CLEAI, matematica generale: esercizi svolti #2

Studio di funzione

Disegnare il grafico della seguente funzione (la derivata seconda è facoltativa):

$$f(x) := \begin{cases} x^2 e^{-2x} & \text{se} \quad x \leq -1 \\ x^2 - 1 & \text{se} \quad x > -1 \end{cases}$$

Evidenziare in particolare i seguenti punti: (a) campo d'esistenza e suoi punti di accumulazione; (b) punti in cui f è sicuramente continua, punti in cui f è sicuramente derivabile; (c) punti di discontinuità; (d) limiti; (e) asintoti; (f) monotonia; (g) punti di non derivabilità; (h) tangenti destra e sinistra in $x = -1$.

Svolgimento

Chiamiamo per comodità $f_1(x) = x^2 e^{-2x}$ e $f_2(x) = x^2 - 1$. Osserviamo che conosciamo il grafico di f_2 (è una parabola con vertice in $(0, -1)$ e concavità verso l'alto), dunque l'esercizio si riduce allo studio di f_1 nell'intervallo $(-\infty, -1]$.

(a) $\mathrm{CE} = (-\infty, +\infty)$, $\mathrm{CE}' = [-\infty, +\infty]$.

(b) Poiché f_1 e f_2 sono funzioni continue e derivabili nei loro campi di esistenza, f è sicuramente continua e derivabile in $\mathrm{D} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

(c) Eventuali discontinuità vanno studiate in $\mathrm{CE} - \mathrm{D} = \{-1\}$:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} f_1(x) = \lim_{x \to -1^-} x^2 e^{-2x} = e^2$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f_2(x) = \lim_{x \to -1^+} x^2 - 1 = 0$$

Poiché i limiti destro e sinistro sono diversi, si conclude che in -1 NON ESISTE il limite, e dunque f NON è continua in -1.

(d) I limiti vanno calcolati in $\mathrm{CE}' - \mathrm{D} = \{-\infty, -1, +\infty\}$. Il limite in -1 è già stato svolto, mentre quello in $+\infty$ è noto.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f_1(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 e^{-2x} = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

(e) Visti i limiti calcolati al punto precedente, possiamo dedurre che non ci sono asintoti verticali o orizzontali. Rimane la possibilità che ci siano asintoti obliqui verso $-\infty$ (per quanto riguarda $+\infty$ sappiamo che la parabola non ha asintoti obliqui).

$$m = \lim_{x \to -\infty} f(x)/x = \lim_{x \to -\infty} f_1(x)/x = \lim_{x \to -\infty} x e^{-2x} = +\infty$$

dunque NON ci sono asintoti obliqui.

(f) La monotonia è data dal segno della derivata prima (vedi figura 1).

$$f'(x) := \begin{cases} (2xe^{-2x} - 2x^2 e^{-2x}) & \text{se} \quad x < -1 \\ 2x & \text{se} \quad x > -1 \end{cases} = \begin{cases} 2xe^{-2x}(1 - x) & \text{se} \quad x < -1 \\ 2x & \text{se} \quad x > -1 \end{cases}$$

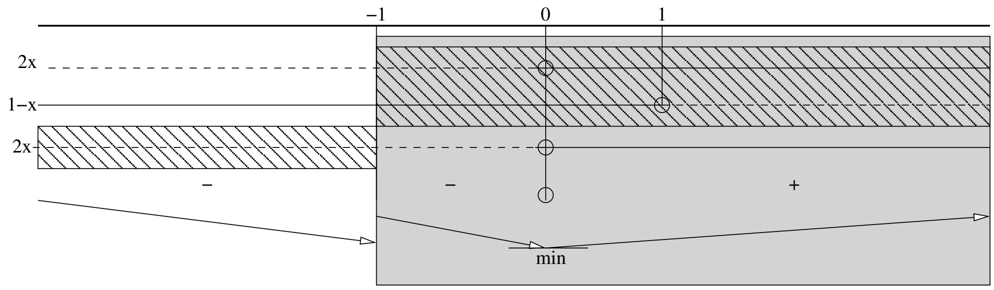

Figura 1: Segno di f': il tratteggio indica parti che non ci interessano, il grigio indica la parte che si poteva evitare perché già nota.

(g) Eventuali punti di non derivabilità vanno cercati in $\mathrm{CE} - \mathrm{D} = \{-1\}$. In questo caso, poiché f non è continua in -1, la derivata in -1 NON esiste.

(h) I coefficienti angolari delle tangenti destra e sinistra in -1 sono dati rispettivamente dai limiti destro e sinistro di f' in -1:

$$m^- = \lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^-} 2xe^{-2x}(1-x) = -4e^2$$
$$m^+ = \lim_{x\to -1^+} f'(x) = \lim_{x\to -1^+} 2x = -2$$

La tangente sinistra passa per il punto $(-1, \lim_{x\to -1^-} f(x)) = (-1, e^2)$, la tangente destra passa per il punto $(-1, \lim_{x\to -1^+} f(x)) = (-1, 0)$. Otteniamo:

$$\text{tangente sinistra: } y - e^2 = m^-(x+1) \Rightarrow y - e^2 = -4e^2(x+1);$$
$$\text{tangente destra: } y = m^+(x+1) \Rightarrow y = -2(x+1).$$

Collazionando tutte le suddette informazioni, si ottiene il grafico per f (figura 2). Notare che il grafico è ottenuto per incollamento dei grafici di f_1 e f_2, e abbiamo sfruttato dove possibile la conoscenza del grafico di f_2.

Notare che per disegnare il grafico di f abbiamo dovuto fare le seguenti considerazioni:

- $e^2 > 0$;
- $-4e^2 < -2$, dunque la tangente sinistra va disegnata PIÙ inclinata della tangente destra.

Infine, osserviamo che non avendo fatto la derivata seconda, non abbiamo alcuna garanzia che la concavità a sinistra di -1 sia come in figura 2.

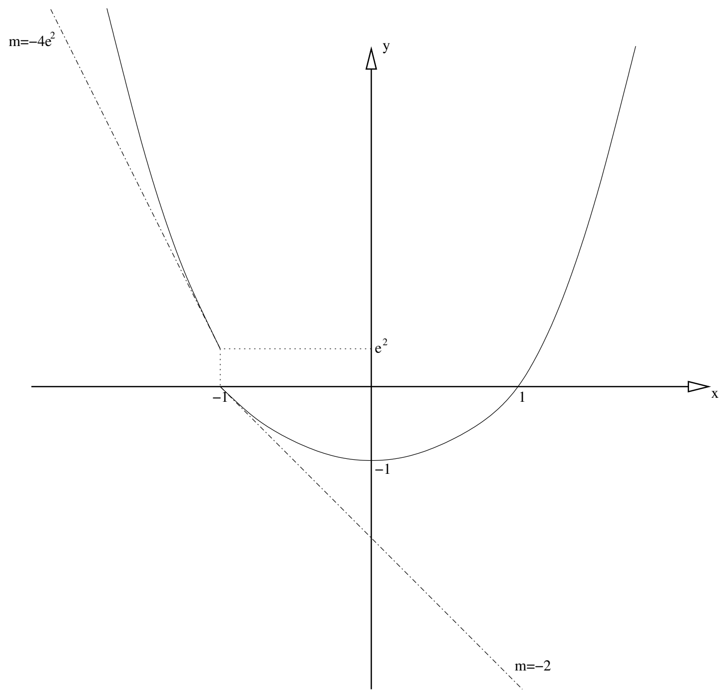

Figura 2: Grafico di f: notare che da -1 in poi il grafico è una parabola.

Studio di grafico di funzione

Data $f(x)$ tramite il grafico in figura 3, determinare: (a) campo d'esistenza e suoi punti di accumulazione; (b) zeri; (c) intersezioni con gli assi; (d) segno; (e) punti di discontinuità; (f) limiti; (g) asintoti; (h) punti e valori critici; (i) monotonia; (j) estremi locali e globali; (k) punti di non derivabilità; (l) tangenti destra e sinistra in 3.

Svolgimento

(a) $\mathrm{CE} = (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$, $\mathrm{CE}' = [-\infty, -2] \cup [-1, +\infty]$.

(b) Gli zeri sono le ascisse delle intersezioni con l'asse x, cioé $\{-3, 2, 5\}$.

(c) Le intersezioni con l'asse x sono i punti $(-3, 0), (2, 0), (5, 0)$, e l'intersezione con l'asse y è il punto $(0, 2)$.

(d) Il segno è dato dalla figura 4.

(e) Le discontinuità vanno cercate nel campo di esistenza della funzione, e graficamente corrispondono a "salti" nel grafico. Nel nostro caso, la funzione non ha alcun salto nel CE, e dunque NON ci sono discontinuità.

(f) I limiti importanti sono quelli in $\mathrm{CE}' - \mathrm{CE} = \{-\infty, -2, -1, +\infty\}$. Passeggiando sul grafico

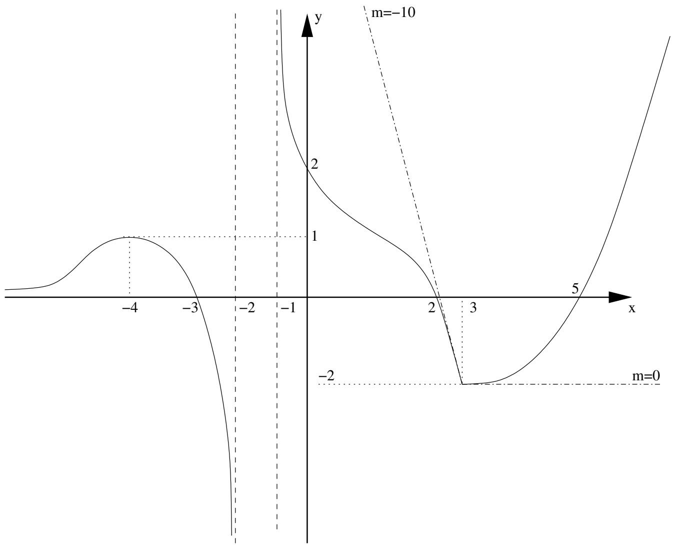

Figura 3: Da questo grafico, dedurre proprietà della funzione.

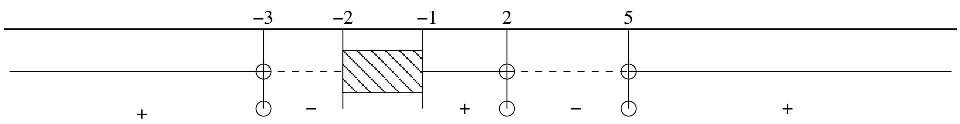

Figura 4: Segno della funzione data dal grafico in figura 3.

e guardando l'asse y durante la passeggiata, otteniamo:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

(g) $y = 0$ è asintoto orizzontale verso $-\infty$, $x = -2$ è asintoto verticale da destra verso $-\infty$, $x = -1$ è asintoto verticale da sinistra verso $+\infty$.

(h) I punti critici sono i punti in cui la tangente è orizzontale (cioé i punti in cui la derivata è zero). L'unico punto siffatto in figura 3 è $(-4, 1)$. Si usa la terminologia "punto critico" anche per l'ascissa -4 di questo punto, mentre il valore critico è la sua ordinata 1.

(i) La monotonia è data dalla figura 5.

(j) Essendo la funzione illimitata sia superiormente che inferiormente (vedi i limiti al punto f), non ci sono estremi globali. Gli estremi locali sono $(-4, 1)$ (massimo locale) e $(3, -2)$ (minimo locale).

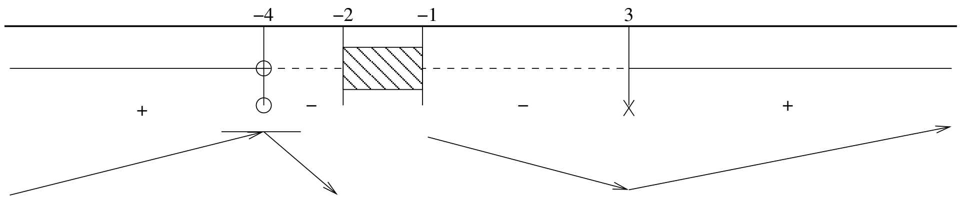

Figura 5: Monotonia della funzione data dal grafico in figura 3.

(k) Nel punto $(3, -2)$ ci sono due tangenti differenti, da destra e da sinistra. Analiticamente, questo corrisponde a due valori differenti per la derivata destra e sinistra, dunque la funzione in figura 3 NON è derivabile in 3.

(l) La tangente sinistra è $y + 2 = -10(x - 3)$, la tangente destra è $y + 2 = 0$.

Massimi e minimi

Determinare i punti e i valori di minimo e massimo (locali e globali) sull'intervallo $(0, 3]$ della seguente funzione:

$$f(x) := 3x - 2(x - 1)^2$$

Svolgimento

La funzione è polinomiale di grado 2, dunque il suo grafico sull'intervallo $(0, 3]$ è un tratto di parabola. Svolgendo il quadrato otteniamo $f(x) := -2x^2 + 7x - 2$, e la sua derivata $f'(x) = -4x + 7$ si annulla nel punto $7/4$. Osservando che il primo coefficiente è negativo, e disegnando il tratto di parabola, otteniamo un massimo globale e locale in $7/4$, il cui valore di massimo è $f(7/4) = 33/8$, e un minimo locale in 3, con valore di minimo $f(3) = 1$. Infine, poiché $f(3) = 1 > -2 = f(0)$, 3 NON è minimo globale (notare anche che poiché 0 non appartiene all'intervallo $(0, 3]$, 0 NON è un minimo).

Zeri

Stabilire se $f(x) := e^x - \ln(x^2)$ ammette degli zeri su $(0, +\infty)$. In caso affermativo, dire quanti sono gli zeri e stimarli con precisione di almeno un'unità.

Svolgimento

Studio sommario di f.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$f'(x) = e^x - 2x/x^2 = e^x - 2/x$$

Vogliamo ora discutere graficamente $f'(x) = 0$. A tal scopo, facciamo uno studio sommario di f':

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$$
$$f''(x) = e^x + 2/(x^2)$$

Poiché f'' è positiva, f' si annulla in un solo punto x_0. Inoltre da $f'(1) = e - 2 > 0$ segue che $x_0 < 1$.

Resta da capire se $f(x_0)$ è positivo o negativo. Poiché $\ln x^2 < 0$ per $x < 1$ (si pensi al grafico di $\ln x$), deduciamo che $e^x - \ln(x^2) > 0$ per $x < 1$, dunque il minimo di $f(x)$ si trova sopra all'asse x. Perciò f NON ha zeri nell'intervallo $(0, +\infty)$.

Punti fissi

Stabilire se la curva $f(x) := e^x$ e la retta $y = x$ si intersecano. In caso affermativo, dire quanti sono i punti di intersezione e stimarne le ascisse con precisione di almeno un'unità. Infine, discutere i punti fissi di $f(x) := e^x$.

Svolgimento

Il problema è equivalente a trovare gli zeri di $F(x) = e^x - x$, e si risolve facendo uno studio sommario di F. Il campo di esistenza di F è $\mathbb{R}$, dunque dobbiamo fare i limiti in $\{-\infty, +\infty\}$.

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$$
$$F'(x) = e^x - 1$$

Poiché $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$, deduciamo che F ha un minimo globale in 0. Essendo il valore di minimo $F(0) = 1$ positivo, F non ha zeri su tutto $\mathbb{R}$, il che equivale a dire che la curva $f(x) := e^x$ e la retta $y = x$ NON si intersecano.

I punti fissi di $f(x) := e^x$ sono le intersezioni con la retta $y = x$, quindi f NON ha punti fissi.

Teorico

Dire se $f(x) := 7e^{\sqrt{|x^{123} - x^5 + 157|}}$ ammette massimo e minimo globale nell'intervallo $[0, 1]$ (giustificare la risposta).

Svolgimento

Le funzioni x^{123}, x^5, 157 sono continue in $[0, 1]$. La funzione $|x|$ è continua su $\mathbb{R}$, dunque $|x^{123} - x^5 + 157|$ è continua su $[0, 1]$. La funzione $\sqrt{x}$ è continua in $[0, +\infty)$, dunque dobbiamo verificare che $|x^{123} - x^5 + 157|$ sia non negativo. Lo è.

Dunque $\sqrt{|x^{123} - x^5 + 157|}$ è continua su $[0, 1]$. Infine, poiché $7e^x$ è continua su $\mathbb{R}$, otteniamo che f è continua su $[0, 1]$.

Non rimane altro da fare che applicare il teorema di Weierstrass per dedurre che f ammette massimo e minimo globale nell'intervallo $[0, 1]$.