DEMONSTRAÇÕES POR REDUÇÃO AO ABSURDO NO VOLUME I DO *ELEMENTOS* DE EUCLIDES

Mateus de Souza Galvão
Universidade de Pernambuco – Campus Petrolina
mattheusgalvao@hotmail.com

Leilane Araujo dos Santos
Universidade de Pernambuco – Campus Petrolina
leilane_leila10@hotmail.com

João Paulo Carneiro Barbosa
Universidade de Pernambuco – Campus Petrolina
joao.barbosa@upe.br

Resumo:
Historicamente o método de redução ao absurdo aparece na Matemática como uma das ferramentas de grande poder para o desenvolvimento e fortalecimento desta ciência. Mesmo sem ter sua origem bem definida e em meio às críticas, a técnica de redução ao absurdo foi e permanece sendo aplicada no trabalho de diversos matemáticos e, principalmente na obra de grande valor para a Matemática de todos os tempos, o *Elementos* de Euclides. Esta obra exerceu e continua a exercer vasta influência no conhecimento científico e apresenta pela primeira vez o método dedutivo e axiomático, responsável por caracterizar a Matemática até mesmo nos dias de hoje. E é sobre esta obra que nos inclinaremos à procura das proposições do volume I nas quais Euclides aplica o método indireto de demonstração, intuindo descrever algumas delas, em linguagem atual, e identificar as demais. Para alcançar os objetivos aqui mencionados, utilizou-se a pesquisa de caráter bibliográfico.

Palavras-chave: demonstração; redução ao absurdo; *Elementos* de Euclides; volume I.

1. Introdução

Sabemos que, em Matemática, quando necessitamos firmar a validade de determinado argumento devemos recorrer a algum método que nos possibilite tal efeito. Dentre as diferentes formas de comprovação, o método de redução ao absurdo, também conhecido como método de demonstração indireta ou negação, configura-se como uma das ferramentas mais poderosas da Matemática quando se trata de demonstração.

Diferentemente do método de demonstração direta, ou "redução ostensiva", que se inicia assumindo a hipótese como verdadeira, fazendo-se uma sequência de passos lógicos dedutivos e, por conseguinte, chegando diretamente à tese, o método de redução ao absurdo consiste inicialmente em admitir como verdadeira a negação de determinada afirmação e continuando-se o processo de demonstração observa-se, como consequência, o surgimento de uma contradição, o que torna a negação da hipótese inicial um absurdo.

Uma boa maneira de perceber a importância de um método demonstrativo é vê-lo sendo utilizado em importantes obras históricas. No caso da redução ao absurdo, o *Elementos* de Euclides (325 – 265 AEC) é um dos muitos textos em que este método demonstrativo é utilizado. Textos como os de Eves (2004, p. 170) comprovam isso

> Na proposição I 6 estabelece a recíproca da proposição I 5 [...] É nessa proposição dos *Elementos* que se usa pela primeira vez no texto o método de demonstração indireta ou de *reductio ad absurdum.* Posteriormente ele é empregado com frequência por Euclides.

Pela grande relevância desta obra para a Matemática, o fato da presença da demonstração indireta se configura como ilustração para o valor deste método para a Matemática.

De posse da informação de que Euclides utiliza a redução ao absurdo e debruçando-se sobre as 48 proposições do livro I, uma pergunta foi natural: quais são as proposições, no livro I do *Elementos,* em que Euclides faz uso da redução ao absurdo? Sendo sua obra de grande valor para a Matemática, faz-se importante dissecá-la à procura das proposições em que ele emprega o método de redução ao absurdo, intuindo num trabalho ulterior catalogar em que tipo de proposição ele utiliza tal método, ou seja, buscar relações entre as proposições que apresentam o mecanismo indireto de comprovação.

No presente trabalho, o principal objetivo foi identificar as proposições em que a redução ao absurdo está sendo utilizada. Além de identificar pretendeu-se apresentar, em linguagem atual, algumas das proposições. Para atingir o objetivo mencionado anteriormente utilizou-se a pesquisa de caráter bibliográfico. Foram consultados livros e artigos publicados que abordem o assunto em questão.

2. Redução ao absurdo

A história de como surgiu o método de demonstração por redução ao absurdo, assim como outros temas que se originam numa época remota da antiguidade, está permeado de algumas inconsistências. Garbi (2009) sugere que essa ideia tenha surgido na época dos Pré-platônicos, ou seja, por volta dos séculos VI e V AEC e indica Hipasus de Metaponto, pitagórico que viveu aproximadamente em 470 AEC, como um dos possíveis nomes a ter utilizado o método para demonstrar a existência das grandezas incomensuráveis.

ISSN 2178-034X

Diferentemente de Garbi que indica um período, Escher apud Valente (2007) indica um nome: Zenão de Eléia (488 – 430 AEC). Este teria introduzido o absurdo aparente como princípio de raciocínio filosófico; ele é considerado o criador da dialética, isto é, da lógica entendida como redução ao absurdo. Os paradoxos de Zenão e as provas matemáticas de impossibilidade do movimento são hoje de conhecimento da sociedade contemporânea. Nesse sentido, Dinucci (2008) corrobora com Valente ao afirmar que Aristóteles (384 - 322 AEC) é quem teria creditado a invenção do método indireto a Zenão.

Ainda que desde seu início o método tenha sido bastante utilizado, o mesmo não ficou livre de críticas ou depreciações. Aristóteles (1987, p.81), em *Segundo Analíticos*, versa sobre a redução ao absurdo: “Como a demonstração afirmativa é superior à demonstração negativa, torna-se evidente que é também superior à demonstração por redução ao absurdo”. Aristóteles utiliza o termo “superior” no sentido de melhor demonstração, que para ele seria a que nos oferece um melhor conhecimento. Já Garbi (2009) diz que tal método é uma espécie de último recurso ao qual se apela quando falham todas as formas diretas de demonstração de uma verdade. Por fim, para Ottoni apud Valente (2007)

> Dos diversos métodos de demonstração com que S. Ex. mais simpatiza é o de demonstrar por absurdo; e o uso que faz dele é tão extenso e quase exclusivo, que se torna em abuso (...). A demonstração por absurdo é pouco analítica, menos convincente que as outras, e por isso menos própria para o ensino. É pouco analítica porque, segundo ela, o geômetra não procede por caminho direto, de dedução em dedução, das verdades conhecidas para as desconhecidas. É menos do que as outras convincente, e própria para o ensino; porque exige que o leitor abranja com o pensamento o todo da demonstração, e requer às vezes não pequena tensão de espírito para bem compreender-se a relação necessária entre a hipótese feita e o absurdo ou contradição que resultou, relação frequentemente complicada e composta. (p. 139)

Mesmo Aristóteles atacando severamente o método indireto, ao dizer que o mesmo é inferior ao mecanismo de demonstração direta, ele não se furta em utilizá-lo até mesmo para apresentar uma explicação do que seria uma demonstração por absurdo.

Embora sofrendo algumas depreciações, o método de demonstração indireta está presente na obra de grandes matemáticos. A exemplo, Arquimedes de Siracusa (287-212 AEC) que segundo Bassalo (1996), teria utilizado o argumento de redução ao absurdo para demonstrar importantes teoremas e proposições, que foram muito importantes na realização de seus cálculos. Outro matemático que utilizou, de acordo com Coxe (2013) foi Evangelista Torricelli (1608 -1648), que teria sido cuidadoso em usar argumentos de redução ao absurdo para provar quadraturas que obteve por indivisíveis.

Outro matemático que, segundo Juliani (2008), teria utilizado o método seria o monge italiano Girolamo Saccheri (1667 – 1733). "O mesmo teria obtido um dos primeiros resultados de geometrias não euclidianas, embora não tivesse percebido, utilizando o método de redução ao absurdo". E como já mencionado, o método indireto de demonstração também está presente na grande obra de Euclides, o *Elementos*. Façamos algumas considerações sobre essa obra.

3. O *Elementos* de Euclides

O *Elementos* de Euclides foi e continua sendo utilizado, exercendo, provavelmente, uma das maiores influências no pensamento científico. O objetivo de Euclides ao escrever a obra parece ser consensual, teria sido reunir em 13 volumes, organizado em uma sequência lógica, material didático para o ensino de geometria elementar. É fato que a maior parte do trabalho de Euclides provinha de compilações de trabalhos anteriores. Para Eves (2004, p. 169)

> Não há dúvida de que Euclides teve que dar muitas demonstrações e aperfeiçoar outras tantas, mas o grande mérito do seu trabalho reside na seleção feliz de proposições e no seu arranjo feliz numa sequência lógica, presumivelmente a partir de umas poucas suposições iniciais.

A obra de Euclides foi a primeira a utilizar minuciosamente o sistema dedutivo e axiomático, que teria sido idealizado por Aristóteles. Segundo Eves (2004, p. 132) Aristóteles foi "o sistematizador da lógica dedutiva, além de ter deixado vários escritos sobre temas da física, algumas partes de sua *Analytica Posteriora* revela um domínio raro do método axiomático".

Em tal sistema apresentam-se inicialmente definições, postulados e noções comuns. As definições consistem em uma espécie de abreviação que caracteriza o objeto matemático, sendo necessárias às demonstrações e aparecem na maioria dos volumes da obra. Já os postulados enunciam o que se pode fazer por meios geométricos, tendo em vista que "postular" significa "pedir para aceitar" e, diferentemente das definições, eles só aparecem no primeiro volume da obra. As noções comuns, denominadas comumente de axiomas, tratam de questões de caráter geral e não específicas da geometria, são verdades evidentes e que são responsáveis por estruturar todo sistema dedutivo e axiomático. Assim como os postulados, as noções comuns também só estão presentes no livro I do *Elementos*.

É a partir das definições, postulados e noções comuns que Euclides desenvolve as proposições presentes no decorrer de toda sua obra que, com os seus treze volumes, está

ISSN 2178-034X

organizado da seguinte maneira: no livro I, inicia-se com as definições, os postulados e as noções comuns. Neste volume, existem 48 proposições, dividindo-se entre propriedades do triângulo, teoria das paralelas e relação das áreas de paralelogramos, quadrados e triângulos. No segundo volume estão contidas quatorze proposições que lidam com transformações de áreas e com a "álgebra geométrica" da escola pitagórica. O livro III é composto por trinta e nove proposições, no qual estão incluídos muitos dos teoremas familiares sobre círculos, cordas, secantes, tangentes e medidas de ângulos. O livro IV possui dezesseis proposições, em que se discute a construção, por meio da régua e compasso de três, quatro, cinco, seis e quinze lados, também a inscrição e circunscrição desses polígonos num círculo dado.

O livro V contém a exposição da teoria das proporções de Eudoxo e o livro VI destina-se a aplicação dessa teoria na geometria plana e também contém os teoremas fundamentais da semelhança de triângulos; construções de terceiras, quartas e médias proporcionais e resolução geométrica de equações quadráticas. Os três volumes subsequentes, VII, VIII e IX contém um total de cento e duas proposições e tratam da teoria elementar dos números. Já o décimo livro com suas cento e quinze proposições é o mais extenso dos volumes da obra, destinado aos irracionais. Por fim, os três últimos livros, XI, XII e XIII tratam de geometria sólida.

Com seus treze volumes, o *Elementos* dominou o ensino da geometria por mais de dois milênios, e para Brito (1995) eles

> Foram de suma importância para o desenvolvimento posterior da matemática, uma vez que neles está organizado todo o conhecimento matemático de uma época, com exceção dos estudos sobre seções cônicas e da geometria esférica. (p.34).

Como já mencionado, de todos os livros da obra de Euclides, nos deteremos ao primeiro de seus volumes, do qual apresentaremos em linguagem atual algumas das proposições que utilizam o método de redução ao absurdo. No livro I estão presentes os postulados, noções comuns e definições, que caracterizam a obra de Euclides. Façamos algumas asserções mais específicas a respeito do primeiro volume.

4. Método de redução ao absurdo no volume I do *Elementos*

O primeiro volume do *Elementos,* inicia-se com vinte e três definições, cinco postulados e nove noções comuns. Tanto as definições, postulados e noções comuns serão aqui mencionados no decorrer das demonstrações, como também as proposições à qual Euclides recorre. Em meio às 48 proposições analisadas do primeiro volume da obra, constatou-se que entre elas existe nove em que Euclides utiliza o método de redução ao absurdo, a saber: 6, 7, 19, 25, 26, 27, 29, 39 e 40. Para efeito deste trabalho, descreveremos cinco entre elas, que serão escolhidas pelo fato de que, possivelmente, elas apareçam com maior frequência na educação básica e até mesmo em outros níveis subsequentes de educação.

Observemos a demonstração da proposição 7, a segunda em que Euclides recorre ao método de redução ao absurdo e também as demonstrações das proposições 26, 29, 39 e 40:

PROPOSIÇÃO 7 – *Sobre a mesma reta não serão construídas duas outras retas iguais às duas mesmas retas, cada uma a cada uma, em um e outro ponto, no mesmo lado, tendo as mesmas extremidades que as retas do começo.*

Nesta proposição temos a reta AB e deseja-se provar que não é possível a construção sobre esta, das retas AD igual a AC e as retas DB igual à CB, com C e D tendo as mesmas extremidades.

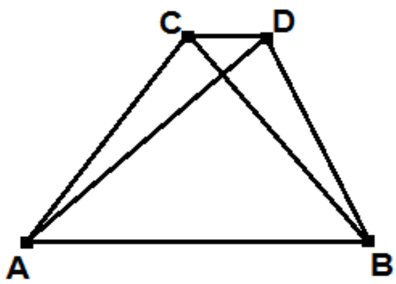

Figura 1 – Proposição 7

Supondo que possível, teremos a reta CA igual à reta DA, tendo a mesma extremidade A e também a reta CB igual a DB, com a mesma extremidade B. Ligam-se os pontos C e D.

Sabendo que as retas AC e AD são iguais, também teremos o ângulo ACD igual ao ângulo ADC (proposição 5), portanto o ângulo ADC será maior que o ângulo DCB (noção comum 8), e também o ângulo CDB será por muito maior que o sob DCB (proposição 5). Lembrando que as retas CB é igual à reta DB e consequentemente os ângulos CDB e DCB são iguais, sendo que também foi provado anteriormente o ângulo CDB maior que o DCB, o que torna a suposição inicial impossível.

PROPOSIÇÃO 26 – *Caso dois triângulos tenham os dois ângulos iguais aos dois ângulos, cada um a cada um, e um lado igual a um lado, ou o junto aos ângulos iguais ou o que se estende sob um dos ângulos iguais, também terão os lados restantes iguais aos lados restantes, (cada um a cada um,) e o ângulo restante ao ângulo restante.*

ISSN 2178-034X

Caso tenhamos dois triângulos ABC e DEF, com dois ângulos iguais, ABC ao DEF e o BCA ao EFD, e também apresentarem um lado igual a um lado, primeiramente o lado entre esses ângulos iguais, com o lado BC igual ao EF. Deseja-se provar que eles também terão o restante dos lados iguais, com AB igual à DE e AC igual a DF, e o ângulo restante iguais, com o ângulo BAC igual ao EDF.

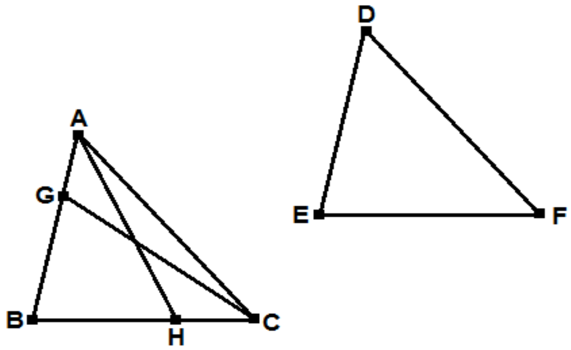

Figura 2 – proposição 26

Supondo que a reta AB é diferente da reta DE, uma delas terá de ser maior. Tomando a AB como maior, colocamos BG igual à DE, e ligamos os pontos G e C. lembrando que BG é igual à DE, a reta BC a EF, e o ângulo GBC igual ao ângulo DEF. Logo a base GC também será igual a DF, e o triângulo GBC será igual ao DEF, assim os ângulos restantes serão iguais aos restantes que os correspondem, o ângulo GBC ao DFE (proposição 4). Mas o ângulo DFE foi posto igual ao BCA, logo o ângulo BCG também é igual ao BCA, o que é impossível, pois o maior é igual ao menor (noção comum 8). Desta forma a reta AB não será diferente da reta DE, elas serão iguais. Lembrando que as retas BC, EF também são iguais, e o ângulo ABC igual ao DEF, logo a base AC será igual a DF e o ângulo restante BAC será igual ao EDF restante (proposição 4).

Mas fazendo, novamente só que desta vez o lado igual ao lado será as retas que se estendem sob os ângulos iguais, como a reta AB à DE, desejamos provar que os lados restantes correspondentes serão iguais, a reta AC à DF e a BC à EF, e o ângulo BAC restante será igual ao EDF restante.

Supondo a reta BC diferente da reta EF, uma delas terá de ser maior. Tomando, se possível, a BC como maior, colocamos BH igual à EF e ligamos os pontos A e H. Lembrando que a reta BH é igual à EF e também a reta AB é igual à DE, com o ângulo ABH igual ao DEF. Logo a base AH também será igual a DF, e o triângulo ABH será igual ao DEF, assim os ângulos restantes serão iguais aos restantes que os correspondem, o ângulo BHA será igual ao EFD (proposição 4). Mas o ângulo EFD foi posto igual ao BCA, desta forma o ângulo exterior BHA do triângulo AHC será igual ao BCA, que é interior e oposto, o que é impossível (proposição 16). Portanto a reta BC não será diferente da EF, elas serão iguais. Lembrando que a reta AB também é igual à DE e o ângulo ABC é igual ao DEF, logo a base AC será igual à base DF, e o triângulo ABC será igual ao DEF, e o ângulo BAC será igual ao ângulo EDF (proposição 4). O que era preciso provar.

PROPOSIÇÃO 29 – *A reta, caindo sobre as retas paralelas, faz tanto os ângulos alternos iguais entre si quanto o exterior igual ao interior e oposto e os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos.*

Caindo a reta EF, sobre as retas paralelas AB e CD, deseja-se provar que serão formados os ângulos AGH e GHD alternos, iguais, o ângulo EGB exterior e igual ao ângulo GHD que é interior e oposto, e os ângulos BGH e GHD interiores no mesmo lado, igual a dois retos.

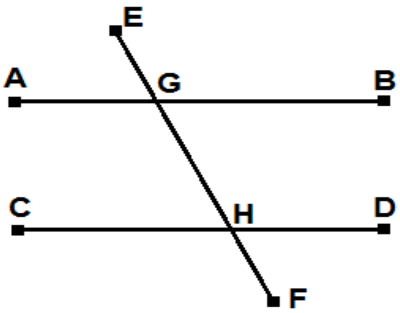

Figura 3 – Proposição 29

Supondo que o ângulo AGH seja diferente do ângulo GHD, desta forma um deles terá de ser maior. Tomamos o ângulo AGH como maior, e adicionando o ângulo BGH comum, teremos os ângulos AGH, BGH maiores do que os ângulos BGH, GHD. Sabendo que os ângulos AGB e BGH são iguais a dois retos, teremos que os ângulos BGH e GHD serão menores que dois retos e se prolongássemos as retas AB e CD nesta condição, elas se encontrariam (postulado 5) o que não é aceito, pois as retas AB e CD são paralelas (definição 23), logo o ângulo AGH é igual ao ângulo GHD, e como o ângulo AGH é igual ao EGB, teremos o ângulo EGB igual ao GHD, adicionando o ângulo BGH comum, temos que os ângulos EGB, BGH são iguais aos ângulos BGH, GHD e como os ângulos EGB, BGH são iguais a dois retos os ângulos BGH, GHD também serão, o que era preciso provar.

ISSN 2178-034X

PROPOSIÇÃO 39 – *Os triângulos iguais, que estão sobre a mesma base, e no mesmo lado, também estão nas mesmas paralelas.*

Nesta proposição temos dois triângulos ABC, DBC iguais, estando ambos sobre uma mesma base BC e mesmo lado, pretende-se provar que também estarão numa mesma paralela.

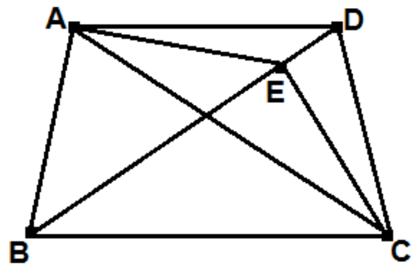

Figura 4 – Proposição 39

Pois se ligarmos os pontos A e D, podemos dizer que a reta AD é paralela à reta BC. Supondo que não, se traçássemos pelo ponto A, uma AE paralela a reta BC, e ligarmos a EC, teremos o triângulo ABC igual ao triângulo EBC, pois o triângulo EBC está na mesma base BC e mesma paralelas (proposição 37). Lembrando que o triângulo ABC é igual ao DBC, DBC também será igual ao triângulo EBC (noção comum 1), o maior ao menor, o que não é possível. Da mesma forma podemos provar que nenhum outro será paralela exceto a AD. Sendo assim AD é paralela a BC, o que era preciso provar.

PROPOSIÇÃO 40 – *Os triângulos iguais, que estão sobre as bases iguais, e no mesmo lado, também estão nas mesmas paralelas.*

Deseja-se provar que os triângulos ABC e CDE, que estão sobre as bases BC, CE iguais, respectivamente, e no mesmo lado, estarão nas mesmas paralelas.

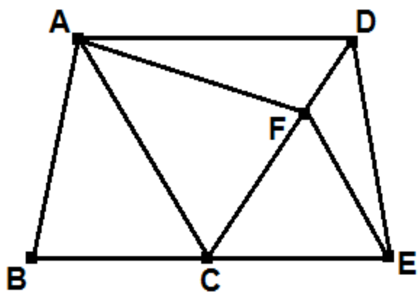

Figura 5 – Proposição 40

Se ligarmos os pontos A e D, podemos dizer que AD é paralela a BE. Supondo que não, se ligarmos A a F de forma que AF seja paralela a BE, e ligarmos os pontos F e E.

Teremos o triângulo ABC igual ao FCE, por ambos estarem sobre as bases iguais BC, CE e mesmas paralelas BE, AF (proposição 38). Assim o triângulo DCE será igual ao FCE (noção comum 1), o maior ao menor, o que é impossível, logo a reta AF não é paralela a BE, o que era preciso provar. Podemos provar da mesma forma que nenhuma outra será paralela exceto a AD, então AD é paralela à reta BE.

5. Considerações finais

Historicamente as demonstrações se caracterizam como a grande ferramenta no desenvolvimento da Matemática. Assim como todos os outros métodos de demonstração, o mecanismo de redução ao absurdo possibilita que a Matemática continue ampliando seus horizontes. Mesmo sendo alvo de críticas, esse mecanismo não deixou de fazer parte de uma das maiores obras da Matemática, o *Elementos* de Euclides e também de diversas outras.

Na obra de Euclides, aparecem algumas proposições em que podemos ver o mecanismo de demonstração por redução ao absurdo sendo aplicado, seguindo o rigoroso método dedutivo e axiomático, que de tão plausível perdura até os dias de hoje. Das proposições descritas neste trabalho, do primeiro volume da obra, podemos ilustrar a aplicabilidade deste mecanismo e propiciar subsídios para um trabalho de ordem mais complexa ulteriormente, que é o de investigar as características das proposições da obra de Euclides em que se aplica o método indireto de demonstração.

6. Referências

ARISTÓTELES. **Analíticos posteriores.** / Tradução e notas de Pinharanda Gomes. 2. ed. Lisboa: Guimarães Editores, 2003.

BASSALO, José Maria Filardo. A Crônica do Cálculo: I. Antes de Newton e Leibniz. **Revista Brasileira de Ensino de Física**. Pará, v. 18. n. 2, p. 103 – 112, jun. 1996.

BRITO, Arlete de Jesus. **Geometrias Não-Euclidianas:** um Estudo Histórico-Pedagógico. Dissertação de Mestrado. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 1995.

COXE, Infeliz Carvalho. **Funções racionais na integração:** da técnica e tecnologia à discussão de conteúdos básicos em um curso de licenciatura em matemática. Dissertação de Mestrado. Belo Horizonte: Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2013.

DINUCCI, Aldo Lopes. Analise das três teses do tratado do não-ser de Górgias de Leontinos. **O que nos faz pensar**. n. 24, out. 2008.

EUCLIDES. **Os Elementos.** / Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** / Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas Editora da UNICAMP, 2004.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A rainha das ciências:** um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. 3. ed. rev. e ampl. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

JULIANI, Rafael Tavares. O desejo do absurdo. In: 1º Congresso de História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia – UFRJ / HCTE, 2008. Rio de Janeiro. **Anais**... Rio de Janeiro, 2008.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Uma história da matemática escolar no Brasil, 1730 – 1930.** 2. ed. São Paulo: Annablume, 2007.