Chapitre 5

Étude temporelle des systèmes élémentaires

1. Introduction

Dans ce chapitre, nous nous limiterons à l'étude des systèmes élémentaires en présence de diverses entrées : impulsion, échelon et rampe.

2. Système du premier ordre

2.1 Définition

Un système physique d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ est dit du premier ordre s'il est régi par une équation différentielle du premier ordre du type :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K\, e(t)$$

Avec :

- K : Gain statique du système ;
- τ : Constante de temps >0.

2.2 Fonction de transfert

En appliquant la transformée de Laplace à cette équation, on obtient :

$$\tau\, p\, S(p) - \tau\, s(0^+) + S(p) = K\, E(p)$$

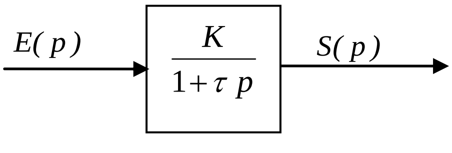
Lorsque les conditions initiales sont nulles cette équation devient :

$$(1+\tau\, p)S(p) = K\, E(p)$$

La fonction de transfert du système est alors :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+\tau\, p}$$

Le schéma bloc d'un système du premier ordre est de la forme suivante :



Exemple 1 : Réservoir à écoulement par gravité

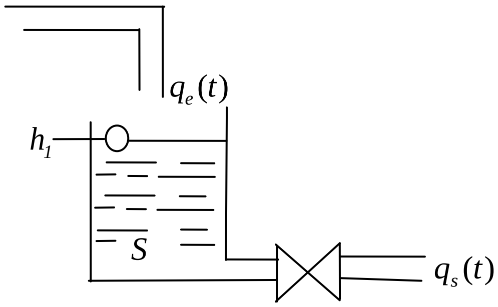


Figure 5.1 : *Régulation de niveau d'un réservoir*

Le réservoir considéré est caractérisé par trois variables :

- Le débit d'entrée : $q_e(t)$;
- Le débit de sortie : $q_s(t)$;
- La hauteur de liquide dans le réservoir : $h(t)$.

La section du réservoir est notée S. Le débit de sortie peut être fixé par l'utilisateur, on parle alors de régime forcé. Dans ce cas, l'évolution du réservoir est décrite par l'équation :

$$\frac{dv(t)}{dt} = S\frac{dh(t)}{dt} = q_e(t) - q_s(t)$$

L'écoulement de sortie du réservoir peut être **libre** (vanne ouverte), dans ce cas le débit de sortie est provoqué par **gravitation**, et il est proportionnel à la hauteur de fluide dans le réservoir (pour une variation autour d'un point de fonctionnement) : $q_s(t) = a\,h(t)$

D'où on a :

$$S\frac{dh(t)}{dt} = q_e(t) - a\,h(t)$$

Lorsque les conditions initiales sont nulles, cette équation devient :

$$(a + S\,p)H(p) = Q_e(p)$$

La fonction de transfert du système est alors :

$$\frac{H(p)}{Q_e(p)} = \frac{\frac{1}{a}}{1+\frac{S}{a}p} = \frac{K}{1+\tau\,p}$$

avec :

- $K = \frac{1}{a}$: Gain statique du système ;
- $\tau = \frac{S}{a}$: Constante de temps.

2.3 Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle du système du premier ordre est obtenue pour une entrée $e(t) = E_0\,\delta(t) \Rightarrow E(p) = E_0$

On a $H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{K}{1+\tau p} \Rightarrow S(p) = H(p)E(p) = \dfrac{K}{1+\tau p}E_0 = \dfrac{KE_0}{\tau}\dfrac{1}{p+\dfrac{1}{\tau}}$

En utilisant la table de la transformée de Laplace, on trouve :

$$s(t) = \frac{KE_0}{\tau}\, e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$$

t	0	τ	∞
$s(t)$	$\dfrac{KE_0}{\tau}$	$0.366\,\dfrac{KE_0}{\tau}$	0

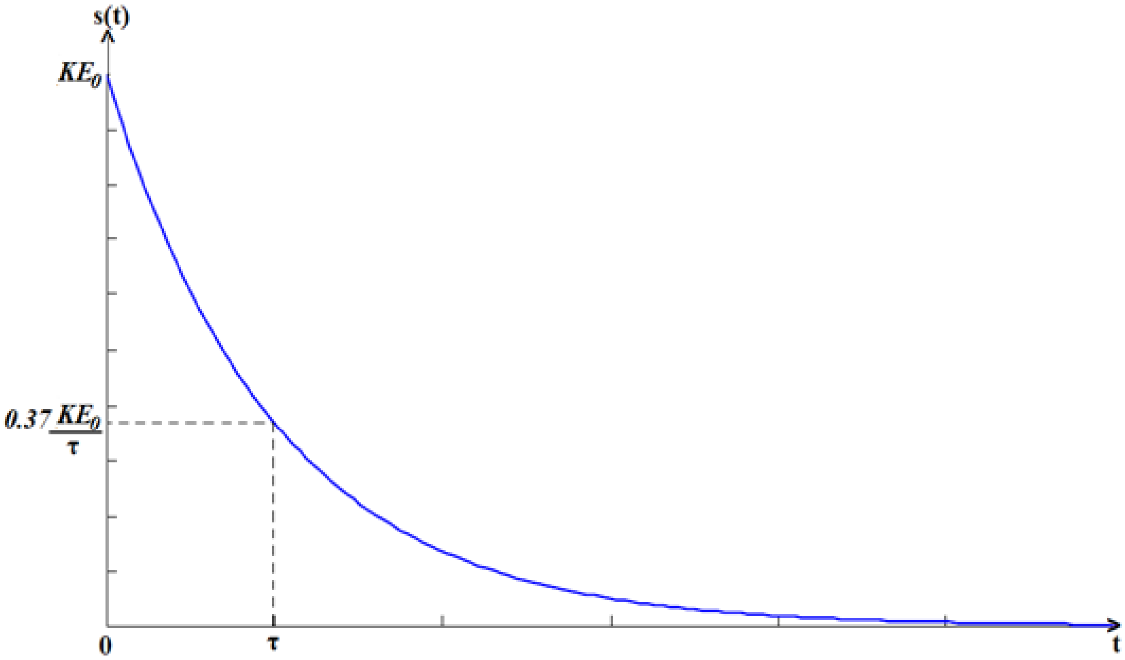


Figure 5.2: *Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre*

2.4 Réponse indicielle

La réponse indicielle du système du premier ordre est obtenue pour une entrée $e(t) = E_0\,u(t) \Rightarrow E(p) = \dfrac{E_0}{p}$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+\tau p} \Rightarrow S(p) = H(p)E(p) = \frac{K}{p(1+\tau p)}E_0$$

En utilisant la table de transformée de Laplace, on trouve :

$$s(t) = K\,E_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})u(t)$$

t	0	τ	3τ	5τ	∞
$s(t)$	0	$0.633\,K\,E_0$	$0.95\,K\,E_0$	$0.99\,K\,E_0$	$K\,E_0$

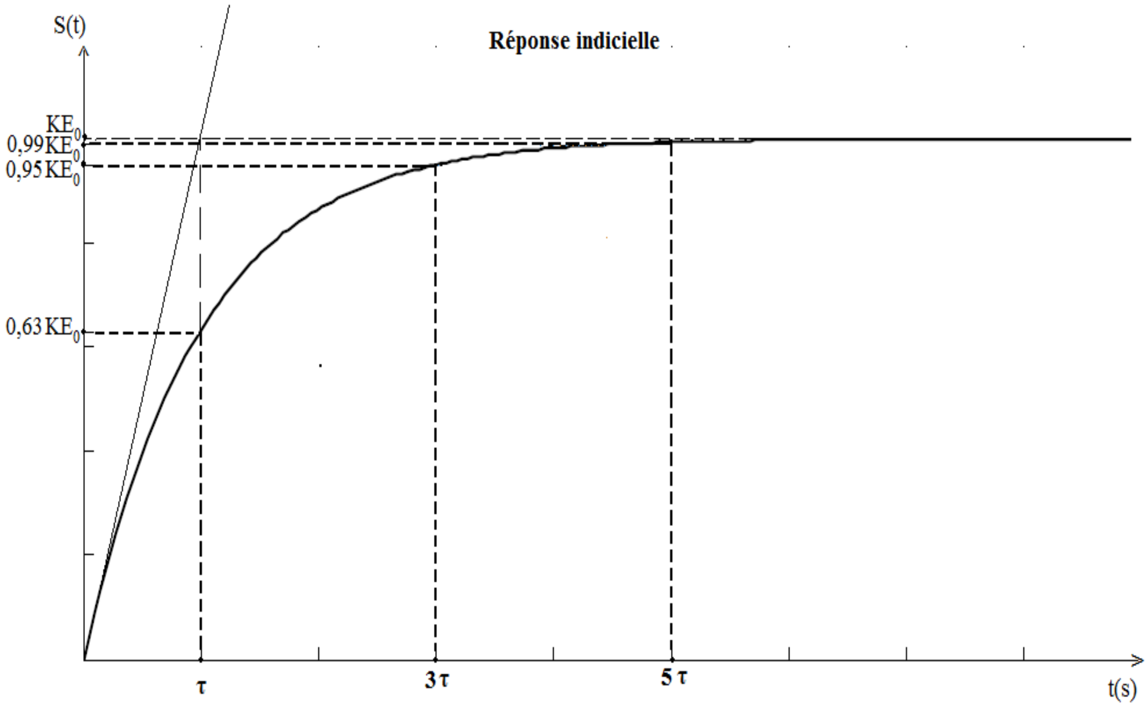


Figure 5.3 : *Réponse indicielle d'un système du premier ordre*

Temps de réponse à 5% $\Rightarrow$ $s(t_r) = K\,E_0(1 - e^{-\frac{t_r}{\tau}}) = 0.95\,K\,E_0 \Rightarrow$

$$1 - e^{-\frac{t_r}{\tau}} = 0.95 \Rightarrow$$

$$e^{-\frac{t_r}{\tau}} = 0.05 \Rightarrow$$

$$t_r = -\tau\,Ln(0.05) \approx 3\tau \Rightarrow$$

$$t_r(5\%) = 3\tau$$

2.5 Réponse à une rampe

La réponse à une rampe du système du premier ordre est obtenue pour une entrée de type rampe $e(t) = E_0\,t\,u(t)$.

$$e(t) = E_0\,t\,u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{E_0}{p^2}$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau\,p}$$

$$\Rightarrow S(p) = H(p)E(p) = \frac{K}{p^2(1 + \tau\,p)}E_0$$

En utilisant la table de transformée de Laplace on trouve :

$$s(t) = K\,E_0(t - \tau + \tau\, e^{-\frac{t}{\tau}})u(t)$$

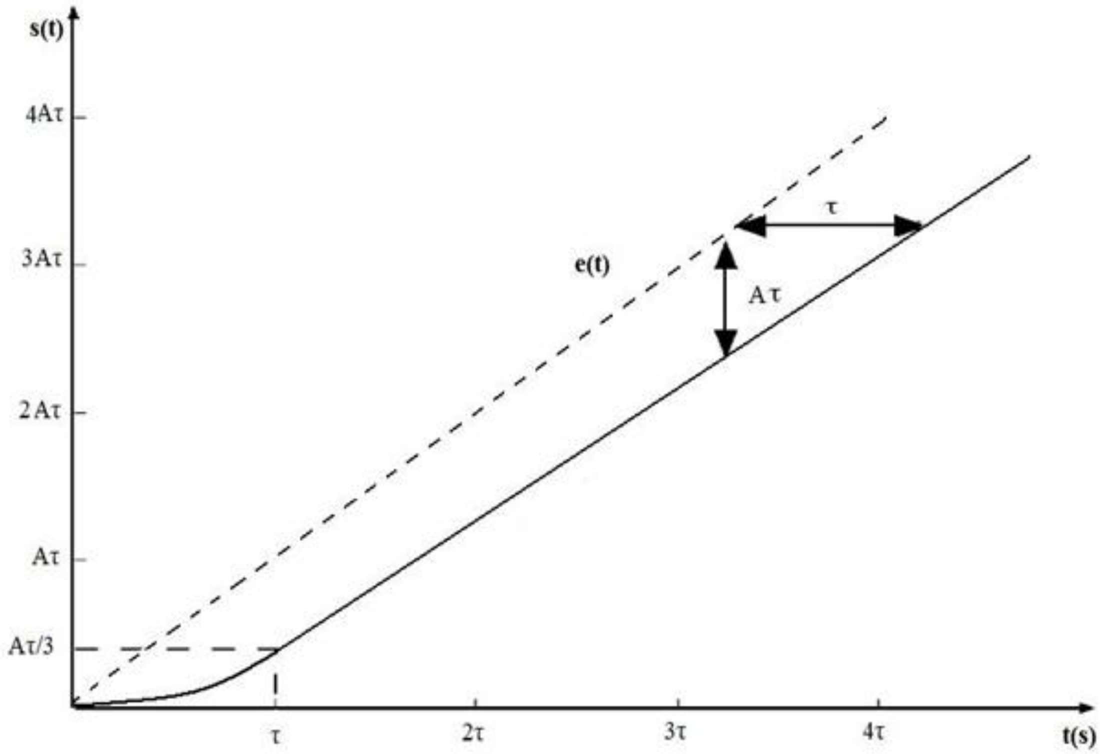


Figure 5.4 *: Réponse à une rampe d'un système du premier ordre*

3. Système du premier ordre généralisé

3.1 Définition

Un système physique d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ est dit du premier ordre généralisé, lorsqu'il est régi par une équation différentielle du premier ordre de la forme :

$$a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0\, e(t)$$

Ou sous une forme canonique : $\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K\left(\tau' \frac{de(t)}{dt} + e(t)\right)$

avec :

- K : Gain statique ;
- τ et τ' : Constantes de temps ;
- $\tau' = \lambda \tau$:
  - $Si\ \lambda > 1$: on dit que le système est à avance de phase ;
  - $Si\ \lambda < 1$: on dit que le système est à retard de phase.

3.2 Fonction de transfert

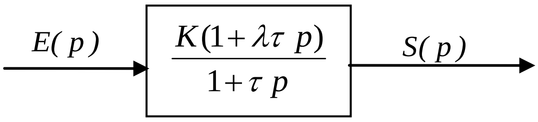
En appliquant la transformée de Laplace à l'équation différentielle précédente avec des conditions initiales nulles, on obtient :

$$(1+\tau p)S(p) = K(1+\lambda\tau p)E(p)$$

La fonction de transfert du système du premier ordre généralisé est alors :

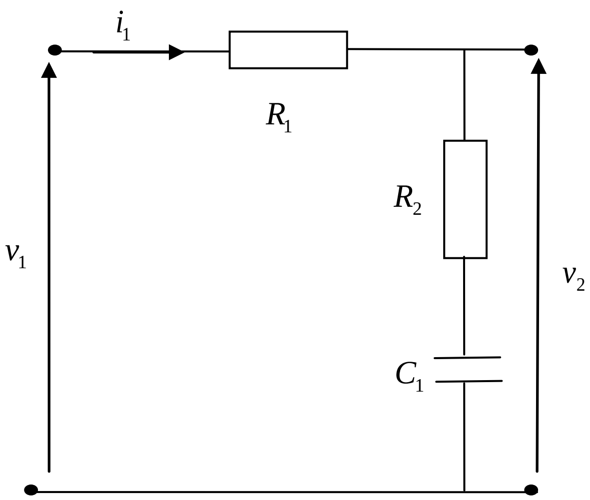
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K\frac{1+\lambda\tau p}{1+\tau p}$$

Le schéma bloc d'un système du premier ordre généralisé est de la forme suivante :



Exemple 1 :

On considère le système électrique suivant :



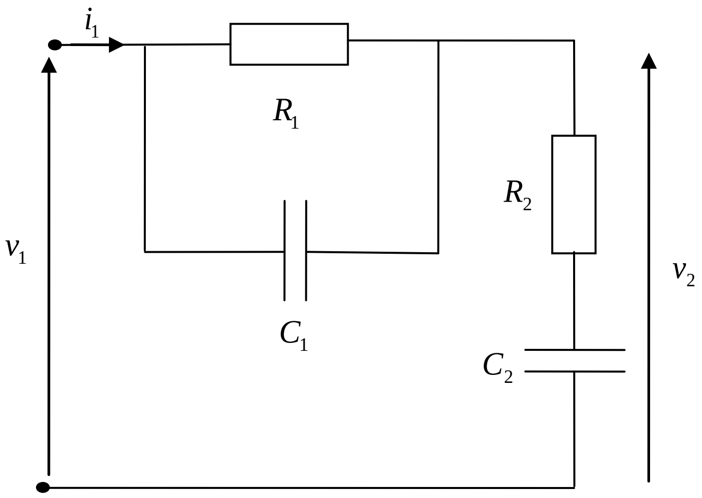
$$H(p) = \frac{V_2(p)}{V_1(p)} = \frac{1+R_2Cp}{1+(R_1+R_2)Cp} = K\frac{1+\lambda\tau p}{1+\tau p}$$

$K = 1$, $\tau = (R_1 + R_2)C$ et $\lambda = \dfrac{R_2}{R_1+R_2}$.

$\lambda = \dfrac{R_2}{R_1+R_2} < 1$, d'où il s'agit d'un système à retard de phase.

Exemple 2 :

On considère le système électrique suivant :



$$H(p)=\frac{V_2(p)}{V_1(p)}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{1+R_1Cp}{1+\frac{R_1R_2C}{R_1+R_2}p}=K\frac{1+\lambda\tau p}{1+\tau p}$$

$$K=\frac{R_2}{R_1+R_2}\ ,\ \tau=\frac{R_1R_2C}{R_1+R_2}\ \text{ et }\ \lambda=\frac{R_1+R_2}{R_2}$$

$\lambda=\frac{R_1+R_2}{R_2}>1$, d'où il s'agit d'un système à retard de phase.

3.3 Réponse indicielle

La réponse indicielle du système du premier ordre généralisé est obtenue pour une entrée

$$e(t)=E_0\,u(t)\Rightarrow\ E(p)=\frac{E_0}{p}$$

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=K\frac{1+\lambda\tau p}{1+\tau p}\ \Rightarrow\ S(p)=H(p)E(p)=KE_0\frac{1+\lambda\tau p}{p(1+\tau p)}$$

$$S(p)=KE_0\left(\frac{\frac{1}{\tau}}{p(p+\frac{1}{\tau})}+\frac{\lambda}{p+\frac{1}{\tau}}\right)$$

En utilisant la table de transformée de Laplace on trouve :

$$s(t)=K\,E_0\left(1+(\lambda-1)e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)$$

On trouve :

$s(0)=KE_0\lambda$ et $s(\infty)=0$

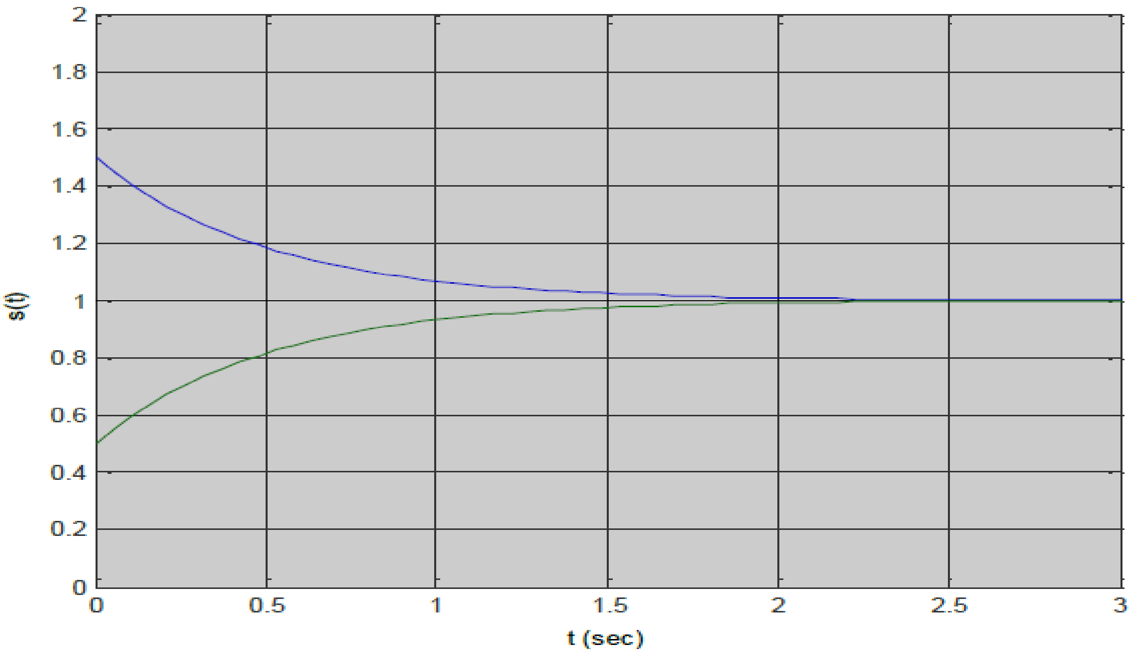


***Figure 5.5** : Réponses indicielles unitaires d'un système du premier ordre généralisé avec* $K=1,\ \lambda=0.5$ et $\lambda=1.5$

4. Système du second ordre

4.1 Définition

Un système physique d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ est dit du second ordre s'il est régi par une équation différentielle du second ordre du type :

$$b\frac{d^2s(t)}{dt^2}+a\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=K\,e(t)$$

4.2 Fonction de transfert

En appliquant la transformée de Laplace à cette équation pour des conditions initiales nulles, on trouve : $b\,p^2S(p)+a\,p\,S(p)+S(p)=K\,E(p)$

La fonction de transfert du système est alors :

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{1+a\,p+bp^2}$$

D'une manière générale, on écrit la fonction de transfert d'un système du second ordre de la façon suivante :

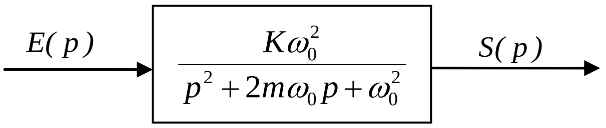
$$H(p)=\frac{K}{1+\frac{2m}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}}=\frac{K\omega_0^2}{p^2+2m\omega_0 p+\omega_0^2}$$

avec :

- K : Gain statique du système;

- ω_0 : Pulsation naturelle du système en rd/s ;
- m : Facteur d'amortissement.

Le schéma bloc d'un système du second ordre est de la forme suivante :



L'équation caractéristique est : $p^2+2m\omega_0 p+\omega_0^2=0 \Rightarrow \Delta=4\omega_0^2(m^2-1)$

1^er^ cas : $m>1$

$m>1 \Rightarrow \Delta>0 \Rightarrow H(p)$ possède 2 pôles réels :

- $p_1=-m\omega_0+\omega_0\sqrt{m^2-1}$
- $p_2=-m\omega_0-\omega_0\sqrt{m^2-1}$

2^éme^ cas : $\boldsymbol{m=1}$

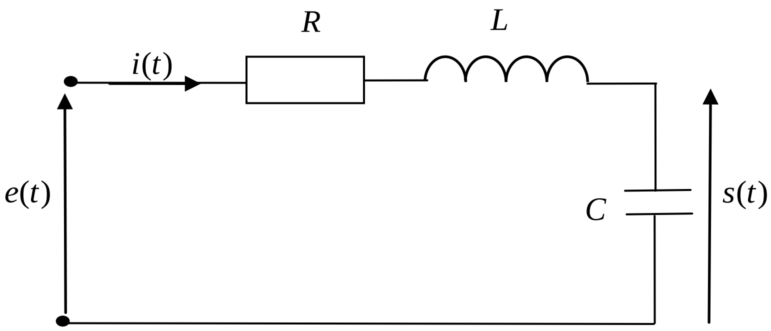
$m=1 \Rightarrow \Delta=0 \Rightarrow H(p)$ possède un pôle double $p_0=-\omega_0$

3^éme^ cas : $0<m<1$

$0<m<1 \Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow H(p)$ possède deux pôles complexes conjugués :

- $p_1=-m\omega_0+j\omega_0\sqrt{1-m^2}$
- $p_2=-m\omega_0-j\omega_0\sqrt{1-m^2}$

<u>Exemple 2 : Circuit électrique RLC</u>



La loi des mailles permet d'écrire : $e(t)=R\,i(t)+L\dfrac{di(t)}{dt}+s(t)$

Or on a $i(t)=C\dfrac{ds(t)}{dt}$

D'où $e(t)=RC\dfrac{ds(t)}{dt}+LC\dfrac{ds^2(t)}{dt^2}+s(t)$

On suppose que les conditions initiales sont nulles. En appliquant la transformée de Laplace à cette équation, on trouve :

$$E(p) = LCp^2\, S(p) + RCp\, S(p) + S(p)$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{LCp^2 + RC\, p + 1}$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{\frac{1}{LC}}{p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC}}.$$

D'où $K = 1,\ \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ et $m = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$.

4.3 Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle est obtenue pour une entrée $e(t) = E_0\delta(t) \ \Rightarrow \ E(p) = E_0$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}$$

$$\Rightarrow S(p) = H(p)E(p) = \frac{E_0 K\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}$$

1er cas : $m > 1$(Système hyper amorti)

$$S(p) = \frac{E_0 K\omega_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)} = E_0 K\omega_0^2 \frac{1}{(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{E_0 K\omega_0^2}{p_1 - p_2}\left(\frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2}\right)$$

D'où $s(t) = \frac{E_0 K\omega_0^2}{p_1 - p_2}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t})u(t) \Rightarrow$

$$s(t) = \frac{E_0 K\omega_0}{2\sqrt{m^2 - 1}}\left(e^{(-m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2-1})t} - e^{(-m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2-1})t}\right)u(t)$$

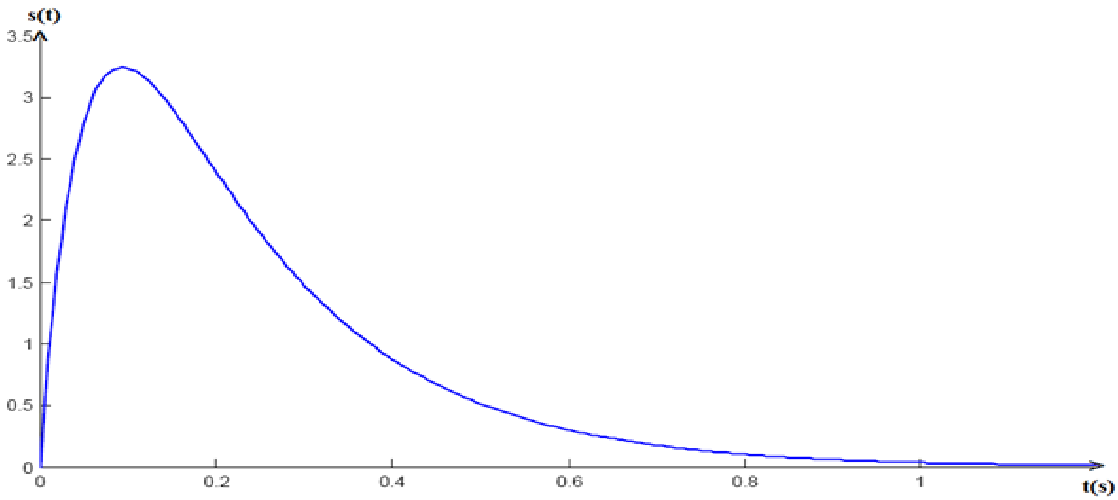


***Figure 5.6** : Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre hyper amorti*

2nd cas : $m = 1$ (Système amorti)

$$S(p) = \frac{E_0 K \omega_0^2}{(p+\omega_0)^2} = \frac{KE_0}{(1+\frac{1}{\omega_0}p)^2}$$

En utilisant la table de la transformée de Laplace, on trouve :

$$s(t) = E_0 K \omega_0^2 \, t \, e^{-\omega_0 t} \, u(t)$$

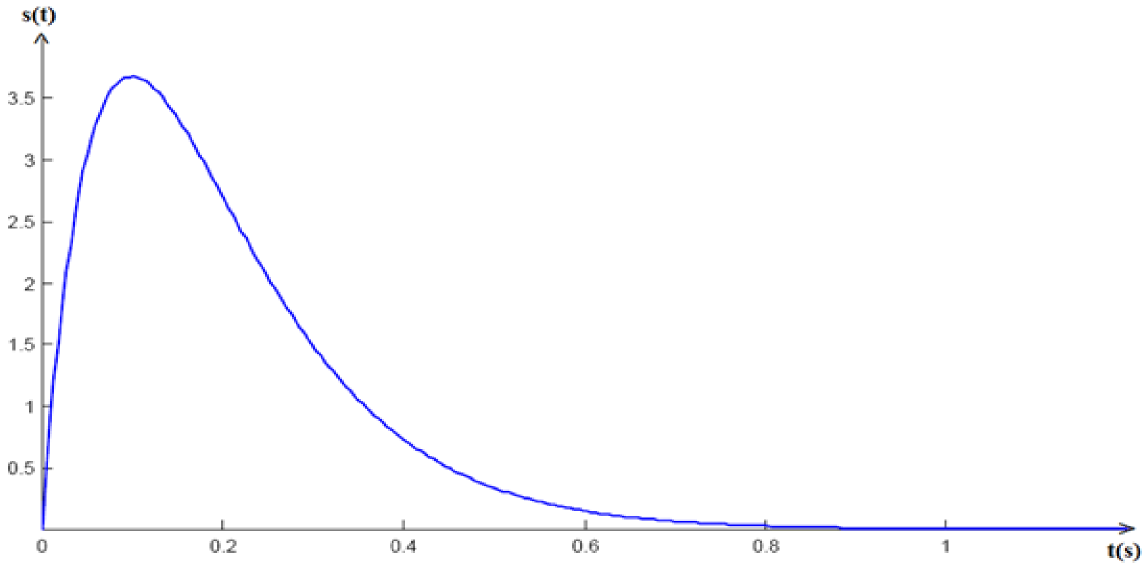


Figure 5.7 *: Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre amorti*

3éme cas : $0 < m < 1$ (Système sous amorti)

$$S(p) = \frac{E_0 K}{1 + 2m(\frac{p}{\omega_0})p + (\frac{p}{\omega_0})^2}$$

En utilisant la table de la transformée de Laplace, on trouve :

$$s(t) = \frac{K E_0 \omega_0 e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{1-m^2}} \sin\left[(\omega_0 \sqrt{1-m^2})\, t\right] u(t)$$

On pose alors :

- $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1-m^2}$: Pulsation propre
- $T_p = \dfrac{2\pi}{\omega_p}$: Pseudo période

D'où $s(t) = \dfrac{K E_0 \omega_0^2 e^{-m\omega_0 t}}{\omega_p} \sin\left[\omega_p \, t\right] u(t)$

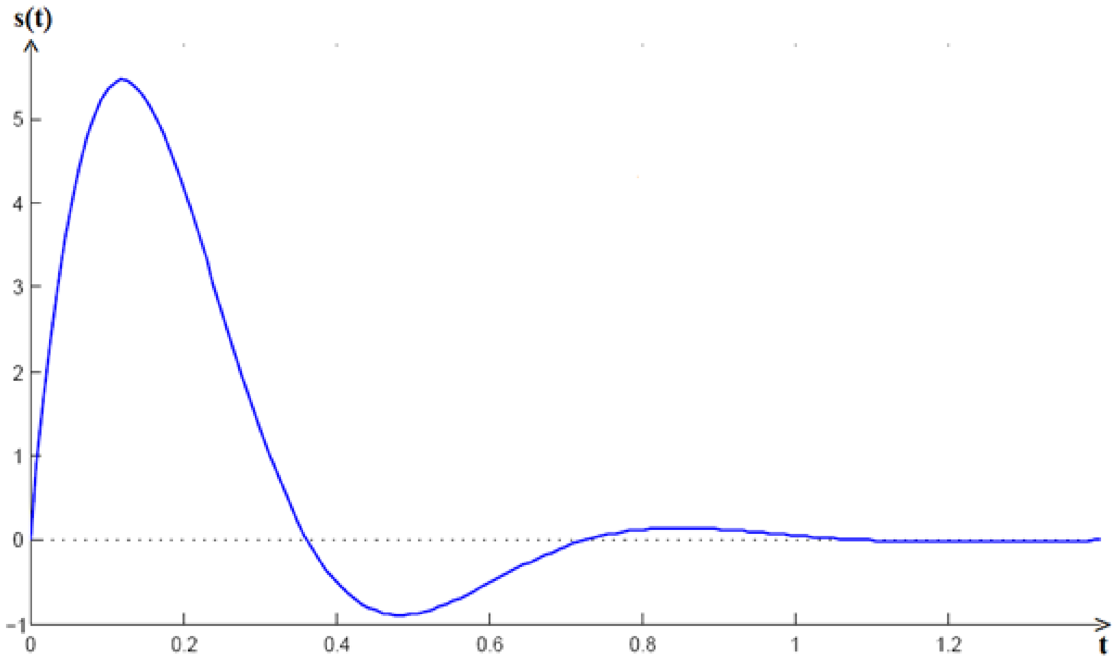


***Figure 5.8** : Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre sous amorti*

4[éme] cas $m = 0$ (Système juste oscillant)

$$S(p) = \frac{E_0 K \omega_0^2}{p^2 + \omega_0^2}$$

En utilisant la table de la transformée de Laplace, on trouve :

$$s(t) = KE_0 \omega_0 \sin[\omega_0 t] \, u(t)$$

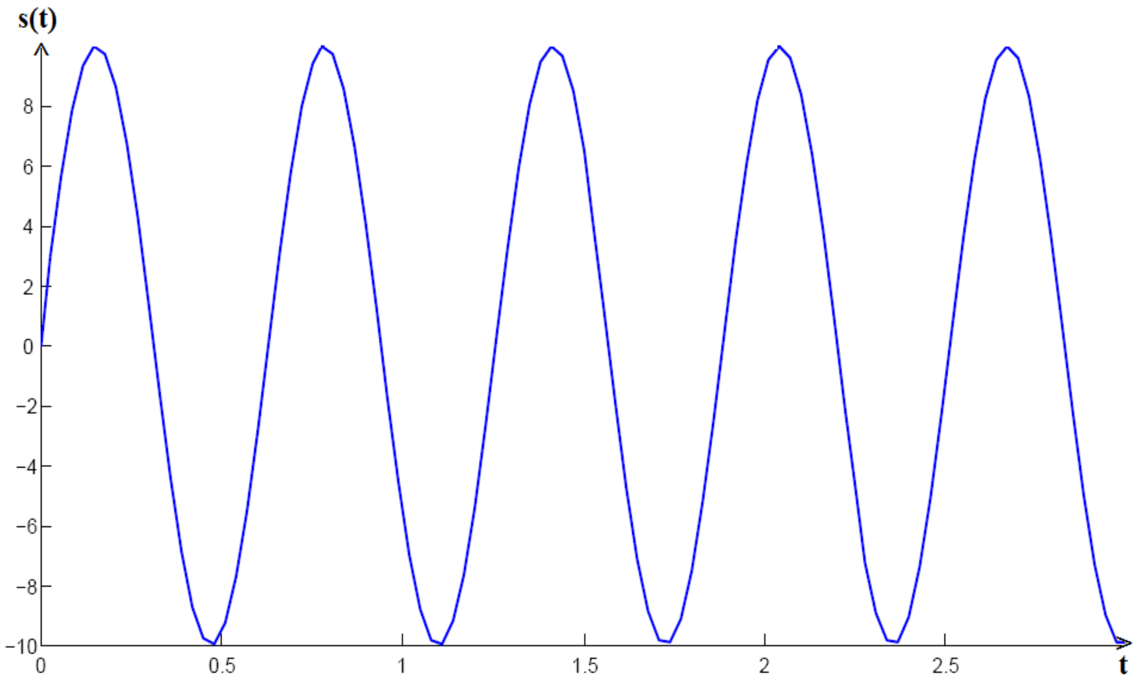


***Figure 5.9** : Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre juste oscillant*

4.4 Réponse indicielle

La réponse indicielle est obtenue pour une entrée $e(t) = E_0\, u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{E_0}{p}$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2} \Rightarrow$$

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{E_0 K\omega_0^2}{p(p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2)}$$

1er cas : $m > 1$ **(Système hyper amorti)**

$$S(p) = \frac{E_0 K\omega_0^2}{p(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{E_0 K\omega_0^2}{p_1 p_2} \frac{1}{p(1-\frac{1}{p_1}p)(1-\frac{1}{p_2}p)}$$

En utilisant la table de la transformée de Laplace, on trouve :

$$s(t) = \frac{E_0 K\omega_0^2}{p_1 p_2}\left[1 + \frac{p_1 p_2}{p_2 - p_1}\left(\frac{1}{p_2}e^{p_2 t} - \frac{1}{p_1}e^{p_1 t}\right)\right]u(t)$$

$\Rightarrow s(0) = 0$ et $s(\infty) = E_0 K$

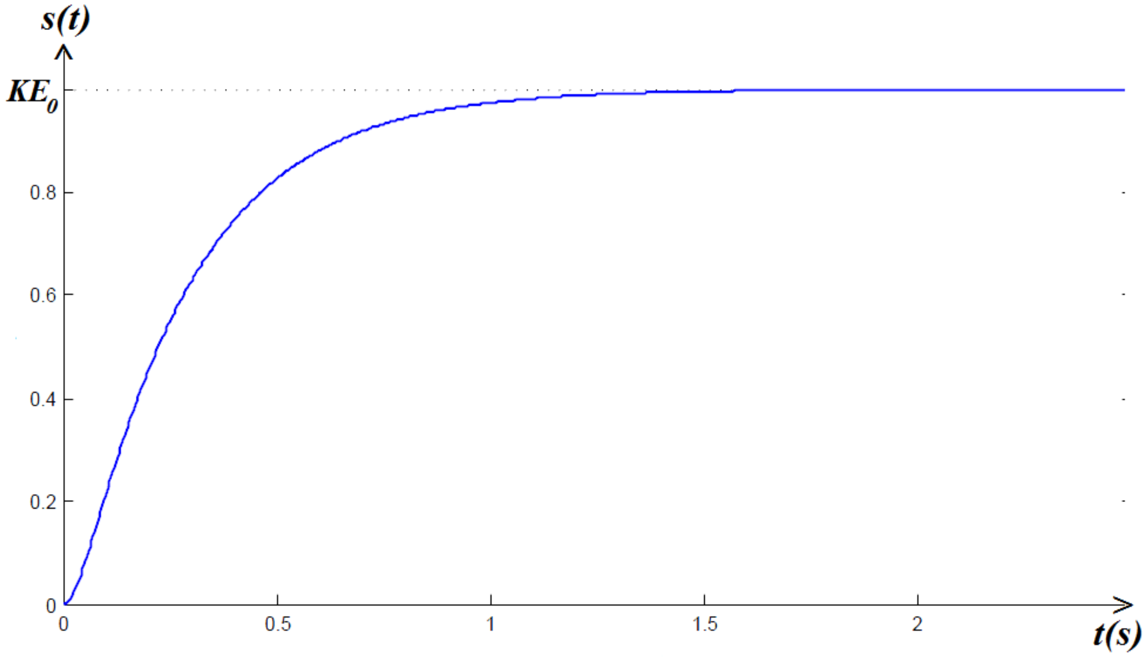


Figure 5.10 *: Réponse indicielle d'un système du second ordre hyper amorti*

On remarque que la tangente à l'origine est nulle.

2nd **cas :** $\boldsymbol{m = 1}$ **(Système amorti)**

$$S(p) = \frac{E_0 K\omega_0^2}{p(p+\omega_0)^2} = \frac{E_0 K}{p(1+\frac{1}{\omega_0}p)^2}$$

En utilisant la table de la transformée de Laplace, on trouve :

$$s(t) = E_0 K\left[1-(1+\omega_0 t)\,e^{-\omega_0 t}\right]u(t)$$

$s(0)=0$ et $s(\infty)=E_0 K$

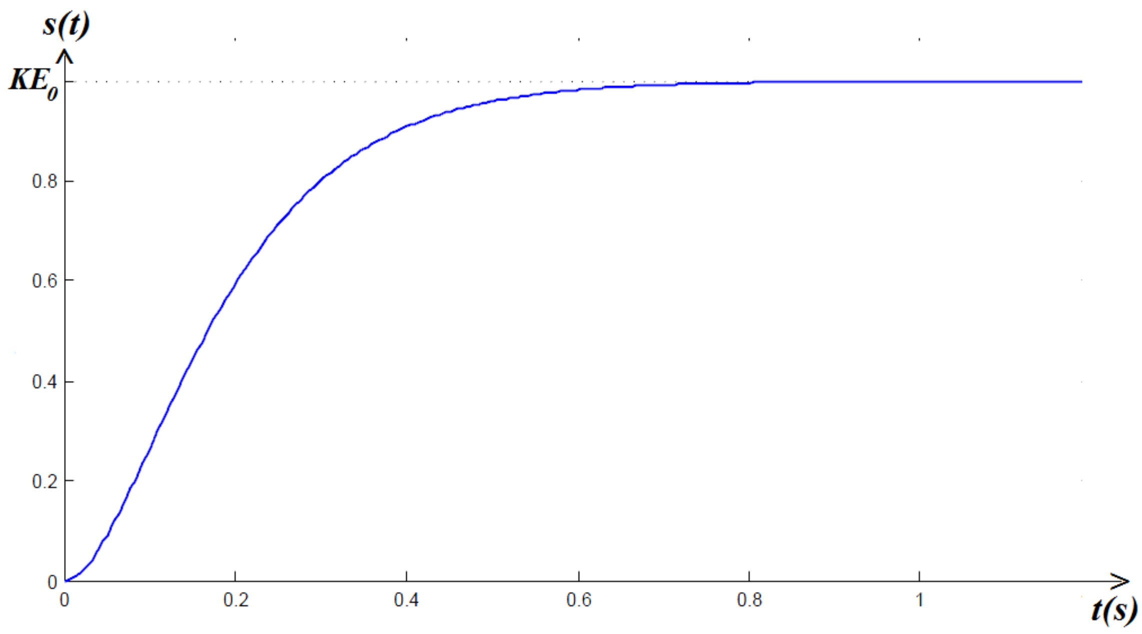


Figure 5.11 *: Réponse indicielle d'un système du second ordre amorti*

3$^{\text{éme}}$ cas : $0\langle m \langle 1$ (Système sous amorti)

$$S(p) = \frac{E_0 K}{p\left[1+2m\left(\frac{p}{\omega_0}\right)+\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2\right]}$$

En utilisant la table de transformée de Laplace, on trouve :

$$s(t) = K\,E_0\left[1-\frac{\omega_0 e^{-m\omega_0 t}}{\omega_p}\sin(\omega_p t+\varphi)\right]u(t)$$

avec :

- $\omega_p = \omega_0\sqrt{1-m^2}$: pulsation propre ;
- $T_p = \dfrac{2\pi}{\omega_p}$: pseudo période ;
- $\varphi = arctan\left[\dfrac{\sqrt{1-m^2}}{m}\right]$.

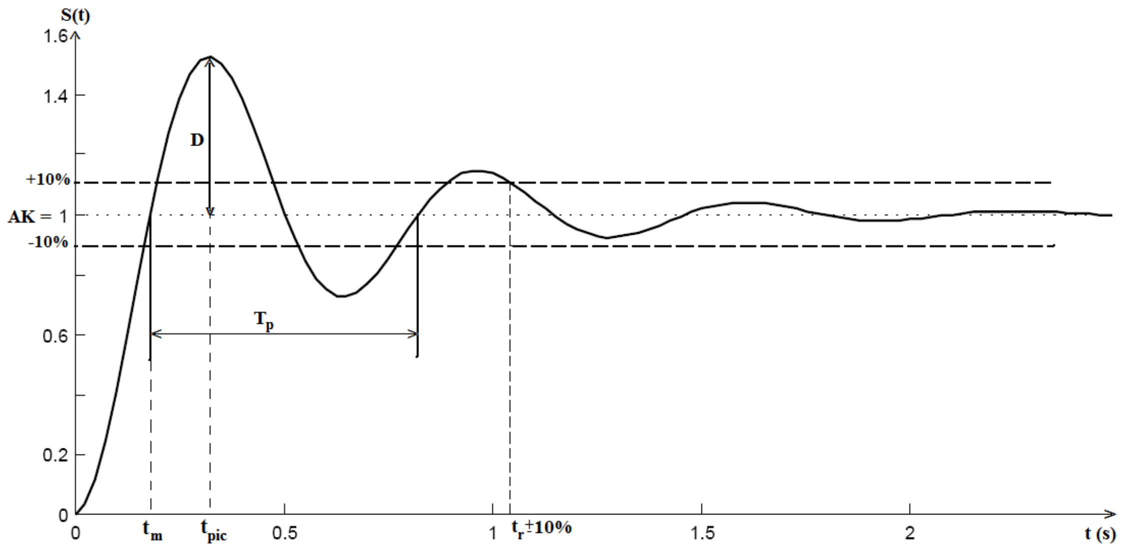


***Figure 5.12 :** Réponse indicielle d'un système* du second *ordre pour m<1*

Dépassement : Le premier dépassement $D\% = \frac{S_{max} - s(\infty)}{s(\infty)} \times 100$: $D\% = 100\, e^{-\frac{\pi m}{\sqrt{1-m^2}}}$.

- Si $m = 0 \Rightarrow D(\%) = 100\%$
- Si $m = 1 \Rightarrow D(\%) = 0$

Temps de pic : C'est le temps correspondant au premier dépassement : $t_p = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - m^2}}$

Temps de réponse : Pour *m* faible $t_s(\grave{a} \pm 5\%) \approx \frac{3}{m\omega_0}$ et $t_s(\grave{a} \pm 2\%) \approx \frac{4}{m\omega_0}$

4^{éme} cas $m = 0$ (Système juste oscillant)

$$S(p) = \frac{E_0 K \omega_0^2}{p(p^2 + \omega_0^2)} = \frac{E_0 K}{p(1 + \frac{p^2}{\omega_0^2})}$$

En utilisant la table de la transformée de Laplace, on trouve :

$$s(t) = KE_0 [1 - \cos(\omega_0 t)]\, u(t)$$

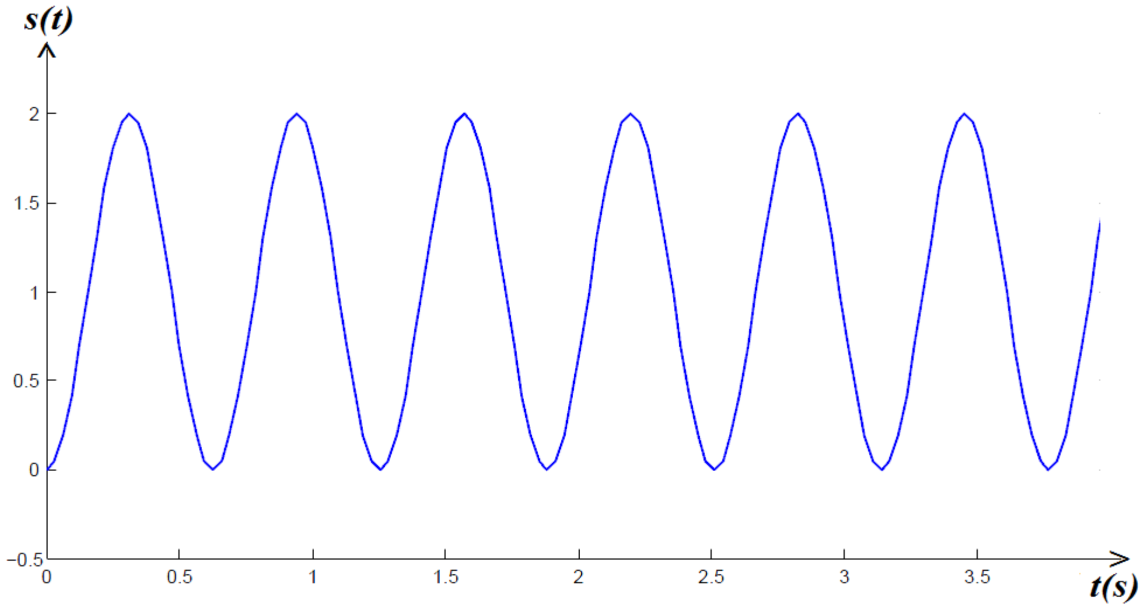


Figure 5.13: *Réponse indicielle d'un système du second ordre juste oscillant*