

Un probleme inviers in diagnostiche struturâl: identificazion di danegjaments in trâfs di misuris di frecuencis naturâls e frecuencis di antirisonance

MICHELE DILENA & ANTONINO MORASSI *

Ristret. In chest lavôr a si fas viodi che lis variazioms des frecuencis naturâi e des frecuencis di antirisonance prodotis da un danegjament struturâl in une trâf in vibrazion assiâl a contignint informazioms su cierts coeficients di Fourier da variazioms di rigjdece causade dal danegjament. Cheste proprietât a è usade par definî une procedure costrutive dal coeficient incognit basade su un agjornament iteratîf da configurazion integre iniziâl. I risultâts des simulazioms numerichis su trâfs cun danegjament localizât o distribuît a si son dimostrâts in acordo cun lis previsionis da teorie, in particulâr cuant che lis variazioms misuradis da lis frecuencis e antirisonancis a erin plui grandis dai erôrs di modelazion o di misure. I risultâts sperimentâi otignûts su trâfs metalichis cun intais a an mostrât che, te risolucion dal probleme inviers, i erôrs di modelazion su lis antirisonancis a vignint gjeneralmentri amplificâts rispjet a ce ca sucêt cuant che a si doprin dome misuris di frequence.

Peraulis clâf. Diagnostiche struturâl, trâfs, frecuencis di risonance e di antirisonance, probleme inviers.

1. Introduzion. Chest lavôr al trate un probleme di identificazion di danegjaments struturâi in trâfs vibrants basât su la misure des primis frecuencis naturâls e frecuencis di antirisonance.

La gran part des tecnichis dinamichis dopradis par la identificazion struturâl a son basadis su la misure des variazioms des frecuencis naturâls, che si fasi riferiment, par esempli, ai lavôrs di Adams et al. (1978) e Hearn & Testa (1991). Di fat, lis misuris des frecuencis naturâls a

*Dipartiment di Gjeorisorsis e Teritori, Universitât dal Friûl, Udin, Italie.
E-mail: antonino.morassi@uniud.it

son plui simplicis di chês dai mûts di vibrâ e gjeneralmentri a son ancje plui precisis. Lis technichis diagnosticichis disponibilis inte letierature specializade a son basadis, di solit, suntun criteri di otimizazion che al proviôt un azornament iteratîf de distribuzion di rigjidece di un sisteme strutturâl, par esempli corispuindi al stât iniziâl cence danegjament, in maniere di ridusi la difference tra i valôrs analitics e chei sperimentâi des primis frecuencis di risonance, che si viodi il libri di Friswell & Motterhead (1995) par une presentazion gjenerâl di chest sogjet. Par cheste vie, intai ultims cuindis agns a son stâts otignûts risultâts interessants, almancul par ce che rivuarde la identificazion di danegjaments in trâfs e in simplicis structuris a telâr, cf. (Liang et al. 1992, Hassiotis & Jeong 1993, Law et al. 1998, Vestroni & Capecchi 2000, Cerri & Vestroni 2000, Capecchi & Vestroni 2000, Ren & De Roeck 2002, Sinha et al. 2002). In ogni câs, la mancjance di une strutture teoriche clare a mont di chestis technichis di otimizazion e compuarte dute une serie di dificolâtis, sore dut dovudis ae no unicitât de soluzion, che a rindin difcil il studi di problemis reâi, cf. (Davini et al. 1993, Davini et al. 1995, Morassi & Rovere 1997).

In chest articulo il probleme de identificazion di un danegjament strutturâl intune trâf elastiche al è studiât di un pont di viste diferent. Ipotizant che la trâf danegjade e sedi otignude come perturbazion dal coeficient di rigjidece de trâf integre e che la densitât lineâr di masse no cambi, a si mostre che lis variacions des frecuencis naturâls e des frecuencis di antirisonance prodotis dal danegjament si podin meti in relacion cun cierts coeficients di Fourier de variacion di rigjidece incognite. Cheste proprietât e je doprade par meti adun une procedure di ricostruzion basade suntun azornament iteratîf de configurazion iniziâl. In tal câs di une trâf libare-libare in vibrazion assiâl e inizialmentri costant, si è cjatât che la misure des variacions des sôs primis M frecuencis naturâls e des primis N antirisonancis de funzion di rispueste in frecuence corispuindint a une seziun di estremitât de trâf, a permetin di cjatâ $(M+N)$ coeficients di Fourier de variacion di rigjidece prodote dal danegjament. I coeficients di Fourier a son determinâts cun riferiment a une oportune famee di funziuns de trâf integre, famee che je complete intun spazi di funziuns definidis su dut l'interval $(0, \ell)$, dulà che ℓ e je la lungjece de trâf. Chescj risultâts a rapresentin un significatîf miornament rispjet a chei presentâts intal articulo di Morassi (2007). Di fat,

la tecniche diagnostiche svilupade in chel lavôr e doprave dome misuris di frecuencis naturâls e, sore dut, e jere aplicabil dome sot la ipotesis agjuntive che si savès *a priori* che il danegjament al fos localizât intune metât, diestre o çampe, de trâf. Cheste ipotesis une vore restritive e je stade rimovude intal presint studi. In zonte, i presentin ancje aplicazions a trâfs in vibrazion assiâl cun profil iniziâl no necessariementri uniform e cun danegjaments distribuîts.

Lis previsionis teorichis de metodologjie diagnostiche a son stadis verificadis suntun grant numar di simulazions numerichis su trâfs in vibrazion assiâl cun danegjament distribuît o concentrât. In plui, a son stâts doprâts ancje risultâts sperimentâi di provis dinamichis svilupadis su trâfs in açâr cun intais. I risultâts des simulazions numerichis si son mostrâts in bon acuardi cun lis previsionis de teorie, sedi par la localizazion dal danegjament sedi par la stime de sô severitât, cuant che lis variazioms mediis des frecuencis naturâls e di antirisonance e jerin plui grandis dai erôrs di modelizazion o di misure. Il stes si pues dî des aplicazions basadis su dâts sperimentâi, ancje se, in chest câs, si è podût verificâ che i erôrs di modelazion e di misure su lis antirisonancis a vignivin gjeneralmentri amplificâts plui di chei presints tes aplicazions che a dopravin dome misuris di frecuencis.

Dal pont di viste matematic, la tipologjie dai problemis studiâts in cheste ricercje e rivuarde la ricostruzion dal coeficient di rigjidece di une trâf in vibrazion assiâl di misuris di un numar finît di frecuencis e antirisonancis. I risultâts di caratar gjenerâl che si cognossin par cheste clas di problemis a son pôcs. Il letôr interessât a aprofondî chest argoment e a vê une idee azornade da teorie dai problemis inviers in vibrazion, al pues consultâ il libri di Gladwell (2004). A si rimande, in particular, ai articui di Marletta & Weikard (2005) e Rafler & Bockmann (2007) par studis su problemis inviers cun dâts finîts par l'operatôr mono dimensionâl di Sturm-Liouville, rispetivementri cun potenziâl complès e cun coeficient discontinui. Di resint, Rohrl (2005) al à presentât une interessante tecniche di soluzion di problemis inviers par l'operatôr di Sturm-Liouville basade su la minimizazion di un funzionâl erôr costruît cun lis primis frecuencis dal sisteme. Ai autôrs a nol risulte che contribuîts compagns a sedin disponibilii in letature pal probleme des vibrazions flessionâls. Tal contest de identificazion di danegjaments in trâfs, al è il câs di ricuardâ il lavôr di Wu (1994) che al à proponût une metodologjie

di ricostruzion basade su la determinazion di coeficients di Fourier de variazion di rigjidece di une trâf in vibrazion flessionâl, semplicementri poiade ai estremis, cuntune fressure simetriche inte sô metât. A si pues ancje consultâ il lavôr di Wu & Fricke (1990) par une aplicazion dal stes tip in acustiche.

Par ce che al rivuarde il tip di misuris dopradis in cheste ricercje, al è il câs di sotlineâ che l'interès viers une utilizazion des frecuencis di antirisonance par aplicazions di identificazion strutturâl e diagnostiche al è simpri plui cressût intai ultims agns, cf. Wahl et al. (1999). D'Ambrogio & Fregolent (2000) a àn presentât une tecniche di azornament structurâl che e cjape dentri ancje lis antirisonancis te definizion dal residui in jessude dal sisteme. I autôrs a àn cjatât che lis antirisonancis a son sensibilis aes modifichis, ancje piçulis, dal model structurâl e, par chest motif, a podin sedi dopradis par rindi plui robustis lis tecnicis di identificazion structurâl basadis dome su misuris di frecuencis. Jones & Turcotte (2002) a àn proponût une tecniche di azornament iteratîf di modei ai elements finîts basade su misuris di frecuencis e antirisonancis. Bannios et al. (2002) a àn studiât l'efiet di fressuris viertis sui valôrs de impedenza mecaniche di trâfs e a àn sugjerît une metodologjie di identificazion dal danegjament. Cualchi coment su lis dificoltâts a aplicâ la tecniche di Bannios et al. (2002) in câs di interès pratic a si cjate in Dharmaraju & Sinha (2005).

In fin, dôs peraulis su la organizazion dal articul: i aspiets teorics e la descrizion da procedure di ricostruzion a son presentâts inte Sezion 2. I risultâts des simulazions numerichis e cualchi aplicazion ai câs sperimentâi a son presentâts e discutûts inte Sezion 3.

2. Risultâts teorics. Ametîn che lis vibrazions assiâls libaris di une trâf cence danegjament a sedin governadis de ecuazion diferenziâl ordenarie

$$(a(x)u'(x))' + \lambda\rho(x)u(x) = 0 \quad \text{in } (0, \ell), \quad (1)$$

indulà che $u = u(x)$ e je la deformade modâl (o *mût di vibrâ*) e $\sqrt{\lambda}$ e je la corispundinte frequence cicliche naturâl (o *frecuence di risonance*). Lis grandecis $a(x) = EA(x)$, $\rho = \rho(x)$ e ℓ a indichin, rispetivementri, la rigjidece assiâl, la densitât lineâr di masse de trâf e la sô lungjece. In chestis espressions, E al è il modul di Young dal materiâl, $A = A(x)$ e je la aree de sezion trasversâl de trâf. In dut il lavôr a si assum che il smorçament materiâl de trâf al sedi trascurabil.

La analisi che o nin a svilupâ e rivuarde trâfs cun

$$a \in C^1([0, \ell]), \quad a(x) \geq a_0 > 0 \quad \text{in } [0, \ell], \quad (2)$$

e

$$\rho \in C^0([0, \ell]), \quad \rho(x) \geq \rho_0 > 0 \quad \text{in } [0, \ell], \quad (3)$$

indulà che a_0 e ρ_0 a son dôs costantis fissadis. Ancje se il presint studi al pues sedi svilupât par condizions ai estremis dal dut gjenerâi, o tachín considerant il câs di une trâf cun sezions di estremitât libaris, vâl a di

$$a(0)u'(0) = 0 = a(\ell)u'(\ell). \quad (4)$$

A si sa di risultâts di caratar gjenerâl, cf. Weinberger (1965), che par coeficients a e ρ che a sodisfin, rispetivementri, lis condizions (2), (3), e par condizions ai estremis (4), il probleme (1), (4) al amet une secunce infinide $\{\lambda_m^F\}_{m=0}^\infty$ di autovalôrs reâi che $0 = \lambda_0^F < \lambda_1^F < \lambda_2^F < \dots$, cun $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m^F = \infty$.

Par ogni autovalôr λ_m^F e esist une uniche autofunzion $u_m^F = u_m^F(x)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, che a sodisfe la *condizion di normalizazion*

$$\int_0^\ell \rho(u_m^F)^2 dx = 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Il mût di vibrâ $u_0^F(x) = \left(\int_0^\ell \rho dx\right)^{-\frac{1}{2}}$, $x \in [0, \ell]$, de trâf libare-libare al è rigjit, vâl a di al corispunt ae frequence naturâl $\lambda_0^F = 0$.

Imagjinín che un danegjament structurâl al si presenti inte trâf. Achí suponín che il danegjament si puedi descrivi intal ambit de classiche teorie mono-dimensionâl des trâfs in vibrazion assiâl e che si tradusi intune riduzion de rigjidece assiâl efetive, cence modificâ la distribuzion di masse, cf. Thomson (1949) e Petroski (1984). Chestis ipotesis a son comunementri acetadis intai studis di diagnostiche structurâl. Introdusi une descrizion plui precise dal danegjament a chest nivel nol samee tant realistic, ancje parcè che chest al domandarès une cognossince plui precise dal disgrât, cognossince che, naturalmentri, no je cuasi mai disponibil in studis di nature invierse come chei che o stin frontant. Par chescj motifs, la rigjidece assiâl de trâf danegjade e vegnarà cjapade cussì

$$a_\epsilon(x) = a(x) + b_\epsilon(x), \quad (6)$$

indulà che la variazion $b_\epsilon = b_\epsilon(x)$ produsude dal danegjament e sodisfe lis condizions:

i) (regularitât di b_ϵ)

$$b_\epsilon \in C^1([0, \ell]); \quad (7)$$

ii) (stime uniform, dal alt e dal bas, di a_ϵ) e esist une costant $A_0 > 0$ tâl che

$$a_0 \leq a_\epsilon(x) \leq A_0 \quad \text{in } [0, \ell]; \quad (8)$$

iii) (piçulece di b_ϵ)

$$\|b_\epsilon\|_{L^2} = \epsilon O(\|a\|_{L^2}), \quad (9)$$

par un numar reâl e positîf ϵ , indulà che $|O(\|a\|_{L^2})| < c\|a\|_{L^2}$ e c e je une costant positive che no dipent di ϵ .

Te ecuazion (9), il simbul $\|f\|_{L^2} \equiv \left(\int_0^\ell f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$ al indiche la norme dal spazi di Lebesgue $L^2(0, \ell)$ des funzions f a valôrs reâi e di cuadrât somabil sul interval $(0, \ell)$, cf. Brezis (1986).

Indicarín cun $(u_{m\epsilon}^F, \lambda_{m\epsilon}^F)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, la m -êsime autocopie normalizade de trâf danegjade, vâl a dî

$$(a_\epsilon(x)u_{m\epsilon}^F)'(x) + \lambda_{m\epsilon}^F \rho(x)u_{m\epsilon}^F(x) = 0 \quad \text{in } (0, \ell), \quad (10)$$

$$a_\epsilon(0)u_{m\epsilon}^F(0) = 0 = a_\epsilon(\ell)u_{m\epsilon}^F(\ell), \quad (11)$$

indulà che a_ϵ e je definide inte ecuazion (6) e la funzion b_ϵ e sodisfe lis condizions (7)-(9) par un numar positîf ϵ .

Di risultâts di caratar gjenerâl, cf. Weinberger (1965) e Brezis (1986), si sa che e esist une sucession infinide di autocopii $\{(u_{m\epsilon}^F(x), \lambda_{m\epsilon}^F)\}_{m=0}^\infty$ de trâf danegjade, cun $0 = \lambda_{0\epsilon}^F < \lambda_{1\epsilon}^F < \lambda_{2\epsilon}^F < \dots$ e $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{m\epsilon}^F = \infty$. In plui, dal moment che un danegjament al introdûs une riduzion de rigjidece assiâl de trâf, vâl a dî,

$$b_\epsilon(x) \leq 0 \quad \text{in } [0, \ell], \quad (12)$$

la formulazion variazionâl dal probleme ai autovalôrs al mostre che i autovalôrs a son funzions decessintis di b_ϵ , cf. Weinberger (1965), vâl a dî

$$\lambda_{m\epsilon}^F < \lambda_m^F, \quad m = 1, 2, \dots \quad (13)$$

In fin, al è il câs di ricuardâ che la analisi di cheste sezion e vâl par une variazion di rigjidece $b_\epsilon(x)$ che e pues vê valôrs positîfs o negatîfs intal interval $[0, \ell]$.

2.1 Sensibilitât dai autovalôrs al danegjament. Da chi in indenant suponarín che la trâf danegjade e sedi une perturbazion di chê integre iniziâl, vâl a dî ritegnarín che il numar ϵ inte ecuazion (9) al sedi piçul:

$$\epsilon \ll 1. \quad (14)$$

La piçulece di b_ϵ esprimude inte ecuazion (14) e permet di comprendi tal studi sedi danegjaments ridots e assegnâts su porzions grandis dal interval $[0, \ell]$ (chei che a passin sot il non di *danegjaments distribuîts*), sedi danegjaments grâfs concentrâts in intervai di $[0, \ell]$ di lungjece piçule (*danegjaments localizâts*). Ducj i doi câs a vegnaran considerâts intes aplicazions di Sezion 3.

Sot la ipotesi di danegjament piçul, e vâl la formule di expansion asintotiche dai autovalôrs par $\epsilon \rightarrow 0$

$$\lambda_{m\epsilon}^F = \lambda_m^F + \int_0^\ell b_\epsilon(x)(u_m^{F'}(x))^2 dx + r^F(\epsilon, m), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (15)$$

cun

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|r^F(\epsilon, m)|}{\|b_\epsilon\|_{L^2}} = 0. \quad (16)$$

La frecuece dal mût di vibrâ fundamentâl e je naturalmentri invariant a gambiamenti dal coeficient di rigjidece. In chest câs, la condizion (15) si ridûs a la identitât $\lambda_{0\epsilon}^F = \lambda_0^F$.

Une dimostrazion des proprietâts (15) e (16) e je stade dade da Morassi (2007). La dimostrazion e je basade su doi risultâts principâi. Il prin al è rapresentât da identitât fundamentâl che e ven daûr: par ogni $\epsilon > 0$ e par ogni numar intîr m , $m = 0, 1, 2, \dots$, a si à che

$$(\lambda_{m\epsilon}^F - \lambda_m^F) \int_0^\ell \rho(x)u_m^F(x)u_{m\epsilon}^F(x)dx = \int_0^\ell b_\epsilon(x)u_m^{F'}(x)u_{m\epsilon}^{F'}(x)dx. \quad (17)$$

La identitât (17) e ven otignude multiplicand l'ecuazion (10) par u_m^F e l'ecuazion (1) (cun l'autocopie (u, λ) sostituide di (u_m^F, λ_m^F)) par $u_{m\epsilon}^F$, e integrant par parts.

Il secont risultât al rivuarde il compuartament asintotic des soluzions dal probleme ai autovalôrs (10)-(11) par $\epsilon \rightarrow 0$, che si viodi l'articul di Morassi (2007) par aprofondiments. Plui precisementri, a si pues dimostrâ che

$$u_{m\epsilon}^F \rightarrow u_m^F \quad \text{in maniere fuarte in } H^1(0, \ell) \text{ par } \epsilon \rightarrow 0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (18)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_{m\epsilon}^F = \lambda_m^F, \quad m = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Achí, $H^1(0, \ell)$ al è il spazi di Hilbert des funzions misurabilis f , $f : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$, che a partegnin, insiemit cun la lôr derivade prime distribuzionâl f' , al spazi $L^2(0, \ell)$ des funzions di cuadrât somabil sul interval $(0, \ell)$, cf. Brezis (1986).

L'espression integrâl presint inte ecuazion (15) e fâs viodi che la sensibilitât de l' m -êsim autovalôr a variazions de rigjidece assiâl al dipent dal cuadrât de derivade prime dal corispuindint m -êsim mût di vibrâ dal sisteme no perturbât. Cuant che la perturbazion b_ϵ e à supuart intun interval di lungjece piçule centrât tal pont x_0 , $x_0 \in (0, \ell)$, la formule (15) e mostre che la variazion al prin ordin de l' m -êsim autovalôr e dipent dal cuadrât de deformazion lineâr longjtudinâl valutade tal pont x_0 , che si consultin in merit i riferiments bibliografics Gudmundson (1982) e Morassi (1993) par un risultât dal stes tip intal câs di intais o di fressuris modeladis cun elements elastics inserîts te sezion danegjade. La espression esplicite de derivade prime di un autovalôr rispjet a intais o fressuris e je stade doprade in (Narkis 1994, Morassi 2001, Morassi & Rollo 2001, Lele & Maiti 2002, Dilena & Morassi 2004) par identificâ danegjaments localizât in tràfs, sot vibrazion assiâl o flessionâl, di un numar minim di misuris di frecuencis naturâls. Estensions al câs di sistemis vibrants discretis cun danegjament localizât a son stadis proponudis da Dilena & Morassi (2006).

Cumò al vegnarà studiât l'efiet dal danegjament su lis antirisonancis de funzion di rispueste in frecuence (frf) puntuâl $H(\sqrt{\lambda}, 0, 0)$ valutade te sezion di çampe $x = 0$ de trâf. In gjenerâl, lis frecuencis di antirisonance a corispuindin ai zeris de frf $H(\sqrt{\lambda}, x_e, x_m)$, indulà x_e, x_m a son rispetivementri lis assissis dal pont di ecitazion e di chel di misure de rispueste. Cuant che $x_e = x_m$, i zeris de frf $H(\sqrt{\lambda}, x_e, x_m)$ a son lis frecuencis naturâls de trâf cun il spostament longjtudinâl de sezion di assisse x_e blocât. Alore, lis antirisonancis de frf $H(\sqrt{\lambda}, 0, 0)$ a coincidin

cun lis frecuencis naturâls $\sqrt{\lambda_n^C}$ de mensule (C) cun la seziun di çampe, in $x = 0$, fissade. Di consequence, i resonaments precedents a si puedin ripeti e si cjate che e vâl la espression asintotiche dai autovalôrs par $\epsilon \rightarrow 0$

$$\lambda_{n\epsilon}^C = \lambda_n^C + \int_0^\ell b_\epsilon(x)(u_n^{C'}(x))^2 dx + r^C(\epsilon, n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (20)$$

cun

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|r^C(\epsilon, n)|}{\|b_\epsilon\|_{L^2}} = 0. \quad (21)$$

Inte prossime seziun al vegnarà aprofondît il probleme inviers di determinâ la perturbazion de rigjidece assiâl b_ϵ di misuris des primis M frecuencis naturâls e des primis N frecuencis di antirisonance de frf $H(\sqrt{\lambda}, 0, 0)$.

2.2 Il probleme inviers linearizât. Assumín che lis vibrazions libaris de trâf integre e di chê danegjade a sedin descritis rispetivementri dai problemis ai autovalôrs (1) e (10), e che il coeficient b_ϵ al sodisfi lis condizions (7)–(9). La procedure di ricostruzion e vegnarà ilustrade tal câs di une trâf inizialmentri uniform, vâl a dî cun $a = cost.$ e $\rho = cost.$ in $[0, \ell]$. Lis autocopiis de trâf libare-libare integre a si podin cjatâ in forme esate e a àn lis espressions chi daûr

$$\lambda_m^F = \frac{a}{\rho} \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^2, \quad u_m^F(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho\ell}} \cos \frac{m\pi x}{\ell}, \quad (22)$$

$m = 1, 2, \dots$ Il mût di vibrâ rigjit $u_0^F(x)$ al è insensibil al danegjament e par chest motif al vegnarà escludût dal studi. Metint lis espressions di λ_m^F e $u_m^F(x)$ par $m \geq 1$ inte ecuazion (15) si oten

$$\lambda_{m\epsilon}^F - \lambda_m^F = \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^2 \left(\frac{2}{\rho\ell} \right) \int_0^\ell b_\epsilon(x) \sin^2 \frac{m\pi x}{\ell} dx + r^F(\epsilon, m), \quad (23)$$

$m = 1, 2, \dots$, indulà che $r^F(\epsilon, m)$ al è un tiermin di ordin superiôr a ϵ , cf. condizion (16).

Considerín cumò la frf puntuâl $H(\sqrt{\lambda}, 0, 0)$. Lis antirisonancis di $H(\sqrt{\lambda}, 0, 0)$ a son lis radîs cuadradis dai autovalôrs de trâf cun la seziun

di estremitât çampe fissade, vâl a di i autovalôrs λ_n^C de trâf a mensule (C). Lis autocopiis de trâf (C) a àn lis espressions

$$\lambda_n^C = \frac{a}{\rho} \left(\frac{(2n-1)\pi}{2\ell} \right)^2, \quad u_n^C(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho\ell}} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2\ell}, \quad (24)$$

$n = 1, 2, \dots$. Sostituint chestis espressions inte ecuazion (20) si oten

$$\lambda_{n\epsilon}^C - \lambda_n^C = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2\ell} \right)^2 \left(\frac{2}{\rho\ell} \right) \int_0^\ell b_\epsilon(x) \cos^2 \frac{(2n-1)\pi x}{2\ell} dx + r^C(\epsilon, n), \quad (25)$$

$n = 1, 2, \dots$, indulà che $r^C(\epsilon, n)$ al è un tiermin di ordin superiôr rispjet a ϵ .

Definì

$$\Phi_m^F(x) = \frac{(u_m^{F'}(x))^2}{\lambda_m^F} = \frac{2}{a\ell} \sin^2 \frac{m\pi x}{\ell}, \quad (26)$$

$$\Phi_n^C(x) = \frac{(u_n^{C'}(x))^2}{\lambda_n^C} = \frac{2}{a\ell} \cos^2 \frac{(2n-1)\pi x}{2\ell}. \quad (27)$$

La famee $\{\Phi_m^F(x), \Phi_n^C(x)\}_{m,n=1}^\infty$ e je une base par lis funzions di cuadrât somabil su $(0, \ell)$. Chest al significhe che cualsisei funzion $f, f: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ e f avonde regolâr, a si pues esprimi in serie di Fourier

$$f(x) = \sum_{m=1}^\infty f_m^F \Phi_m^F(x) + \sum_{n=1}^\infty f_n^C \Phi_n^C(x), \quad (28)$$

indulà che $\{f_m^F\}_{m=1}^\infty$ e $\{f_n^C\}_{n=1}^\infty$ a son i coeficients gjeneralizâts di Fourier di f valutâts rispjetivementri su la famee $\{\Phi_m^F(x)\}_{m=1}^\infty$ e $\{\Phi_n^C(x)\}_{n=1}^\infty$. In prime arossimazion, se i tiermins di ordin superiôr $r^F(\epsilon, m)$ e $r^C(\epsilon, n)$ a son trascurâts tas ecuazions (23), (25), e se la perturbazion b_ϵ e je svilupade su lis fameis di funzions $\{\Phi_m^F(x)\}_{m=1}^\infty$ e $\{\Phi_n^C(x)\}_{n=1}^\infty$, vâl a di,

$$b_\epsilon(x) = \sum_{k=1}^\infty (\beta_{\epsilon k}^F \Phi_k^F(x) + \beta_{\epsilon k}^C \Phi_k^C(x)), \quad (29)$$

alore lis formulis di espansion asintotiche (23), (25) a diventin

$$\begin{aligned} \delta\lambda_{m\epsilon}^F &= \sum_{k=1}^\infty (A_{mk}^{F-F} \beta_{\epsilon k}^F + A_{mk}^{F-C} \beta_{\epsilon k}^C), & m = 1, 2, \dots, \\ \delta\lambda_{n\epsilon}^C &= \sum_{k=1}^\infty (A_{nk}^{C-F} \beta_{\epsilon k}^F + A_{nk}^{C-C} \beta_{\epsilon k}^C), & n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (30)$$

Intes ecuazions precedentis, $\delta\lambda_{m\epsilon}^F$, $\delta\lambda_{n\epsilon}^C$ a son lis variazioms relativis dai autovalôrs tra la configurazion integre e chê danegjade:

$$\delta\lambda_{m\epsilon}^F \equiv \frac{\lambda_{m\epsilon}^F - \lambda_m^F}{\lambda_m^F}, \quad \delta\lambda_{n\epsilon}^C \equiv \frac{\lambda_{n\epsilon}^C - \lambda_n^C}{\lambda_n^C}, \quad (31)$$

par $m, n = 1, 2, \dots$, e

$$\begin{aligned} A_{mk}^{F-F} &\equiv \int_0^\ell \Phi_m^F(x) \Phi_k^F(x) dx = \frac{4}{a^2 \ell^2} \int_0^\ell \sin^2 \frac{m\pi x}{\ell} \sin^2 \frac{k\pi x}{\ell} dx, \\ A_{mk}^{F-C} &\equiv \int_0^\ell \Phi_m^F(x) \Phi_k^C(x) dx = \frac{4}{a^2 \ell^2} \int_0^\ell \sin^2 \frac{m\pi x}{\ell} \cos^2 \frac{(2k-1)\pi x}{\ell} dx, \\ A_{nk}^{C-F} &\equiv \int_0^\ell \Phi_n^C(x) \Phi_k^F(x) dx = \frac{4}{a^2 \ell^2} \int_0^\ell \cos^2 \frac{(2n-1)\pi x}{2\ell} \sin^2 \frac{k\pi x}{\ell} dx, \\ A_{nk}^{C-C} &\equiv \int_0^\ell \Phi_n^C(x) \Phi_k^C(x) dx = \frac{4}{a^2 \ell^2} \int_0^\ell \cos^2 \frac{(2n-1)\pi x}{\ell} \cos^2 \frac{(2k-1)\pi x}{2\ell} dx, \end{aligned} \quad (32)$$

par $k, m, n = 1, 2, \dots$. Un calcul diret al mostre che

$$A_{mk}^{F-F} = A_{mk}^{C-C} = \begin{cases} \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{a^2 \ell} & \text{se } k = m, \\ \frac{1}{a^2 \ell} & \text{se } k \neq m, \end{cases} \quad A_{mk}^{F-C} = A_{mk}^{C-F} = \frac{1}{a^2 \ell}. \quad (33)$$

Tes aplicazion pratichis, di solit a si pues misurâ solamenti i autovalôrs dai prins pôcs mûts di vibrâ. In efiet, il numar M des frecuencis naturâls e chel, N , des antirisonancis gjeneralmenti al va di 3 – 4 a, al plui, 10. Di consequence, invezit di studiâ il sisteme lineâr cuntun numar infinît di ecuazions (30), la analisi che ven daûa rivuardarâ la sô approssimazion finide, vâl a dî il sisteme lineâr $(M + N) \times (M + N)$

$$\delta\lambda = A^{M,N} \beta, \quad (34)$$

indulà che $\delta\lambda = (\delta\lambda_1^F, \dots, \delta\lambda_M^F, \delta\lambda_1^C, \dots, \delta\lambda_N^C)$, $\beta = (\beta_{\epsilon 1}^F, \dots, \beta_{\epsilon M}^F, \beta_{\epsilon 1}^C, \dots, \beta_{\epsilon N}^C)$ e $A^{M,N}$ e je la madrîs cuadrade di dimension $(M + N)$, lis cui componentis a àn lis espressions che a vegin daûr

$$A_{mn}^{M,N} = \begin{cases} \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{a^2 \ell} & \text{se } m = n, \\ \frac{1}{a^2 \ell} & \text{se } m \neq n. \end{cases} \quad (35)$$

Un calcul diret al mostre che

$$\det A_{mk}^{M,N} = (2M + 2N + 1) \left(\frac{1}{2a^2\ell} \right)^{(M+N)}, \quad (36)$$

$$(A_{mn}^{M,N})^{-1} = \begin{cases} (2a^2\ell) \frac{2M+2N-1}{2M+2N+1} & \text{se } m = n, \\ -(2a^2\ell) \frac{2}{2M+2N+1} & \text{se } m \neq n, \end{cases} \quad (37)$$

$m, n = 1, \dots, M + N$, e, di consecurence, la soluzion da la ecuazion (34) e à la forme che a ven daûr

$$\begin{aligned} \beta_{em}^F &= \frac{2a^2\ell}{2M + 2N + 1} \left((2M + 2N - 1)\delta\lambda_{em}^F - 2 \left(\sum_{k=1, k \neq m}^M \delta\lambda_{ek}^F + \sum_{k=1}^N \delta\lambda_{ek}^C \right) \right), \\ \beta_{en}^C &= \frac{2a^2\ell}{2M + 2N + 1} \left((2M + 2N - 1)\delta\lambda_{en}^C - 2 \left(\sum_{k=1, k \neq n}^N \delta\lambda_{ek}^C + \sum_{k=1}^M \delta\lambda_{ek}^F \right) \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Lis espressions (38) a mostrin cemût che lis variacions relativis dai autovalôrs a influissin i coeficient di Fourier de variacion di rigjidece produsude dal danegjament. Une volte che chescj coeficients a son stâts cjatâts, la variacion $b_\epsilon(x)$ a si pues determinâ aplicant la ecuazion (29).

2.3 Une procedure iterative e un algoritmi numeric. La analisi svilu-pade sore a si fonde su la linearizacion des espansions in serie di Taylor (23), (25) dai autovalôrs de trâf danegjade sot condizions ai estremis dal tip libar-libar e fissât-libar, rispetivementri. Par chest motif, la stime (29) dal coeficient incognit b_ϵ no sodisfe esatementri lis ecuazions (23), (25). La stime di b_ϵ a pues sedi miorade ripetint la procedure di identificazion ilustrade te sezion precedent a partî, però, de configurazion azornade $a^{(1)} = a + b_\epsilon$, indulà che b_ϵ al è calcolât al pas precedent. Cheste idee e sugjeris di risolti il probleme diagnostic par mieç de procedure iterative che o nin a descrivi. Par semplificâ la notazion, in cheste part l'indicj ϵ al vegnarà gjavât, l' m -êsim autovalôr misurât de trâf libare-libare (F), $\lambda_{m\epsilon}^F$, e chel misurât de trâf a mensule (C), $\lambda_{n\epsilon}^C$, a vegnaran indicâts rispetivementri cun $\tilde{\lambda}_m^F$ e $\tilde{\lambda}_n^C$.

PROCEDURE ITERATIVE E ALGORITMI NUMERIC:

1) Indichín cun $a^{(0)}(x) = a(x)$ la rigjidece assiâl de trâf integre.

2) Par $s = 0, 1, 2, \dots$:

a) a si risolvi il sisteme lineâr di $(M + N)$ ecuaziuns

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_m^F - \lambda_m^{F(s)} &= \sum_{k=1}^M (A_{mk}^{F-F(s)} \beta_k^{F(s)} + A_{mk}^{F-C(s)} \beta_k^{C(s)}), & m = 1, 2, \dots, \\ \tilde{\lambda}_n^C - \lambda_n^{C(s)} &= \sum_{k=1}^N (A_{nk}^{C-F(s)} \beta_k^{F(s)} + A_{nk}^{C-C(s)} \beta_k^{C(s)}), & n = 1, 2, \dots,\end{aligned}\tag{39}$$

indulà che $(u_m^{F(s)}, \lambda_m^{F(s)})$ e $(u_n^{C(s)}, \lambda_n^{C(s)})$ a sodisfin la ecuazion diferenziâl

$$(a^{(s)} u')' + \lambda^{(s)} \rho u = 0 \quad \text{in } (0, \ell),\tag{40}$$

cun condiziuns ai estremis libar-libar e fissât-libar, rispetivementri. Lis grandecis $\{\beta_k^{F(s)}\}_{k=1}^M, \{\beta_k^{C(s)}\}_{k=1}^N$ a son i coeficients gjeneralizâts di Fourier de funzion di rigidecce incognite valutâts al pas s , vâl a dî

$$b^{(s)}(x) = \sum_{k=1}^M \beta_k^{F(s)} \Phi_k^{F(s)}(x) + \sum_{k=1}^N \beta_k^{C(s)} \Phi_k^{C(s)}(x),\tag{41}$$

e lis componentis $A_{mk}^{M(s)}$ a àn lis espressionis

$$\begin{aligned}A_{mk}^{F-F(s)} &= \int_0^\ell \Phi_m^{F(s)}(x) \Phi_k^{F(s)}(x) dx, & \text{par } k, m = 1, \dots, M, \\ A_{mk}^{F-C(s)} &= \int_0^\ell \Phi_m^{F(s)}(x) \Phi_k^{C(s)}(x) dx, & \text{par } m = 1, \dots, M, k = 1, \dots, N, \\ A_{nk}^{C-F(s)} &= \int_0^\ell \Phi_n^{C(s)}(x) \Phi_k^{F(s)}(x) dx, & \text{par } n = 1, \dots, N, k = 1, \dots, M, \\ A_{nk}^{C-C(s)} &= \int_0^\ell \Phi_n^{C(s)}(x) \Phi_k^{C(s)}(x) dx, & \text{par } k, n = 1, \dots, N.\end{aligned}\tag{42}$$

b) A si azorni il coeficient $a(x)$:

$$a^{(s+1)}(x) = a^{(s)}(x) + b^{(s)}(x) \quad \text{in } [0, \ell].\tag{43}$$

c) A si calcolin i autovalôrs $\lambda_m^{F(s+1)}$, $\lambda_n^{C(s+1)}$, $m = 1, \dots, M$, $n = 1, \dots, N$, par il coeficient di rigjidece azornât $a^{(s+1)}(x)$. Se il coeficient azornât al sodisfe la condizion

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left(\frac{\tilde{\lambda}_m^F - \lambda_m^{F(s+1)}}{\tilde{\lambda}_m^F} \right)^2 + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\frac{\tilde{\lambda}_n^C - \lambda_n^{C(s+1)}}{\tilde{\lambda}_n^C} \right)^2 < \gamma, \quad (44)$$

par un parametri di control γ fissât e avonde piçul,alore si fermin lis iterazions. Se no, a si torne al pas 2) e si repet la procedure. A part pôcs câs che a corispuindin a espressions speciâls dai coeficients di rigjidece, par esempli cuant che $a(x) = \text{const.}$ in $[0, \ell]$, la ecuazion diferenziâl (40) (cun lis relativis condizions ai estremis) no amet autosoluzions in forme esate. Di consequence, l'aplicazion dal precedent algoritmi di identificazion e à bisugne de analisi numeriche. La procedure che e je stade adotade in chest lavôr si fonde suntun model ai elements finîts de trâf cun gridele uniform e funzions di forme $\varphi_i = \varphi_i(x)$, $i=1,2$, lineârs in ogni element finît. I coeficients di rigjidece e di masse a son arossimâts cun funzions interpolantis lineârs, vâl a dî $\hat{a}(x) = a(x_e) + \frac{a(x_{e+1})-a(x_e)}{x_{e+1}-x_e} \cdot x$, $\hat{\rho}(x) = \rho(x_e) + \frac{\rho(x_{e+1})-\rho(x_e)}{x_{e+1}-x_e} \cdot x$ intal e -êsim element finît, $x \in [x_{e+1}, x_e]$, e lis componentis de madrîs locâl di masse, m_e^{ij} , e di rigjidece, k_e^{ij} , a àn lis espressions

$$m_e^{ij} = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \hat{\rho}(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, \quad k_e^{ij} = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \hat{a}(x) \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) dx, \quad (45)$$

$i, j = 1, 2$. Par risolvi il sisteme lineâr (39) a bisugne determinâ a ogni pas s , $s = 1, 2, \dots$, l'inverse de madrîs $A_{mk}^{M,N(s)}$. Se $s = 0$, alore l'inverse de madrîs $A_{mk}^{M,N(s)}$ a esist e a à la espression (37). Come che è stât osservât da Morassi (2007), se la configurazion de trâf al prin pas dal scheme iteratîf e je dongje ae trâf integre iniziâl, alore

$$A_{mk}^{M,N(1)} = A_{mk}^{M,N(0)} + \delta A_{mk,\epsilon}^{M,N}, \quad (46)$$

indulà che $\delta A_{mk,\epsilon}^{M,N} \rightarrow 0$ par $\epsilon \rightarrow 0$. Duncje, a si pues concludi che

$$\det A_{mk}^{M,N(1)} = \det A_{mk}^{M,N(0)} + \dots \quad \text{par } \epsilon \rightarrow 0, \quad (47)$$

e l'inverse de madrîs $A_{mk}^{M,N(1)}$ a è ben definide. Lant indevant cussì, pas dopo pas, e sot la ipotesi che il coeficient di rigjidece incognit al sedi

une perturbazion di chel iniziâl, l'inverse de matrîs $A_{mk}^{M,N(s)}$ e je ben definide in ogni pas s .

Se dilunc la procedure iterative al capite che il coeficient $a^{(s+1)}$ nol sodisfe la condizion di eliticitât (8), alore la perturbazion $b_e^{(s)}$ e ven multiplicade par un oportun coeficient $\alpha^{(s)}$ positif e plui piçul di 1, in gjenar $\alpha^{(s)} = 1/2$, in mût di vê simpri coeficients che a sodisfin la condizion (8) cun $a_0 = \frac{1}{100} \min_{x \in [0, \ell]} a^{(0)}(x)$. Cheste procedure e ven ripetude al plui cinc voltis in ogni pas dal procès iteratîf. Dopo, lis iterazions a vegnin fermadis e il coeficient di rigjidece cussì otignût al ven cjavât come chel otimâl. Un criteri compagn al è stât adotât su la stime dal alt (8) dal coeficient di rigjidece, e a si è fissât $A_0 = 2 \max_{x \in [0, \ell]} a^{(0)}(x)$.

Il numar γ tal criteri di convergence (44) al è cjavât coincident a $\gamma = 1.0 \cdot 10^{-12}$ e tal procès iteratîf al è stât fissât un numar massim di 50 pas di iterazion.

3. Aplicazions

3.1 Impostazion de analisi diagnostiche. Intes sezions precedentis a son stâts presentâts i aspjets teorics di une procedure di ricostruzion di une perturbazion dal coeficient di rigjidece di une trâf in vibrazion assiâl a partî da lis misuris des sôs primis frecuencis naturâls e des sôs frecuencis di antirisonance. In cheste sezion e ven ilustrade cualchi aplicazion sperimentâl e numeriche de metodologjie e a vegnin discutûts i risultâts otignûts te identificazion. I prin doi esemplis a rivuardin une trâf inizialmentri uniform cuntun intai (Esempli 1) e cun *danegjament distribuît* (Esempli 2). I esemplis 3 e 4 a rivuardin dôs trâfs cuntun *danegjament localizât*, rispjetivamentri cun profil iniziâl variabil linearmentri (Esempli 3) e costant a trats (Esempli 4) .

Intal Esempli 1 la tecniche di ricostruzion e je stade aplicade a dâts sperimentâi. In chei altris câs, il probleme diagnostic al è stât studiât doprant dâts simulâts, vâl a dî lis frecuencis e lis antirisonancis a son stadis otignudis di une soluzion numeriche ai elements finîts. Ducj i modei a son stâts considerâts sot condizions di trâf libare-libare e lis frecuencis di antirisonance a son stadis cjavadis di frf $H(\sqrt{\lambda}, 0, 0)$.

La stabilitât de procedure di identificazion rispjet ai erôrs di misure o di modelazion e je stade verificade ripetint plui voltis i calui in presince di erôrs di nature aleatoris sui dâts. In particolâr, lis frecuencis naturâls $\sqrt{\lambda_m^F}$, $m = 1, \dots, M$, $\sqrt{\lambda_n^C}$, $n = 1, \dots, N$, a son stadis variadis tignint

cont di perturbazions dal tip

$$\sigma_m^F = pK\sqrt{\lambda_m^F}, \quad \sigma_n^C = pK\sqrt{\lambda_n^C}, \quad (48)$$

indulà che p al è un numar reâl siezût a câs intal interval $[-1, 1]$ e K , $K > 0$, al è il valôr massim dal erôr. Par ogni configurazion di danegjament ($D1$, $D2$, $D3$, definidîs plui sot) e par ogni level di erôr, a son stadis svilupadis cent simulazions cun erôr casuâl di intensitât $K = 0.005$ (0.5 par cent) e $K = 0.01$ (1 par cent) cun $M = N = 4, 6, 8, 10$, par un totâl di cuasi 2400 analisis par ogni model. Lis tabelis dai esemplis che a vegnin daûr a ripuartin il valôr medi dai erôrs relatîfs in norme L^2 e in norme L^∞ dal coeficient di rigjidece ricostruît. Chescj erôrs a son definîts intal mût che al ven daûr

$$\text{erôr-}L^2 = \frac{\|a^{ident} - a^{just}\|_{L^2}}{\|a^{just}\|_{L^2}}, \quad \text{erôr-}L^\infty = \frac{\max_{x \in [0, \ell]} |a^{ident} - a^{just}|}{\max_{x \in [0, \ell]} |a^{just}|}, \quad (49)$$

indulà che $a^{ident} = a^{ident}(x)$ e $a^{just} = a^{just}(x)$, $x \in [0, \ell]$, a son rispetivamente il coeficient identificât e chel just. Inte tabelis e je ancje indicade la deviazion standard dai erôrs L^2 e L^∞ .

Par clarece, i risultâts numerics a son compagnâts di cualchi figure che a si riferîs a specifichis simulazions. A part la Figure 2 che e rivuarde un câs sperimentâl, intes figuris a son confrontâts il coeficient just (in linie sutile) e chel identificât (linie plui gruesse).

3.2 Esempi 1: trâf in açâr cuntun intai. Intal prin esperiment e je stade studiade la trâf in açâr de serie HE100B mostrade in Figure 1. Lis primis frecuencis naturâls e lis antirisonancis de frf $H(\sqrt{\lambda}, 0, 0)$ a son stadis determinadis par mieç di une tecniche dinamiche impulsive aplicade a trâf integre e a lis dôs configurazions danegjadis $D1$ e $D2$ mostradis inte Figure 1, a si rimande al lavôr di Dilena & Morassi (2004) par aprofondiments su lis provis dinamiche. Il danegjament al è stât realizât introdusint un intai simetric te sezion trasversâl distant $s = 0.55$ metris de estremitât di çampe de trâf. I nivei $D1$ e $D2$ a corispuindin rispetivamente a une profonditât dal intai di 6 e 15 milimetris. L'intai al à une largjece di cirche 1.5 milimetris e, par vie dal bas nivel de fuarce di ecitazion, al è restât simpri viert dilunc la vibrazion de trâf.

La fuarce di ecitazion e je stade introdusude te sezion de estremitât çampe de trâf par mieç di un martiel strumentât e la rispueste assiâl de

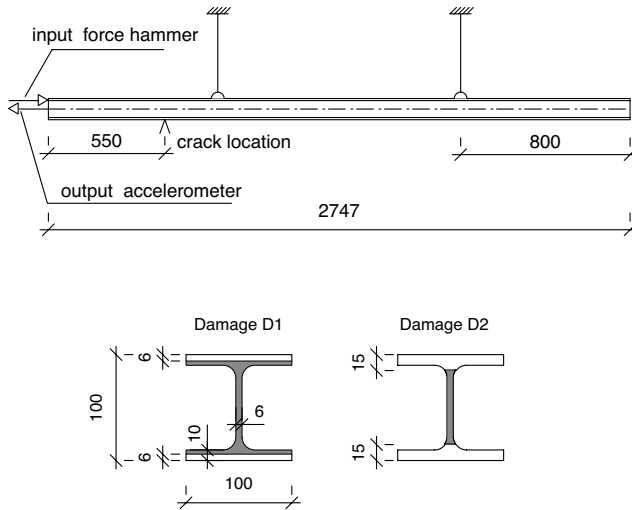


Figure 1. Model sperimentâl di trâf in vibrazion assiâl e configurazions di danegjament (Esempli 1 de Sezion 3). Lungjesis in milimetris.

trâf e je stade misurade cuntun acelerometri piezoeletric fissât tal mieç de stesse sezion. I segnâi a son stâts regjistrâts cuntun analizadôr dinamic HP35670A e, dopo, a son stâts tratâts intal domini de frecuece par il calcul de relative funzion di rispueste in frecuece (frf *inertance*). La presince di mûts di vibrâ caraterizâts di frecuecis propriis ben separadis e di valôrs un grum piçui dal smorçament struttural e à permetût di doprâ la tecniche di identificazion a *mût singul* par cjatâ i parametris modâi, cf. Ewins (2000). Lis antirisonancis a son stadis determinadis tignint cont dai cambiaments di ± 180 de fase de frf. Inte Tabele 1 a son confrontâts i valôrs des primis sîs frecuecis e antirisonancis da trâf integre e danegjade. Il model analitic de trâf integre al è risultât pluitost precis e i erôrs di modelazion no superin l'1.1 par cent. Come che si spietavisi, il danegjament al ridûs lis frecuecis e lis antirisonancis. Lis variacions mediis des risonancis a son dal ordin dal 0.3 e dal 4.8 par cent rispetivementri tai doi nivei di danegjament *D1* e *D2*. Passant a considerâ lis antirisonancis, intal lavôr di Dilena & Morassi (2004) a è stât fat viodi che la misure de prime antirisonance te configurazion *D1* e à un erôr di modelazion di cirche il 6 par cent. In plui, passant de configurazion integre al nivel *D1*, al è stât osservât un lizêr aument

Un probleme inviers in diagnostiche struturâl: identificazion di danegjaments in trâfs da misuris di frecuencis naturâi e frecuencis di antirisonance

“

MICHELE DILENA & ANTONINO MORASSI *

Ristret. In chest lavôr a si fas viodi che lis variazioms des frecuencis naturâi e des frecuencis di antirisonance prodotis da un danegjament struturâl in une trâf in vibrazion assiâl a contignint informazioms su cierts coeficients di Fourier da variazioms di rigjdece causade dal danegjament. Cheste proprietât a è usade par definî une procedure costrutive dal coeficient incognit basade su un agjornament iteratîf da configurazion integre iniziâl. I risultâts des simulazioms numerichis su trâfs cun danegjament localizât o distribuît a si son dimostrâts in acordo cun lis previsionis da teorie, in particular cun quant che lis variazioms misuradis da lis frecuencis e antirisonancis a erin plui grandis dai erôrs di modelazion o di misure. I risultâts sperimentâi otignûts su trâfs metalichis cun intais a an mostrât che, te risolucion dal probleme inviers, i erôrs di modelazion su lis antirisonancis a vignint gjeneralmentri amplificâts rispjet a ce ca sucêt cun quant che a si doprin dome misuris di frequence.

Peraulis clâv. Diagnostiche struturâl, trâfs, frecuencis di risonance e di antirisonance, probleme inviers.

1. Introduzion. Chest lavôr al trate un probleme di identificazion di danegjaments struturâi in trâfs vibrants basât su la misure des primis frecuencis naturâls e frecuencis di antirisonance.

La gran part des tecnichis dinamichis dopradis par la identificazion struturâl a son basadis su la misure des variazioms des frecuencis naturâls, che si fasi riferiment, par esempi, ai lavôrs di Adams et al. (1978) e Hearn & Testa (1991). Di fat, lis misuris des frecuencis naturâls a

*Dipartiment di Gjeorisorsis e Teritori, Universitât dal Friûl, Udin, Italie. E-mail: antonino.morassi@uniud.it

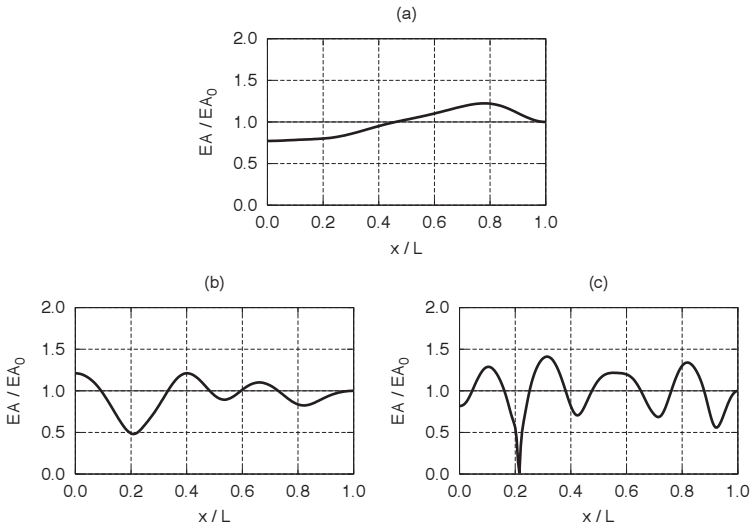


Figure 2. Trâf di Fig. 1 (Esempli 1 de Sezion 3): rigidece assiâl EA identificate par danegjament $D1$ (a) (cun $M = 4$, $N = 3$) e $D2$ ($M = N = 4$ (b), $M = N = 6$ (c)).

Inte aplicazion de tecniche diagnostiche, il model continui de trâf al è stât discretizât in 100 elements finîts di lungjece compagne e la procedure di identificazion e je stade svilupade considerant diferentis combinazions des primis M frecuencis naturâls e N antirisonancis. Al è impuartant sotlineâ che le siele di une gridele pluitost fine dal model ai elements finîts e garantîs erôrs di discretizazion trascurabîi dilunc il procès di identificazion. I risultâts otignûts a son presentâts intes Figuris 2(a) ($M = 4$, $N = 3$) e 2(b), 2(c) ($M = N = 4$ e $M = N = 6$) pai doi nivei di danegjament $D1$ e $D2$. Cemût che si spietavisi, la identificazion dal danegjament a falis intal nivel $D1$. Par ce che e rivuarde la configurazion $D2$, il coeficient di rigidece identificât otegnût doprant lis primis cuatri frecuencis e antirisonancis al mostre un andament ossilatori ator dal valôr iniziâl a_0 , cuntun minim evident dongje de posizion vere dal intai. I risultâts no meiorin cuissà ce cuant che si doprin frecuencis e antirisonancis di ordin plui alt, ancjie se, in chei câs, l'intai al ven localizât plui ben. La convergjenca dal procès iteratîf e je avonde svelte e, in gjenar, a bastin pocjis iterazions (di 5 a 10) par sodisfâ il criteri (44).

3.3 Esempi 2: trâf cun profil iniziâl uniform e cun danegjament distribuît. Intal secont esempi e je stade studiade la trâf cun profil iniziâl uniform e cun danegjament distribuît di Figure 3. La trâf e je lungje $L = 3.00$ metris e e à une seziun cuadrade di 20×20 milimetris. A si imagjine che la rigjidece assiâl de configurazion danegjade e vedi la espression

$$a(x) = \begin{cases} a_0 \left(1 - t \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi(x-s)}{c} \right) \right) & x \in (s - c/2, s + c/2), \\ a_0 & \text{altrimenti in } [0, \ell], \end{cases} \quad (50)$$

indulà che i parametris di danegjament s , t , c a esprimin rispetivemèntri l'assisse de posizion centrâl dal difiet, il valôr massim de riduzion di rigjidece (rispìet al valôr di riferiment a_0) e la grandece de regjon danegjade, cf. Figure 1(b).

In cheste seziun o considerarìn trê configurazions di danegjament: $D1$, $D2$ e $D3$. Inte configurazion $D1$ i parametris s , t , c a valin rispetivemèntri 1.00 m, 0.10 e 0.80 m. Te seconde configurazion danegjade la grandece t e aume a 0.20, mentri il danegjament $D3$ al è otignût da $D2$ puartant la largjece de regjon danegjade a $c = 1.20$ m. In ducj i trê câs, la lungjece de regjon danegjade e je intor a $1/3$ de lungjece complessive de trâf e, duncje, in chest esempi il danegjament a si pues considerâ distribuît. L'analisi numeriche e je stade svilupade suntun model ai elements finîts cun 200 elements di lungjece compagne.

Lis variacions mediis des frecuencis naturâls e des antirisonancis a son rispetivemèntri dal ordin dal 0.7 par cent, 1.5 par cent e 2.3 par cent dai valôrs iniziâi pas trê configurazions $D1$, $D2$ e $D3$, cf. Tabele 2, e, di consequence, achì il danegjament al si pues ritignê gjeneralmentri piçul.

Lis Figuris 4, 5, 6 a ripuartin i risultâts de identificazion in assense di erôrs sui dâts e par $M = N = 4, 6, 8, 10$. Dai grafics a si pues viodi che il coeficient di rigjidece al ven simpri identificât cun grande precision, ancje cuant che si doprin pôcs dâts in ingrès ($M = N = 4$). In plui, i risultâts de identificazion a meiorin simpri plui man man che si doprin plui frecuencis e antirisonancis, e la tecniche e samee in grât di ricostruî ancje il nivel di danegjament plui bas $D1$. Chest al è confermât dai risultâts de identificazion ripuartâts in Tabele 3. Lis simulazions numerichis a mostrin che, par un fissât nivel di danegjament, l'erôr L^2 al diminuis une vore cuant che al aume il numar des frecuencis/antirisonancis dopradis inte analisi. Par esempi, passant da $M = N = 4$ a $M = N = 10$,

Tabele 2. Trâf in vibrazion assiâl di Sezion 3, Esempli 2 di Figure 3: valôrs des frecuecis naturâls e des antirisonancis (de frf $H(\sqrt{\lambda}, 0, 0)$) inte configurazion integre e intes trê configurazions danegjadis $D1$, $D2$ e $D3$. Configurazion integre: $E = 2.06 \cdot 10^{11}$ N/m², masse par unitât di volum $\gamma = 7850$ kg/m³. Configurazions danegjadis: $D1$ ($s = 1.00$ m, $t = 0.10$, $c = 0.80$ m), $D2$ ($s = 1.00$ m, $t = 0.20$, $c = 0.80$ m), $D3$ ($s = 1.00$ m, $t = 0.10$, $c = 1.20$ m); $\Delta_n\% = 100 \cdot (f_n^{integre} - f_n^{daneg}) / f_n^{integre}$. I valôrs des frecuecis e antirisonancis a son in Hz.

Mût	Integre	Danegjament D1		Danegjament D2		Danegjament D3	
n	f_n	f_n	$\Delta_n\%$	f_n	$\Delta_n\%$	f_n	$\Delta_n\%$
Frecuecis							
1	853.8	844.8	1.06	834.3	2.29	825.4	3.33
2	1707.6	1690.8	0.99	1672.1	2.08	1659.2	2.84
3	2561.6	2555.2	0.25	2548.1	0.53	2524.3	1.45
4	3415.7	3386.3	0.86	3353.3	1.83	3336.4	2.32
5	4270.0	4236.7	0.78	4201.0	1.62	4176.3	2.19
6	5124.6	5092.7	0.62	5056.4	1.33	5008.7	2.26
7	5979.5	5937.2	0.71	5890.6	1.49	5847.9	2.20
8	6834.8	6787.3	0.69	6734.5	1.47	6683.4	2.21
9	7690.4	7635.1	0.72	7573.8	1.52	7521.4	2.20
10	8546.6	8487.2	0.70	8420.9	1.47	8358.0	2.21
Antirisonancis							
1	426.9	422.4	1.06	417.2	2.28	412.6	3.35
2	1280.8	1279.9	0.07	1278.9	0.15	1274.7	0.47
3	2135.0	2114.2	0.98	2090.4	2.09	2075.5	2.79
4	2989.8	2963.5	0.88	2935.4	1.82	2918.8	2.37
5	3845.2	3827.5	0.46	3807.4	0.98	3763.2	2.13
6	4701.7	4665.8	0.76	4626.2	1.60	4599.7	2.17
7	5559.2	5519.4	0.72	5475.7	1.50	5437.3	2.19
8	6418.2	6373.0	0.70	6322.3	1.49	6277.1	2.20
9	7278.7	7228.5	0.69	7172.8	1.46	7117.2	2.22
10	8141.1	8084.5	0.69	8021.4	1.47	7961.3	2.21

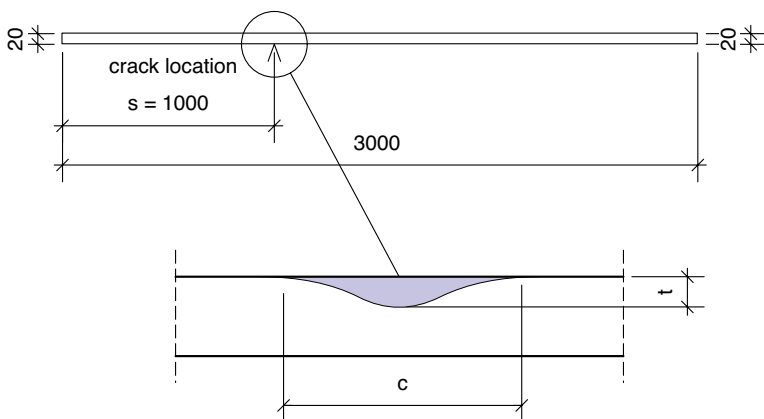


Figure 3. Trâf di profil iniziâl uniform e cun danegjament distribuît (Esempli 2 de Sezion 3. Lungjesis in milimetris.

chest erôr al va di 0.8%, 0.4% a 0.03%, 0.03% pes dôs configurazions $D1$ e $D3$, rispetivementri.

Intes simulazions al è stât studiât l'efiet di erôrs casuâi dal tip (48) su lis frecuencis e antirisonancis, cun erôr massim corrispuindint a $K = 0.005$ e $K = 0.01$, vâl a di il 0.5 e l'1 par cent dai valôrs iniziâi. I risultâts complets a son ripuartâts in Tabele 3.

La analisi numeriche e mostre che i erôrs sui dâts a àn un efiet une vore impuartant su la stime dal coeficient di rigjidece assiâl, compuartant pierditis di precision di ancje doi ordins di grandece rispjet al câs ideâl. In plui, chest efiet al divente plui evident al cressi dal numar $N = M$ des frecuencis/antirisonancis dopradis inte identificazion. Intal nivel di danegjament $D1$, par esempli, l'erôr L^2 al cres di 0.8% a 4.5% passant dal câs cence erôrs sui dâts a un erôr casuâl dal 1% cuant che si doprin lis primis $M = N = 4$ frecuencis e antirisonancis. In te stesse situazion, ma cun $M = N = 10$, l'erôr L^2 al passe dal 0.03% al 7%. Il stès compuartament al è stât osservât par l'erôr L^∞ . Une conferme di chest risultât a si pues cjatâ ancje intai esemplis di ricostruzion dal coeficient di rigjidece ripuartâts intes Figuris 7, 8 (par $D1$ e $D2$ cun $K = 0.005$) e 9, 10 (par $D3$ cun $K = 0.005$ e $K = 0.010$).

3.4 Esempi 3: trâf di profil iniziâl variabil linearmentri e cuntune fressure. Il probleme considerât in chest paragraf al rivuarde la identifi-

Tabele 3. Risultâts de identificazion pe trâf in vibrazion assiâl di Sezion 3, Esempi 2: valôrs mediis (su cent simulazions) de norme L^2 dal erôr (e, in parenthesis, de norme L^∞) inte stime dal coeficient di rigjidece (cf. ecuazion (49)) e relativis deviazions standard par lis trê configurazions danegjadis $D1$, $D2$, $D3$ e par $M = N = 4, 6, 8, 10$, in assente di erôrs ($K = 0$) e cun erôrs casuâi su lis frecuencis/antirisonancis di valôr massim $K = 0.005$ e $K = 0.010$ (cf. ecuazion (48)).

Erôr K	Danegjament D1		Danegjament D2		Danegjament D3	
	Erôr	Dev. std.	Erôr	Dev. std.	Erôr	Dev. std.
$M = N = 4$						
0.000	0.0080 (0.0165)		0.0164 (0.0326)		0.0035 (0.0072)	
0.005	0.0231 (0.0523)	0.0041 (0.0111)	0.0275 (0.0641)	0.0036 (0.0135)	0.0218 (0.0462)	0.0043 (0.0119)
0.010	0.0445 (0.1006)	0.0083 (0.0262)	0.0464 (0.1033)	0.0078 (0.0208)	0.0438 (0.0939)	0.0070 (0.0209)
$M = N = 6$						
0.000	0.0010 (0.0024)		0.0021 (0.0051)		0.0010 (0.0025)	
0.005	0.0263 (0.0623)	0.0043 (0.014)	0.0275 (0.0637)	0.0040 (0.0153)	0.0272 (0.0617)	0.0043 (0.0138)
0.010	0.0549 (0.1286)	0.0078 (0.0276)	0.0556 (0.1279)	0.0069 (0.0218)	0.0553 (0.1271)	0.0082 (0.0313)
$M = N = 8$						
0.000	0.0007 (0.0019)		0.0015 (0.0041)		0.0006 (0.0018)	
0.005	0.0315 (0.0759)	0.0041 (0.0181)	0.0312 (0.0752)	0.0042 (0.015)	0.0305 (0.0741)	0.0044 (0.0161)
0.010	0.0707 (0.1844)	0.0083 (0.035)	0.0642 (0.1577)	0.0080 (0.0304)	0.0638 (0.1624)	0.0092 (0.0401)
$M = N = 10$						
0.000	0.0003 (0.0009)		0.0006 (0.0018)		0.0003 (0.0008)	
0.005	0.0361 (0.0912)	0.0043 (0.0185)	0.0355 (0.0885)	0.0040 (0.0166)	0.0361 (0.0904)	0.0035 (0.0171)
0.010	0.0707 (0.1791)	0.0085 (0.0365)	0.0723 (0.1855)	0.0095 (0.0457)	0.0722 (0.1821)	0.0080 (0.0385)

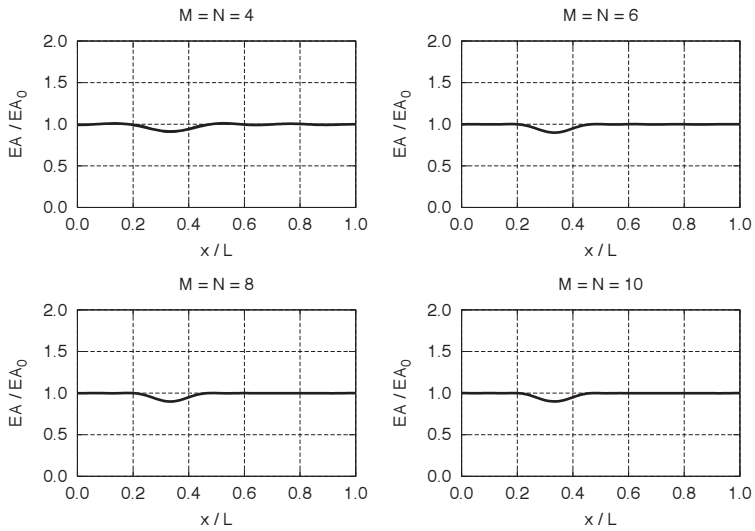


Figure 4. Trâf di Fig. 3 (Esempli 2 de Sezion 3). Rigjidece assiâl EA identificade par danegjament $D1$ in assense di erôrs sui dâts.

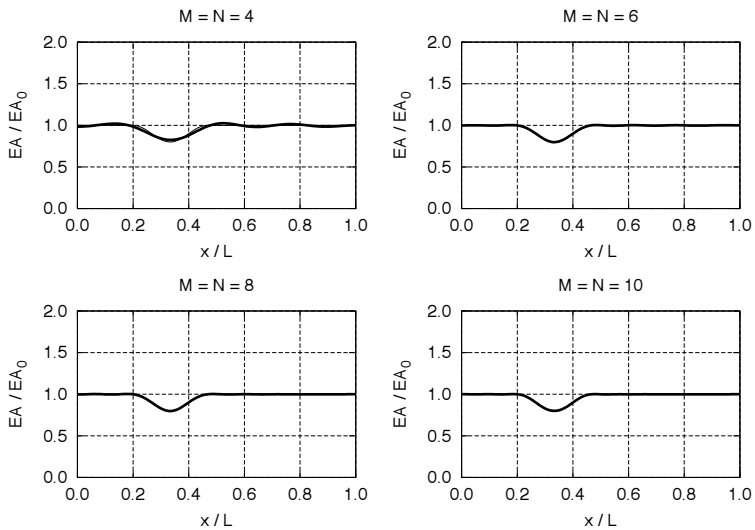


Figure 5. Trâf di Fig. 3 (Esempli 2 de Sezion 3). Rigjidece assiâl EA identificade par danegjament $D2$ in assense di erôrs sui dâts.

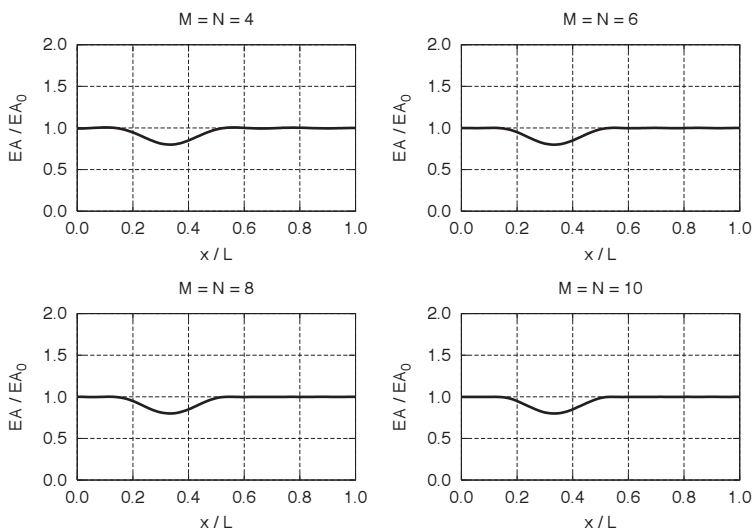


Figure 6. Trâf di Fig. 3 (Esempli 2 de Sezion 3). Rigjidece assiâl EA identificate par danegjament $D3$ in assence di erôrs sui dâts.

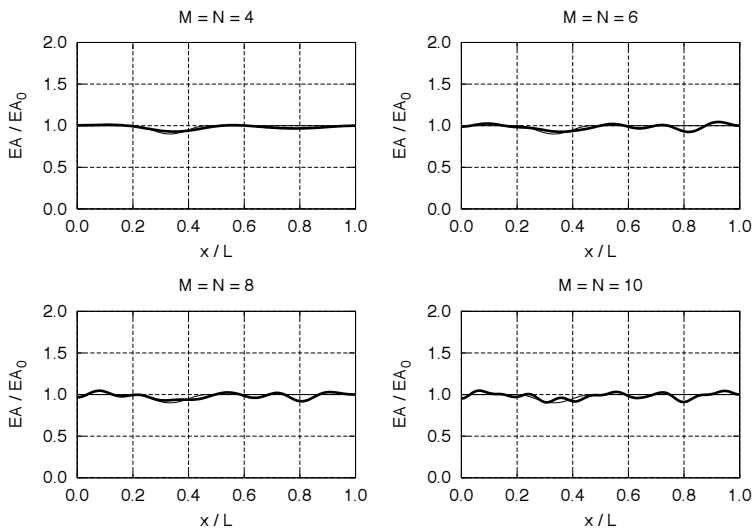


Figure 7. Trâf di Fig. 3 (Esempli 2 de Sezion 3). Rigjidece assiâl EA identificate par danegjament $D1$ in presence di erôrs sui dâts di nivel massim $K = 0.005$.

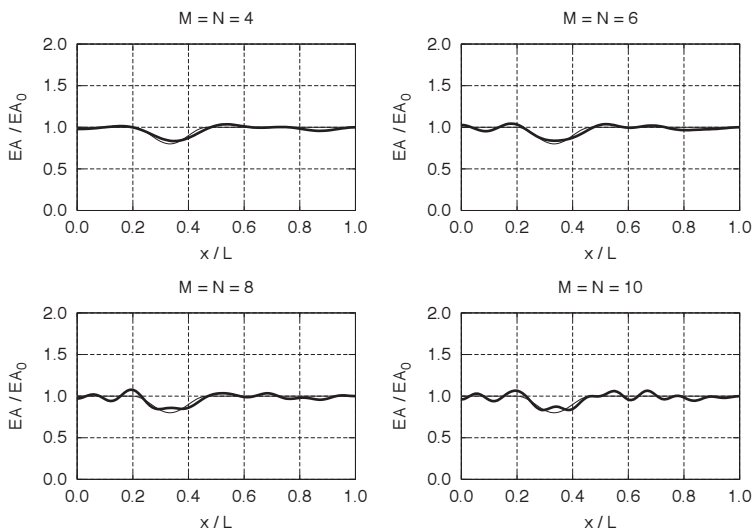


Figure 8. Trâf di Fig. 3 (Esempli 2 de Sezion 3). Rigjidece assiâl EA identificate par danegjament $D2$ in presence di erôrs sui dâts di nivel massim $K = 0.005$.

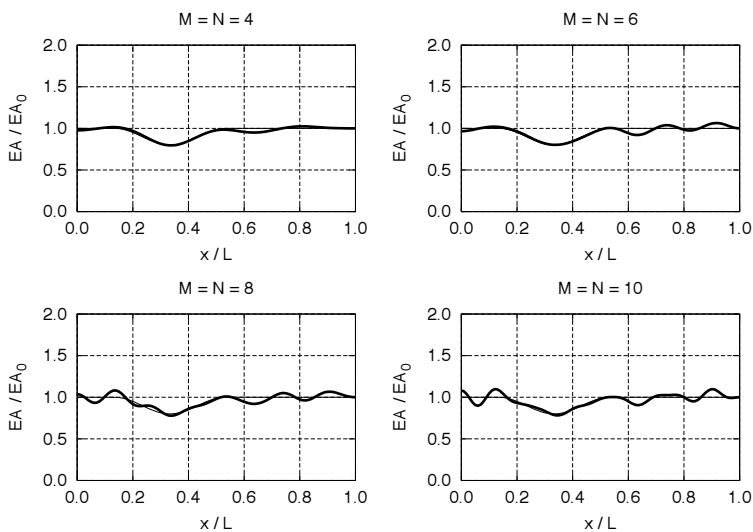


Figure 9. Trâf di Fig. 3 (Esempli 2 de Sezion 3). Rigjidece assiâl EA identificate par danegjament $D3$ in presence di erôrs sui dâts di nivel massim $K = 0.005$.

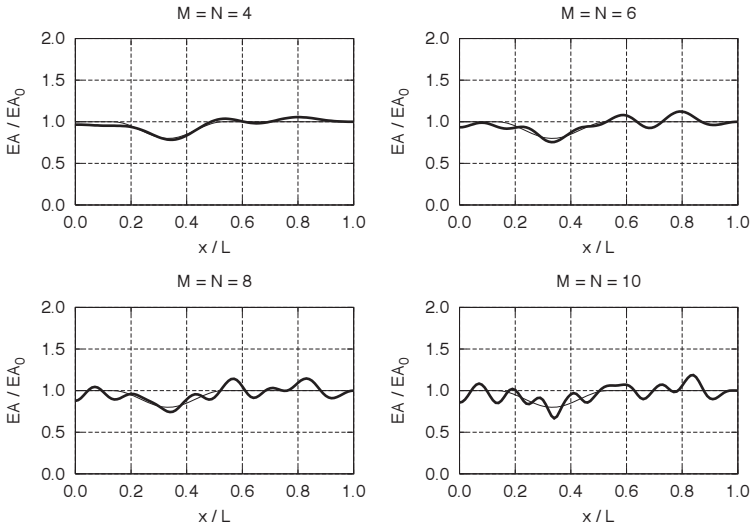


Figure 10. Trâf di Fig. 3 (Esempli 2 de Sezion 3). Rigjidece assiâl EA identificate par danegjament $D3$ in presence di erôrs sui dâts di nivel massim $K = 0.010$.

cazion di une fressure presint intune trâf in vibrazion assiâl cun estremis libars, cf. Fig. 11. La trâf e à sezion retangolâr cun spigul di 20 milimetris e altece variabil linearmentri da 30 a 20 milimetris, rispetivementri dal estrem di çampe a chel di diestre. A si assum che la fressure e interessi dute la largjece de sezion e che e resti simpri vierte dilunc la vibrazion de trâf.

La valutazion dal aument di flessibilitât produsût de compare di une fressure intune trâf e je pluitost complicade. Achì, daûr la impostazion sugjeride da Sinha et al. (2002), l'efiet locâl produsût de fressure al è approssimât cuntune riduzion de rigjidece assiâl $EA(x)$ de trâf localizade intun interval centrât te sezion danegjade e di lungjece compressive $2\ell_c$, cence introdusi variazion de densitât lineâr di masse. In particolâr, a si è adotade une riduzion triangolâr de rigjidece che e partîs dal valôr nominâl inte sezion danegjade, di assisse s , e che si anule in corispuindince des assissis $s \pm \ell_c$. In plui, par ce che al rivuarde la lungjece efetive dal efiet dal danegjament, a si è cjapade la approssimazion che e ven daûr: $\ell_c = 1.5 \cdot d$, indulà che d e je l'altece de sezion di assisse s inte trâf integre, cf. Sinha et al. (2002). Cun chest model mecanic a son stadis

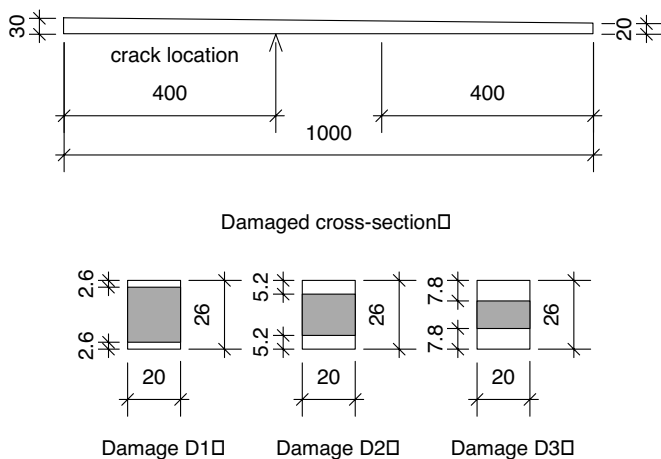


Figure 11. Trâf di profil iniziâl variabil linearmentri e cuntune fressure (Es-
empli 3 de Sezion 3). Lungjecis in milimetris.

çjatadis lis frecuencis naturâls e lis antirisonancis de trâf danegjate. Tes simulazions a son stâts considerâts trê nivêi di danegjament, $D1$, $D2$, $D3$, corispuindints rispetivementri a une fressure cun profunditât dal 20, 40, 60 par cent da l'altece de sezion, cf. Fig. 11, e al è stât doprât un model discret formât di 200 elements finîts di lungjece compagne. Par confront cun modei ai elements finîts cun gridele plui fine, a si è podût verificâ che il model sielzût al introdûs erôrs di discretizazion trascurabii, sedi te analisi direte sedi in chê invierse. La Tabele 4 e mostre che lis variazioms des frecuencis e antirisonancis a son pluitost piçulis e a van dal 0.7 al 2.5 par cent dai valôrs iniziâi rispetivementri pes configurazions di danegjament $D1$ e $D3$.

I risultâts de identificazion par $M = N = 4, 6, 8, 10$ a son ripuartâts in Tabele 5.

Lis Figuris 12, 13, 14 a fasin viodi i grafics dal coeficient di rigjidece identificât intal câs di misuris di frecuencis e antirisonancis cence erôrs. Il coeficient ricostruît al à un andament ondulatori ator dal valôr iniziâl di riferiment, cuntune riduzion massime che e capite propri in corispuindince de efetive posizion de sezion danegjate. La fressure e je localizade cun buine precision ancje cuant che a son dopradis dome lis primis 6 frecuencis e antirisonancis, e il profil di rigjidece al è ricostruît un grum

Tabele 4. Trâf in vibrazion assiâl di Sezion 3, Esempi 3 di Figure 11: valôrs des frecuencis naturâls e des antirisonancis (de frf $H(\sqrt{\lambda}, 0, 0)$) inte configurazion integre e intes trê configurazions danegjadis $D1$, $D2$ e $D3$ di Figure 11. Configurazion integre: $E = 2.06 \times 10^{11}$ N/m², masse par unitât di volum $\gamma = 7850$ kg/m³. $\Delta_n\% = 100 \cdot (f_n^{integre} - f_n^{daneg})/f_n^{integre}$. I valôrs des frecuencis e antirisonancis a son in Hz.

Mût	Integre	Danegjament D1		Danegjament D2		Danegjament D3	
n	f_n	f_n	$\Delta_n\%$	f_n	$\Delta_n\%$	f_n	$\Delta_n\%$
Frecuencis							
1	2577.1	2556.3	0.81	2527.7	1.92	2484.8	3.58
2	5131.0	5115.0	0.31	5093.5	0.73	5061.7	1.35
3	7690.1	7665.7	0.32	7632.0	0.76	7581.0	1.42
4	10251.1	10172.2	0.77	10068.9	1.78	9923.8	3.19
5	12813.3	12806.6	0.05	12798.4	0.12	12787.8	0.20
6	15376.5	15262.7	0.74	15112.9	1.71	14902.5	3.08
7	17940.8	17882.1	0.33	17809.4	0.73	17715.0	1.26
8	20506.3	20435.8	0.34	20343.7	0.79	20215.6	1.42
9	23073.1	22922.7	0.65	22740.2	1.44	22510.3	2.44
10	25641.5	25594.8	0.18	25534.9	0.42	25452.8	0.74
Antirisonancis							
1	1387.2	1378.9	0.60	1367.5	1.42	1350.3	2.66
2	3881.2	3878.1	0.08	3873.8	0.19	3867.3	0.36
3	6427.4	6371.1	0.88	6295.3	2.06	6183.9	3.79
4	8982.8	8972.9	0.11	8959.9	0.25	8941.5	0.46
5	11541.7	11476.2	0.57	11387.5	1.34	11257.1	2.47
6	14102.6	14024.5	0.55	13925.6	1.26	13793.3	2.19
7	16665.1	16639.8	0.15	16606.8	0.35	16560.8	0.63
8	19229.2	19083.2	0.76	18898.7	1.72	18653.5	2.99
9	21794.6	21752.3	0.19	21699.9	0.43	21631.2	0.75
10	24361.7	24235.2	0.52	24073.8	1.18	23856.4	2.07

Tabele 5. Risultâts de identificazion pe trâf in vibrazion assiâl di Sezion 3, Esempli 3: valôrs mediis (su cent simulazions) de norme L^2 dal erôr (e, in parenthesis, de norme L^∞) inte stime dal coeficient di rigjidece (cf. ecuazion (49)) e relativis deviazions standard par lis trê configurazions danegjadis $D1$, $D2$, $D3$ e par $M = N = 4, 6, 8, 10$, in assence di erôrs ($K = 0$) e cun erôrs casuâi su lis frecuencis/antirisonancis di valôr massim $K = 0.005$ e $K = 0.010$ (cf. ecuazion (48)).

Erôr K	Danegjament D1		Danegjament D2		Danegjament D3	
	Erôr	Dev. std.	Erôr	Dev. std.	Erôr	Dev. std.
$M = N = 4$						
0.000	0.0243 (0.1092)		0.0503 (0.2030)		0.0804 (0.2718)	
0.005	0.0334 (0.1072)	0.0029 (0.0166)	0.0553 (0.2026)	0.0027 (0.0167)	0.0842 (0.2692)	0.0028 (0.0142)
0.010	0.0517 (0.1237)	0.0071 (0.0255)	0.0667 (0.2052)	0.0059 (0.0276)	0.0933 (0.2733)	0.0065 (0.0256)
$M = N = 6$						
0.000	0.0206 (0.0886)		0.0428 (0.1607)		0.0687 (0.2049)	
0.005	0.0348 (0.0941)	0.0032 (0.0151)	0.0510 (0.1652)	0.0031 (0.0170)	0.0744 (0.2163)	0.0034 (0.0134)
0.010	0.0596 (0.1301)	0.0086 (0.0287)	0.0700 (0.1795)	0.0082 (0.0284)	0.0889 (0.2339)	0.0079 (0.0246)
$M = N = 8$						
0.000	0.0162 (0.0681)		0.0342 (0.1223)		0.0553 (0.1613)	
0.005	0.0369 (0.0891)	0.0035 (0.0149)	0.0467 (0.1360)	0.0037 (0.0145)	0.0650 (0.1807)	0.0037 (0.0177)
0.010	0.0670 (0.1440)	0.0079 (0.0274)	0.0746 (0.1764)	0.0081 (0.0317)	0.0872 (0.2129)	0.0088 (0.0269)
$M = N = 10$						
0.000	0.0118 (0.0494)		0.0250 (0.0874)		0.0397 (0.1002)	
0.005	0.0371 (0.0846)	0.0040 (0.0162)	0.0444 (0.1053)	0.0036 (0.0165)	0.0549 (0.1301)	0.0041 (0.0137)
0.010	0.0740 (0.1647)	0.0086 (0.0367)	0.0434 (0.1084)	0.0041 (0.0153)	0.0846 (0.1924)	0.0108 (0.0359)

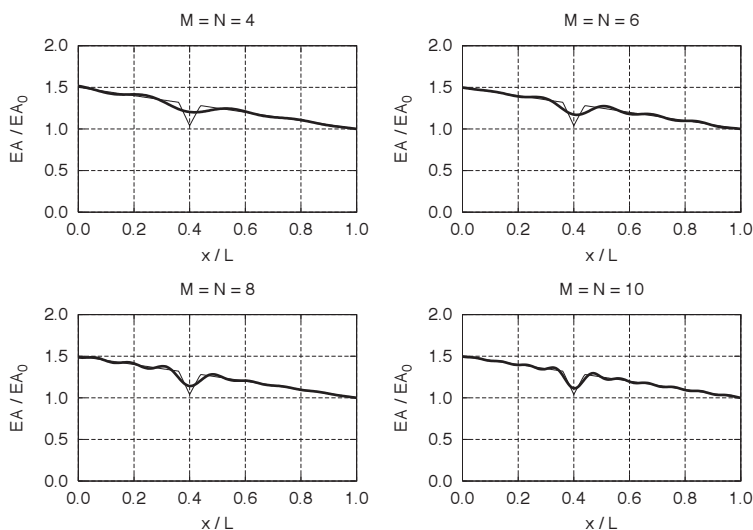


Figure 12. Trâf di Fig. 11 (Esempli 3 de Sezion 3). Rigjidece assiâl EA identificate par danegjament $D1$ in assenze di erôrs sui dâts.

ben cuant che $M = N = 10$. La convergjençe dal procès iteratîf e je pluitost svelte e, in gjenar, il criteri di arrest (44) al è sodisfat dopo nancje 10 iterazions. Des simulazions fatis al risulte che, par un fissât nivel di danegjament, l'erôr L^2 al si ridûs man man che il numar des frecuencis dopradis te identificazion al aumente. In particolâr, chest erôr al va dal 2.4, 5.0, 8.0 par cent al 1.1, 2.5, 4.0 par cent, rispetivementri par lis configurazions $D1$, $D2$ e $D3$, passant di $M = N = 4$ a $M = N = 10$. Chest fat al mostre che i risultâts de procedure di identificazion a deventin vie vie miôr man man che a aumentin i dâts considerâts in ingrès. I stes compartaments a son stât osservâts par l'erôr L^∞ . Naturalmentri, dut chest al sucêt cuant che si doprin misuris justis.

La situazion e cambie cuant che si lavore in presençe di erôrs, cemût che si fasarà viodi subit. Ancje par chestis analisis numerichis a son stâts cjapâts in considerazion erôrs casuai dal tip (48) cun $K = 0.005$ e $K = 0.01$. L'andament dal erôr L^2 al è risultât diferent di chel dai câs precedents indulà che si dopravin misuris justis. In fat, pe configurazion danegjade $D1$, l'erôr L^2 al aumente al cressi dal numar di frecuencis e antirisonancis dopradis te identificazion, e al passe di 3.3 ($K = 0.005$),

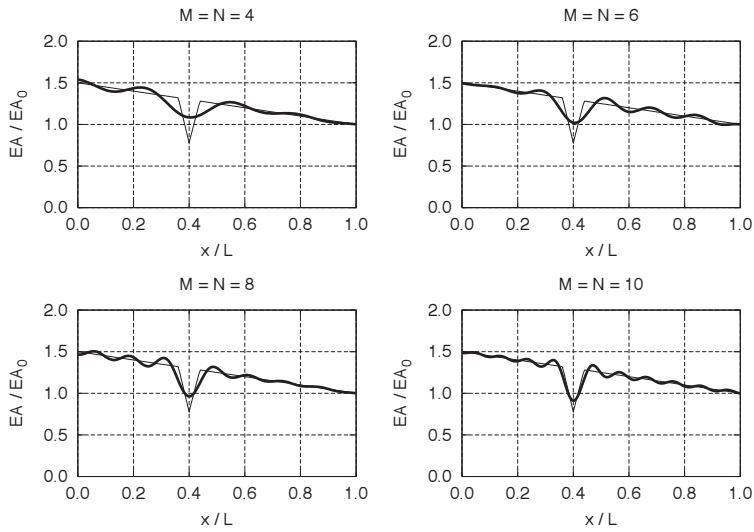


Figure 13. Tráf di Fig. 11 (Esempli 3 de Sezion 3). Rigijedece assiál EA identificate par danegjament $D2$ in assenze di eròrs sui dàts.

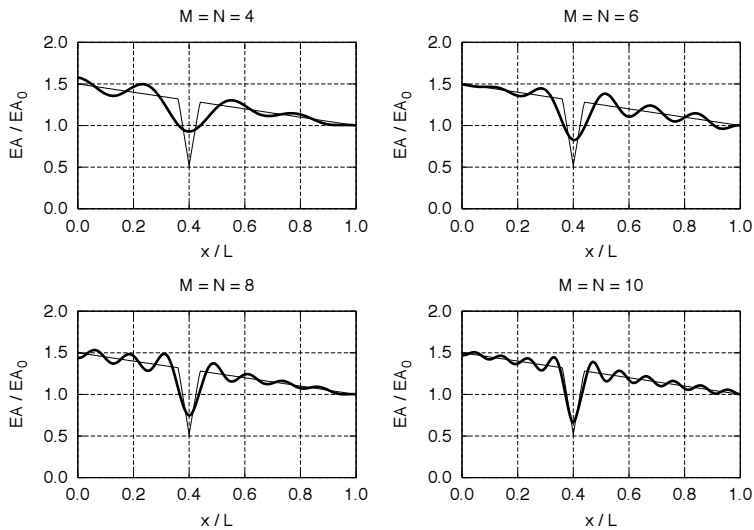


Figure 14. Tráf di Fig. 11 (Esempli 3 de Sezion 3). Rigijedece assiál EA identificate par danegjament $D3$ in assenze di eròrs sui dàts.

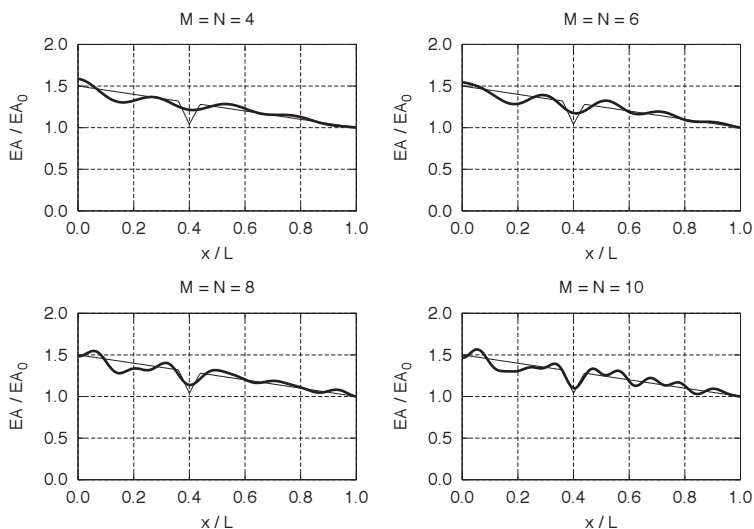


Figure 15. Trâf di Fig. 11 (Esempli 3 de Sezion 3). Rigjidece assiâl EA identificate par danegjament $D1$ in presenche di erôrs sui dâts di nivel massim $K = 0.005$.

5.2 ($K = 0.01$) par $M = N = 4$ a 3.7 ($K = 0.005$), 7.4 ($K = 0.01$) par $M = N = 10$. Chest compartament al pues spiegâ riguardant che i erôrs sui dâts a son dal stes ordin des variazions di frecuenche prodotis dal danegjament $D1$ e, duncje, un al si spiete che no si puedin otegnî bogns risultâts te identificazion dal prin nivel di danegjament. A proposit, si confronti la Figure 12 (cence erôrs sui dâts) e la Figure 15, che e ripuarte un esempli di ricostruzion dal coeficient di rigjidece par $K = 0.005$. I risultâts de identificazion a meiorin passant a la configurazion sucessive, $D2$, specialmentri cuant che i erôrs a son piçui ($K = 0.005$), cf. Figuris 13 e 16. Il danegjament $D3$ al è simpri clarementri individuabil dal profil di rigjidece ricostruît, cemût che a si pues ancje viodi dai graphics des Figuris 17 e 18. Par finî, l'erôr L^2 al risulde jessi, rispjetivamentri, debilmentri cressint e cressint rispjet al numar di frecuencis/antirisonancis dopradis pes configurazions di danegjament $D2$ e $D3$, cf. Tabele 5.

3.5 Esempli 4: trâf di profil iniziâl costant a trats e cun une fessure.

In chest ultin esempli, la tecniche diagnostiche e je aplicade ae trâf di Fig. 19. La trâf e à profil iniziâl costant a trats e e presente une fessure inte

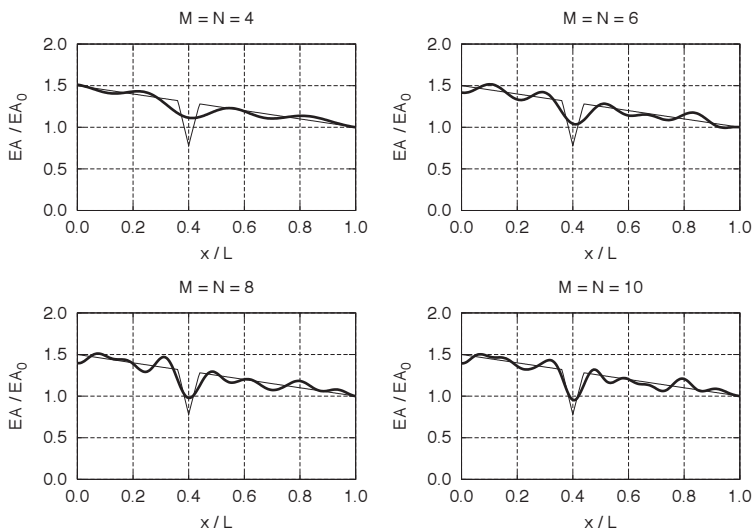


Figure 16. Tráf di Fig. 11 (Esempli 3 de Sezion 3). Rigjidece assiâl EA identificate par danegjament $D2$ in presenze di eròrs sui dàts di nivel massim $K = 0.005$.

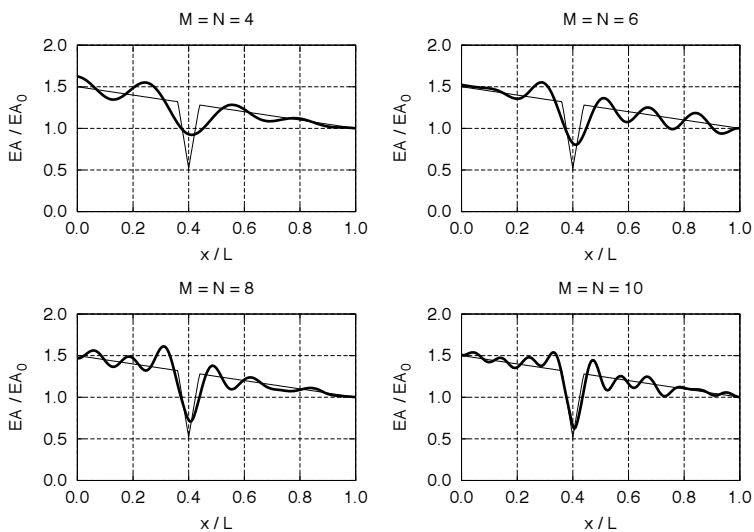


Figure 17. Tráf di Fig. 11 (Esempli 3 de Sezion 3). Rigjidece assiâl EA identificate par danegjament $D3$ in presenze di eròrs sui dàts di nivel massim $K = 0.005$.

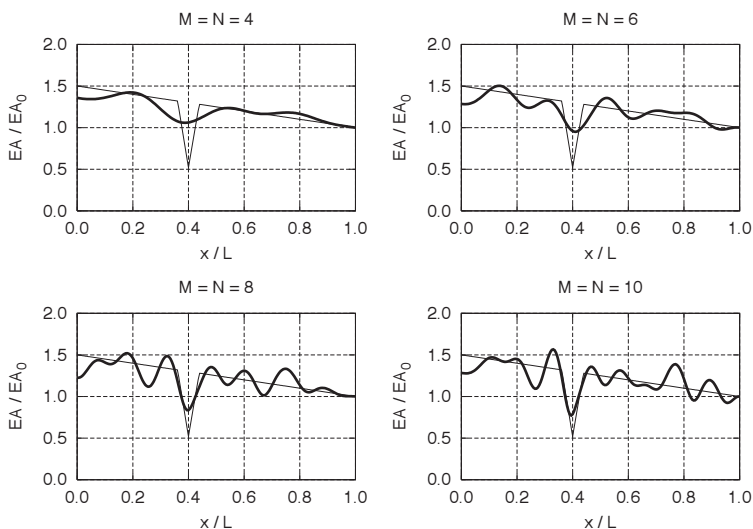


Figure 18. Trâf di Fig. 11 (Esempli 3 de Sezion 3). Rigjidece assiâl EA identificade par danegjament $D3$ in presence di erôrs sui dâts di nivel massim $K = 0.010$.

sezion distant $0.40 \cdot \ell$ dal estrem cjamp. La modelazion dal danegjament e il studi numeric a son stâts svilupâts daûr lis liniis dal Esempli 3.

La Tabele 6 e ripuarte i dâts dinamics de trâf integre e danegjade. I risultâts da la identificazion in assence di erôrs sui dâts e cun erôrs dal tip (48), cun $K = 0.005$ e $K = 0.01$, a son presentâts in Tabele 7. In tiermins gjenerai, e in analogjie cun l'Esempli 3, il danegjament al ven localizât ben e ancje la sô severitât e ven stimade cun precision quant che i erôrs a son plui piçui des variazions di frecuece e antirisonance prodotis de fressure, che si consulti in proposit lis Figuris 20-25 par cualchi esempli di ricostruzion dal coeficient di rigjidece par i nivei $D1$, $D2$ e $D3$. Par ce che al rivuarde i erôrs L^2 e L^∞ sul coeficient identificât, ancje in chest câs si son osservâts andaments simii a chei dal Esempli 3 e, duncje, a si rimande a la sezion precedent par i details.

Al è il câs di notâ che la procedure di identificazion e semee che lavori ben ancje quant che il coeficient iniziâl al à discontinuitâts di tip salt, che si viodi l'articul di Rafler & Bockmann (2007) par ilustrazions di un metodi di ricostruzion par operadôr di Sturm-Liouville cun potenziâl discontinui.

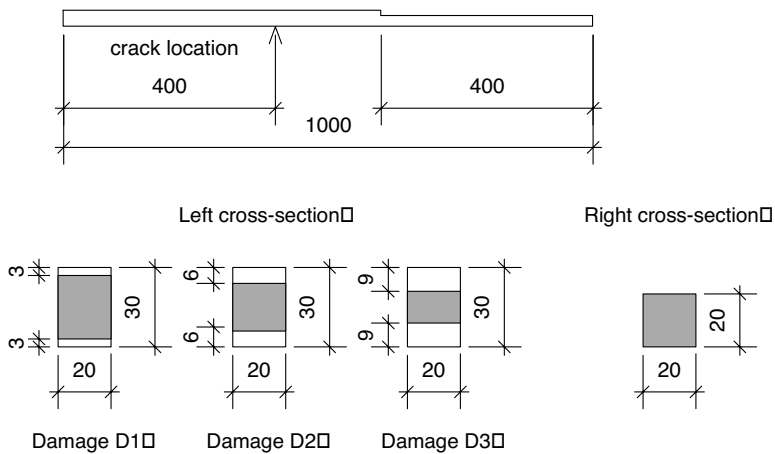


Figure 19. Trâf di profil inižiâl costant a trats e cuntune fressure (Esempli 4 de Sezion 3). Lungjepis in milimetris.

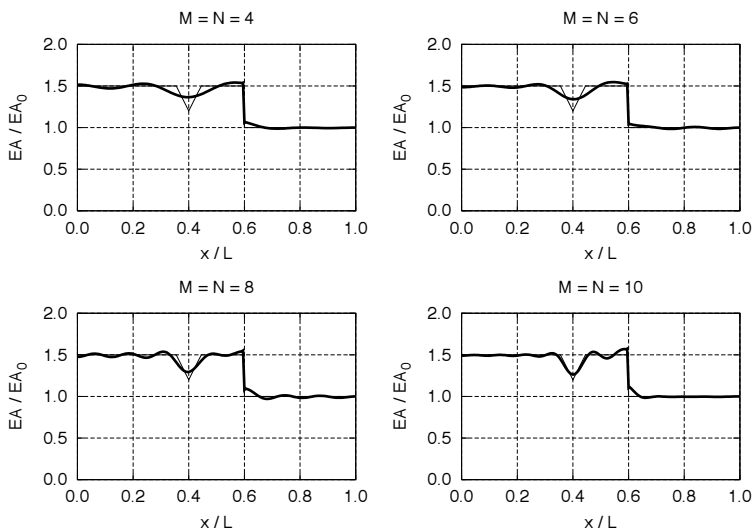


Figure 20. Trâf di Fig. 19 (Esempli 4 de Sezion 3). Rigjidece assiâl EA identificade par danegjament $D1$ in assenze di erôrs sui dâts.

Tabele 6. Trâf in vibrazion assiâl di Sezion 3, Esempi 4 di Figure 19: valôrs des frecuencis naturâls e des antirisonancis (de frf $H(\sqrt{\lambda}, 0, 0)$) inte configurazion integre e intes trê configurazions danegjadis $D1$, $D2$ e $D3$ di Figure 19. Configurazion integre: $E = 2.06 \times 10^{11}$ N/m², masse par unitât di volum $\gamma = 7850$ kg/m³. $\Delta_n\% = 100 \cdot (f_n^{integre} - f_n^{daneg})/f_n^{integre}$. I valôrs des frecuencis e antirisonancis a son in Hz.

Mût	Integre	Danegjament D1		Danegjament D2		Danegjament D3	
n	f_n	f_n	$\Delta_n\%$	f_n	$\Delta_n\%$	f_n	$\Delta_n\%$
Frecuencis							
1	2663.3	2641.0	0.84	2610.4	1.99	2564.0	3.73
2	4967.6	4945.1	0.45	4914.9	1.06	4870.6	1.95
3	7836.3	7799.8	0.46	7750.0	1.10	7675.3	2.05
4	10158.4	10080.5	0.77	9980.8	1.75	9845.8	3.08
5	12797.8	12786.3	0.09	12772.2	0.20	12753.8	0.34
6	15487.9	15370.7	0.76	15214.7	1.76	14993.1	3.19
7	17780.9	17700.8	0.45	17604.2	0.99	17483.2	1.67
8	20650.6	20550.6	0.48	20422.1	1.11	20247.5	1.95
9	22996.9	22856.3	0.61	22691.9	1.33	22492.4	2.19
10	25615.4	25539.2	0.30	25440.7	0.68	25305.1	1.21
Antirisonancis							
1	1434.2	1425.1	0.63	1412.7	1.50	1394.0	2.81
2	3746.7	3744.1	0.07	3740.6	0.16	3735.2	0.31
3	6397.6	6323.7	1.16	6225.0	2.70	6082.1	4.93
4	9074.0	9065.9	0.09	9055.5	0.20	9041.0	0.36
5	11371.9	11302.7	0.61	11210.5	1.42	11079.4	2.57
6	14240.9	14154.2	0.61	14044.1	1.38	13985.9	2.42
7	16574.3	16548.4	0.16	16514.6	0.36	16467.2	0.65
8	19202.9	19019.0	0.96	18791.5	2.14	18497.7	3.67
9	21907.4	21861.1	0.21	21802.9	0.48	21725.0	0.83
10	24197.3	24063.4	0.55	23897.7	1.24	23681.4	2.13

Tabele 7. Risultâts de identificazion pe trâf in vibrazion assiâl di Sezion 3, Esempli 4: valôrs mediis (su cent simulazions) de norme L^2 dal erôr (e, in parenthesis, de norme L^∞) inte stime dal coeficient di rigjidece (cf. ecuazion (49)) e relativis deviazions standard par lis trê configurazions danegjadis $D1$, $D2$, $D3$ e par $M = N = 4, 6, 8, 10$, in assence di erôrs ($K = 0$) e cun erôrs casuâi su lis frecuencis/antirisonancis di valôr massim $K = 0.005$ e $K = 0.01$ (cf. ecuazion (48)).

Erôr K	Danegjament D1		Danegjament D2		Danegjament D3	
	Erôr	Dev. std.	Erôr	Dev. std.	Erôr	Dev. std.
$M = N = 4$						
0.000	0.0290 (0.1104)		0.0577 (0.2102)		0.0913 (0.2795)	
0.005	0.0363 (0.1166)	0.0037 (0.0176)	0.0622 (0.2093)	0.0029 (0.0176)	0.0946 (0.2792)	0.0031 (0.0139)
0.010	0.0549 (0.1340)	0.0087 (0.0256)	0.0733 (0.2173)	0.0070 (0.0269)	0.1031 (0.2936)	0.0076 (0.0228)
$M = N = 6$						
0.000	0.0251 (0.1102)		0.0481 (0.1689)		0.0770 (0.2306)	
0.005	0.0382 (0.1102)	0.0048 (0.0178)	0.0558 (0.1763)	0.0035 (0.0152)	0.0824 (0.2414)	0.0035 (0.0151)
0.010	0.0600 (0.1438)	0.0088 (0.0303)	0.0737 (0.2017)	0.0084 (0.0272)	0.0954 (0.2663)	0.0077 (0.0276)
$M = N = 8$						
0.000	0.0216 0.0632		0.0382 0.1164		0.0580 0.1604	
0.005	0.0394 (0.1040)	0.0055 (0.0235)	0.0512 (0.1401)	0.0045 (0.0173)	0.0667 (0.1744)	0.0047 (0.0164)
0.010	0.0682 (0.1591)	0.0093 (0.0383)	0.0751 (0.1828)	0.0094 (0.0277)	0.0900 (0.2159)	0.0110 (0.0341)
$M = N = 10$						
0.000	0.0187 0.0725		0.0271 0.0769		0.0384 0.0856	
0.005	0.0418 (0.1083)	0.0054 (0.0280)	0.0478 (0.1214)	0.0063 (0.0270)	0.0556 (0.1357)	0.0054 (0.0230)
0.010	0.0776 (0.1892)	0.0112 (0.0518)	0.0818 (0.1919)	0.0102 (0.0387)	0.0848 (0.1928)	0.0100 (0.0371)

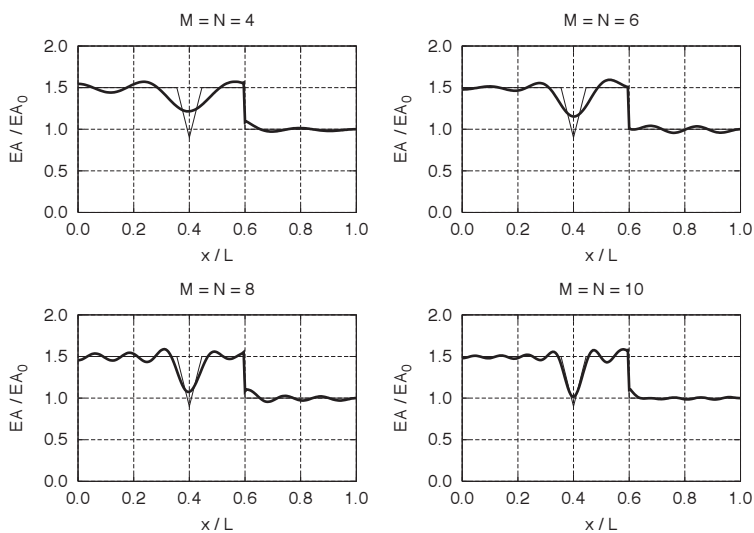


Figure 21. Trâf di Fig. 19 (Esempli 4 de Sezion 3). Rigjidece assiâl EA identificate par danegjament $D2$ in assenze di eròrs sui dàts.

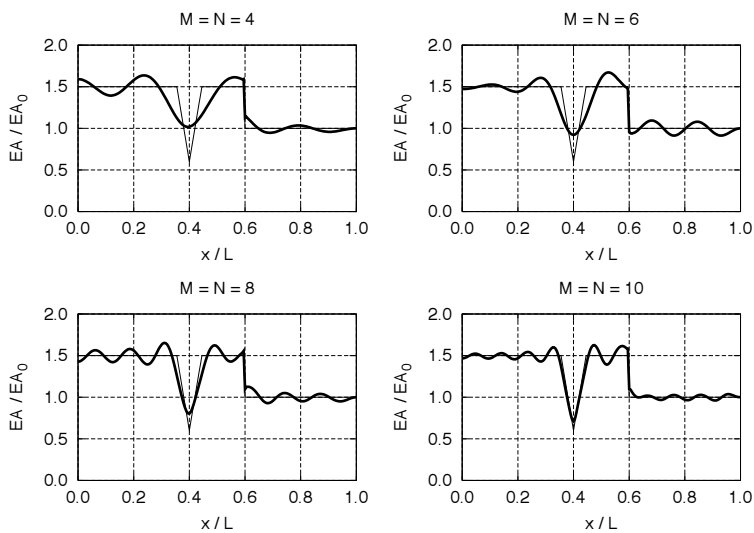


Figure 22. Trâf di Fig. 19 (Esempli 4 de Sezion 3). Rigjidece assiâl EA identificate par danegjament $D3$ in assenze di eròrs sui dàts.

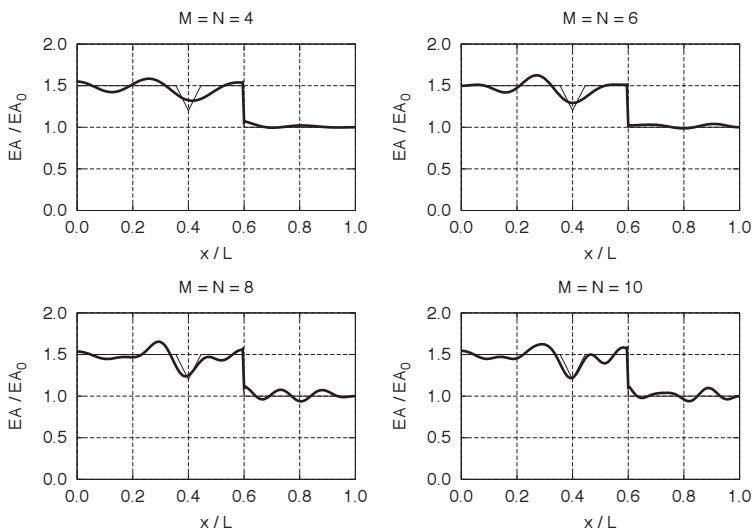


Figure 23. Trâf di Fig. 19 (Esempli 4 de Sezion 3). Rigjidece assiâl EA identificate par danegjament $D1$ in presençe di erôrs sui dâts di nivel massim $K = 0.005$.

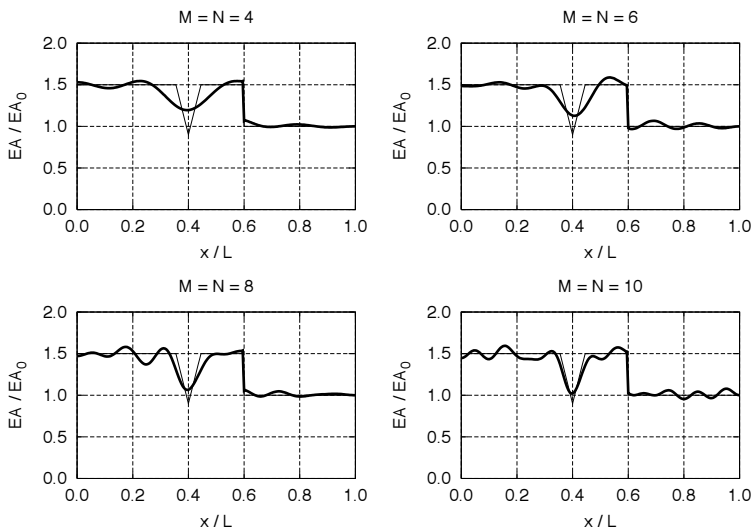


Figure 24. Trâf di Fig. 19 (Esempli 4 de Sezion 3). Rigjidece assiâl EA identificate par danegjament $D2$ in presençe di erôrs sui dâts di nivel massim $K = 0.005$.

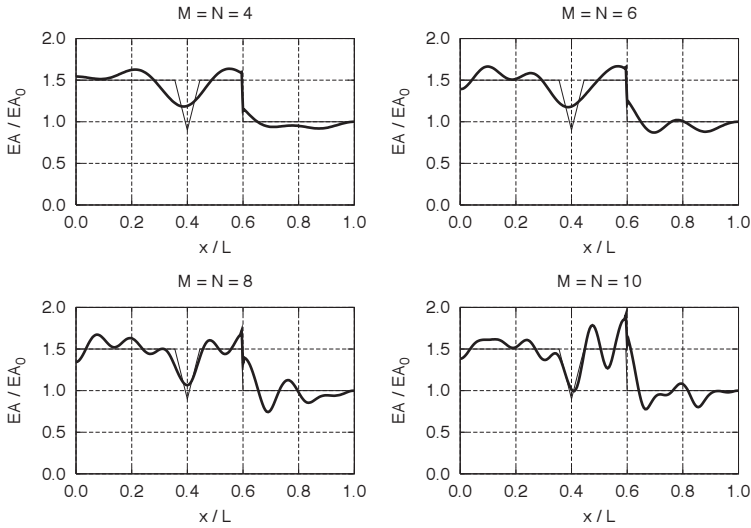


Figure 25. Trâf di Fig. 19 (Esempli 4 de Sezion 3). Rigjidece assiâl EA identificate par danegjament $D2$ in presince di erôrs sui datos di nivel massim $K = 0.010$.

4. Osservazions conclusivis. In chest lavôr e je stade svilupade e aplicade une tecniche di identificazion di un danegjament structurâl basade su lis misuris des primis frecuencis di risonance e di antirisonance di une trâf in vibrazion assiâl. A si è fat viodi che lis misuris di chestis variacions a puedin jessi dopradis par cjatâ un ciert numar di coeficients gjeneralizâts di Fourier de variacion di rigjidece prodote dal difiet. Dal pont di viste matematic, chest probleme diagnostic al corrispuint a un probleme invers ai autovalôrs par un operadôr dal tip Sturm-Liouville cun numar finît di misuris par il cuâl, a cognossince dai autôrs, no je stade ancjemò dade une rispueste gjenerâl. I risultâts de aplicazion de tecniche a câs sperimentâi e a un grant numar di simulazions numerichis a son stâts incoragjants e in acuardi cun lis previsions de teorie, massime cuant che lis variacions misuradis des frecuencis e antirisonancis a jerin plui grandis dai erôrs di modelazion o di misure. Al è però il câs di notâ che i risultâts sperimentâi otignûts su trâfs metalichis cun intais a àn mostrât che, te risolucion dal probleme invers, i erôrs di modelazion su lis antirisonancis a vegnin gjeneralmentri amplificâts rispjet a ce che al sucêt cuant che a si doprin dome misuris di frequence.

Lis aplicazions che o vin mostrât in chest lavôr a son limitadis a trâfs in vibrazion assiâl, cuant che, invezit, un grumon di situazions pratichis a clamin in cause lis vibrazions flessionâls. Il letôr interessât al pues cjatâ une tratazion di chest câs intal lavôr di Dilena & Morassi (2007).

In conclusion, disín cualchi peraule sui problemis che a restin vierts e su lis pussibilis direzions di ricercje.

A bisugne ricognossi che a'nd è un ciert numar di problemis gjenerâi di clarî te procedure de identificazion che o vin doprât. Par esempi, al sarès impuartant rivâ a provâ la convergjence de procedure iterative di identificazion e stabilî un colegament cun risultâts gjenerai de teorie dai problemis inviers ai autovalôrs. Un altri aspjet che al mertarès cualchi aprofondiment al rivuarde il colegament di cheste classe di tecnicis e lis proceduris di identificazion basadis su algoritmis variazionâi.

La procedure di identificazion, come che si à a pen dit, e je risultade particolarmentri sensibil a erôrs di misure des frecuencis di antirisonance. Dal pont di viste sperimentâl, misuris precisis di chestis grandecis a son plui dificilis di fâ rispjet a misuris des frecuencis di risonance, probabilmmenti parcè che a son plui influençadis des condizions sperimentâls e dai inevitabii erôrs di misure. In ogni câs, al samee impuartant condusi un studi sperimentâl seri e complet par clarî definitivementri chest aspjet.

Par sierâ, al è il câs di osservâ che se la leterature su la diagnostiche strutturâl di trâfs e je un grum svilupade, no si pues dî altrettanto di chê che rivuarde sistemis strutturâi di dimension superiôr, come, par esempi, lis membranis e lis piastris vibrants. Chest aspjet al è di grande impuartance par lis aplicazion pratichis e i autôrs a ritegnin che e deventarà une des sfidis plui significativis dal setôr de diagnostiche structurâl dal prossim futûr.