $a > b > c$ fra tre quantità a, b, c, non si serve anche del disegno di tre punti, uno accanto all'altro su una retta, come simbolo geometrico che traduce la parola « fra »?

Quando si tratta di dimostrare un teorema difficile sulle funzioni continue o sui punti di accumulazione, chi di noi non impiega il disegno, con figure di segmenti di retta o di rettangoli compresi gli uni negli altri?

Come si potrà fare a meno della figura del triangolo, di quella del cerchio col suo centro oppure dei tre assi cartesiani ortogonali?

E chi potrebbe rinunciare a rappresentare i vettori, a disegnare le famiglie di curve e di superficie coi loro inviluppi, immagini che hanno una cosí grande importanza nella geometria differenziale, nella fondazione del calcolo delle variazioni, cosí come in altri rami della matematica pura?

I segni ed i simboli della aritmetica sono figure scritte, cosí come le figure della geometria sono formule disegnate; nessun matematico potrebbe fare a meno di queste formule disegnate, cosí come non potrebbe fare a meno, nei calcoli, delle parentesi o di altri simboli. L'impiego dei simboli geometrici come metodo rigoroso di dimostrazione presuppone la conoscenza esatta degli assiomi che stanno alla base di queste figure, e il completo dominio di questi assiomi; è quindi necessaria una discussione assiomatica rigorosa del contenuto intuitivo delle figure geometriche perché queste possano essere incorporate nel patrimonio generale dei simboli matematici. Come in aritmetica, nella addizione di due numeri, non si debbono mettere le cifre una sull'altra in modo inesatto, ma si debbono applicare esattamente le regole, cosí le operazioni sui simboli geometrici debbono essere determinate per mezzo degli assiomi della geometria e della associazione degli assiomi.

La coincidenza tra il pensiero geometrico ed il pensiero aritmetico si dimostra anche in questo: nelle ricerche aritmetiche, cosí come nelle considerazioni geometriche, noi non risaliamo ad ogni istante la catena delle deduzioni fino agli assiomi; al contrario, quando attacchiamo la prima volta un problema di aritmetica, esattamente come in geometria, noi facciamo anzitutto una catena di ragionamenti rapida, incosciente, non ancora definitiva, con una confidenza assoluta in un certo « sentimento aritmetico » e nella efficacia dei simboli della aritmetica stessa; senza questa confidenza non potremmo fare alcun progresso in aritmetica, cosí come non lo faremmo in geometria senza la facoltà di vedere nello spazio. [...]

Trovano qui il loro posto in modo naturale alcune osservazioni sulle difficoltà che si possono incontrare nella soluzione dei problemi matematici e sul modo di superare tali difficoltà.

Se non riusciamo a risolvere un problema di matematica, la ragione è che non abbiamo ancora raggiunto il punto di vista generale, dal quale il problema appare come un anello di una catena di problemi della stessa natura.

Ma una volta che noi abbiamo raggiunto questo punto di vista, non soltanto il problema diventa piú abbordabile, ma noi siamo anche in possesso di un metodo che si può applicare ai problemi della stessa specie di quello considerato. [...]

Questo modo di giungere ai metodi piú generali è senza dubbio il piú accessibile ed il piú sicuro; ed infatti colui che cercasse dei nuovi metodi senza avere un problema determinato davanti agli occhi, cercherebbe invano.

D'altra parte, almeno a mio avviso, nei problemi matematici la particolarizzazione ha una parte piú importante della generalizzazione. Quando cerchiamo invano la risposta ad un certo problema, nella maggior parte dei casi l'insuccesso dipende forse dal fatto che non abbiamo ancora risolto, oppure abbiamo risolto in modo soltanto incompleto, problemi piú semplici di quello che stiamo considerando. Allora si tratta di trovare questi problemi piú semplici e trovarne la soluzione con l'aiuto di strumenti i piú completi possibile, e con l'aiuto di concetti suscettibili di generalizzazione.

Questo modo di procedere è come una leva potentissima, che smuove le difficoltà matematiche, e nella maggior parte dei casi ci si serve, mi sembra, anche incoscientemente, proprio di questa leva.

Può avvenire anche che ci si sforzi di raggiungere una soluzione partendo da ipotesi insufficienti o mal comprese, e che quindi non si possa raggiungere lo scopo. Si tratta allora di dimostrare la impossibilità di risolvere il problema servendosi soltanto delle ipotesi enunciate, oppure con quella interpretazione delle ipotesi. Gli antichi ci hanno dato i primi esempi di cosiffatte dimostrazioni di impossibilità; essi hanno dimostrato che in un triangolo rettangolo isoscele l'ipotenusa ed il cateto non hanno un rapporto razionale.

Nella matematica moderna la questione della impossibilità di certe soluzioni ha una parte molto importante; molti problemi antichi e difficili, come la dimostrazione dell'assioma delle parallele, della quadratura del cerchio, della risoluzione per radicali della equazione di 5° grado, hanno avuto una risposta soddisfacente e rigorosa proprio in questo ordine di idee, anche se la risposta andava in una direzione del tutto diversa da quella in cui originariamente la si cercava.

Il fatto importante di cui abbiamo parlato or ora e certi ragionamenti filosofici hanno fatto nascere in noi la convinzione (che provocherà certamente una divisione tra i matematici, ma che finora nessuno ha puntellato con una prova) che ogni problema matematico determinato deve poter ottenere una soluzione rigorosa, sia con una risposta diretta alla questione sollevata, sia con la dimostrazione della impossibilità della risoluzione, cioè con la dimostrazione della necessità dell'insuccesso di ogni tentativo di risoluzione. [...]

Benché questi problemi appaiano inabbordabili e benché noi pensiamo di essere disarmati davanti ad essi, noi siamo tuttavia convinti che si debba poter risolvere questi problemi con un numero finito di deduzioni logiche.

Questo assioma, della possibile risolubilità di ogni problema, è forse una proprietà caratteristica ed esclusiva del pensiero matematico, oppure è una legge generale del modo di esistere della nostra conoscenza, cioè una legge secondo la quale ogni problema che la nostra mente si formula debba poter avere una risposta dalla nostra stessa mente?

Del resto anche presso altre scienze ci sono dei problemi antichi che sono finalmente stati risolti in modo soddisfacente con la dimostrazione della loro impossibilità e che, ciononostante, sono stati utilissimi per lo sviluppo della scienza.

Ricorderò per es. il problema del moto perpetuo; dopo tanti tentativi infruttuosi per costruire una macchina che realizzasse il moto perpetuo si giunse finalmente a cercare le relazioni tra le forze della natura che rendono impossibile un moto perpetuo; questo problema inverso condusse alla scoperta del principio di conservazione della energia, principio che, a sua volta, conduce a spiegare la impossibilità del moto perpetuo, cosí come era concepito in origine.

Questa convinzione della possibilità di risolvere ogni problema matematico è per noi un incoraggiamento prezioso durante il lavoro. Noi sentiamo sempre risonare in noi stessi questa voce: « Ecco il problema, cercane la soluzione. Tu puoi trovarla con il solo ragionamento. Mai un matematico sarà ridotto a dire: *Ignorabimus* ».

La folla dei problemi matematici è inesauribile: quando un problema è risolto una moltitudine di altri ne prende il posto.

In ciò che segue cercherò, come prova di ciò che ho detto fin qui, di proporre alcuni determinati, presi da diverse branche della matematica, il cui studio potrebbe condurre al progresso di questa scienza.

Gettiamo uno sguardo ai principi dell'analisi e della geometria; gli avvenimenti piú importanti che si sono verificati in questo campo nel XIX secolo sono, mi sembra, la concezione aritmetica della nozione di continuo, che si trova in Cauchy,[7] Bolzano e Cantor, come la scoperta della geometria non euclidea fatta da Gauss, Bolyai e Lobacevskij.

Attirerò dunque la vostra attenzione anzitutto su qualche problema che appartiene a questi campi.

A questo punto Hilbert inizia la celebre esposizione dei problemi aperti della matematica, esposizione che, per la sua tecnicità, non possiamo riportare qui.

---

[7] Augustin Louis (Baron) Cauchy (1789-1857), uno tra i piú grandi matematici francesi moderni, portò numerosi e fondamentali contributi nell'analisi matematica e in altri campi della matematica.

JACQUES SALOMON HADAMARD

Il francese Jacques Salomon Hadamard[1] *è stato uno dei grandi matematici degli ultimi cento anni e ha dato molti importanti contributi in diversi settori della matematica.*

Noi qui vogliamo però considerare non questi contributi, che sarebbe arduo presentare in modo comprensibile a chi non ha una preparazione specifica, ma alcune pagine del saggio La psicologia dell'invenzione nel campo matematico,[2] *che, oltre a preziose indicazioni di carattere psicologico sulla matematica, contengono importanti considerazioni su questioni di carattere piú generale.*

Hadamard ha fatto una analisi interessantissima della psicologia del matematico e dei procedimenti interiori con i quali la mente giunge alla scoperta di una verità matematica.

Egli, con la sua testimonianza, dimostra ancora una volta che la scoperta matematica costituisce un procedimento molto complesso nel quale la fantasia e la intuizione, la logica e l'esperimento concreto hanno

---

[1] Nato a Versailles nel 1865, studiò alla École Normale e alla École Polytechnique; divenne professore del Collège de France della École Polytechnique e della École Centrale des Arts et Manufactures; nel 1912 divenne membro dell'Institut de France (Académie des Sciences). Morí nel 1963.

[2] *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Dover Publication, Inc., 1954, copyright Princeton University Press, 1945.

il loro posto, anche se la commistione di questi vari elementi è diversa da soggetto a soggetto, a seconda della personalità del singolo scienziato e del suo gusto.

Presentiamo un passo nel quale Hadamard parla di altri matematici, rifacendosi anche a Poincaré e un passo nel quale parla di se stesso.

Intelligenze logiche ed intelligenze intuitive. Aspetto politico del problema

Dopo di aver parlato degli studenti di matematica, parliamo ora dei matematici veri e propri, cioè di coloro che non soltanto sono capaci di capire una teoria matematica, ma anche di costruirne delle nuove. Ora non soltanto costoro sono diversi dai semplici studenti, ma sono anche molto diversi tra loro.

È stata messa in rilievo una distinzione fondamentale tra i matematici: alcuni sono « intuitivi » ed altri sono « logici ». La distinzione è stata fatta da Poincaré ed anche dal matematico tedesco Klein.

Ecco quello che dice Poincaré in proposito: « I matematici di un certo tipo sono preoccupati soprattutto dalla logica; a leggere i loro lavori si è tentati di pensare che essi abbiano avanzato passo passo, come faceva Vauban, il quale spingeva le sue trincee verso la fortezza assediata, senza lasciare nulla al caso. I matematici dell'altro tipo sono guidati dalla intuizione e fanno delle conquiste veloci ma spesso precarie, come i cavalleggeri della avanguardia ».

Klein ha introdotto anche la politica in questo problema; egli dice: « Sembra che una certa intuizione spaziale elementare sia tipica della razza germanica, mentre il senso critico e puramente logico è piú sviluppato presso la razza latina e la razza ebraica ».

Si vede abbastanza bene, esaminando alcuni esempi, che questa asserzione non corrisponde ai fatti.

È chiaro infatti che Klein implicitamente considera la intuizione, con il suo carattere misterioso, superiore alla strada prosaica della logica e che egli è evidentemente felice di attribuire ai suoi compatrioti questa superiorità.

Abbiamo avuto un esempio di questo tipo di etnografia con il Nazismo; ma evidentemente c'era già qualche cosa di analogo nel 1893.

Ogni volta che la passione nazionalistica entra in gioco, si trovano delle interpretazioni tendenziose dei fatti di questo tipo. Uno dei nostri piú grandi scienziati e storici della scienza, il fisico Duhem,[3] fu portato fuori strada all'inizio della prima guerra mondiale da considerazioni di questo tipo, svolte nella direzione opposta. In un articolo abbastanza analitico egli presenta gli scienziati tedeschi e soprattutto i matematici, come mancanti di intuizione, oppure come sprezzanti della intuizione. È difficile capire come egli possa classificare in questo modo un uomo come Bernhard Riemann, che è indubbiamente uno degli esempi piú tipici di intelligenza intuitiva. L'affermazione fatta da Duhem nel 1915 appare altrettanto irragionevole di quella fatta da Klein nel 1893. Infatti se fosse vera l'una oppure l'altra delle due affermazioni si capirebbe subito che né i francesi né i tedeschi avrebbero fatto alcuna scoperta significativa.

In questo ordine di idee la cosa che mi sentirei di rimproverare ai matematici tedeschi è il ricorso metodico e pedante alle serie piuttosto che agli integrali in certe dimostrazioni di analisi e nelle applicazioni aritmetiche dell'analisi; ricorso che è dovuto soprattutto all'influenza di Klein e che appare piú « logico », mentre il ricorso agli integrali appare piú « intuitivo ». Forse c'è una componente di nazionalismo anche in questo, perché le serie sono state impiegate da Weierstrass (un tipico « logico ») la cui influenza ed il cui prestigio sono stati enormi tra gli studiosi tedeschi, mentre, in ricerche analoghe, Cauchy oppure Hermite hanno utilizzato degli integrali (che d'altronde sono stati utilizzati anche da Riemann).

Il punto di vista di Poincaré sull'argomento

Poincaré, piú saggiamente, a mio parere, non fa entrare la politica nella questione. Anzi, egli dimostra come sia priva di fondamento la connessione tra politica e queste questioni, perché, per illustrare la diversità tra i due tipi di intelligenza, egli fa ricorso a due francesi prima e a due tedeschi poi.

Tuttavia, dopo di aver accettato il punto di vista di Poincaré nelle sezioni da I a V, ora devo discostarmi da lui. Abbiamo citato il primo paragrafo della sua conferenza; vediamo il secondo, che dice cosí:

« Il metodo non è imposto obbligatoriamente dalla materia che si tratta. Si dice di solito che i matematici del primo tipo sono "analisti" e quelli del secondo tipo sono "geometri"; tuttavia esi-

[3] Pierre Maurice Duhem (1861-1916).

stono di quelli che rimangono "analisti" anche quando trattano di geometria ed altri che rimangono "geometri" anche quando si occupano di analisi matematica pura. È la natura della loro intelligenza che li rende logici oppure intuitivi, ed essi non possono non obbedire alla loro natura quando iniziano una ricerca ».

Cosa dobbiamo pensare di questo confronto tra i due paragrafi? In entrambi è stata fatta una distinzione tra intuizione e logica, ma partendo da fondamenti diversi, per quanto legati tra loro.

E ciò diventa ancora piú chiaro quando si analizzano gli esempi portati da Poincaré. Egli infatti a J. Bertrand,[4] che aveva una visione spaziale e concreta di ogni problema, contrappone la figura di Hermite, i cui occhi « sembrano evitare di guardare la realtà del mondo » e che « aveva una visione della verità "dal di dentro" ».

È certo che Hermite non aveva l'abitudine di pensare al concreto; egli aveva una specie di antipatia per la geometria ed una volta, stranamente, mi rimproverò di aver scritto un lavoro di geometria. Naturalmente i suoi lavori di matematica applicata sono pochi e non sono tra i suoi migliori. E quindi, dal punto di vista di Poincaré, egli dovrebbe essere considerato come un matematico « logico ». Ma è difficile chiamare Hermite un « logico ». Nulla può essere piú lontano dalla verità di questa asserzione. Infatti pareva che i metodi che egli esponeva fossero germinati nella sua testa in un modo del tutto misterioso. Nelle sue lezioni alla Sorbona, che egli svolgeva con entusiasmo, gli piaceva incominciare le dimostrazioni con la frase: « Partiamo dalla identità... », e qui scriveva una formula che era senza dubbio vera, ma che nella sua testa era nata non si sa come. [...]

... Ho desiderato di capire ciò che avviene nella mia mente quando cerco di costruire o di comprendere (ho detto prima che non vi è molta differenza) una dimostrazione matematica.

Ripeto che le parole sono totalmente assenti dalla mia mente quando penso realmente e sono pienamente d'accordo con Galton [5] nel senso che quando ho ascoltato o letto una questione, ogni parola

[4] Joseph Bertrand (1822-1900), francese, *enfant prodige*, insegnò alla École Polythecnique e al College de France; fu accademico di Francia e segretario a vita della Académie des Sciences.
[5] Sir Francis Galton (1822-1911), scienziato inglese iniziatore degli studi di eugenetica, precedentemente citato da Hadamard.

scompare nella mia testa quando incomincio a pensarci veramente; le parole riappaiono soltanto quando ho compiuto oppure abbandonato la ricerca, cosí come avveniva a Galton; e sono anche pienamente d'accordo con Schopenhauer[6] quando egli scrive che « I pensieri muoiono nel momento in cui vengono incarnati in parole ».

Ritengo essenziale sottolineare che il mio atteggiamento è uguale nei riguardi delle parole e dei simboli algebrici.

Io li impiego quando devo fare dei calcoli alla svelta; ma quando il problema comincia a diventare difficile, li abbandono, come se fossero un bagaglio troppo pesante da portare e uso delle rappresentazioni concrete, ma di natura del tutto diversa.

Un esempio di questo tipo è già conosciuto nella storia della scienza. È stato fornito da Eulero per spiegare le proprietà del sillogismo ad una principessa di Svezia. Egli rappresenta le idee generali con cerchi. Allora, se dobbiamo pensare a due categorie di enti, A e B, tali che ogni A è anche un B, immagineremo il cerchio A interno al cerchio B. Se invece nessun A è un B, allora immaginiamo i due cerchi A e B l'uno fuori dell'altro; se infine qualche A è anche B e qualche altro A non è un B, immagineremo i due cerchi come intersecantisi.

Personalmente, dovendo utilizzare un sillogismo, non lo farei con parole (perché le parole difficilmente mi permetterebbero di capire se il ragionamento è giusto oppure no), ma utilizzerei delle rappresentazioni analoghe a quelle di Eulero, con la sola avvertenza che utilizzerei delle figure chiuse anche non circolari, perché non mi pare che sia necessario utilizzare dei cerchi per poter immaginare delle figure che stanno l'una completamente dentro (oppure completamente fuori) dell'altra.

Per trattare un esempio piú semplice prendiamo la dimostrazione ben nota ed elementare del teorema che afferma che « la successione dei numeri primi è infinita ».

Ripeterò i passi successivi della dimostrazione del teorema, ed accanto a ciascuno di essi cercherò di descrivere le immagini che si formano in corrispondenza nella mia fantasia.

Si tratti di dimostrare, per esempio, che esiste un numero primo maggiore di 11.

---

[6] Arthur Schopenhauer (1788-1860), filosofo tedesco.

1) Considero i numeri primi da 2 fino ad 11,
e corrispondentemente
Vedo una massa confusa.

2) Formo il loro prodotto: $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$,
e corrispondentemente
Poiché N è un numero abbastanza grande, immagino un punto, abbastanza lontano dalla massa confusa di prima.

3) Aumento il prodotto di 1, cioè considero $N + 1$,
e corrispondentemente
Vedo un secondo punto, un po' dietro il primo.

4) Questo numero, se non è primo, deve ammettere un divisore primo, che è il numero che cerchiamo,
e corrispondentemente
Vedo un punto, tra la massa confusa ed il primo punto.

Quale è l'utilità di questo insieme di immagini nebulose e strane? Certamente esse non mi richiamano alcuna proprietà dei numeri primi o della divisibilità tra numeri ecc. ecc. [...]

Ma nello stesso tempo ci si può render conto facilmente del fatto che questo meccanismo di immagini (o un meccanismo analogo) mi può essere necessario per capire la dimostrazione.

Ho bisogno di queste immagini per avere una visione simultanea di tutti i momenti della dimostrazione, per tenerli insieme, in una parola per fare quella sintesi di cui ho parlato e per dare al problema la sua fisionomia.

Tutte queste immagini non mi danno alcuna informazione specifica (cioè non mi danno alcuna proprietà dei numeri primi e della divisibilità degli interi), ma mi aiutano a mettere insieme tutte queste proprietà...

FEDERIGO ENRIQUES

Federigo Enriques,[1] *uno dei piú grandi matematici italiani degli ultimi cento anni,*[2] *è l'autore delle pagine (tratte da* Le matematiche nella storia e nella cultura*) che abbiamo riportato come appendice alla « prefazione ». Presentiamo qui un suo passo*[3] *che appare in certo modo esemplare per capire molte cose che della matematica difficilmente vengono comprese da chi conosca questa scienza soltanto dall'esterno ed attraverso i trattati.*

Il titolo di questo passo, L'errore nelle matematiche, *potrebbe essere considerato come parzialmente paradossale, da chi concepisca la matematica come la scienza esatta per antonomasia e quindi priva di errori, nel senso banale del termine.*

Infatti la deduzione rigorosa, a volte addirittura pedante, viene considerata come una delle caratteristiche fondamentali della matematica, caratteristica che distingue questa scienza da altre che invece lasciano il posto alla ignoranza ed all'errore.

Sta di fatto invece che nel suo divenire, nel suo formarsi, nel momento della invenzione e della ricerca la matematica non può fare a meno della intuizione e della fantasia e che molto spesso i matematici cadono in errore.

Come si vedrà, Enriques presenta vari casi in cui i matematici sono caduti in errori per varie ragioni; ma paradossalmente egli osserva che l'errore costituisce, oltre che un tributo necessario alla natura umana ed alle sue debolezze, anche uno stimolo per la ricerca, per la critica; si potrebbe dire che spesso l'errore è stato addirittura « felice » perché si è ridotto semplicemente a trascurare certe precauzioni logiche che avrebbero imbrigliato la fantasia del ricercatore e del creatore di una nuova teoria.

---

1 Nato nel 1871 a Livorno, si laureò a Pisa nel 1891. Fu professore di geometria proiettiva e descrittiva nell'Università di Bologna dal 1896 e di geometria superiore nell'Università di Roma dal 1922; nel 1938 per le leggi razziali fu allontanato dal suo insegnamento, nel quale fu reintegrato nel 1944. Morí a Roma nel 1946. Socio nazionale dell'Accademia dei Lincei, appartenne anche a numerose altre accademie nazionali e estere e fu nominato dottore *honoris causa* da varie università straniere.

2 In particolare, insieme con Guido Castelnuovo e Francesco Severi, egli viene considerato come uno dei rappresentanti principali e piú autorevoli di quella scuola di geometria algebrica che, proprio in grazia degli apporti di questi uomini (e di altri numerosi e valenti), viene classificata come « scuola italiana ».

3 *L'errore nelle matematiche*, in « Periodico di matematiche », 1942 (serie IV, vol. XXII, pagg. 57-65); per le ragioni che verranno esposte nel testo, l'articolo è firmato Adriano Giovannini.

Questo articolo è comparso nel « Periodico di matematiche » nel 1942; le leggi razziali, allora vigenti in Italia, impedivano a Federigo Enriques di comparire come direttore della rivista che egli aveva diretto per decenni, e addirittura gli vietavano di apparire come autore di un articolo. Pertanto egli firma l'articolo con lo pseudonimo Adriano Giovannini, e ciò gli permette di dire ironicamente nelle prime righe che « L'autore di questo articolo non si presenta con un nome che gli dia autorità di giudicare su cose matematiche »; ironia che ancora una volta dimostra la superiorità della intelligenza sulla forza e sulla stupidità della violenza.

L'ERRORE NELLE MATEMATICHE

L'autore di questo articolo non si presenta con un nome che gli dia autorità di giudicare su cose matematiche; tuttavia l'amore che porta a questi studi nel loro aspetto storico, e le osservazioni che ha avuto luogo di fare sulla psicologia dei matematici, trovandosi con alcuni di essi in rapporti d'intima convivenza, gli consentiranno forse di esporre qualche riflessione, non del tutto oziosa, sul grande problema filosofico dell'errore, nella scienza e nella ricerca matematica.

I matematici classici della scuola alessandrina, Euclide e Archimede, ci hanno lasciato in eredità il concetto di una scienza matematica assolutamente sicura, nella quale, astrattamente, non vi è errore possibile; in concreto l'errore del matematico è riconoscibile come contravvenzione a regole certe di logica, la cui osservanza richiede soltanto una diligente attenzione, e può essere esemplificato coll'errore del contabile che sbaglia le somme in un rendiconto di cassa.

Questo ideale della sicurezza delle matematiche, i moderni lo hanno ripreso e a loro volta coltivato, ricercando criticamente le condizioni in cui esso, almeno approssimativamente, si avvera. Nei tempi piú vicini a noi l'analisi dei logici-matematici tende appunto a questo scopo, e riesce ad un resultato assai preciso: l'ordinamento logico di una teoria matematica, idealmente perfetta, si riduce ad un sistema ipotetico-deduttivo di proposizioni, e la verità di queste non è altro che dipendenza logica dalle ipotesi assunte. Cosí il teorema di Pitagora, vero nella geometria euclidea, appare falso nella non-euclidea; secondo il criterio logistico il matematico resta indifferente alla sua verità o meno per riguardo allo spazio che forma oggetto della comune intuizione o pretende di rispecchiare la realtà fisica. E non soltanto il valore di verità dei teoremi, sí anche il loro senso diviene relativo ad un sistema di convenzioni arbitrarie. In breve, la matematica diventa – con Bertrand Russell! – una scienza in cui non si sa di che cosa si parli, né se ciò che si dice sia vero o falso.

È chiaro che questa veduta non può appagare il filosofo e che una matematica vuota, ridotta al puro giuoco di combinazioni formali, perde valore anche agli occhi dello scienziato, aspirante a contemplare nei suoi oggetti di studio un ordine di specie della natura. Se, in luogo di paragonare il matematico al cassiere, lo paragoniamo all'azionista di una società commerciale, questi non può appagarsi del semplice pareggio aritmetico di un bilancio, senza verificare, per esempio, se sieno stati portati all'attivo crediti inesigibili.

Tuttavia le conseguenze pratiche del criterio logistico sembrano non rilevanti; perché verificando la dipendenza logica d'un teorema dalle premesse, comunemente accettate, della geometria euclidea, si assicura la verità di essa per riguardo allo spazio della nostra intuizione. Ma vediamo quale significato assuma l'errore nella valutazione di colui che accetti, incondizionatamente, il criterio del rigore logico.

Per il logico la scienza fatta rivestirà naturalmente la forma assiomatica, sopra indicata; in ogni esposizione che se ne allontani si riscontreranno, quasi ad ogni passo, errori, o almeno *lacune*. Si ha una lacuna ogni qualvolta nel discorso si afferma che una proposizione *b* si deduce da un'altra o da un complesso di altre proposizioni *a*, mentre la deduzione richiede il passaggio per qualche proposizione intermedia non enunciata.

Questa maniera di considerare le cose offre prospettive favorevoli a coloro che hanno una concezione sportiva della scienza, perché il perfezionatore di una teoria, che possa vantarsi di averne data per primo un'esposizione rigorosa, crede di acquistare cosí un diritto di proprietà in confronto degli autori della scoperta. È un giuoco assai ameno che da qualcuno si fa con arte, talvolta modificando alquanto la via segnata dai predecessori, per rendere meno riconoscibile la povertà dei nuovi apporti alle dimostrazioni già conseguite. Ma lasciamo da parte ciò che non interessa la scienza!

È difficile segnare i limiti fra una *piccola* e una *grande* lacuna, ed anche fra la *lacuna* e l'*errore propriamente detto*. Piccola lacuna sarebbe quella che costituisce il sottinteso di un'esposizione piú o meno sommaria, e anche un passaggio ingiustificato che richieda qualche facile complemento. Ma si sdrucciola dalla lacuna nell'errore, se pure agevolmente correggibile, se si sia creduto comunque di giustificare il mancato passaggio enunciando un legame di dipendenza che patisce eccezioni. Anche piú difficile riesce distinguere l'errore dalla lacuna quando si tratti di un passaggio non strettamente logico, ma essenzialmente intuitivo.

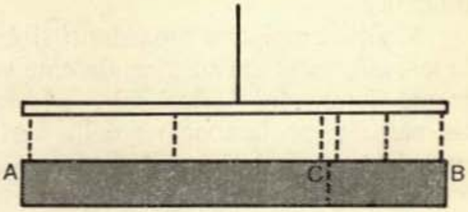
Ai tempi di Eudosso di Cnido si poteva ricevere il teorema di Pitagora sui triangoli rettangoli, ritenendolo dimostrato mercè la similitudine del triangolo ai due in cui esso viene diviso dall'altezza relativa all'ipotenusa. Siccome i teoremi sulla similitudine si fondavano allora sulla commensurabilità dei seguenti proporzionali, si aveva cosí una lacuna, che lo stesso Eudosso ebbe a colmare costruendo la teoria dei rapporti irrazionali, mentre Euclide proponeva piú tardi la sua nota dimostrazione del teorema di Pitagora, indipendente dal concetto della proporzione. Pertanto si può dire che, prima della costruzione critica d'Eudosso, la dimostrazione del teorema di Pitagora lasciava una lacuna per chi la riceveva ammettendo come ipotesi la commensurabilità dei lati del triangolo rettangolo e postulando che dal caso commensurabile si dovrebbe passare (per continuità) al caso incommensurabile, ed invece conteneva un errore per chi affermasse la commensurabilità di due segmenti o grandezze qualsiasi.

Archimede e Galileo, in diversi modi, hanno tentato di dimostrare la condizione d'equilibrio della leva (che è l'uguaglianza dei momenti statici prodotti dei pesi applicati dalle due parti per i rispettivi bracci di leva) sulla base del principio di ragion sufficiente, cioè mediante semplici considerazioni di simmetria. Queste dimostrazioni non hanno un valore strettamente logico, e vengono criticate da E. Mach.[4] Fermiamoci un momento, sulla dimostrazione di Galileo.

Galileo assume che un trave AB venga sospeso pei suoi estremi ad un'asta rigida parallela, sospesa questa nel suo punto di mezzo; il sistema è in equilibrio per ragione di simmetria. Ora, se si rompa il trave in un punto C, i due segmenti di esso verranno a cadere; per impedirlo basta applicare nei due punti estremi, coincidenti o vicini a C, una sospensione, come quelle che si hanno in A e B. Ma l'equi-

[4] Ernst Mach (1838-1916), fisico e filosofo austriaco.

librio dei due travi *AC* e *BC* si assicura egualmente sospendendoli all'asta rigida pei loro punti di mezzo. Cosí la leva è caricata di pesi diseguali in ragione inversa dei suoi bracci, ed è visibilmente in equilibrio.



Il Mach non ha torto di notare che, in questo ragionamento, si suppone qualcosa; per esempio, che nulla muti l'equilibrio della leva quando (collo spezzamento del trave *AB*) si sopprime un legame rimpiazzandolo con un altro (sospensione in *C*) ovvero che il centro di gravità della somma dei due travi *AC* - *BC*, sia quello stesso del trave non spezzato *AB*. Ma il critico arriva a giudicare il discorso come un circolo vizioso, ritenendo che tali ammissioni equivalgono al principio che si vuol dimostrare. Chi esamini la dimostrazione di Galilei cercandovi soprattutto un argomento che fa appello alla nostra intuizione (o, se si vuole, un'esperienza pensata) non accetterà facilmente la conclusione troppo severa!

Invero il principio dell'equivalenza dei momenti non ha affatto l'evidenza delle ipotesi che s'introducono nel discorso galileiano, il quale perciò – nonostante la lacuna o l'errore che il logico possa scoprirvi – resta bellissimo e conserva il suo valore per chi investighi i postulati della statica.

Non a caso i grandi fondatori della scienza moderna ricorrono spesso all'intuizione per trarne le piú importanti scoperte, giacché la filosofia razionalistica che ispira le loro ricerche riconosce appunto alla ragione, non già l'ufficio di un puro intelletto logico, ma quello della ragione matematica, che è pensiero intuitivo, scopritore di rapporti necessari onde si fa comprensibile la natura.

Allo stesso Galileo il Duhem rimprovera come paralogismo il discorso in cui prova che la velocità di caduta dei gravi è indipendente dalla massa, adducendo che la riunione di due masse uguali non può aggiungere alla loro velocità di caduta. Questo argomento, con cui egli dice essere stato persuaso dalla ragione prima che assicurato dal senso, non è – chiaramente – una dimostrazione logica, tantoché non varrebbe se le forze sollecitanti la caduta dei gravi fossero qualcosa di simile agli appetiti degli animali che si esaltano nell'associazione. Perciò il fisico neoscolastico vede nel discorso galileiano un errore, in cui un logico, come l'antico precursore della dinamica Giovanni Filopono,[5] non poteva cadere. Diciamo in tal caso: fausto errore, da cui esce una piú giusta comprensione della dinamica!

Negli esempi che precedono si è parlato di errori-lacune, dove la tesi affermata era sostanzialmente vera. Ma anche l'errore propriamente detto, cioè la tesi falsa affermata come vera, può costituire un passo verso la scoperta della verità ed ha quindi un significato non del tutto negativo nel progresso della scienza.

Fra i tanti esempi che si presentano in quest'ordine d'idee, citiamo l'errore di Gergonne,[6] che dal principio di dualità della geometria proiettiva deduceva le curve algebriche d'ordine n dover essere anche di classe n, perché — diceva — se fossero di classe $m > n$ si dedurrebbe per dualità $n > m$! Quest'affermazione affatto erronea ha porto occasione a Poncelet di spiegare l'imbarazzante paradosso che qui s'incontra, mostrando che le curve generali d'ordine n sono bensí inviluppi di classe $n(n-1)$, ma non sono inviluppi generali in questa classe, onde resultano quelle formule tra i caratteri di una curva che, in parte Poncelet stesso, o piú completamente Pluecker[7] dopo di lui, hanno stabilito.

Le nostre osservazioni tendono a farci riconoscere in generale il significato dell'errore come tentativo e passo verso la scoperta della verità. Diciamo « in generale » intendendo di escludere i puri errori di disattenzione per fermarci a quelli che s'incontrano quasi necessariamente nell'acquisto psicologico di una dottrina e spesso si rispecchiano nello sviluppo storico della scienza. C'è, piú o meno, errore quando l'intuizione supera e dimentica le strette esigenze della logica per affermare qualcosa che è vero (e riesce allora incompletamente dimostrato) o è falso; anche in questo caso l'errore ci mette nelle condizioni di scoprire il vero, rifiutando un'opinione a cui la nostra mente sembri inclinare per natura o per influenza dell'ambiente.

Non ignoriamo le critiche diffidenti che oggi si muovono all'intuizione. L'intuizione c'inganna — dicono i critici dell'analisi infini-

---

[5] Detto anche « il grammatico », filosofo e teologo greco del VI secolo.
[6] Joseph Diez Gergonne (1771-1859), matematico francese.
[7] Julius Pluecker (1801-1868), matematico e fisico tedesco.

tesimale; essa pretende, ad esempio, che una curva continua ammetta di regola una tangente in ogni punto, laddove la funzione continua che definisce la curva può ben essere priva di derivata. Ma l'errore non è proprio dell'intuizione, anzi sorge da un rapporto male aggiustato fra intuizione e logica: giacché si confondono una classe di enti logicamente definiti (cioè le curve rappresentative delle funzioni continue nel senso dell'analisi) e una famiglia di oggetti della nostra intuizione, quali sono le curve (intuitive) del geometra. Comunque anche qui si può dire: « felix error », poiché la critica che ne scaturisce tende a riconoscere esplicitamente le condizioni che definiscono i nostri enti intuitivi, e a generalizzarli colla costruzione di altri oggetti del pensiero matematico.

Discutiamo e approfondiamo il significato della nostra affermazione paradossale che l'errore è un passo verso la verità. Il paradosso cesserà di apparir tale se, in luogo di fermarsi staticamente alla tesi erronea, si consideri questa nello sviluppo della scienza; integrando dialetticamente l'errore colla correzione dell'errore, che da esso trae occasione e motivo. Per l'errore propriamente detto, la correzione si fa col mettere in evidenza qualche contraddizione contenuta nella tesi accettata e cosí col ridurla all'assurdo.

Conviene osservare che l'errore, quale a noi si presenta nell'esposizione d'una dottrina scientifica, è soltanto ciò che rimane di una serie di errori per cui la mente dell'autore è dovuta passare nel suo sforzo creativo; e che tutti questi errori superati sono parte essenziale del detto sforzo, come oggetto di una lotta che tende appunto a vincerli e superarli.

Rilevare il significato dell'errore nella costruzione scientifica non significa affatto disconoscere ciò che esso importa di negativo, contro cui è d'uopo combattere. Su questo vi sarebbe da scrivere un volume; ma ci limiteremo a poche osservazioni, rivolte soprattutto ai giovani studiosi, intorno all'errore nella ricerca matematica.

Per munirsi contro il pericolo dell'errore i matematici sogliono suggerire di regola il piú minuto controllo del ragionamento e quindi la necessità di un assoluto rigore logico. Ottima cosa quando sia possibile senza limitare o impacciare troppo la ricerca scientifica! Quando si tratti delle piú alte ed astruse dottrine, e di matematici che non temono di volare in questi cieli, crediamo ad ogni modo che la cura minuziosa del rigore logico non valga *in concreto* a evitare o a diminuire effettivamente le probabilità dell'errore. Perché la mente tutta assorbita dal controllo dell'esposizione formale del ragionamento, rischia piú facilmente di lasciarsi andare alle apparenze fallaci di un'intuizione meno esercitata. E perché l'analisi che si rivolga ai particolari di uno sviluppo deduttivo riesce talvolta a distrarre l'attenzione da ciò che fa la sintesi e il significato di tale sviluppo, ove importa soprattutto distinguere il piú e il meno essenziale.

Il vero rigore non si risolve in un'analisi delle espressioni verbali, ma consiste piuttosto nella discussione di esempi caratteristici e in particolare dei casi in cui la tesi che si accetta sembrerebbe cadere in difetto. Anche in questo punto è suggestivo per noi l'insegnamento di Galileo, quando dice che del suo teorema Pitagora, prima di trovarne la dimostrazione, dovette essere assicurato dal senso. Il cammino dello spirito umano è essenzialmente induttivo; cioè procede dal concreto all'astratto. Perciò la comprensione del generale è bene sempre conseguire come un grado piú alto di qualcosa di piú facile che sia già conosciuto, cioè come « generalizzazione ». D'altronde l'esempio ha una virtú chiarificatrice che ne fa un valido istrumento della ricerca scientifica e, in pari tempo, un prezioso mezzo di verificazione e di correzione delle dottrine. Ognuno che abbia provato ad impostare un problema particolare (di geometria o di meccanica ecc.) sa bene come sia difficile far rientrare un caso dato nello schema generale astratto, che pure la scienza ci offra come oggetto di una trattazione completa. Ancor piú evidente è il valore euristico degli esempi, perché ognun sa che il raffronto di casi diversi in cui si palesi qualcosa di comune è atto a suggerire alla nostra mente le piú belle generalizzazioni, additandoci cosí la migliore posizione dei problemi, che è tanta parte del progresso della scienza.

Tuttavia la nostra tesi che la cura del piú minuzioso rigore logico non sia riparo sufficiente contro l'errore, questo insegnamento che raccogliamo dall'esperienza, può sembrare ancora ingiustificato ed assurdo.

Le ragioni del paradosso appariranno chiare a chi investighi piú profondamente il problema delle origini dell'errore: se la mente umana possiede la facoltà di scorgere le proprietà degli oggetti intuiti, come può fallare? e come mai la possibilità dell'inganno non varrebbe a scuotere la nostra fiducia? È il problema che Platone pone nel *Teeteto*: mi turba il non poter dire che sia questa passione per cui ci capita di opinare il falso.[8]

Ma mentre la difficoltà sembra quasi insolubile per il razionalismo del filosofo ateniese, il nostro razionalismo, temperato nei conflitti coll'empirismo, consente piú facile la risposta. In verità l'inganno non appartiene all'intuizione che si eserciti sulle immagini di oggetti percepiti, ma s'introduce nel processo formativo dei concetti astratti. Non sbaglia chi vede una superficie sferica o cilindrica o conica non essere traversata in un punto del piano tangente, ma piuttosto chi forma su codesti esempi il concetto astratto della superficie, trascurando la possibilità di superficie a punti iperbolici (traversate in ogni punto dal piano tangente). Anzi non errava Archimede cosí limitando il concetto della superficie (ritenuta in ciascun punto concava o convessa) nella sua determinazione delle aree superficiali; l'errore nasce solo se si trasporti inconsciamente il postulato limitativo alle superficie definite in senso piú largo. Similmente si dica per chi imprenda ad esaminare i postulati dell'« Analysis situs », se gli avvenga di opinare che ogni superficie possieda due facce, trascurando il caso delle superficie unilatere scoperto da Moebius.[9]

Anche l'errore svelato dai critici dell'« Analisi infinitesimale » di cui si è detto innanzi (curve continue senza tangente) si spiega nel medesimo modo. Sicché pare che, in generale, l'errore non infirmi tanto l'intuizione, come rappresentazione visiva del particolare, quanto l'estensione sua a concetti astratti. In qualche modo si può dire che esso non appartiene né alla facoltà logica né all'intuitiva, ma s'introduce nel momento delicato del loro raccordo. In concreto non ci sono una facoltà intuitiva ed una facoltà logica distinte, ma l'una e l'altra si fondono nell'unità dialettica dello spirito umano, ad un tempo come solidali ed opposte. Invero l'astrarre (che rende possibile di estendere l'intuizione a classi piú generali di oggetti) è insieme un atto intuitivo e logico ed ha perciò due significati o momenti strettamente connessi, che non debbono confondersi in un processo mentale semi-oscuro.

Cosí dunque l'analisi del problema dell'errore viene a convalidare le norme che abbiamo tratto come ammaestramento dell'esperienza del lavoro dei matematici nella storia. Se e finché la mate-

---

8 *Teeteto* 197, cfr. ENRIQUES e DI SANTILLANA: *Storia del pensiero scientifico*, pag. 157. (*N.d.A.*)

9 August Ferdinand Moebius (1790-1868), matematico e astronomo tedesco.

matica progredisca nel suo cammino millenario, senza isterilirsi nell'esercizio di pedanti senza fantasia, queste norme conserveranno il loro valore, e di fronte (in opposizione solidale) alle esigenze di una logica sempre piú raffinata, si affermeranno ancora i diritti dell'intuizione, che è l'attività creativa della scienza.

INDICI

INDICE DEI NOMI (*)

(*) Sono in corsivo i numeri delle pagine con notizie biografiche o inizio di notizie biografiche; non sono riportati gli autori dei trattati elencati alle pagg. 9-12 e gli editori.

W

Z

INDICE GENERALE

Finito di stampare nel 1976 per conto di U. Mursia editore
dalla Società Editrice Subalpina - Torino

Lucien Chambadal

DIZIONARIO DI MATEMATICA MODERNA

vol. in 8°, pp. 248

Le piú recenti opere di matematica, trattati o manuali, usano un linguaggio completamente nuovo, ricco e spesso comprensibile solo agli iniziati e non alla portata degli studenti e dei neofiti.
Questo dizionario, di cui si sentiva ormai da tempo la necessità anche in Italia, permette di conoscere e di approfondire lo straordinario sviluppo verificatosi nel campo della matematica nel corso degli ultimi anni, sviluppo che si è tradotto non solo in un continuo cambiamento dei programmi di insegnamento, ma, soprattutto, in un completo rinnovamento della terminologia.
Il volume è indispensabile sia per gli studenti sia per tutti coloro che desiderano avvicinarsi allo studio della matematica cosiddetta « moderna »: offre infatti un panorama completo dei concetti piú attuali, presenta l'equivalenza delle diverse terminologie oggi in uso precisandone le notazioni, introduce i singoli concetti in modo chiaro e sistematico, facendoli seguire da numerosi esempi chiarificatori, e contiene anche brevi notizie sui maggiori matematici contemporanei.

Graham Chedd

LE NUOVE FRONTIERE DELLA BIOLOGIA

vol. in 8°, pp. 248

Gli ultimi venti anni sono stati testimoni della nascita e dei prodigiosi successi di una scienza — la biologia molecolare — che ha radicalmente mutato la strategia d'attacco ad una delle piú antiche ed ambiziose sfide raccolte dalla mente umana: la spiegazione del mistero della vita.
Graham Chedd, apprezzato studioso (è direttore editoriale, per la sezione biologica, dell'importante rivista *New Scientist*), si accosta in questo libro al mondo della biologia molecolare con affettuosa ammirazione verso gli artefici di una rivoluzione culturale di tale portata da poter essere posta a confronto forse soltanto con l'affermazione della teoria evolutiva di Darwin.
Avendo scelto come criterio ordinatore per l'esposizione della materia l'evoluzione storica delle idee e la successione temporale degli esperimenti che di volta in volta hanno fornito conforto ad esse o le hanno smentite, l'autore restituisce intatto quel clima di successi e delusioni, di entusiasmi e ripiegamenti critici che, pur essendo caratteristica comune al procedere della scienza in ogni campo, è familiare solo agli scienziati stessi che di quel procedere sono gli artefici, e sfugge invece al pubblico, cui giunge unicamente l'informazione sulle conquiste saldamente acquisite ed ormai depurate da ogni eco di polemica, di travaglio, di errori, di speranze che ne hanno accompagnato il raggiungimento. Il lettore si vede cosí offerta da queste pagine la possibilità di giungere a conoscere il mondo di una giovane disciplina scientifica cosí come lo conosce lo scienziato, e di ripercorrere per ogni conquista l'intero ciclo (osservazione-ipotesi di lavoro-progettazione ed esecuzione della verifica sperimentale) di cui essa rappresenta la conclusione.

Emerge dal libro un quadro vivo e appassionante delle acquisizioni teoriche della biologia molecolare, delle sue possibili applicazioni pratiche in un futuro non piú lontano (debellamento delle malattie ereditarie e delle infezioni virali; lotta al cancro; contrasto di quel processo — l'invecchiamento — che si tende ormai a considerare non piú inevitabile e intrinseco a tutti i fenomeni vitali, bensí anomalo alla stregua di qualunque altra malattia), delle sue mete ambiziose (risolvere le attività superiori del cervello in termini fisico-chimici) ed anche, purtroppo, degli spettri che l'inquietante potenzialità di una sua branca applicativa (l'ingegneria genetica) agita nell'anima dei nuovi « apprendisti stregoni ».

Angelo Fadini - Gennaro Scognamiglio

ORIENTAMENTI DELLA MATEMATICA MODERNA

vol. in 8°, pp. 256

Un volume eminentemente pratico in cui gli autori, partendo da una interessante premessa sull'importanza e sulla posizione della matematica nella cultura moderna, presentano un breve ma esauriente panorama dei fondamenti delle piú attuali teorie matematiche quali quella degli insiemi e delle strutture algebriche, per terminare con un'accurata esposizione dei principali problemi didattici relativi all'insegnamento della matematica moderna.
Un testo, dunque, indispensabile per i docenti, che trovano in esso una guida sicura per migliorare la propria tecnica di insegnamento, ma, nello stesso tempo, anche per gli autodidatti, che possono reperire, esposte con estrema chiarezza e mediante numerosi esempi, le nozioni essenziali per accostarsi in modo nuovo e appassionante a questa disciplina che sempre maggior peso va assumendo nel mondo d'oggi.

Saunders Mac Lane - Garrett Birkhoff

ALGEBRA

vol. in 8°, pp. 600

Un normale trattato di Algebra moderna mostra i numeri interi, i numeri reali, i numeri complessi, i polinomi, i vettori, le matrici ed i determinanti come esempi di gruppi, anelli, corpi, spazi vettoriali. In questo testo il materiale standard dell'Algebra viene invece presentato sistematicamente da un nuovo punto di vista: i sistemi assiomatici e le relazioni di equivalenza su cui si fondano le costruzioni dell'Algebra moderna sono qui introdotti e trattati con il linguaggio delle categorie, dei funtori, degli oggetti universali e della dualità, linguaggio essenzialmente dovuto agli autori di questo libro.
Il testo è corredato da moltissimi esercizi sia di tipo tradizionale, sia di tipo nuovo, tali da permettere a chi ne affronta lo studio di familiarizzarsi con le nuove idee della teoria delle categorie e copre ampiamente gli argomenti che di norma sono svolti in un corso universitario di Algebra.

John G. Taylor

LE NUOVE FRONTIERE DELLA FISICA

vol. in 8°, pp. 256

Gli avvenimenti, le intuizioni, i problemi della fisica moderna, dalla fissione alla fusione nucleare, dalla relatività alla classificazione delle particelle, dalla validità dei principi di conservazione alle teorie cosmologiche costituiscono l'argomento della trattazione, sviluppata non solo sotto il profilo storico, ma soprattutto sotto quello della logica intrinseca agli argomenti stessi.

Non solo gli eventi dunque, le prove sperimentali, le ricerche, ma le teorie che portano l'ordine nel caos apparente dei fatti sperimentali e ispirano le nuove ricerche sono esposti dall'autore con l'entusiasmo di chi vede « altrettanta bellezza in una teoria fisica quanta ce n'è in un quadro o in una composizione musicale ». Cosí il lettore, anche privo di preparazione matematica, rimane coinvolto in quell'avventura del pensiero che è il problema dell'esistenza dei quark o dei tachioni o quello relativo alla natura dei quasar, mentre scopre il modo di procedere della ricerca e intuisce le varie possibilità degli sviluppi futuri della fisica.

Un'opera, dunque, entusiasmante, diretta sia ai profani che vogliono accostarsi a questa appassionante disciplina, sia agli « addetti ai lavori », ai quali può interessare come sintesi del pensiero fisico contemporaneo.