Chapitre 6

REPONSE TEMPORELLE DES SYSTEMES DE 1ER ET 2EME ORDRE

Objectifs

Général

- *L'étudiant apprendra à faire une analyse temporelle des systèmes primordiaux.*

Spécifiques

- *Poursuivre l'étude des systèmes dynamiques*
- *Etudier les systèmes les plus élémentaires du premier ordre.*
- *Etudier le comportement des systèmes linéaires invariants du deuxième ordre.*
- *Déterminer les réponses impulsionnelle et indicielle des systèmes primordiaux.*

I. Objectifs

L'analyse temporelle consiste à étudier la réponse d'un système représenté par sa fonction de transfert à un signal d'entrée variant dans le temps. Le signal d'entrée peut en principe être quelconque. Toutefois, pour obtenir une expression analytique, nous utiliserons des signaux élémentaires (impulsion, échelon, rampe). Ceci se justifie par le fait que l'on peut décomposer tout signal en une somme de signaux élémentaires. Classiquement, on peut apprendre beaucoup des systèmes en observant la réponse aux entrées suivantes :

- Impulsion de Dirac → Réponse impulsionnelle
- Echelon → Réponse indicielle
- Rampe → Réponse en vitesse
- Sinusoïde → Réponse fréquentielle

II. Signaux test d'entrées

On veut caractériser les systèmes d'une part par leur fonction de transfert et, d'autre part, par leur comportement. Ce dernier peut être mis en évidence par la réponse **s**(**t**) à une entrée donnée.

II.1. Impulsion de Dirac

Cette fonction impossible à réaliser matériellement permet de simuler l'effet d'une action s'exerçant durant un temps très bref (impulsion) : $\delta(t) = \lim_{a \to 0} \delta_a(t)$

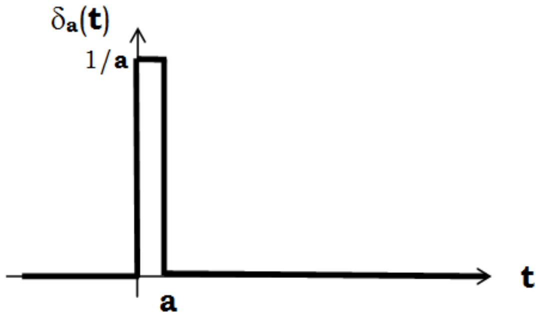


Figure 6.1 : Impulsion de Dirac

II.2. Signal en échelon

Ce signal est le principal signal d'étude des systèmes linéaires ; la réponse des systèmes linéaires du premier et du deuxième ordre à ce signal est parfaitement connue et caractéristique du système.

$$e(t) = E_0 u(t)$$

$u(t)$: fonction de Heaviside, cette fonction est telle que :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ 1 & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

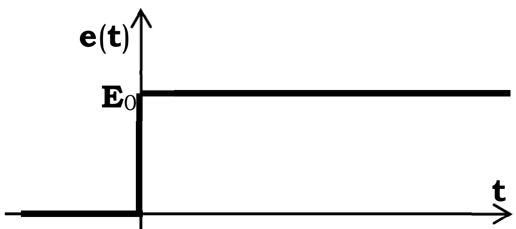


Figure 6.2 : Echelon d'amplitude E_0

II.3. Signal rampe

Ce signal est le signal de base permettant d'analyser la réponse d'un système en poursuite :

$$e(t) = A.r(t) \text{ où } r(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ t & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

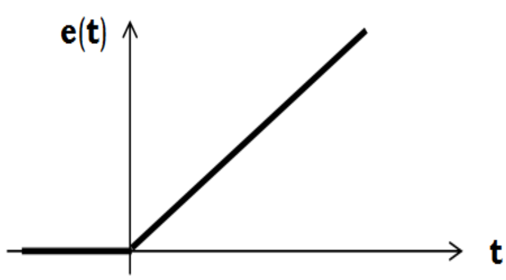


Figure 6.3 : Rampe

II.4. Signal sinusoïdal

Ce signal est le signal de base de l'étude fréquentielle des systèmes linéaires, c'est à dire la réponse en fréquence du système : $e(t) = A\sin(\omega t)u(t)$

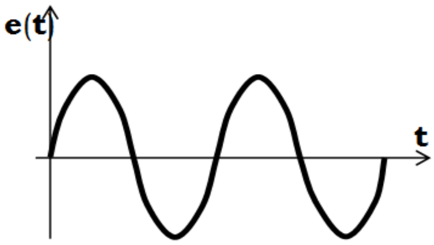


Figure 6.4 : Sinusoïde

III. Systèmes du premier ordre

III.1. Définition

On appelle système du premier ordre, tout système régit par une équation différentielle linéaire à coefficients constant du premier ordre :

$$\tau\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=k\,e(t)$$

<u>Paramètres caractéristiques :</u>

- τ : constante de temps en **s** (plus τ est petit plus le système est rapide)
- K : gain statique dont l'unité est homogène au rapport $\frac{s(t)}{e(t)}$. Il traduit la relation entre **e(t)** et **s(t)** en **régime permanent.**

III.2. Fonction de transfert et schéma bloc

On pose :

$$£[e(t)] = E(p) \text{ et } £[s(t)] = S(p)$$

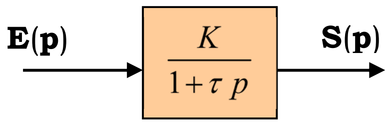
En appliquant la transformation de Laplace à l'équation précédente, on obtient :

$$\tau pS(p) + S(p) = KE(p)$$

D'où la fonction de transfert :

$$F(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{1+\tau p}$$

Le schéma bloc d'un système du premier ordre est de la forme suivante :



III.3. Réponse impulsionnelle

III.3.1. Etude temporelle

On cherche à déterminer la réponse d'un système du premier ordre à une **entrée impulsion unitaire** de Dirac δ(**t**).

Comme : $E(p)=1$

Alors : $S(p)=\dfrac{K}{1+\tau p}$

La réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre est :

$$s(t)=-\frac{K}{\tau^2}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On étudie l'évolution de **s**(**t**), donc **s**(**t**) est :

- décroissante d'ordonnée à l'origine $\dfrac{K}{\tau}$
- de pente à l'origine $-\dfrac{K}{\tau^2}$
- **s**(**t**) tend vers 0 en $+\infty$

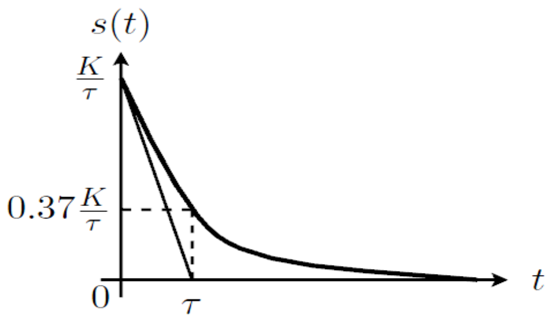


Figure 6.5 : Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre

III.3.2. Temps de réponse à 95 % : T_{R95}

C'est le temps mis par le système pour atteindre 95% de sa valeur finale.

$$s\left(T_{R95}\right)=0,05.\frac{K}{\tau}=\frac{K}{\tau}.e^{-\frac{T_{R95}}{\tau}}$$

D'où :

$$T_{R95}=-\tau\ln\left(0,05\right)=3\tau$$

⇒ La réponse impulsionnelle est encore une impulsion.

⇒ Sa largeur (calculée au tiers de sa hauteur) est τ .

⇒ La valeur résiduelle au bout de 3τ est 5%.

III.4. Réponse indicielle

III.4.1. Etude temporelle

On cherche à déterminer la réponse d'un système du premier ordre à une entrée **échelon de Heaviside**.

Comme $E\left(p\right)=\frac{A}{p}$ alors $S\left(p\right)=\frac{K.A}{p\left(1+\tau p\right)}$

La réponse indicielle d'un système du premier ordre est :

$$s(t)=K.A\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

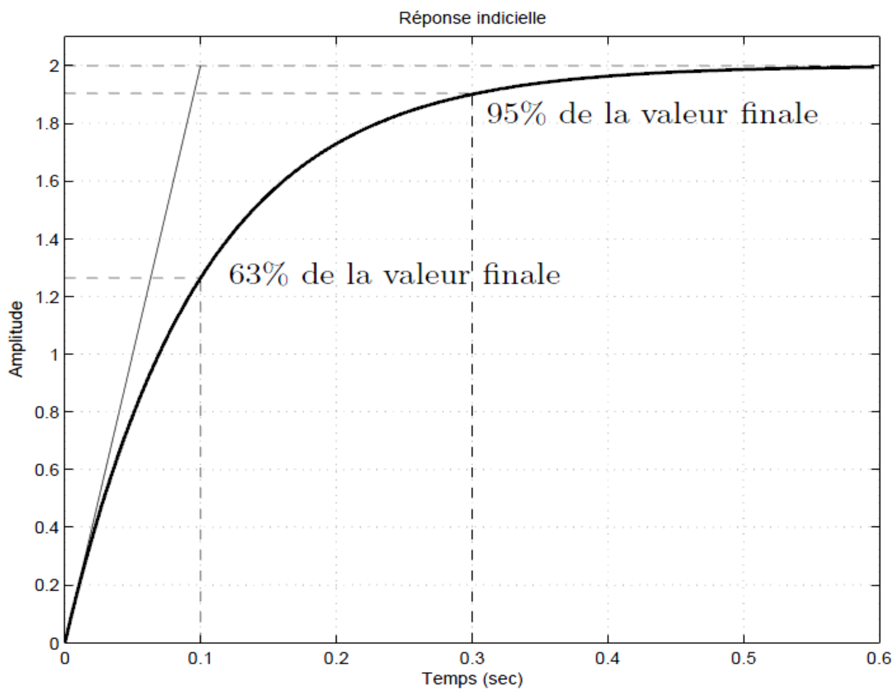


Figure 6.6 : Réponse indicielle d'un système du premier ordre

On étudie l'évolution de **s**(**t**), donc **s**(**t**) est :

- croissante d'ordonnée à l'origine 0
- de pente à l'origine $\frac{K.A}{\tau}$
- **s**(**t**) tend vers $K.A$ en $+\infty$

III.4.2. Performances

$\Rightarrow$ **Temps de réponse à 95 %** : T_{R95}

C'est le temps mis par le système pour atteindre 95% de sa valeur finale.

$$s\left(T_{R95}\right) = 0,05.K.A = K.A.\left(1 - e^{-\frac{T_{R95}}{\tau}}\right)$$

$$\Rightarrow T_{R95} = -\tau \ln\left(0,05\right) = 3\tau$$

$\Rightarrow$ **Constante de temps** τ

Pour $t = \tau$, on a : $s\left(\tau\right) = K.A.\left(1 - e^{-1}\right) = 0,63K.A$

$\Rightarrow$ **Erreur statique**

Si le système est stable, on appelle erreur statique (aussi erreur de position), la différence que l'on relève sur une réponse indicielle, entre l'entrée et la sortie d'un système lorsque $t \to \infty$.

Pour un système du premier ordre, on peut calculer l'erreur statique comme suit :

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{t\to\infty}\left[e(t) - s(t)\right] = \lim_{p\to 0} p\left[E(p) - S(p)\right] = A\left(1 - K\right)$$

L'erreur statique n'est donc nulle que pour les systèmes du premier ordre dont le gain statique **K** est unitaire. On l'exprime en pourcentage (en divisant par **A**). Elle est alors indépendante de l'amplitude **A** de l'entrée.

III.5. Réponse à une rampe

III.5.1. Etude temporelle

Un signal d'entrée en rampe est défini par :

$$e(t) = \begin{cases} At & pour\ t \geq 0 \\ 0 & pour\ t < 0 \end{cases} \Rightarrow E(p) = \frac{A}{p^2}$$

La réponse d'un système du premier ordre à une rampe est :

$$S(p)=\frac{K.A}{p^2(1+\tau p)}=K.A.\left(\frac{1}{p^2}-\frac{\tau}{p}+\frac{\tau}{p+1/\tau}\right)$$

$$\Rightarrow s(t)=K.A.\left(t-\tau+\tau e^{-t/\tau}\right)$$

III.5.2. Erreur de traînage

On appelle erreur de traînage (aussi erreur de vitesse), la différence que l'on relève entre l'entrée et la sortie d'un système, lorsque $t\to\infty$, pour une entrée en rampe.

Dans le cas d'un système du premier ordre, on a :

$$\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)=\lim_{t\to\infty}\left[e(t)-s(t)\right]$$

$$=\lim_{p\to0^+}p\left[E(p)-S(p)\right]$$

$$=\lim_{p\to0^+}p\left[\frac{A}{p^2}-\frac{K.A}{p^2(1+\tau p)}\right]=\lim_{p\to0^+}\frac{A}{p}\left[1-\frac{K}{(1+\tau p)}\right]$$

Par conséquent : $e(t)=\begin{cases} si\ K=1 & \text{l'erreur de traînage est égale à A.}\tau \\ si\ K\neq1 & \text{l'erreur de traînage est infinie}\end{cases}$

Conclusion : Un système du premier ordre ne suit pas en vitesse.

La figure ci-dessous nous donne l'évolution de cette réponse :

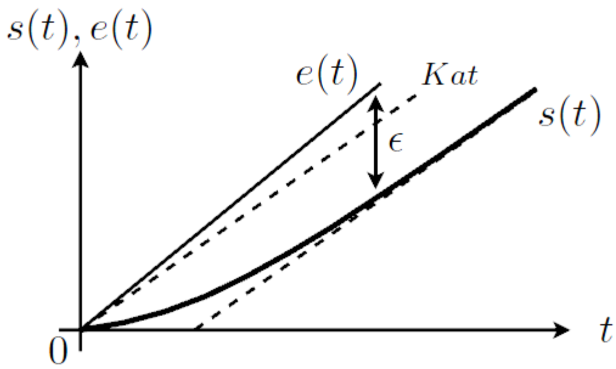


Figure 6.7 : Réponse d'un système du premier ordre à une rampe

Remarque :

Si **K** est différent de 1, la sortie ne suit pas l'entrée. On dit qu'elle **"traîne".** L'écart s'agrandit régulièrement et à la limite devient infini.

IV. Systèmes du second ordre

IV.1. Définition

On appelle système du second ordre tout système régit par une équation différentielle linéaire à coefficients constant du second ordre :

$$a_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_0\, e(t)$$

Soit sous la forme canonique :

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{ds(t)}{dt} + \omega_n^2 s(t) = K\omega_n^2 e(t)$$

Paramètres caractéristiques :

- K : gain statique dont l'unité est homogène au rapport $\frac{s(t)}{e(t)}$. Il traduit la relation entre **e(t)** et **s(t)** en **régime permanent**
- ξ : coefficient d'amortissement positif (sans unité)
- ω_n est la **pulsation propre non amortie** en **rad/s**.

IV.2. Fonction de transfert et schéma bloc

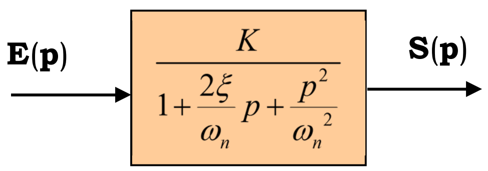
On pose : $£[e(t)] = E(p)$ et $£[s(t)] = S(p)$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation différentielle de comportement (en supposant les conditions initiales nulles).

La fonction transfert d'un système du second ordre est :

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

Un système du second est modélisé par le schéma-bloc suivant :



$$\frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

IV.3. Réponse indicielle

IV.3.1. Etude temporelle

La sortie d'un système du second ordre est donnée par :

$$S(p)=\frac{K}{1+\dfrac{2\xi}{\omega_n}p+\dfrac{p^2}{\omega_n^2}}E(p)=\frac{K\omega_n^2}{p^2+2\xi\omega_n p+\omega_n^2}E(p)$$

Le problème est de décomposer $S(p)$ en fraction rationnelles. Cette décomposition dépend du trinôme : $p^2+2\xi\,\omega_n\,p+\omega_n^2$.

Le discriminant réduit de ce polynôme s'écrit : $\Delta'=\omega_n^2\left(\xi^2-1\right)$.

- Si $\xi \geq 1$, le trinôme admet 2 racines réelles et dans ce cas ***la réponse est apériodique***.

  Les deux racines $\mathbf{p_1}$ et $\mathbf{p_2}$ sont réelles telles que :

  $$p^2+2\xi\,\omega_n\,p+\omega_n^2=(p-p_1)(p-p_2)$$

  Avec : $\begin{cases} p_1=\omega_n\left(-\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right) \\ p_2=\omega_n\left(-\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right) \end{cases}$

- Si $\xi < 1$, le trinôme admet deux racines complexes conjuguées et ***la réponse est oscillatoire amortie***.

  Les deux racines sont complexes conjugués tels que : $\begin{cases} \underline{p_1}=\omega_n\left(-\xi-j\sqrt{1-\xi^2}\right) \\ \underline{p_1^*}=\omega_n\left(-\xi+j\sqrt{1-\xi^2}\right) \end{cases}$

IV.3.2. Réponse à un échelon unité

On cherche à déterminer la réponse d'un système du second ordre à une **entrée échelon unitaire**.

IV.3.2.1. Régime apériodique ($\xi \geq 1$)

La décomposition en éléments simples donne :

$$S(p)=\frac{K}{p(p-p_1)(p-p_2)} \Rightarrow s(t)=K\left[1+\frac{1}{p_1-p_2}\left(p_2e^{p_1t}-p_1e^{p_2t}\right)\right]$$

Tracé :

On remarque que $s(0)=0$ et $\lim_{t\to\infty} s(t)=K$

$s^{'}(t)$ est positive et nulle en 0, on a :

- Une tangente horizontale en 0
- $s(t)$ est donc strictement croissante

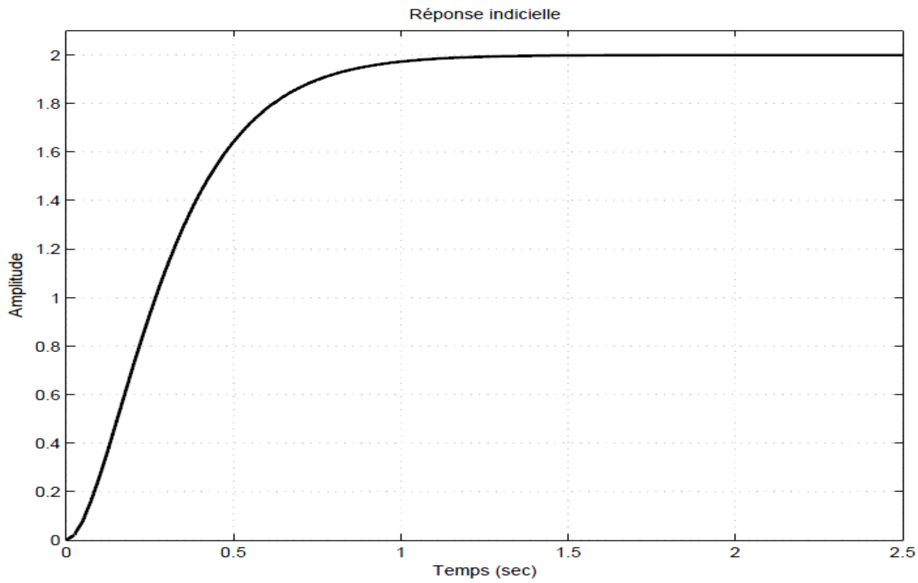


Figure 6.8 : Réponse indicielle d'un 2^e ordre ($\xi \geq 1$)

Remarque :

Pour $\xi=1$, on parle de régime apériodique critique et l'on a un pôle double $p_1=p_2=-\omega_n$.

La sortie $s(t)$ s'écrit : $s(t)=K\left[1-(1+\omega_n t)e^{-\omega_n t}\right]$

IV.3.2.2. Régime pseudo-périodique ($\xi<1$)

On a maintenant :

$$s(t) = K\left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\cdot t + \varphi\right)\right]$$

$$\text{avec } \operatorname{tg}(\varphi) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

Performances

⇒ **Pseudo période :**

C'est le temps qui s'écoule entre deux maxima successifs (ou deux minima) :

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

⇒ **Pulsation propre amortie** ou **pseudo-pulsation** du système en **rad/s** est :

$$\omega_p = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

⇒ **Temps de montée :**

C'est le temps au bout duquel $s(t)$ atteint pour la première fois $s_\infty(t)$.

$$t_m = \frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\left(\pi - \arccos(\xi)\right)$$

⇒ **Temps du premier maximum :**

$$t_{D1} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$$

⇒ **Premier dépassement**

L'étude des dépassements (**uniquement pour un système pseudo-périodique**) est essentielle pour étudier la précision. En effet, les dépassements peuvent nuire au bon fonctionnement du système (risque de collision pour un asservissement de position, risque de surtension pour un asservissement en tension, etc.). Le premier dépassement relatif est exprimé encore en un pourcentage par rapport à la valeur finale :

$$D_1\% = 100\, e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Tracé :

On remarque que $s(0)=0$ et $\lim_{t\to\infty} s(t) = K$. $s^{'}(t)$ est positive et nulle en 0, on a :

- Une tangente horizontale en 0

- $s(t)$ est donc strictement croissante

- $s(t)$ présente un dépassement

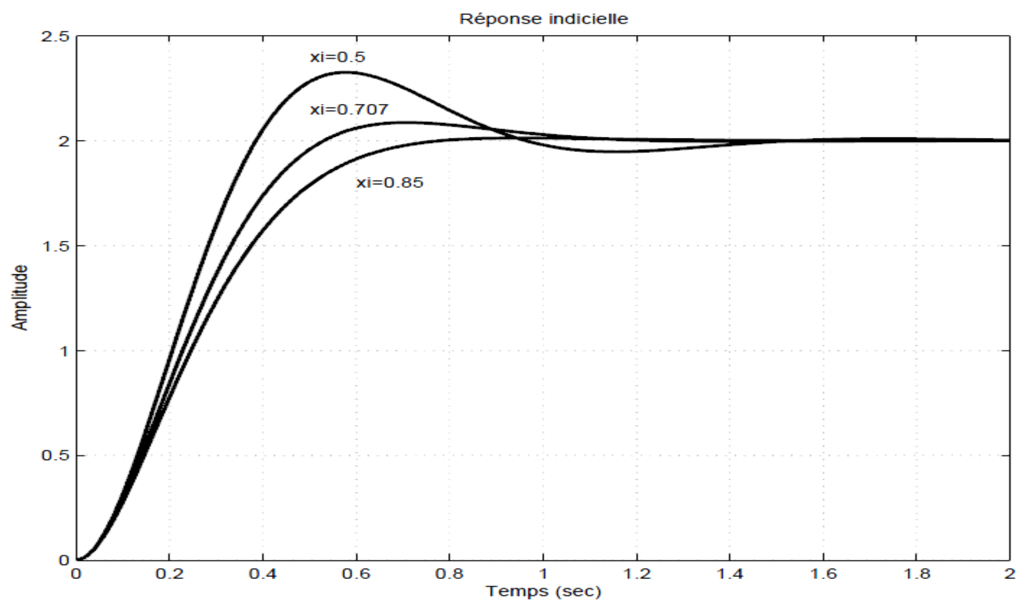


Figure 6.9 : Réponse indicielle d'un 2e ordre ($\xi < 1$)

IV.3.2.3. Régime oscillant ($\xi = 0$)

Dans ce cas, le système admet deux pôles complexes conjugués :

$$\begin{cases} \underline{p_1} = -j\omega_n \\ \underline{p_2} = j\omega_n \end{cases}$$

La sortie s'écrit :

$$s(t) = K\left[1 - \cos(\omega t)\right]$$