

**Os exemplos de Superfícies Mínimas  
de Chen–Gackstätter**

**José Antonio Moraes Vilhena**

DISSERTAÇÃO APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE  
EM  
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Geometria Diferencial**  
Orientador: **Prof. Dr. Plínio Amarante Quirino Simões**

*Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq*

-São Paulo, março de 1999-

## Os exemplos de Superfícies Mínimas de Chen–Gackstätter

Este exemplar corresponde à redação  
final da dissertação devidamente  
corrigida e defendida por  
José Antonio Moraes Vilhena  
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, maio de 1999.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Plínio Amarante Quirino Simões (Orientador) - IME-USP
- Prof. Dra. Maria Elisa Esteves Lopes Galvão - IME-USP
- Prof. Dr. Celso José da Costa - UFF

## RESUMO

Em 1981, Fritz Gackstätter e Chi Cheng Chen construíram duas superfícies mínimas completas orientadas em  $\mathbb{R}^3$  do tipo Enneper, respectivamente, com curvatura total finita  $-8\pi$  e  $-12\pi$  e gênero 1 e 2. Este trabalho, estuda a existência desses exemplos, assim como suas generalizações à uma família de superfícies mínimas completas do tipo Enneper em  $\mathbb{R}^3$ , respectivamente com curvatura total  $-8k\pi$  e  $-12k\pi$  e gênero  $k$  e  $2k$ , onde  $k \in \mathbb{Z}_+$ , obtidas em 1991 pelos matemáticos Hong Wang e Jianling Kang.

## ABSTRACT

In 1981, Fritz Gackstätter and Chi Cheng Chen constructed two complete orientable minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$ , of Enneper's type, with finite total curvature  $-8\pi$  and  $-12\pi$  and genus 1 and 2, respectively. This work is concerned with the existence of these examples, as well as their generalizations to a family of complete minimal surfaces of Enneper's type in  $\mathbb{R}^3$ , with total curvature  $8k\pi$  and  $-12k\pi$  and genus  $k$  and  $2k$ , respectively, where  $k \in \mathbb{Z}_+$ , obtained in 1991 by the mathematicians Hong Wang and Jianling Kang.

*Aos meus avós.*



Agradecimentos:

- Antes de tudo quero agradecer a Deus pela força espiritual.
- Aos meus avós, Manoel Olindo e Jovelina e meus pais, José e Benedita por terem me ajudado nesta caminhada.
- Ao Plínio pela excelente orientação.
- Aos professores Elza, Possani, Asperti, Célia, Maria Elisa, Verderesi, Rosa, Cláudia, Henrique, Cláudio pela amizade e ensinamentos matemáticos.
- Aos professores: José Miguel e Cleyton pelo apoio e incentivo.
- Ao: Brandemberg, Jorge, Silvano, Renato, Ermínio, João , João Batista, Adílson, Carlos, Ducival, Juacy e Márcio meus amigos e professores da UFPa.
- Aos colegas e amigos da UFPa: Lindomar, Izonete, Elielba, Sônia, Lília, Eucilene, Sandra, Cláudia, Ivan, Ulisses, Nonato, Washington, Larangeira, Antenor, Lia, Epaminondas, Benedito, Kátia, Albetã, Edvaldo, Renato, Érika, Ruth, Cláudio, Half, Adriana, Elena, Nelane e Amirando; pela grande amizade que temos.
- Aos meus irmãos: Maria José, José Luís, José Benedito, Maria Benedita, Maria de Jesus, Maria Lúcia, José Marcos, Maria Isabel, José Roberto, José Geraldo.
- Aos meus primos: Marlene, Socorro, Izonete, Carlos, Sérgio, Beto, Márcio e Sílvia.
- Aos meus tios, padrinhos e professores, João e Izolina.
- Aos meus tios e amigos do Miri: Lito, Marita, Raminho, Maroca, Benedito, Sílvia, Sidico, Maria, Maria José, Francisco, Guina, Bena, Dica, Cabral, Benedito, Sílvia.
- Aos amigos de Altamira: Júnior, Regilma, Judith, Alexandra, Marleide, Socorro, Cila, Íris, Patrícia, Claudomiro, João, Marizete, Sena, Marcos e Karina.
- Aos meus amigos do IME: Cecilia, Bárbara, Samuel, Major, Jorge, Regina, Raul, Pablo, Daniel, Liane, Adriana, Sidney, Marco Aurélio, Edson, Rolo, Caputi, Paulo, Ayumi, Marcela, Jair, Gláucio, Walter, Daniela, Clézio, Leandro, Alice, Sonti, Flávio, Jocirei, Ramiro, Ronaldo, Douglas, Kao, Maria, Walquíria, Cláudia, Raul, Xyoby, Antonio, Fernando, Daniela e Marcos. Pela amizade e pelo bom convívio.
- A los uruguayos: Eduardo, Arcadio, Perla, Nora, Jorge, Alicia, Silvia, Gustavo, Laura, Pablo, Leticia, Analia, Lucia, Alejandro, Nicolás.
- À Irene minha companheira de todos os momentos. Valeu.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Resultados sobre Superfícies de Riemann, Funções Elípticas e Superfícies Mínimas</b>	<b>3</b>
1.1 Superfícies de Riemann . . . . .	3
1.1.1 Variedades Diferenciáveis . . . . .	3
1.1.2 Superfícies de Riemann Conformes . . . . .	8
1.2 Construção de Funções Meromorfas sobre Superfícies de Riemann Compactas . . . . .	9
1.3 Funções Algébricas. . . . .	18
1.3.1 Superfícies de Riemann de Funções Algébricas . . . . .	18
1.3.2 Alguns Exemplos de Superfícies de Funções Algébricas . . . . .	21
1.3.3 Superfícies Hiperelípticas e Equações Algébricas . . . . .	28
1.4 Funções Elípticas . . . . .	29
1.4.1 Definição da Função $\wp$ -Weierstrass . . . . .	30
1.4.2 Relação de Legendre . . . . .	32
1.4.3 A Equação Diferencial da Função $\wp$ . . . . .	35
1.4.4 A Aplicação Conforme pela Função $\wp$ . . . . .	36
1.5 Superfícies Mínimas em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	40
1.5.1 Propriedades Locais . . . . .	40
1.5.2 Resultados Globais sobre Superfícies Mínimas . . . . .	48

<b>2</b>	<b>Superfície Mínima de Chen–Gackstätter de Gênero 1</b>	<b>53</b>
2.1	Fórmulas de $\varphi$ e $\zeta$ no quadrado $[0, 1, 1 + i, i]$ . . . . .	53
2.2	Exemplo de Chen–Gackstätter de gênero 1 . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Superfície Mínima de Chen–Gackstätter de Gênero 2</b>	<b>70</b>
3.1	Adaptação à Linguagem Hiperelíptica do Exemplo de gênero 1 . . .	70
3.2	Exemplo de Chen–Gackstätter de gênero 2 . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Generalização da Superfície de Chen–Gackstätter de Gênero 1</b>	<b>100</b>
<b>5</b>	<b>Generalização da Superfície de Chen–Gackstätter de Gênero 2</b>	<b>116</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>134</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>136</b>

## INTRODUÇÃO

Em 1981, os matemáticos C.C.Chen e F. Gackstätter construíram dois exemplos de superfícies mínimas completas de  $\mathbb{R}^3$ .

O primeiro exemplo tem gênero 1, curvatura total  $-8\pi$  e um único fim, e é construído usando, na representação de Weierstrass, a função  $\wp$  de Weierstrass.

O segundo exemplo tem gênero 2, curvatura total  $-12\pi$  e um único fim, e é construído usando na representação de Weierstrass uma função algébrica associada a uma superfície de Riemann hiperelíptica.

Estes exemplos foram os primeiros a serem obtidos explicitamente, especificando-se propriedades geométricas, no caso as simetrias e o comportamento do fim do tipo apresentado pela superfície de Enneper.

O objetivo da dissertação é uma exposição da existência dos exemplos de C.C. Chen e F. Gackstätter, descritos acima, e suas generalizações obtidas pelos matemáticos, H. Wang e J. Kang em 1991, em [26], que consiste na construção de uma família de exemplos de superfícies mínimas completas do tipo Enneper, com gênero igual a  $k$  e  $2k$ , curvatura total,  $-8k\pi$  e  $-12k\pi$ , e um único fim de ordem  $2k + 1$ , respectivamente.

No capítulo 1, apresentaremos resultados sobre superfícies mínimas, superfícies de Riemann hiperelípticas, funções algébricas, funções elípticas e superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$ .

No capítulo 2, estudaremos as funções,  $\wp$  de Weierstrass e  $\zeta$  de Weierstrass no caso em que o paralelogramo fundamental é o quadrado de vértices  $[0, 1, 1 + i, i]$  e daremos a demonstração do primeiro, dos quatro teoremas centrais deste trabalho, o qual consiste no primeiro exemplo de Chen–Gackstätter, cuja representação de Weierstrass é  $g = \frac{A\wp'}{\wp}$  e  $\eta = 2\wp dz$ .

No capítulo 3, faremos inicialmente uma adaptação à linguagem hiperelíptica da representação  $g = \frac{A\wp'}{\wp}$  e  $\eta = 2\wp dz$  do capítulo 2, e usando a relação entre a teoria de superfícies de Riemann e superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$ , apresentaremos a demonstração da existência do segundo exemplo de Chen–Gackstätter.

Os capítulos 4 e 5, estão direcionados para a demonstração da existência dos exemplos de H. Wang e J. Kang, o primeiro é obtido imergindo em  $\mathbb{R}^3$  a superfície de Riemann compacta  $\bar{R}_k$  de gênero  $k$ , associada a função algébrica

$$w(z) = [z^k(z^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}},$$

menos um ponto conveniente, e o segundo exemplo é obtido imergindo a superfície de Riemann compacta  $\bar{R}_{2k}$ , da equação algébrica

$$w(z) = [z(z^2 - a^2)^k(z^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}},$$

menos um ponto de ramificação correspondente ao infinito.

# Capítulo 1

## Resultados sobre Superfícies de Riemann, Funções Elípticas e Superfícies Mínimas

Neste capítulo exporemos alguns resultados sobre superfícies de Riemann, funções elípticas e superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$ .

### 1.1 Superfícies de Riemann

#### 1.1.1 Variedades Diferenciáveis

**Definição 1.1.1** *Uma variedade diferenciável de dimensão 2, de classe  $C^\infty$ , é um espaço topológico  $M$  de Hausdorff com base enumerável, munido de uma família*

$$\mathcal{F}(M) := \{(U_\alpha, V_\alpha, z_\alpha), \alpha \in I\}$$

*de homeomorfismos  $z_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ , onde  $U_\alpha$  é um aberto de  $M$  e  $V_\alpha$  aberto de  $\mathbb{C}$ , tal que:*

(i)  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$



(ii) Se  $(U_\alpha, V_\alpha, z_\alpha), (U_\beta, V_\beta, z_\beta) \in \mathcal{F}(M)$  são tais que  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , para todo  $\alpha, \beta \in I$ , então  $z_\beta \circ z_\alpha^{-1}$  e  $z_\alpha \circ z_\beta^{-1}$  são difeomorfismos de classe  $C^\infty$ .

(iii) Seja  $(U, V, z)$ , onde  $U$  é um aberto de  $M$ ,  $V$  é um aberto de  $\mathbb{C}$ ,  $z : U \rightarrow V$  um homeomorfismo entre  $U$  e  $V$ , e  $(U_\alpha, V_\alpha, z_\alpha) \in \mathcal{F}(M)$  é tal que  $U \cap U_\alpha \neq \emptyset$ ,  $z \circ z_\alpha^{-1}$  e  $z_\alpha \circ z^{-1}$  são difeomorfismos  $C^\infty$ , então  $(U, V, z) \in \mathcal{F}(M)$ .

**Observação:**

(1)  $\mathcal{F}(M)$  é a *estrutura diferenciável* da variedade  $M$ .

(2) Os elementos  $(U_\alpha, V_\alpha, z_\alpha) \in \mathcal{F}(M)$  são coordenadas locais de  $M$ , às vezes denotaremos apenas por  $z_\alpha$ .

Um atlas sobre  $M$  é uma família de coordenadas locais,  $\mathcal{F}_0 = \{(U_\alpha, V_\alpha, z_\alpha); \alpha \in I\}$  satisfazendo as propriedades (i) e (ii), que induz uma *estrutura diferenciável*  $\mathcal{F}(M)$  contendo  $\mathcal{F}_0$ , dada por:

$$\mathcal{F}(M) := \{(U, V, z); z \circ z_\alpha^{-1} \text{ e } z_\alpha \circ z^{-1} \text{ são difeomorfismos } C^\infty, (U_\alpha, V_\alpha, z_\alpha) \in \mathcal{F}_0\}$$

**Definição 1.1.2** Uma *superfície de Riemann*  $M$  é uma variedade de dimensão 2 conexa, com uma família máxima  $\mathcal{H}(M) \subset \mathcal{F}(M)$  de homeomorfismos, onde as mudanças de coordenadas são funções holomorfas.  $\mathcal{H}(M)$  é a *estrutura holomorfa* da superfície de Riemann.

**Observação:** Uma superfície de Riemann é um par  $(M, \mathcal{H}(M))$ , usualmente denotaremos por  $M$ .

Seja  $\mathcal{H}_0$  um atlas holomorfo sobre  $M$ , isto é, uma família de coordenadas locais tais que cobrem  $M$  e a mudança de coordenada é uma função holomorfa. Então,  $\mathcal{H}_0$  induz uma *estrutura holomorfa* sobre  $M$  contendo  $\mathcal{H}_0$ ,

$$\mathcal{H}(M) := \{(U, V, z); z \circ z_\alpha^{-1} \text{ e } z_\alpha \circ z^{-1} \text{ são holomorfas, } \forall (U_\alpha, V_\alpha, z_\alpha) \in \mathcal{H}_0\}$$

Assim,  $(M, \mathcal{H}(M))$  é uma superfície de Riemann.

**Exemplos:**

(1) O plano complexo  $\mathbb{C} := \{z = u + iv; u, v \in \mathbb{R}\}$ .

$$\mathcal{H}_0 := \{(\mathbb{C}, \mathbb{C}, id); id : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ é a função identidade}\}$$

é um atlas holomorfo sobre  $\mathbb{C}$ , que induz uma *estrutura holomorfa* que torna  $\mathbb{C}$  uma superfície de Riemann. É o plano complexo.

(2) A esfera de Riemann  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Sobre a esfera unitária,

$$S^2(1) := \{(u, v, t) \in \mathbb{R}^3; u^2 + v^2 + t^2 = 1\} \text{ em } \mathbb{R}^3,$$

$$\mathcal{H}_0 := \{(S^2(1) \setminus \{(0, 0, 1)\}), \mathbb{C}, \pi_1), (S^2(1) \setminus \{(0, 0, -1)\}), (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}, \psi \circ \pi_2)\},$$

É um atlas holomorfo, que induz uma estrutura holomorfa que torna  $S^2(1)$  uma superfície de Riemann indicada por  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . É a esfera de Riemann.

$$\text{onde, } \pi_1(u, v, t) = \frac{u + iv}{1 - t}, \pi_2(u, v, t) = \frac{u + iv}{1 + t} \text{ e } \psi(z) := \bar{z}, z = u + iv$$

Donde segue,

$$\pi_1^{-1}(z) = \left( \frac{2u}{|z|^2 + 1}, \frac{2v}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \text{ e } (\psi \circ \pi_2)^{-1}(z) = \left( \frac{2u}{|z|^2 + 1}, \frac{-2v}{|z|^2 + 1}, \frac{1 - |z|^2}{|z|^2 + 1} \right).$$

Logo, as mudanças de coordenadas são:

$$\begin{aligned} (\psi \circ \pi_2) \circ \pi_1^{-1}, \pi_1 \circ (\psi \circ \pi_2)^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ z &\longmapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$$

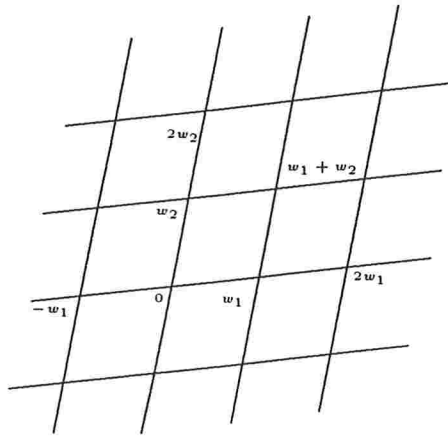
O terceiro exemplo que faremos de superfície de Riemann são os toros  $T_{(w_1, w_2)}$ . Para a descrição desses exemplos precisamos de algumas definições:

### Definição 1.1.3

(i) O reticulado em  $\mathbb{C}$  com geradores  $w_1$  e  $w_2$ , é o conjunto:

$$L = L(w_1, w_2) := \left\{ w = mw_1 + nw_2; m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } \text{Im} \left( \frac{w_2}{w_1} \right) > 0 \right\}$$





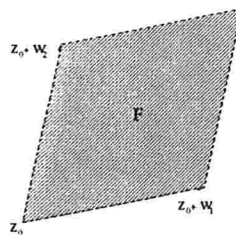
**Figura 1.1**

(ii) Dados dois números complexos  $z, z'$ , dizemos que  $z$  é  $L$ -equivalente a  $z'$  se existem inteiros  $m, n$  tais que  $z - z' = mw_1 + nw_2 \in L(w_1, w_2)$ . Sejam ainda  $[z] = \{z' : z - z' \in L\}$  a classe de equivalência que tem como representante o  $z$ , e  $\mathbb{C}/L$  o conjunto de todas as classes de equivalência.

(iii) Dado  $z_0 \in L(w_1, w_2)$ , definimos o conjunto

$$F = F(z_0) := \{z = z_0 + \alpha w_1 + \beta w_2; 0 \leq \alpha, \beta < 1\},$$

como na figura 1.2 .



**Figura 1.2**

Atribuindo a  $\mathbb{C}/L$ , a topologia quociente,  $\mathbb{C}/L$  é de Hausdorff, tem base enumerável e a projeção canônica:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}/L \\ z &\longmapsto [z] \end{aligned}$$

é contínua e aberta. Além disso, se  $V$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{C}$  que não tem dois pontos equivalentes sobre  $L$ , então o atlas  $\mathcal{H}_0 = \{(\pi(V), V, (\pi|_{\pi(V)})^{-1})\}$  induz uma estrutura holomorfa  $\mathcal{H}(\mathbb{C}/L)$  contendo  $\mathcal{H}_0$ , que torna  $\mathbb{C}/L$  uma superfície de Riemann, que denotaremos por  $T_{(w_1, w_2)}$ .

Consideremos agora o homeomorfismo,

$$\begin{aligned} \varphi: F(0) \subset \mathbb{C} &\longrightarrow S^1 \times S^1 \\ z &\longmapsto (e^{2\pi i \alpha}, e^{2\pi i \beta}) \end{aligned}$$

onde  $z = \alpha w_1 + \beta w_2$ ,  $0 \leq \alpha, \beta < 1$  e  $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ . Logo, a aplicação  $\psi$  dada no diagrama abaixo é um homeomorfismo.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\varphi} & S^1 \times S^1 \\ \pi \downarrow & \nearrow \psi & \\ \mathbb{C}/L & & \end{array}$$

Portanto, se  $z \in F(0)$  temos que  $\mathbb{C}/L$  é homeomorfo ao toro  $S^1 \times S^1$ .

Sejam agora  $L = L(w_1, w_2)$  e  $L' = L'(w'_1, w'_2)$  reticulados de  $\mathbb{C}$  e as superfícies de Riemann compactas de gênero 1,  $T_{(w_1, w_2)} = \mathbb{C}/L$  e  $T'_{(w'_1, w'_2)} = \mathbb{C}/L'$  como no exemplo 3 acima. Dizemos que as estruturas complexas de  $T_{(w_1, w_2)}$  e  $T'_{(w'_1, w'_2)}$  são equivalentes se existir um difeomorfismo holomorfo, isto é um biholomorfismo  $f: T \rightarrow T'$ . O teorema enunciado abaixo descreve todas as estruturas complexas de gênero 1.

**Teorema 1.1.4** *Seja  $FM \subset \mathbb{C}$  o conjunto figura modular, definido por:*

$$FM = \{\tau \in \mathbb{C} : |\tau| \geq 1, |\operatorname{Re}\{\tau\}| \leq 1/2 \text{ e } \operatorname{Im}\{\tau\} > 0\}$$

Então,

- i) Se  $M$  é uma superfície de Riemann compacta de gênero 1, existe  $\tau \in FM$  tal que  $M$  é conformemente equivalente a  $\mathbb{C}/L(1, \tau)$ ;
- ii) Se  $\tau, \tau' \in FM$  e  $\mathbb{C}/L(1, \tau)$  é conformemente equivalente a  $\mathbb{C}/L(1, \tau')$  temos que  $\tau = \tau'$  ou  $\tau, \tau' \in \partial FM$  e  $\tau' = -\bar{\tau}$ .

**Demonstração:** ver [4]

**Observação:** A condição (ii) do teorema acima às vezes aparece na literatura, como:  $\mathbb{C}/L(1, \tau)$  é conformemente equivalente a  $\mathbb{C}/(1, \tau')$  se,

$$\tau = \frac{a\tau' + b}{c\tau' + d}, \text{ onde } a, b, c, d \text{ são inteiros tais que } ad - bc = \pm 1.$$

## 1.1.2 Superfícies de Riemann Conformes

**Definição 1.1.5** Uma função contínua  $f : M \rightarrow N$  entre duas superfícies de Riemann é holomorfa se para qualquer coordenada local  $(U, z(U), z) \in \mathcal{H}(M)$  e  $(V, \zeta(V), \zeta) \in \mathcal{H}(N)$ , respectivamente de  $M$  e  $N$ , tal que  $U \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ , a função

$$\zeta \circ f \circ z^{-1} : z(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \zeta(V)$$

é holomorfa. Além disso se  $f$  é bijetora, então  $M$  é conformemente equivalente (ou biholomorfa) à  $N$ .

**Teorema 1.1.6** Sejam  $M$  e  $N$  superfícies de Riemann compactas e  $f : M \rightarrow N$  uma função holomorfa não constante. Então  $f$  é sobrejetora.

**Demonstração:** Como  $f(M)$  é um subconjunto aberto e fechado de  $N$  e  $N$  conexo, então  $f(M) = N$ . ■

Seja  $f : M \rightarrow N$  uma função holomorfa não constante entre as superfícies de Riemann  $M$  e  $N$ . Escolhendo convenientemente as coordenadas locais  $(\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{z})$  de  $M$  se anulando em  $P \in \tilde{U}$  e  $(U, V, \zeta)$  de  $N$  se anulando em  $f(P) \in U$ , com  $\tilde{U}, U$  simplesmente conexos,  $f$  é localmente dada por

$$\begin{aligned} \zeta = f(\tilde{z}) &= \tilde{z}^n (a_0 + a_1 \tilde{z} + \dots), \quad n > 0, \quad a_0 \neq 0 \\ &= \tilde{z}^n g(\tilde{z}), \end{aligned}$$

onde  $g(\tilde{z})$  é analítica e  $g(0) \neq 0$ . Logo, existe uma função analítica  $h(\tilde{z})$  ( em um disco  $D \subset \tilde{V}$ ) tal que  $g(\tilde{z}) = [h(\tilde{z})]^n$ . Então  $z = \tilde{z}h(\tilde{z})$  ainda é coordenada local que se anula em  $P$ . Em termos desta coordenada  $f$  é dada por,

$$\zeta = z^n \quad (1.1)$$

Como esse  $n$  independe da particular coordenada local, dizemos que  $f$  tem multiplicidade  $n$  em  $P \in M$ , ou que  $f$  assume o valor  $f(P)$   $n$  vezes em  $P$ . O ponto  $P$  é chamado *ponto de ramificação* de  $f$  se  $n > 1$  e o número  $n - 1$  será chamado de *ordem de ramificação* de  $f$  em  $P$ .

**Proposição 1.1.7** *Seja  $f : M \rightarrow N$  uma função holomorfa não constante entre superfícies de Riemann compactas. Existe um inteiro positivo  $m$  tal que qualquer  $Q \in N$  é assumido precisamente  $m$  vezes em  $M$  por  $f$ , levando-se em conta as multiplicidades; isto é, para todo  $Q \in N$ ,*

$$\sum_{P_i \in f^{-1}(Q)} n_i = m, \quad \text{onde } n_i \text{ é a multiplicidade de } f \text{ em } P_i. \quad (1.2)$$

**Demonstração:** ver [7] pag. 12.

**Corolário 1.1.8** *Se  $M$  é uma superfície de Riemann compacta e  $f : M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  é holomorfa, então, levando-se em conta as multiplicidades, todo  $Q \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  é assumido um número fixo  $m$  de vezes.*

**Definição 1.1.9** *O número  $m$  dado em 1.2, é o grau de  $f$ , e é denotado por  $\text{grau}(f)$ .*

## 1.2 Construção de Funções Meromorfas sobre Superfícies de Riemann Compactas

O que podemos dizer a respeito das funções meromorfas sobre uma superfície compacta  $M$  de gênero  $p$  com polos somente em um ponto?. Se existe essa função

qual a ordem do polo?. Podemos responder estas perguntas aplicando o teorema de Riemann–Roch, o qual relaciona a dimensão de determinados espaços vetoriais de funções meromorfas e diferenciais abelianas, a ordem da função meromorfa sobre  $M$  e o gênero  $p$  de  $M$ . Veremos também que existe um número finito de pontos  $P_i \in M$  (chamados pontos de Weierstrass) para os quais existe sobre  $M$  uma função meromorfa  $f$ , holomorfa em  $M \setminus \{P_i\}$ , com polo em  $P_i$  de ordem no máximo igual a  $p$ .

Agora daremos algumas definições prévias. Primeiro definiremos 0-formas e 1-formas sobre superfícies de Riemann:

**Definição 1.2.1** *Uma 0-forma em uma superfície de Riemann  $M$  é uma função diferenciável sobre  $M$ . Uma 1-forma diferenciável  $\omega \in \Lambda^1(M)$  (espaço vetorial das 1-formas) é uma associação ordenada de duas funções contínuas  $f$  e  $g$  para cada coordenada local  $(U_1, V_1, z = x + iy)$  sobre  $M$  tal que*

$$\omega := f dx + g dy$$

*é invariante por mudança de coordenadas, isto é, se  $(U_2, V_2, \tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y})$  é outra coordenada local sobre  $M$  e  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ , e se  $\omega$  associa as funções  $\tilde{f}, \tilde{g}$  à  $\tilde{z}$  então,*

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}(\tilde{z}) \\ \tilde{g}(\tilde{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial y}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial x}{\partial \tilde{y}} & \frac{\partial y}{\partial \tilde{y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z(\tilde{z})) \\ g(z(\tilde{z})) \end{pmatrix}$$

As 1-formas meromorfas são chamadas de **diferenciais abelianas**. As diferenciais abelianas que são holomorfas são as de **primeira espécie**; enquanto que as diferenciais abelianas meromorfas com resíduo zero são as de **segunda espécie**. Finalmente uma diferencial abeliana geral, a qual pode ter resíduo não nulo será chamada de **terceira espécie**.

**Proposição 1.2.2** *Sobre uma superfície de Riemann compacta  $M$  de gênero  $p$ , o espaço vetorial das diferenciais holomorfas tem dimensão  $p$ .*

**Demonstração:** ver [24]

**Definição 1.2.3** Um divisor sobre  $M$  é um símbolo formal  $D = P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2} \dots P_m^{\mu_m}$ , com  $P_i \in M$ ,  $\mu_i \in \mathbb{Z}$ .

O inteiro  $\mu_k$  é chamado ordem de  $P_k$ , e o grau de  $D$ , denotado por  $gr[D]$  é a soma das ordens de  $D$ ,

$$gr[D] = \sum_{k=1}^m \mu_k.$$

Se  $D_1 = P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2} \dots P_m^{\mu_m}$  e  $D_2 = Q_1^{\nu_1} Q_2^{\nu_2} \dots Q_n^{\nu_n}$ ,

$$D_1 D_2 = P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2} \dots P_m^{\mu_m} Q_1^{\nu_1} Q_2^{\nu_2} \dots Q_n^{\nu_n}, \quad (1.3)$$

onde  $P_i^{\mu_i} Q_j^{\nu_j} = Q_j^{\nu_j} P_i^{\mu_i}$ ,  $P_i^{\mu_i} P_i^{\nu_i} = P_i^{\mu_i + \nu_i}$  é o produto de  $D_1$  por  $D_2$  e

$$D_2^{-1} = \frac{1}{D_2} = Q_1^{-\nu_1} Q_2^{-\nu_2} \dots Q_n^{-\nu_n},$$

é o inverso de  $D_2$ . Logo,

$$gr[D_1 D_2^{-1}] = \sum_{k=1}^m \mu_k - \sum_{j=1}^n \nu_j = gr[D_1] - gr[D_2]$$

O divisor  $D = P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2} \dots P_m^{\mu_m}$  é inteiro se  $\mu_k \geq 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, m$ . Se  $D_1 D_2^{-1}$  é inteiro, dizemos que  $D_2$  divide  $D_1$  ou que  $D_1$  é múltiplo de  $D_2$ .

Se  $f \neq 0$  é uma função meromorfa sobre  $M$ , então a **ordem** de  $f$  no ponto  $P_i$ , em termos de uma coordenada local  $z_\alpha$ , tal que  $z_\alpha(P_i) = 0$ , é dada por :

$$ord_{P_i}[f] := \begin{cases} n, & \text{se } f \text{ tem um zero de ordem } n \text{ em } P_i \\ 0, & \text{se } f \text{ é regular e não nula em } P_i \\ -m, & \text{se } f \text{ tem um polo de ordem } m \text{ em } P_i \end{cases}$$

E se  $\eta$  é uma diferencial abeliana, dada localmente por  $\eta = f dz_\alpha$ , então a ordem de  $\eta$  no ponto  $P_i$  é igual a ordem de  $f$  em  $P_i$ .

**Definição 1.2.4** Se  $f$  é uma função meromorfa ( $f \neq 0$ ) sobre  $M$  e  $\eta$  é uma diferencial abeliana sobre  $M$ , o divisor  $(f)$  de  $f$  é dado por:

$$(f) = \prod_{P \in M} P^{ord_P[f]}$$

e o divisor  $(\eta)$  de  $\eta$  por:

$$(\eta) = \prod_{P \in M} P^{\text{ord}_P[\eta]}$$

Dizemos que  $f, \eta$  são múltiplos de um divisor  $D$ , se  $D$  divide, respectivamente  $(f)$  ou  $(\eta)$ . Isto significa que se

$$D = \frac{1}{P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2} \dots P_m^{\mu_m}}, \quad \mu_i \geq 0$$

a função  $f$  ou a diferencial  $\eta = f(z)dz$ , têm respectivamente polos de ordem no máximo  $\mu_i$  em  $P_i$ .

Se

$$D = \frac{P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2} \dots P_m^{\mu_m}}{Q_1^{\nu_1} Q_2^{\nu_2} \dots Q_n^{\nu_n}}, \quad \mu_i \geq 0, \nu_j \geq 0$$

$f$  e  $\eta$  têm respectivamente polos de ordem no máximo  $\nu_i$  em  $Q_i$  e têm zeros de ordem no mínimo  $\mu_j$  em  $P_j$ .

É interessante observar que para qualquer função meromorfa  $f$  sobre uma superfície de Riemann compacta, o número de zeros é igual ao número dos polos, levando-se em conta as multiplicidades. Portanto,  $gr[(f)] = 0$ .

Observe que nem todos os divisores são divisores de funções meromorfas. O divisor é **principal** se ele é um divisor de uma função meromorfa.

O conjunto de todos os divisores formam um grupo comutativo em relação ao produto 1.3. Se  $D_1 = (f)$  e  $D_2 = (g)$ , então  $D_1^{-1} = (\frac{1}{f})$  e  $D_1 D_2 = (fg)$ , de modo que os divisores principais formam um subgrupo do grupo de todos os divisores. Podemos formar o grupo quociente de todos os divisores sobre o subgrupo dos divisores principais. Cada elemento do grupo quociente é uma classe de divisores.  $D_1$  e  $D_2$  pertencem a mesma classe ( $D_1 \sim D_2$ ) se, e somente se  $D_1 D_2^{-1} = (f)$ , onde  $f$  é uma função meromorfa sobre  $M$ , e então  $gr[D_1] = gr[D_2]$ .

Se  $\eta_1$  e  $\eta_2$  são duas diferenciais abelianas sobre  $M$ ,  $\frac{\eta_1}{\eta_2}$  é uma função meromorfa sobre  $M$ , logo  $(\eta_1) \sim (\eta_2)$ . Assim os divisores de todas as diferenciais estão na mesma classe.

Dado o divisor  $D = P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2} \dots P_m^{\mu_m}$ . Sejam:

$$L[D] := \{f; f \text{ é meromorfa, } \text{ord}_{P_i}[f] \geq \mu_i, \forall i = 1, \dots, m\}$$



o espaço vetorial das funções meromorfas sobre  $M$  que são múltiplas de  $D$ , e

$$\Omega[D] := \{\eta; \eta \text{ diferencial abeliana, } \text{ord}_{P_i}[\eta] \geq \mu_i, \forall i = 1, \dots, m\},$$

o espaço vetorial de todas as diferenciais abelianas  $\eta$ , cujos divisores  $(\eta)$ , são múltiplos de  $D$ . Denotaremos suas dimensões, respectivamente, por  $r[D]$  e  $i[D]$ .

**Lema 1.2.5** *Os espaços vetoriais  $L[D]$  e  $\Omega[D]$  só dependem da classe dos divisores, isto é,*

$$D_1 \sim D_2 \Rightarrow \begin{cases} L[D_1] & \text{é isomorfo a } L[D_2] \\ \Omega[D_1] & \text{é isomorfo a } \Omega[D_2] \end{cases}$$

**Demonstração:** Como  $\frac{D_1}{D_2} = (f)$ , para alguma função meromorfa  $f$ . As aplicações:

$$\begin{array}{ccc} L[D_2] & \longrightarrow & L[D_1] & & \Omega[D_2] & \longrightarrow & \Omega[D_1] \\ h & \longmapsto & hf & & \omega & \longmapsto & \omega f \end{array}$$

são isomorfismos. ■

**Proposição 1.2.6** *Se  $\eta$  é qualquer diferencial abeliana,  $\eta \neq 0$ , então  $i[D] = r\left[\frac{D}{(\eta)}\right]$ , para qualquer divisor  $D$ .*

**Demonstração:** Seja  $\omega \in \Omega[D]$ , então  $(\omega)$  é múltiplo de  $D$ , ou seja  $\frac{(\omega)}{D}$  é inteiro. Como,  $\left(\frac{\omega}{\eta}\right) = \frac{(\omega)}{D} \frac{D}{(\eta)}$ ,  $\left(\frac{\omega}{\eta}\right)$  é múltiplo de  $\frac{D}{(\eta)}$ , logo  $\frac{\omega}{\eta} \in L\left[\frac{D}{(\eta)}\right]$ . A aplicação,

$$\begin{array}{ccc} \Omega[D] & \longrightarrow & L\left[\frac{D}{(\eta)}\right] \\ \omega & \longmapsto & \frac{\omega}{\eta} \end{array}$$

é um isomorfismo. De fato ela é linear. Injetora, pois de  $\frac{\omega}{\eta} \equiv 0$ , temos que  $\omega \equiv 0$  e é sobrejetora já que  $f \in L\left[\frac{D}{(\eta)}\right]$  é imagem de  $f\eta \in \Omega[D]$ . Portanto,  $i[D] = r\left[\frac{D}{(\eta)}\right]$ . ■

**Teorema 1.2.7 (Riemann–Roch)** *Seja  $M$  uma superfície de Riemann compacta de gênero  $p$ . Então:*

$$r\left[\frac{1}{D}\right] = gr[D] + i[D] - p + 1 \tag{1.4}$$



**Demonstração:** ver [24]

**Definição 1.2.8** *Seja  $D$  um divisor inteiro, chamamos de inequação de Riemann a desigualdade*

$$r \left[ \frac{1}{D} \right] \geq gr[D] - p + 1$$

Esta desigualdade significa que o número de funções meromorfas linearmente independentes com polos de ordem no máximo  $\mu_k$  nos  $m$  pontos  $P_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , é no mínimo  $\sum_{k=1}^m \mu_k - p + 1$ . Se vale a igualdade,  $i[D] = 0$ ; logo não existem diferenciais abelianas não nulas cujos divisores são múltiplos de  $D$ .

**Corolário 1.2.9** *Para qualquer diferencial abeliana  $\eta$ , sobre uma superfície de Riemann compacta de gênero  $p$  vale a fórmula  $gr[(\eta)] = 2p - 2$ .*

**Demonstração:** Pondo  $D = (\eta)$  na fórmula 1.4 temos,

$$r \left[ \frac{1}{(\eta)} \right] = gr[(\eta)] + i[(\eta)] - p + 1$$

Por outro lado, indicando-se por 1 a unidade do grupo dos divisores, segue da proposição 1.2.6, que  $i[(\eta)] = r[1]$  e  $r[\frac{1}{(\eta)}] = i[1]$ . Como  $r[1] = 1$ , temos  $i[(\eta)] = 1$ . Por último usando a proposição 1.2.2, temos  $i[1] = p$ , logo  $r[\frac{1}{(\eta)}] = p$ . Portanto,

$$p = gr[(\eta)] - p + 2 \Rightarrow gr[(\eta)] = 2p - 2$$

■

Veremos agora outras consequências imediatas do teorema de Riemann–Roch.

Quando  $p = 1$ , para toda diferencial abeliana  $\eta$ , temos  $gr[(\eta)] = 2 \cdot 1 - 2 = 0$ . Portanto, para qualquer diferencial abeliana sobre um toro o número de zeros é igual ao número de polos. Em particular como uma diferencial de **primeira espécie** não tem polos ela também não tem zeros, isto é,  $i[P] = 0$ . Então, aplicando o teorema de Riemann–Roch, temos

$$r \left[ \frac{1}{P} \right] = gr[P] + i[P] - p + 1 = 1 + 0 - 1 + 1 = 1$$

Como  $r[\frac{1}{p}] = 1$ , então as funções constantes formam uma base para  $L[\frac{1}{p}]$ . Em outras palavras, uma função meromorfa não pode ter um polo simples sobre uma superfície compacta de gênero 1.

**Corolário 1.2.10** *Se  $gr[D] < 0$ , então  $r[\frac{1}{D}] = 0$ .*

**Demonstração:**

Se não, existiria  $f \in L[\frac{1}{D}]$ , a qual seria uma função meromorfa com mais polos do que zeros, pois  $gr[\frac{1}{D}] = -gr[D] > 0$ . Isto contradiz o resultado que se “ $f$  é uma função meromorfa sobre uma superfície de Riemann compacta, então a soma das ordens dos zeros é igual a soma das ordens dos polos”. Isto é, dimensão de  $L[\frac{1}{D}]$  é zero,  $r[\frac{1}{D}] = 0$ . ■

**Corolário 1.2.11** *Se  $gr[D] > 2p - 2$ , então  $i[D] = 0$ .*

**Demonstração:**

De fato, pela proposição (1.2.6),  $i[D] = r[\frac{D}{\eta}]$ , onde  $\eta$  é uma diferencial abeliana. Como  $gr[(\eta)] = 2p - 2$  pelo corolário 1.2.9, temos

$$gr\left[\frac{(\eta)}{D}\right] = gr[(\eta)] - gr[D] = (2p - 2) - gr[D] < 0.$$

Pelo corolário (1.2.10), segue que  $r[(\frac{\eta}{D})^{-1}] = r[\frac{D}{(\eta)}] = 0$ , e portanto  $i[D] = 0$ . ■

**Corolário 1.2.12** *Uma diferencial holomorfa (de primeira espécie)  $\eta$  tem  $2p - 2$  zeros sobre uma superfície de Riemann compacta  $M$  de gênero  $p$ .*

**Demonstração:**

É imediato, pois  $\eta$  não tem polos sobre  $M$  e do corolário 1.2.9,  $gr[(\eta)] = 2p - 2 = \mathcal{Z} - \mathcal{P}$ , onde  $\mathcal{Z}$  é o número de zeros e  $\mathcal{P}$  é o número de polos. Logo  $\mathcal{Z} = 2p - 2$ . ■

**Teorema 1.2.13** *Sejam  $M$  uma superfície de Riemann compacta de gênero  $p$ , e a função holomorfa  $f : M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  com grau  $n$ , tendo  $P_1, P_2, \dots, P_N$  como*

pontos de ramificação, com respectivas multiplicidades  $r_i$  (isto é,  $f$  em  $P_i$  tem ordem de ramificação  $r_i - 1$ ). Então:

$$V = \sum_{i=1}^N (r_i - 1) = 2(n + p - 1), \quad \text{onde } V \text{ é o índice de ramificação de } f. \quad (1.5)$$

**Demonstração:** Vamos classificar os pontos  $P_i$  em dois tipos:

- (a) pontos  $P'_j$  com ordem de ramificação  $r'_j - 1$ , tais que  $z(P'_j) \neq \infty$ .  
 (b) pontos indicados por  $P''_k$  com ordem de ramificação  $r''_k - 1$ , tais que  $z(P''_k) = \infty$ .

Localmente: em  $P'_j$ ,  $f$  é dada por  $z \mapsto z^{r'_j}$  e  $df = r'_j z^{r'_j-1} dz$ ; e em  $P''_k$ ,  $f$  é dada por  $z \mapsto \frac{1}{z^{r''_k}}$  e  $df = \frac{-r''_k}{z^{r''_k+1}} dz$ . Então,  $df$  em  $P'_j$  e  $P''_k$  tem respectivamente, um zero de ordem  $r'_j - 1$  e um polo de ordem  $r''_k + 1$ .

Pelo corolário 1.2.9,  $gr[(dz)] = 2p - 2$  Logo,

$$\mathcal{Z} - \mathcal{P} = \sum_{j=1}^{N_1} (r'_j - 1) - \sum_{k=1}^{N_2} (r''_k + 1) = 2p - 2, \quad N_1 + N_2 = N$$

Mas  $grau(f) = n$ , que por sua vez é igual ao número de polos de  $f$ . Portanto:

$$\sum_{k=1}^{N_2} r''_k = n$$

Segue-se,

$$\sum_{j=1}^{N_1} (r'_j - 1) - \sum_{k=1}^{N_2} (r''_k + 1) = \sum_{j=1}^{N_1} (r'_j - 1) + \sum_{k=1}^{N_2} (r''_k - 1) - 2 \sum_{k=1}^{N_2} r''_k = 2p - 2, \quad e$$

$$\text{então: } \sum_{j=1}^{N_1} (r'_j - 1) + \sum_{k=1}^{N_2} (r''_k - 1) = 2n + 2p - 2 \Rightarrow \sum_{i=1}^N (r_i - 1) = 2(n + p - 1) \quad \blacksquare$$

**Observação:** A fórmula dada em 1.5 é chamada **relação de Riemann**

**Teorema 1.2.14 (“Gap” de Weierstrass)** *Seja  $M$  uma superfície de Riemann compacta de gênero  $p \geq 1$ . Existem exatamente  $p$  números inteiros  $n_i$  satisfazendo  $0 < n_1 < n_2 < \dots < n_p < 2p$ , tais que eles não podem ser especificados como ordens de polos de uma função meromorfa sobre  $M$ .*

**Demonstração:** ver [24]

**Observações:**

(1) Se  $p = 0$ , a superfície compacta  $M$  é homeomorfa a esfera, e como as funções meromorfas sobre  $M$  são funções racionais, o teorema não se aplica.

(2) Se  $p = 1$ , temos  $0 < n_1 < 2$  logo  $n_1 = 1$ , e não existe função meromorfa com um polo simples em  $P \in M$ .

Seja  $D = P^n$ , então  $gr[P^n] = n$ , se  $n > p \Rightarrow n - p \geq 1$ . Pelo teorema de Riemann–Roch,

$$r \left[ \frac{1}{P^n} \right] = gr[P^n] + i[P^n] - p + 1 \Rightarrow r \left[ \frac{1}{P^n} \right] = n - p + 1 + i[P^n] \geq i[P^n] + 2$$

Se  $i[P^n] \geq 0$ , então  $r[\frac{1}{P^n}] \geq 2$ . Daí podemos encontrar uma função meromorfa pertencente a  $L[\frac{1}{P^n}]$ , cuja única singularidade é um polo de ordem no máximo  $n$  em  $P$ . Se  $n = p$ , existe  $f \neq \text{cte}$ ,  $f \in L[\frac{1}{P^p}]$  somente quando  $i[P^p] > 0$ .

**Teorema 1.2.15** *Existe somente um número finito de pontos  $P$  sobre uma superfície de Riemann compacta de gênero  $p$ , em que  $i[P^p] > 0$ .*

**Definição 1.2.16** *Chama-se ponto de Weierstrass de uma superfície de Riemann compacta de gênero  $p$  a um ponto  $P$  tal que exista uma função meromorfa não constante cuja única singularidade é um polo em  $P$  de ordem menor ou igual ao gênero  $p$ . Isto só ocorre nos pontos em que  $i[P^p] > 0$ .*

Obviamente, se  $p = 0$  ou  $p = 1$ , não existem pontos de Weierstrass. Se  $p \geq 2$ , sempre existem pontos de Weierstrass. Mais precisamente, se  $W$  indica o número de pontos de Weierstrass, então  $2p + 2 \leq W \leq p^3 - p$  ver [7].

**Definição 1.2.17** *Uma superfície de Riemann compacta de gênero  $p$ ,  $M$  é hiperrelíptica se existe um divisor  $D = P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2} \dots P_m^{\mu_m}$ ,  $\mu_i \geq 0$  sobre  $M$  com :*

$$gr[D] = 2, \quad r \left[ \frac{1}{D} \right] \geq 2 \quad e \quad p \geq 2$$

Em outras palavras, a definição significa que uma superfície de Riemann compacta  $M$  é hiperelíptica se, e somente se, existe uma função meromorfa não constante  $f$  de grau 2 sobre  $M$ .

### 1.3 Funções Algébricas.

O objetivo desta seção é estabelecer uma relação entre superfície de Riemann abstrata como na definição 1.1.2 da seção 1.1, e as superfícies de Riemann de equações algébricas.

#### 1.3.1 Superfícies de Riemann de Funções Algébricas

Seja  $M$  uma superfície de Riemann compacta de gênero  $p$  e  $z : M \rightarrow \mathbb{C}$  uma função meromorfa não constante de grau  $n$  sobre  $M$ . De fato, esta função existe já que para todo ponto  $P \in M$ , se considerarmos o divisor  $D = P^{p+1}$ , pelo teorema de Riemann–Roch 1.2.7,  $r[1/P^{p+1}] \geq 2$ . Logo existe uma tal função  $z$  para algum  $n \leq p + 1$ . Seja  $w$  uma outra função meromorfa sobre  $M$ . Removemos de  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  os pontos:  $\infty$ , as imagens dos pontos de ramificação de  $z$  e os pontos cuja imagem inversa de  $z$  é constituído por polos de  $w$ . Seja  $S'$  a esfera de Riemann sem esses pontos; para cada  $z' \in S'$ ,  $z^{-1}(z') = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  e  $w(P_i) \in \mathbb{C}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Sejam ainda,

$$\sigma_\nu(z) := (-1)^\nu \sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_\nu \leq n} w(P_{n_1}) \dots w(P_{n_\nu}),$$

a  $\nu$ -ésima função simétrica relativa ao  $w(P_i)$  e  $\mathbb{P}(z, x)$  o polinômio de duas variáveis dado por:

$$\mathbb{P}(z, x) := x^n + r_1(z)x^{n-1} + \dots + r_{n-1}(z)x + r_n(z), \quad (1.6)$$

onde  $r_\nu(z)$  são funções racionais. Temos a definição:



**Definição 1.3.1** Uma função  $w = w(z)$  é uma função algébrica, se satisfaz a equação algébrica  $\mathbb{P}(z, w(z)) = 0$ .

**Teorema 1.3.2** Sobre a superfície de Riemann compacta  $M$  sejam,  $z = z(P)$  uma função meromorfa de grau  $n$  e  $w = w(P)$  uma outra função meromorfa sobre  $M$ . Então  $w$  satisfaz uma equação algébrica de grau  $n$

$$w^n + \sigma_1(z)w^{n-1} + \dots + \sigma_{n-1}(z)w + \sigma_n(z) = 0 \quad (1.7)$$

onde  $\sigma_\nu(z)$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, n$ , são funções racionais de  $z$ .

**Demonstração:** ver [24], pag. 286 ou [14] pag. 225

**Teorema 1.3.3** Se  $z$  é uma função meromorfa de grau  $n$ , sobre uma superfície de Riemann compacta  $M$ , então existe uma segunda função meromorfa  $w$  sobre  $M$  que satisfaz a equação algébrica 1.7 onde  $\mathbb{P}(z, x)$  de 1.6 é irredutível.

**Demonstração:** ver [24] ou [14] pag. 225

Segue dos teoremas (1.3.2) e (1.3.3) que se  $M$  é uma superfície de Riemann compacta,  $z$  uma função meromorfa não constante em  $M$ , e se  $w$  é uma outra função meromorfa sobre  $M$ , então existe um polinômio irredutível  $\mathbb{P}(z, w)$  tal que  $\mathbb{P}(z(P), w(P)) = 0$ , para todo  $P$  pertencente a  $M$ .

Reciprocamente, dado qualquer equação algébrica como em 1.7 podemos construir uma superfície de Riemann compacta  $\bar{R}$  associada a ela.

**Definição 1.3.4** Um elemento de função  $(z_0, w)$  em uma superfície de Riemann  $M$  é uma série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n, \quad \text{onde } z \text{ é uma coordenada local de } M, z(P) = z_0,$$

a qual converge para uma função analítica  $w$  em  $|z - z_0| < r$  ( $r$  pode ser  $\infty$ ).

Na vizinhança de  $z(P) = z_0 \in S'$ , existem  $n$  elementos de função  $(z, w_1(z)), (z, w_2(z)), \dots, (z, w_n(z))$  distintas, que satisfazem uma equação algébrica  $\mathbb{P}(z, w_k(z)) = 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ , e qualquer continuação analítica de tais elementos de função, satisfazem a mesma equação.

**Teorema 1.3.5** *Seja  $\mathbb{P}(z, w)$  um polinômio irredutível, e suponhamos que numa vizinhança  $V$  de um ponto  $z_0$  esteja definido um elemento de função  $w(z)$  tal que  $\mathbb{P}(z, w(z)) = 0$ , para todo  $z$  pertencente a  $V$ . Então:*

- (1) *A superfície de Riemann  $\bar{R}$  de  $w = w(z)$  é compacta;*
- (2) *Se  $w_1(z)$  é um elemento de função definido numa vizinhança  $V_1$  de um certo ponto  $z_1$  pertencente a  $S'$ , tal que  $\mathbb{P}(z, w_1(z)) = 0$ , para todo  $z$  pertencente a  $V_1$ , então  $w_1$  pode ser obtido de  $w(z)$  por prolongamento analítico.*

**Demonstração:** ver [20] pag. 62

Dada uma superfície compacta  $M$ , existem um elemento de função  $(z, w)$  e  $\mathbb{P}(z, w)$  tal que  $\mathbb{P}(z(P), w(P)) = 0$  para todo  $P$  pertencente a  $M$ . Por outro lado, pelo teorema (1.3.5) a equação  $\mathbb{P}(z, w) = 0$  determina uma superfície de Riemann compacta  $\bar{R}$ ; de acordo com o seguinte esquema:

$$M \longrightarrow (z, w) \longrightarrow \mathbb{P}(z, w) = 0 \longrightarrow \bar{R}$$

**Teorema 1.3.6** *Qualquer superfície de Riemann compacta  $M$  pode ser realizada como a superfície de Riemann compacta  $\bar{R}$  de uma equação algébrica irredutível  $\mathbb{P}(z, w) = 0$ . Mais precisamente, para qualquer função meromorfa  $z = z(P)$  sobre  $M$ , podemos construir uma função meromorfa  $w = w(P)$ , de tal modo que a aplicação  $P \longrightarrow (z, w)$  é uma bijeção conforme de  $M$  sobre a superfície  $\bar{R}$  associada a equação irredutível satisfeita por  $w$ .*

**Demonstração:**

Seja  $\bar{R}$  a superfície de Riemann do teorema 1.3.5, e seja a aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi : M &\longrightarrow \bar{R} \\ P &\longmapsto \varphi(P) := (z(P), w(P)) \end{aligned}$$

onde  $(z, w)$  é um elemento de função de  $M$  na vizinhança de  $P$  tal que  $\mathbb{P}(z(P), w(P)) = 0$ .  $\varphi$  é um biholomorfismo. De fato, sejam  $P_1, P_2 \in M$ , e  $z(P_1) \neq z(P_2)$ , então os elementos de função são distintos,  $(z(P_1), w(P_1)) \neq (z(P_2), w(P_2))$ ; no caso em que  $z(P_1) = z(P_2)$  os elementos de função também são distintos. Portanto,  $\varphi$  é injetiva. Além disso, uma coordenada local de  $M$  se transforma numa coordenada local da superfície  $\bar{R}$ , logo temos uma aplicação injetiva e conforme. Pelo teorema (1.1.6), temos que esta aplicação também é sobrejetora. ■

Então todas as superfícies de Riemann compactas definidas abstratamente podem ser realizadas por meio de uma equação algébrica.

### 1.3.2 Alguns Exemplos de Superfícies de Funções Algébricas

As funções algébricas mais simples são aquelas definidas por uma equação da forma  $p_0(z)w + p_1(z) = 0$ ,  $p_0(z) \neq 0$ , onde  $p_0(z)$  e  $p_1(z)$  são polinômios. Então,  $w = -p_1(z)/p_0(z) = r_1(z)$  é uma função racional de  $z$ . Neste caso  $w : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função regular exceto para um número finito de polos.

Vamos analisar agora as funções algébricas definidas por equações de grau 2 em  $w$ ;  $p_0(z)w^2 + p_1(z)w + p_2(z) = 0$ . Obteremos, portanto, uma superfície de Riemann construída com 2 folhas (regiões onde cada ramo de  $w(z)$  está bem definido). Pondo,  $\zeta := 2p_0(z)w(z) + p_1(z)$  e  $p(z) := p_1^2(z) - 4p_0(z)p_2(z)$ , obtém-se  $\zeta^2 - p(z) = 0$ .

(1) Se  $p(z) = z$ ,  $\sqrt{z}$  não está bem definida em  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . É fácil ver que  $w$  está bem definida na região como na figura 1.3. Para construir a superfície de Riemann  $\bar{R}$  de  $w = w(z)$ , colamos  $I_+$  com  $II_-$  e  $I_-$  com  $II_+$ , isto é, colamos o bordo dos cortes da Folha  $I$  e Folha  $II$  em cruz. Portanto,  $w : \bar{R} \rightarrow \mathbb{C}$  está bem definida. Aqui  $\bar{R}$  é uma superfície de Riemann de duas folhas, e será representada como na figura 1.3.



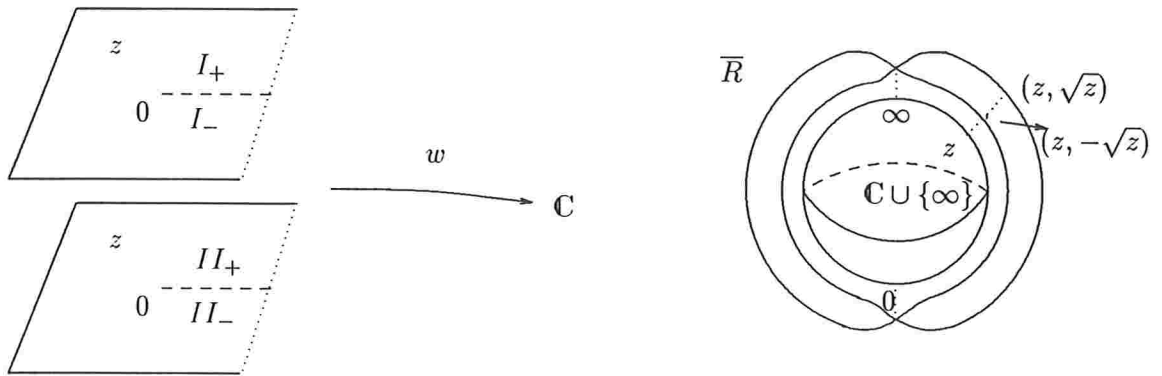
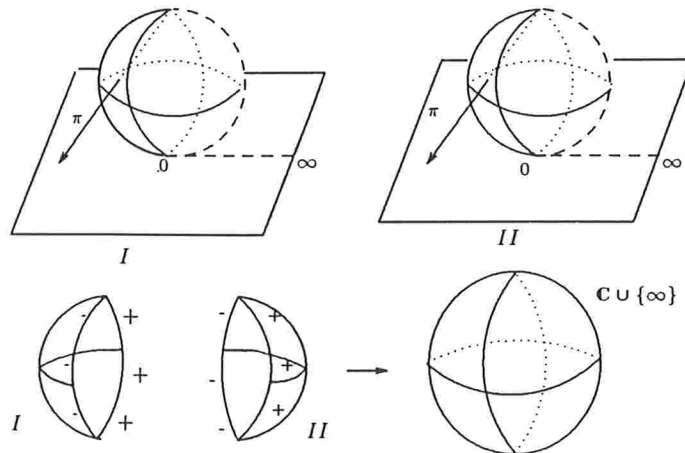


Figura 1.3

Para cada ponto base  $z$ , existem dois valores para  $w = \sqrt{z}$ , exceto em  $z = 0$  e  $z = \infty$ , que são os pontos de ramificação de  $w = \sqrt{z}$ .

Cada ponto de  $\bar{R}$  é representado por um par  $(z, w)$ , neste caso  $(z, \sqrt{z})$  pertence a folha  $I$  e  $(z, -\sqrt{z})$  pertence a folha  $II$ .

Mostraremos agora que a superfície de Riemann de duas folhas  $\bar{R}$  pode ser aplicada homeomorficamente sobre a esfera  $S^2(1)$ , superfície compacta de gênero  $p = 0$ . Para estabelecer este homeomorfismo, consideremos a inversa de projeção estereográfica para as duas folhas de  $w = \sqrt{z}$  veja figura 1.4, depois suponha que  $S^2(1)$  cortado ao longo do meridiano possa ser deformada em um hemisfério, rotacionando um dos hemisférios, de modo que seja possível colar os bordos com sinais opostos.

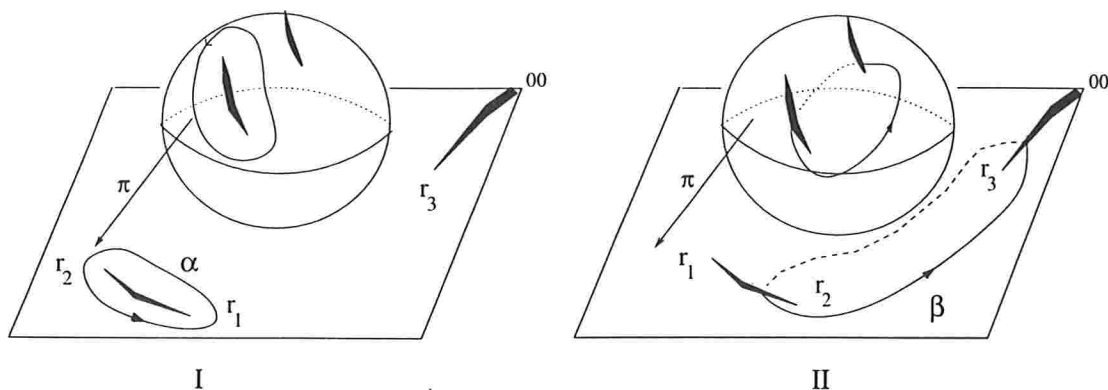


**Figura 1.4**

Quando,  $p(z) = a_0z + a_1, a_0 \neq 0, a_0, a_1 \in \mathbb{C}$ , nada muda essencialmente, basta fazer o corte de  $z = -\frac{a_0}{a_1}$  para  $z = \infty$  no lugar de  $z = 0$  para  $\infty$ .

(2) Se  $w^2 = a_0z^2 + a_1z + a_2, a_0 \neq 0$  e  $a_1^2 - 4a_2a_0 \neq 0$ . Por fatoração,  $w^2 = a_0(z - r_1)(z - r_2)$ . Aqui também não tem grandes mudanças, salvo que as duas folhas são obtidas fazendo um corte de  $r_1$  para  $r_2$  no plano  $z$ , os quais podem ser levados pela transformação  $\tau(z) = \frac{z-r_1}{z-r_2}$  à  $\tau = 0$  e  $\tau = \infty$ . E segue como antes que a superfície de Riemann de  $w = \sqrt{a_0(z - r_1)(z - r_2)}$  é homeomorfa a  $S^2$ .

(3) A superfície homeomorfa a superfície de Riemann da função algébrica definida por  $w^2 = a_0(z - r_1)(z - r_2)(z - r_3)$ , onde  $r_1, r_2, r_3$  são distintos, é topologicamente diferente dos casos anteriores. Neste caso os pontos de ramificação são  $r_1, r_2, r_3$  e  $\infty$ . E as duas folhas são obtidas por meio de cortes ligando  $r_1$  para  $r_2$  e de  $r_3$  para  $\infty$ . Pictoricamente temos:



**Figura 1.5**

Seja  $\alpha$  a curva fechada dando uma volta em torno do corte feito de  $r_1$  para  $r_2$  em uma folha de  $\bar{R}$ . por exemplo a folha *I*, esta curva existe porque o cruzamento entre as folhas é feito somente a través dos cortes. Seja  $\beta$  uma curva fechada iniciando de um ponto sobre um dos lados do corte feito de  $r_1$  para  $r_2$  na folha *II* e une a um

ponto sobre um lado do corte de  $r_3$  para  $\infty$ , ainda na folha  $II$ . E retorna ao ponto inicial pela folha  $I$ . Estas curvas correspondem a uma base para homologia de  $\overline{R}$ .

Esticando os cortes até formar tubos e rotacionando uma das esferas a fim de que o bordo  $+$  de um tubo é oposto ao bordo  $-$  de outro tubo para obter a superfície de Riemann de  $w$ , a qual é homeomorfa a um toro.

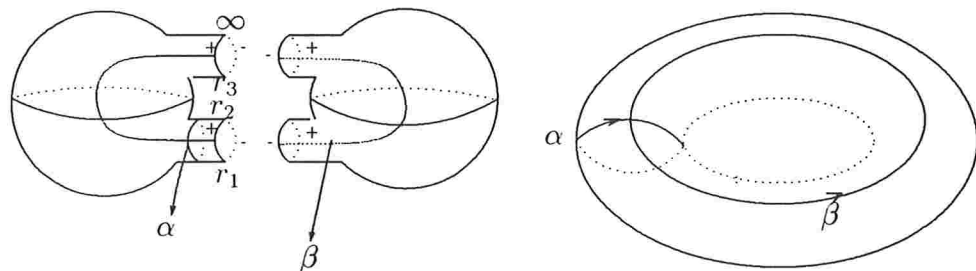


Figura 1.6

A situação é semelhante quando  $w^2 = w^2 = a_0(z - r_1)(z - r_2)(z - r_3)(z - r_4)$ , onde  $r_1, r_2, r_3, r_4$  são distintos. Neste caso os cortes são feitos entre  $r_1$  e  $r_2$  e entre  $r_3$  e  $r_4$ . Uma representação esquemática da superfície de Riemann acima pode ser dada pela figura 1.7.

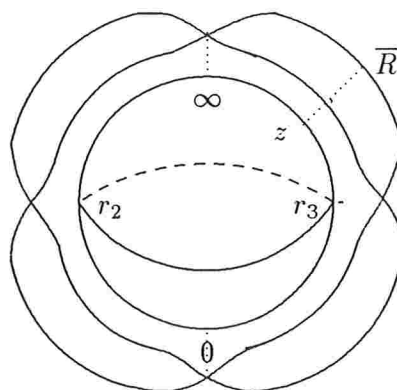


Figura 1.7

(4) Se  $w^2 = a_4(z-r_1)(z-r_2)(z-r_3)(z-r_4)(z-r_5)$ ,  $r_i \neq r_j$  para  $i \neq j, i, j = 1, \dots, 5$ .  
Temos:

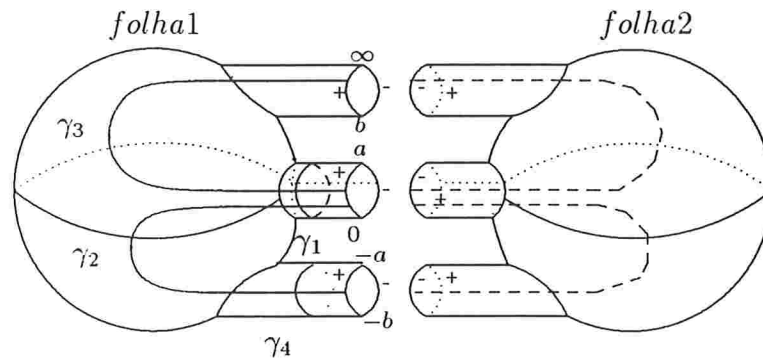


Figura 1.8

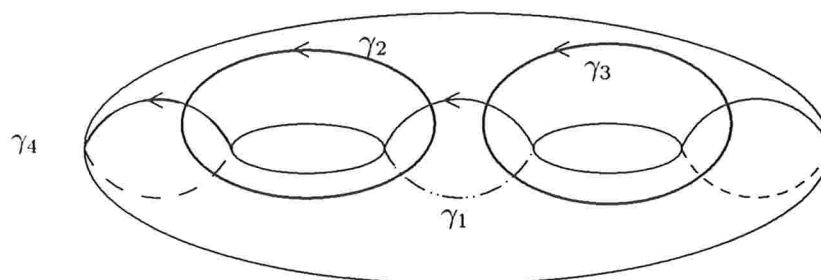


Figura 1.9

(5) Para completar a discussão do caso especial  $w^2 - p(z) = 0$ , fazemos  $w = w(z)$  definida por:

$$w^2 = a_0(z-r_1)(z-r_2)\dots(z-r_n) \quad \text{com } r_i \neq r_j, i \neq j, i, j = 1, \dots, n$$

Neste caso temos uma superfície de Riemann de duas folhas com pontos de ramificação  $r_1, \dots, r_n$ , e se  $n$  é ímpar,  $z = \infty$  é também um ponto de ramificação. Para obter as duas folhas da superfície de Riemann, separamos os pontos em pares  $(r_1r_2), (r_3r_4), \dots, (r_{n-1}r_n)$  e fazemos os cortes unindo  $r_1$  a  $r_2, r_3$  a  $r_4, \dots$  e  $r_{n-1}$  a

$r_n$  se  $n$  é par. Se  $n$  é ímpar o último corte é feito unindo  $r_n$  ao  $\infty$ .

Observemos que quando  $n$  é par, temos  $\frac{n}{2}$  tubos e quando  $n$  é ímpar temos  $\frac{n+1}{2}$  tubos.

Então o gênero  $p$  da superfície de Riemann  $\bar{R}$  é dado por:

$$p = \begin{cases} \frac{n}{2} - 1, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n+1}{2} - 1, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \quad \text{isto é, } \begin{cases} \frac{n-2}{2}, & n = 2m + 2, m \in \mathbb{N} \\ \frac{n-1}{2}, & n = 2m + 1 \end{cases} \quad (1.8)$$

Logo,

$$\begin{aligned} p &= \frac{n-2}{2} = \frac{2m+2-2}{2} = m \\ p &= \frac{n-1}{2} = \frac{2m+1-1}{2} = m \end{aligned}$$

portanto,  $p = m$  e

$$w^2 = a(z - r_1)(z - r_2) \dots (z - r_{2p+1}) \quad \text{ou}$$

$$w^2 = a(z - r_1)(z - r_2) \dots (z - r_{2p+2}),$$

realizam uma superfície de Riemann  $\bar{R}$  de gênero  $p$ , que é topologicamente equivalente a uma esfera com  $p$  alças, que por sua vez é homeomorfa a um  $p$ -toro.

**Observação:** Quando  $w^2 = Q(z)$ , onde  $Q(z) = (z - e_1)(z - e_2) \dots (z - e_k)$ , podemos supor grau de  $Q(z)$  ímpar,  $k = 2m + 1$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , pois se  $k$  for par,  $k = 2m + 2$ . basta fazer  $e_k \rightarrow \infty$  por uma mudança de coordenadas do tipo  $\zeta = \frac{1}{(z - e_k)}$  e trocar  $w$  por

$$w_1 = \frac{\zeta^{m+1} w}{\left[ \prod_{j=1}^{k-1} (e_j - e_k) \right]^{1/2}}$$

Logo,  $w_1^2 = (\zeta - c_1)(\zeta - c_2) \dots (\zeta - c_{k-1})$ , i.e.  $w_1^2 = (\zeta - c_1)(\zeta - c_2) \dots (\zeta - c_{2m+1})$  onde  $c_1, c_2, \dots, c_{2m+1}$  são distintos. Assim podemos considerar

$$w_1^2 = (z - e_1)(z - e_2) \dots (z - e_{2m+1}).$$

Como  $p = \frac{k-1}{2}$ , no caso  $k$  ímpar,  $k = 2m + 1$  temos

$$w_1^2 = (z - e_1)(z - e_2) \dots (z - e_{2p+1})$$

Agora vamos construir uma base canônica para homologia da superfície de Riemann  $\bar{R}$  da função algébrica  $w$  definida por

$$w = \sqrt{\prod_{j=1}^{2p+1} (z - r_j)}.$$

Representamos uma das folhas de  $\overline{R}$ , (por exemplo a folha  $I$ , como na figura 1.10 abaixo. Sejam as curvas simples fechadas diferenciáveis  $\alpha_k$ ,  $k = 1, \dots, p$  dando uma volta em torno dos cortes feitos ligando  $r_{2k-1}$  à  $r_{2k}$  em uma folha de  $\overline{R}$  orientada como na figura 1.10. Para completar a base para homologia de  $\overline{R}$ , escolhamos curvas  $\beta_k$ ,  $k = 1, \dots, p-1$ , iniciando em um ponto sobre um lado inferior do corte feito de  $r_{2k-1}$  a  $r_{2k}$  na folha  $II$ , unindo a um ponto sobre o corte feito de  $r_{2k+1}$  à  $r_{2k+2}$  da mesma folha e retornando ao ponto inicial pela folha  $I$ . Quando  $k = p$ , a idéia é a mesma feita nos cortes ligando  $r_{2p-1}$  à  $r_{2p}$  e  $r_{2p+1}$  à  $\infty$ .

**Observação:** Na figura 1.10, a parte pontilhada das curvas  $\beta_k$  pertencem a folha  $II$ .

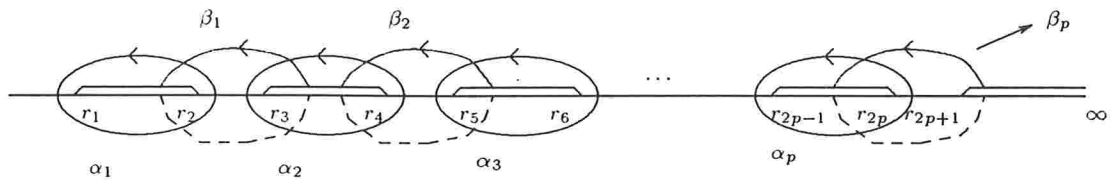


Figura 1.10

O conjunto com  $2p$  curvas dado por:

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_p\}$$

forma uma base para a homologia de  $\overline{R}$ , isto é, qualquer outra curva fechada simples em  $\overline{R}$  pode ser escrita como combinação linear dessas curvas. Outra maneira de ver essas curvas é a seguinte:

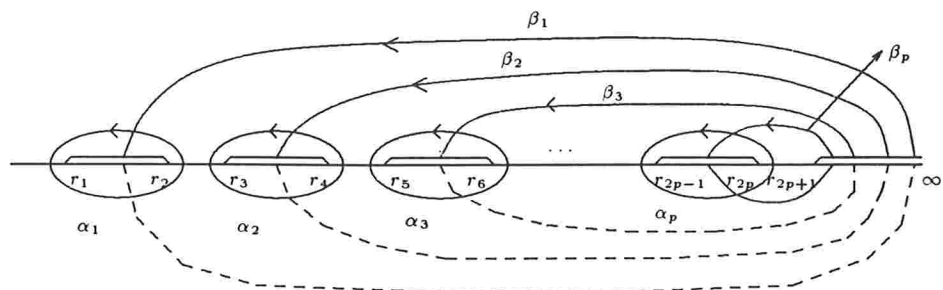


Figura 1.11

### 1.3.3 Superfícies Hiperelípticas e Equações Algébricas

De acordo com a definição 1.2.17 de superfícies hiperelípticas, existe uma função meromorfa não constante  $w$ , que satisfaz uma equação algébrica irredutível,

$$w^2 = (z - e_1)(z - e_2) \dots (z - e_k), \quad \text{com } e_1, e_2, \dots, e_k \text{ distintos e } k = 2p + 1.$$

Os  $k$  pontos  $e_1, e_2, \dots, e_k$ , são os pontos de ramificação da superfície  $\overline{R}$ . Já vimos que se  $k$  é ímpar,  $z = \infty$  também é um ponto de ramificação. Uma outra maneira de verificar 1.8 é usando a relação de Riemann 1.5 dada no teorema 1.2.13.

$$V = 2(n + p - 1), \quad \text{onde neste caso } n = 2.$$

Se  $k$  é par, então  $V = k + 0$ , logo,  $k = 2(2 + p - 1)$  e, portanto  $p = \frac{k-2}{2}$ .

Se  $k$  é ímpar,  $V = k + 1$ , portanto  $k + 1 = 2 + 2p$  e  $p = \frac{k-1}{2}$ .

Segue que  $p \geq 2$  se, e só se,  $k > 4$ . Logo uma superfície hiperelíptica pode ser realizada pela função algébrica

$$w^2 = (z - e_1)(z - e_2) \dots (z - e_k), \quad \text{onde } k > 4$$

Estudaremos agora as diferenciais abelianas. Seja

$$w^2 = (z - e_1)(z - e_2) \dots (z - e_{2p+1}),$$

temos o teorema:

**Proposição 1.3.7** *As diferenciais*

$$\eta_1 = \frac{dz}{w}, \quad \eta_2 = \frac{zdz}{w}, \quad \eta_3 = \frac{z^2dz}{w}, \quad \dots, \quad \eta_p = \frac{z^{p-1}dz}{w}$$

*formam uma base para o espaço das diferenciais de primeira espécie.*

**Demonstração:** ver [24]

**Lema 1.3.8** *Se  $p > 0$ , não existe um ponto  $P_1 \in M$ , no qual todas as diferenciais abelianas de primeira espécie se anulem, isto é,  $i[P_1] < p$ .*



**Demonstração:**

Suponhamos que  $i[P_1] = p$ , para toda diferencial abeliana  $\omega \neq 0$ , onde  $\text{ord}_{P_1}[(\omega)] > 0$ . Então, pelo teorema de Riemann–Roch,

$$r \left[ \frac{1}{P_1} \right] = 1 + p - p + 1 = 2.$$

Logo, existe uma função meromorfa não constante  $f \in L \left[ \frac{1}{P_1} \right]$ , com polo simples em  $P_1$ , isto é,  $f$  tem grau 1. Portanto,  $f : M \rightarrow S^2(1)$  é uma aplicação conforme injetiva. Então  $M$  tem gênero  $p = 0$ , o que contradiz a hipótese. ■

**Proposição 1.3.9** *Toda superfície de Riemann compacta  $M$  de gênero  $p = 2$  é hiperelíptica.*

**Demonstração:**

Pela proposição 1.2.2 temos,  $i[1] = p = 2$ . Então,  $r[1] = 0 + 2 - 2 + 1 = 1$ . Seja  $\omega \in \Omega[P_1P_2]$ , logo pela proposição 1.2.6,

$$i[P_1P_2] = r \left[ \frac{P_1P_2}{(\omega)} \right] = r[1] = 1.$$

Portanto, pelo teorema de Riemann–Roch,

$$r \left[ \frac{1}{P_1P_2} \right] = 2.$$

Agora, para qualquer divisor inteiro  $D = P_1 \dots P_n$ , temos que  $r \left[ \frac{1}{D} \right] \geq 1$ . Logo,  $i[D] \geq p - n$ . Mas, pelo lema 1.3.8, vimos que  $i[P_1] \leq p - 1$ , então,  $i[P_1] = p - 1 = 2 - 1 = 1$ , e portanto,

$$r \left[ \frac{1}{P_1} \right] = r \left[ \frac{1}{P_2} \right] = 1.$$

Concluimos então que, existe uma função meromorfa  $f$  sobre  $M$  com polos simples em  $P_1$  e  $P_2$ , isto é, grau de  $f$  é 2. ■

## 1.4 Funções Elípticas

Todos os resultados desta seção que não forem demonstrado podem ser encontrados por exemplo em [18].



### 1.4.1 Definição da Função $\wp$ -Weierstrass

**Definição 1.4.1** Uma função  $f$  é chamada elíptica com respeito ao reticulado  $L(w_1, w_2)$  de  $\mathbb{C}$ , se:

i)  $f$  é meromorfa em  $\mathbb{C}$ ;

ii)  $f$  é duplamente periódica  $\begin{cases} f(z + w_1) = f(z) \\ f(z + w_2) = f(z) \end{cases}$

Agora vamos enunciar alguns fatos básicos sobre a teoria das funções elípticas.

**Teorema 1.4.2** Não existe função elíptica holomorfa no plano inteiro.

**Teorema 1.4.3** A soma dos resíduos de uma função elíptica com respeito a  $L(w_1, w_2)$  nos polos  $a_1, \dots, a_k$  pertencentes ao paralelogramo fundamental  $F$  é igual a zero. Isto é,  $\sum_{j=1}^k \text{Res}(f; a_j) = 0$ .

Como consequência imediata desse teorema, temos que  $f$  não pode ter um polo simples.

**Corolário 1.4.4** A soma das ordens dos polos de uma função elíptica em  $F$  é no mínimo 2.

Seja  $f$  uma função elíptica com polos  $a_1, \dots, a_k$  de ordem  $\mu_1, \dots, \mu_k$  e zeros  $z_1, \dots, z_l$  de ordem  $\nu_1, \dots, \nu_l$  no paralelogramo fundamental  $F$ , e  $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \partial F$  (bordo de  $F$ ). Segue o teorema,

**Teorema 1.4.5** Seja  $f$  uma função elíptica em  $L(w_1, w_2)$ , então o número de zeros é igual ao número de polos, levando-se em conta suas respectivas ordens. Isto é,  $\sum_{i=1}^k \mu_i - \sum_{i=1}^l \nu_i = 0$ .

**Corolário 1.4.6** Um função elíptica  $f$  assume qualquer valor um número fixo de vezes digamos  $m$ , em um paralelogramo fundamental.

Para demonstrar este corolário basta aplicar o teorema (1.4.5) a função  $g(z) = f(z) - \alpha$ , onde  $\alpha \in \mathbb{C}$  é qualquer constante arbitrária.

**Definição 1.4.7** O grau de uma função elíptica  $f$ ,  $\text{grau}(f)$ , é igual ao número de polos ou zeros, levando em conta suas ordens.

**Teorema 1.4.8** Seja  $f$  uma função elíptica relativa a  $L(w_1, w_2)$ ,  $F$  o paralelogramo fundamental,  $a_1, \dots, a_k \in F$  polos de  $f$  de ordem  $\mu_1, \dots, \mu_k$ ;  $z_1, \dots, z_l \in F$ , zeros de  $f$  com ordens  $\nu_1, \dots, \nu_l$ . Então  $\sum_{j=1}^k \mu_j a_j - \sum_{i=1}^l \nu_i z_i = w$ , onde  $w = mw_1 + nw_2 \in L(w_1, w_2)$

A função meromorfa mais simples com respeito ao reticulado  $L(w_1, w_2)$  é uma função com polo simples nos pontos  $w = mw_1 + nw_2$  e parte principal  $\frac{1}{z-w}$ . Ela é chamada função  $\zeta$  de Weierstrass.

**Proposição 1.4.9** A função  $\zeta$  relativa ao reticulado  $L(w_1, w_2)$  definida por

$$\zeta(z) := \frac{1}{z} + \sum_{w \neq 0} \left\{ \frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} \right\}, \quad \text{onde } w \in L(w_1, w_2)$$

é meromorfa em  $\mathbb{C}$ , com polo de ordem 1 em  $L(w_1, w_2)$  e parte principal  $\frac{1}{z-w}$ .

**Observação:** A função  $\zeta$  de Weierstrass não é elíptica.

A função elíptica mais simples relativa ao reticulado  $L(w_1, w_2)$  é uma função com polo de ordem 2 em  $w \in L(w_1, w_2)$  e regular nos outros pontos. É a função  $\wp$ -Weierstrass da proposição que segue.

**Proposição 1.4.10** A função  $\wp$  relativa à  $L(w_1, w_2)$  definida por

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{w \neq 0} \left\{ \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right\}, \quad \text{onde } w \in L(w_1, w_2)$$

é uma função elíptica par com polos de ordem 2 nos pontos do reticulado  $w \in L(w_1, w_2)$  e holomorfa em  $\mathbb{C} \setminus L(w_1, w_2)$ . Além disso vale  $\wp(z) = -\zeta'(z)$ .

Da relação,  $\zeta'(z) = -\wp(z)$ , segue-se  $\zeta(z + w_j) = \zeta(z) + c$ , onde  $c$  é uma constante e  $j = 1, 2$ .

Por conveniência faremos,

$$2\eta_j := \zeta(z + w_j) - \zeta(z), \quad j = 1, 2 \quad (1.9)$$

### 1.4.2 Relação de Legendre

Veremos agora como as constantes  $\eta_1$  e  $\eta_2$  de 1.9 são relacionadas com  $w_1, w_2$ . Consideremos o paralelogramo fundamental  $F$  de modo que  $z = 0$  seja seu centro como na figura 1.12 abaixo. Aplicando o teorema do resíduo, obtemos:

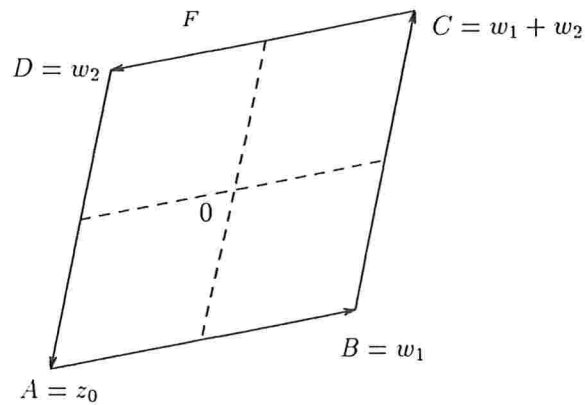


Figura 1.12

$$\int_{\partial F} \zeta(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(\zeta(z); 0) = 2\pi i$$

Por outro lado, as relações (1.9) implicam que

$$\int_{\partial F} \zeta(z) dz = \left\{ \left( \int_{\overline{AB}} \zeta(z) dz + \int_{\overline{CD}} \zeta(z) dz \right) + \left( \int_{\overline{BC}} \zeta(z) dz + \int_{\overline{DA}} \zeta(z) dz \right) \right\}$$

$$\int_{\overline{AB}} \zeta(z) dz + \int_{\overline{CD}} \zeta(z) dz = \int_{\overline{AB}} \zeta(z) dz + \int_{\overline{BA}} \zeta(z + w_2) dz$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\overline{AB}} \zeta(z) dz - \int_{\overline{AB}} \zeta(z) dz - 2\eta_2 \int_{\overline{AB}} dz = -2\eta_2 w_1 \\
\int_{\overline{BC}} \zeta(z) dz + \int_{\overline{DA}} \zeta(z) dz &= \int_{\overline{AD}} \zeta(z + w_1) dz + \int_{\overline{DA}} \zeta(z) dz \\
&= \int_{\overline{AD}} \zeta(z) dz + 2\eta_1 \int_{\overline{DA}} dz - \int_{\overline{AD}} \zeta(z) dz = 2\eta_1 w_2
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\int_{\partial F} \zeta(z) dz = 2\eta_1 w_2 - 2\eta_2 w_1 \quad \Rightarrow \quad 2(\eta_1 w_2 - \eta_2 w_1) = 2\pi i,$$

$$\eta_1 w_2 - \eta_2 w_1 = \pi i \quad (\text{relação de Legendre}) \quad (1.10)$$

É fácil ver que  $\zeta(-z) = -\zeta(z)$ , basta usar na definição de  $\zeta(z)$  um rearranjo nos termos da soma, já que esta é absolutamente convergente no disco  $|z| \geq \rho$  e  $|w| > 2\rho$ . Podemos expressar as constante  $\eta_1$  e  $\eta_2$  em termos de valores de  $\zeta(z)$ . De fato, se  $z = w_1/2$ , então

$$\begin{aligned}
\zeta\left(\frac{-w_1}{2}\right) &= -\zeta\left(\frac{w_1}{2}\right) \quad \text{e} \\
\zeta\left(\frac{w_1}{2}\right) &= \zeta\left(\frac{-w_1}{2} + w_1\right) = \zeta\left(\frac{-w_1}{2}\right) + 2\eta_1 \quad \text{por 1.9,} \\
\Rightarrow \zeta\left(\frac{w_1}{2}\right) &= -\zeta\left(\frac{w_1}{2}\right) + 2\eta_1 \Rightarrow \eta_1 = \zeta\left(\frac{w_1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Similarmente,  $\eta_2 = \zeta\left(\frac{w_2}{2}\right)$ .

Reescrevendo a relação de Legendre, temos

$$\zeta\left(\frac{w_1}{2}\right) w_2 - \zeta\left(\frac{w_2}{2}\right) w_1 = \pi i \quad (1.11)$$

### Proposição 1.4.11

Os únicos zeros de  $\wp'(z) := \frac{-2}{z^3} + \sum_{w \neq 0} \left\{ \frac{-2}{(z-w)^3} \right\}$  no paralelogramo fundamental

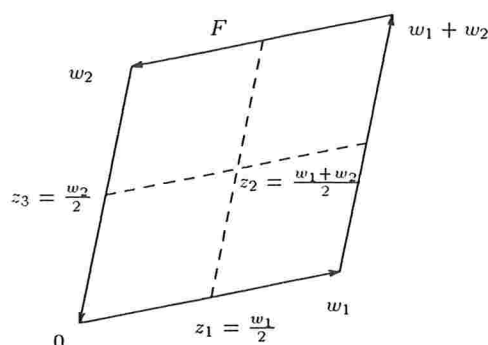
$F$  são os zeros simples  $z_1 = \frac{w_1}{2}$ ,  $z_2 = \frac{w_1 + w_2}{2}$  e  $z_3 = \frac{w_2}{2}$ .

**Demonstração:**

É fácil ver que  $\wp'(z)$  é uma função elíptica impar. Sejam

$$z_1 = \frac{w_1}{2}, \quad z_2 = \frac{w_1 + w_2}{2} \quad \text{e} \quad z_3 = \frac{w_2}{2}$$

pontos de  $F$  como na figura 1.13.



**Figura 1.13**

Assim:

$$\left. \begin{aligned} \wp'\left(-\frac{w_1}{2}\right) &= -\wp'\left(\frac{w_1}{2}\right), \\ \wp'\left(\frac{w_1}{2}\right) &= \wp'\left(w_1 - \frac{w_1}{2}\right) = \wp'\left(-\frac{w_1}{2}\right) = -\wp'\left(\frac{w_1}{2}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\wp'\left(\frac{w_1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \wp'\left(\frac{w_1}{2}\right) = 0.$$

Então  $z_1 = \frac{w_1}{2}$  é um zero de ordem  $\mu_1$  de  $\wp'$ . De modo análogo,  $z_2$  e  $z_3$  são zeros de  $\wp'$  de ordem  $\mu_2$  e  $\mu_3$  respectivamente. O único polo de  $\wp'$  em  $F$  é assumido em  $z = 0$  e é de ordem  $\nu_1 = 3$ . Pelo teorema 1.4.5,  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \nu_1$ , logo  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 3$ , e portanto,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ , já que  $\mu_i \geq 1$ . E pelo teorema 1.4.8, se existisse mais um zero, digamos  $z_4 = m_1 w_1 + n_1 w_2$ , então  $(m_1 + 1)w_1 + (n_1 + 1)w_2 = m w_1 + n w_2 \in F$ . Logo,  $m = n = 1$  e  $m_1 w_1 + n_1 w_2 = 0$ , logo  $m_1 = 0$  e  $n_1 = 0$ , e portanto,  $z_4 = 0$ , contradição pois  $a = 0$  é um polo de ordem 3 de  $\wp'$ . ■

Usaremos daqui para a frente a notação:

$$e_1 := \wp\left(\frac{w_1}{2}\right), \quad e_2 := \wp\left(\frac{w_1 + w_2}{2}\right) \quad \text{e} \quad e_3 := \wp\left(\frac{w_2}{2}\right)$$

### 1.4.3 A Equação Diferencial da Função $\wp$ .

Da convergência absoluta da série que define  $\zeta(z)$  na  $|z| < |w|$ , onde  $|w| \geq 2R$ ,  $R > 0$  e do fato,  $\zeta(-z) = -\zeta(z)$ , temos,

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \left( \sum_{w \neq 0} \frac{1}{w^4} \right) z^3 - \left( \sum_{w \neq 0} \frac{1}{w^6} \right) z^5 - \dots$$

Sendo  $G_k := \sum_{w \neq 0} \frac{1}{w^k}$ ,  $k = 4, 6, 8, \dots$ , temos  $\zeta(z) = \frac{1}{z} - \sum_{k=2}^{\infty} G_{2k} z^{2k-1}$

Pela proposição (1.4.10), temos  $\wp(z) = -\zeta'(z)$ . Logo

$$\wp(z) = - \left( -\frac{1}{z^2} - \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1) G_{2k} z^{2(k-1)} \right) \quad (1.12)$$

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1) G_{2k} z^{2(k-1)}$$

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3G_4 z^2 + 5G_6 z^4 + \dots$$

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6G_4 z + 20G_6 z^3 + \dots \quad (1.13)$$

Por um cálculo simples, tem-se

$$\wp'^2 - \{4\wp^3 - 60G_4\wp - 140G_6\} = o(z^2) \quad (1.14)$$

O lado esquerdo da equação (1.14) é elíptica, e a única possibilidade de polo no paralelogramo fundamental  $F$  é em  $z = 0$ . Mas o lado direito é regular em  $z = 0$ , e vale zero. Logo pelo teorema (1.4.2),

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - 60G_4\wp - 140G_6$$

Pondo  $g_2 := 60G_4 = 60 \sum_{w \neq 0} \frac{1}{w^4}$  e  $g_3 := 140G_6 = 140 \sum_{w \neq 0} \frac{1}{w^6}$ , escrevemos

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$



Vimos na proposição 1.4.11, que  $\frac{w_1}{2}$ ,  $\frac{w_1+w_2}{2}$  e  $\frac{w_2}{2}$  são zeros simples de  $\wp'$ . Logo são raízes do polinômio  $4\wp^3 - g_2\wp - g_3$ , que por sua vez pode ser fatorado

$$4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 4 \left( \wp(z) - \wp\left(\frac{w_1}{2}\right) \right) \left( \wp(z) - \wp\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right) \right) \left( \wp(z) - \wp\left(\frac{w_2}{2}\right) \right)$$

Portanto,

$$\wp'^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3). \quad (1.15)$$

Acabamos de provar a,

**Proposição 1.4.12** *Seja a função  $\wp$  de Weierstrass relativa ao reticulado  $L(w_1, w_2)$ . Temos,*

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 \quad \text{ou} \quad \wp'^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)$$

**Corolário 1.4.13** *Sejam  $e_1, e_2, e_3$  como acima. Valem as seguintes equações:*

(i)  $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ .

(ii)  $e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 = -g_2/4$

(iii)  $e_1e_2e_3 = g_3/4$

(iv)  $\Delta = 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2 = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$

**Proposição 1.4.14** *Sejam as funções elípticas  $\wp(z)$  e  $\wp'(z)$ , relativas ao reticulado  $L(w_1, w_2)$ . Vale a fórmula,*

$$\wp(z + z_0) + \wp(z) + \wp(z_0) = \frac{1}{4} \left[ \frac{\wp'(z) - \wp'(z_0)}{\wp(z) - \wp(z_0)} \right]^2, \quad z_0 \neq w \in L(w_1, w_2)$$

chamada fórmula de adição para  $\wp$ .

#### 1.4.4 A Aplicação Conforme pela Função $\wp$ .

No caso em que  $\text{Re}\{w_2/w_1\} = 0$ , o paralelogramo fundamental  $F$  é um retângulo ver figura 1.14. Estamos interessados agora, na aplicação conforme da função  $\wp$ . Sabemos que  $\wp$  tem grau 2, i.e. assume qualquer valor duas vezes em  $F$ , e que  $0, \frac{w_1}{2}, \frac{w_1+w_2}{2}$  e  $\frac{w_2}{2}$  são os pontos de ramificação de ordem 1, já que  $z = 0$  é um polo de ordem 2 e os outros pontos são zeros simples de  $\wp'$ .

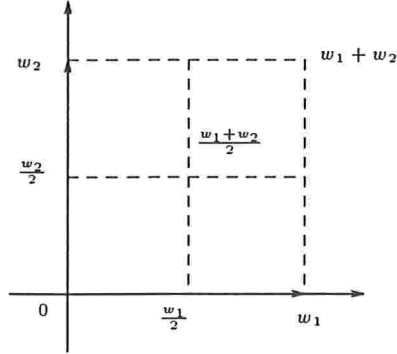


Figura 1.14

**Proposição 1.4.15** *Seja a função elíptica  $\wp$  em  $\mathbb{C}$ , relativa ao reticulado  $L(w_1, w_2)$ .*

*Valem as seguintes propriedades:*

- (i) *Se  $z = x \in \mathbb{R}$ , então  $\wp(x) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$*
- (ii) *Se  $z = iy$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , então  $\wp(iy) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$*
- (iii)  *$\wp(x + nw_2), \wp(iy + mw_1) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  ( $m, n \in \mathbb{Z}^2$ )*
- (iv) *Se  $z = x + w_2/2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , então  $\wp(x + w_2/2) \in \mathbb{R}$*
- (v) *Se  $z = iy + w_1/2$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , então  $\wp(iy + w_1/2) \in \mathbb{R}$ .*

**Demonstração:**

Vamos provar primeiro  $\overline{\wp(z)} = \wp(\bar{z})$ , onde  $z = x + iy \in F$ . De fato ,

$$\overline{\wp(x + iy)} = \frac{1}{(x - iy)^2} + \sum_{w \neq 0} \left\{ \frac{1}{(x - iy - \bar{w})^2} - \frac{1}{\bar{w}^2} \right\}$$

Por um rearranjo nos termos da série de  $\bar{w} = mw_1 + n\bar{w}_2$  para  $w = mw_1 + nw_2$ , temos

$$\overline{\wp(x + iy)} = \wp(x - iy) \tag{1.16}$$

Em particular se  $y = 0$ , temos  $\overline{\wp(x)} = \wp(x) \Rightarrow \wp(x) \in \mathbb{R}$ . Como em  $z = x = 0$ ,  $\wp$  tem um polo, então  $\wp(x) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

Suponhamos agora  $z = iy$ , então pela igualdade (1.16)  $\overline{\wp(iy)} = \wp(-iy)$ , como  $\wp$  é par temos  $\wp(-iy) = \wp(iy)$ , logo  $\overline{\wp(iy)} = \wp(iy)$  e, portanto,  $\wp(iy) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . O

que prova os ítems (i) e (ii). Como  $\wp$  é elíptica segue imediatamente o ítem (iii).  
Seja  $z = x + w_2/2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , então

$$\begin{aligned} \overline{\wp\left(x + \frac{w_2}{2}\right)} &= \frac{1}{\left(x + \frac{w_2}{2}\right)^2} + \sum_{w \neq 0} \left\{ \frac{1}{\left(\left(x + \frac{w_2}{2}\right) - \bar{w}\right)^2} - \frac{1}{\bar{w}^2} \right\} \\ &= \frac{1}{\left(x - \frac{w_2}{2}\right)^2} + \sum_{w \neq 0} \left\{ \frac{1}{\left(\left(x - \frac{w_2}{2}\right) - \bar{w}\right)^2} - \frac{1}{\bar{w}^2} \right\} \end{aligned}$$

por um rearranjo na soma dos termos  $\bar{w}$  do reticulado  $L(w_1, w_2)$  a fim de que a soma fique em  $w$ , segue

$$\overline{\wp\left(x + \frac{w_2}{2}\right)} = \frac{1}{\left(x - \frac{w_2}{2}\right)^2} + \sum_{w \neq 0} \left\{ \frac{1}{\left(\left(x - \frac{w_2}{2}\right) - w\right)^2} - \frac{1}{w^2} \right\} = \wp\left(x - \frac{w_2}{2}\right)$$

$$\overline{\wp\left(x + \frac{w_2}{2}\right)} = \wp\left(x - \frac{w_2}{2}\right) = \wp\left(x + \frac{w_2}{2} - w_2\right) = \wp\left(x + \frac{w_2}{2}\right)$$

Portanto,  $\wp\left(x + \frac{w_2}{2}\right) \in \mathbb{R}$ .

De modo similar temos  $\wp\left(iy + \frac{w_1}{2}\right) \in \mathbb{R}$ .

■

**Corolário 1.4.16** *Os pontos de ramificação  $e_1, e_2$  e  $e_3$  de  $\wp$  são reais e  $e_1 > e_2 > e_3$ .*

A função  $\wp$  aplica o retângulo de vértices  $0, \frac{w_1}{2}, \frac{w_1+w_2}{2}, \frac{w_2}{2}$  conformemente sobre o lado inferior do plano, região  $\wp(I)$  como na figura 1.16. Assim como  $\wp$  aplica o retângulo  $II$  sobre o lado superior do plano, região indicada na figura por  $\wp(II)$

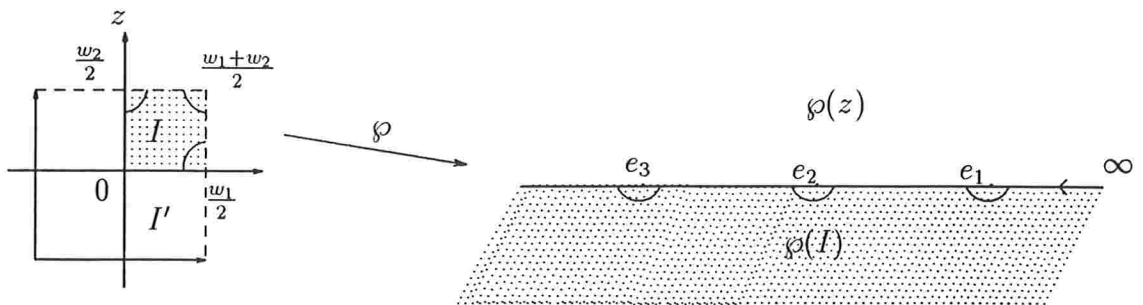


Figura 1.15

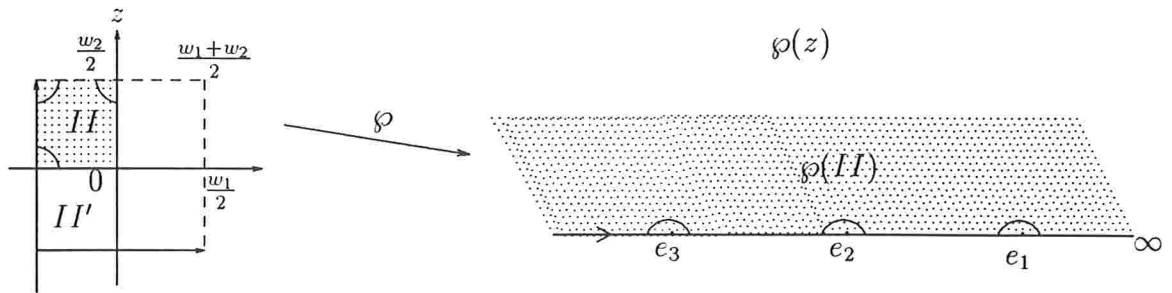


Figura 1.16

A região  $\wp(II)$  está ligada a  $\wp(I)$  ao longo do arco de  $e_3$  para  $\infty$ . Isto nos dá a primeira folha.

Do mesmo modo a região  $I'$  e  $II'$  do paralelogramo fundamental  $F$  é aplicada na segunda folha de uma superfície de Riemann. Assim  $F$  é aplicado sobre uma superfície de Riemann de duas folhas unidas em cruz ao longo de  $e_1$  para  $\infty$ . Ambas folhas são cortadas ao longo de  $(e_1e_2e_3)$ .

Qualquer paralelogramo fundamental  $F$  é aplicado sobre uma superfície de Riemann de duas folhas cortadas ao longo do arco  $(e_1e_2e_3)$ . Essas superfícies são unidas uma a outra ao longo dos cortes  $(e_1e_2)$  e  $(e_2e_3)$ . Portanto temos,

**Proposição 1.4.17** *O plano  $\mathbb{C}$  pode ser aplicado sobre uma superfície de Riemann de infinitas folhas e com infinitos pontos de ramificação de primeira ordem sobre os pontos  $\infty, e_1, e_2, e_3$ .*

## 1.5 Superfícies Mínimas em $\mathbb{R}^3$ .

Nesta seção exporemos alguns resultados clássicos da teoria das superfícies mínimas. Na primeira subseção faremos uma abordagem local de propriedades de imersão conforme, e na segunda tratamos de conceitos globais de superfícies mínimas..

### 1.5.1 Propriedades Locais

Se  $\langle, \rangle$  é a métrica Riemanniana usual do  $\mathbb{R}^3$ ,  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma imersão de uma variedade diferenciável de dimensão 2 em  $\mathbb{R}^3$ , isto é, a diferencial  $dX_P : T_P M \rightarrow T_{X(P)}(\mathbb{R}^3) \simeq \mathbb{R}^3$  é injetiva para todo  $P \in M$ , onde  $T_P M$  é o espaço tangente a  $M$  no ponto  $P$ , então  $X$  induz uma métrica Riemanniana em  $M$ ,  $ds^2 = X^* \langle, \rangle_P(\tilde{u}, \tilde{v}) := \langle dX_P(\tilde{u}), dX_P(\tilde{v}) \rangle_{X(P)}$ , onde  $\tilde{u}, \tilde{v} \in T_P M$ .

**Definição 1.5.1** *Seja  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$  um atlas de  $M$  tal que  $(U_\alpha, V_\alpha, z_\alpha) \in \mathcal{F}_0$ ,  $z_\alpha$  são coordenadas isotérmicas de  $M$  se para todo  $P \in M$ ,  $z_\alpha(P) = z = u + iv \in V_\alpha$  vale,*

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial u}(X \circ z_\alpha^{-1})(z), \frac{\partial}{\partial u}(X \circ z_\alpha^{-1})(z) \right\rangle^{\frac{1}{2}} = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}(X \circ z_\alpha^{-1})(z), \frac{\partial}{\partial v}(X \circ z_\alpha^{-1})(z) \right\rangle^{\frac{1}{2}} =: \lambda > 0$$

$$e \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial u}(X \circ z_\alpha^{-1})(z), \frac{\partial}{\partial v}(X \circ z_\alpha^{-1})(z) \right\rangle = 0,$$

onde

$$X_u(z) := \frac{\partial}{\partial u}(X \circ z_\alpha^{-1})(z), \quad X_v(z) := \frac{\partial}{\partial v}(X \circ z_\alpha^{-1})(z).$$

Isto é,  $\mathcal{F}_0$  é um atlas constituído por coordenadas isotérmicas.

A existência de  $\mathcal{F}_0$  é garantida pelo teorema:

**Teorema 1.5.2 (Existência de Coordenadas Isotérmicas)** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão 2 com a métrica Riemanniana  $\langle, \rangle$ , e  $z : U \rightarrow V$  uma coordenada local, onde  $U$  é um aberto de  $M$ , com  $P \in U$  e  $V$  um aberto de  $\mathbb{C}$ . Então existem abertos  $V'$  e  $W$  de  $\mathbb{C}$ , onde  $z(P) \in V' \subset V$  e  $\varphi : V' \rightarrow W$  um difeomorfismo conforme, tal que  $\tilde{z} = \varphi \circ z$  são coordenadas isotérmicas de  $M$ .*

**Demonstração:** ver [23], pag. 458. No caso particular deste teorema, onde  $M$  é mínima, podemos encontrar uma demonstração na referência [19] pag. 31.

**Observação:**

- (1) Se  $M$  é conexa e orientada e  $\mathcal{F}_0$  é um atlas de  $M$  constituído por coordenadas isotérmicas, então  $\mathcal{F}_0$  é um atlas holomorfo, e portanto, a estrutura holomorfa que contém  $\mathcal{F}_0$ , torna  $M$  uma superfície de Riemann.
- (2) Se  $M$  é uma variedade diferenciável de dimensão 2, conexa, orientada e  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma imersão, então  $X$  induz uma estrutura holomorfa sobre  $M$ , que torna  $X$  uma imersão conforme.

**Definição 1.5.3** *Sejam  $M$  uma superfície de Riemann e  $X : M \rightarrow X(M) \subset \mathbb{R}^3$  uma imersão conforme, então dizemos que  $S = X(M)$  é uma superfície em  $\mathbb{R}^3$*

**Observação:**

- (1) Desta definição segue que  $S = X(M)$  é orientada;
- (2) A definição acima não faz restrição a resultados locais ou para superfícies simplesmente conexas;
- (3) Como  $X : M \rightarrow X(M)$  é uma imersão, então  $S = X(M)$  tem um plano tangente bem definido em cada ponto.

Se  $(U_\alpha, V_\alpha, z_\alpha)$  é uma coordenada local de  $M$ , tal que  $z_\alpha(P) = z = u+iv \in V_\alpha \subset \mathbb{C}$ , e  $(x_1, x_2, x_3)$  são coordenadas em  $\mathbb{R}^3$ , então  $X : M \rightarrow X(M)$  é dada localmente na forma:

$$X(z) = ((x_1 \circ z_\alpha^{-1})(z), (x_2 \circ z_\alpha^{-1})(z), (x_3 \circ z_\alpha^{-1})(z))$$

A conformidade da aplicação  $X$  dada na definição 1.5.3 é expressa em termos da coordenada local  $(U_\alpha, V_\alpha, z_\alpha)$  por:

$$\langle X_u, X_u \rangle^{\frac{1}{2}} = \langle X_v, X_v \rangle^{\frac{1}{2}} = \lambda(u, v) > 0 \quad \text{e} \quad \langle X_u, X_v \rangle = 0,$$

e então  $z = u + iv$  são coordenadas isotérmicas para  $M$ .

**Observação:**

Sendo  $(U_\alpha, V_\alpha, z_\alpha)$ ,  $g_{11} := \langle X_u, X_u \rangle$ ,  $g_{22} := \langle X_v, X_v \rangle$  e  $g_{12} := \langle X_u, X_v \rangle$  os coeficientes



da primeira forma fundamental e  $b_{11} := \langle X_{uu}, N \rangle$ ,  $b_{22} := \langle X_{vv}, N \rangle$  e  $b_{12} := \langle X_{uv}, N \rangle$  os coeficientes da segunda forma fundamental, então:

$$h(z) := \frac{g_{22}b_{11} + g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}(z) \quad (1.17)$$

é a curvatura média de  $S$  em  $P \in U_\alpha$  e  $H(z)$  definido por

$$H(z) := h(z) \cdot N(z) \quad \text{é o vetor curvatura média,} \quad (1.18)$$

onde

$$N(z) := \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(z), \quad (1.19)$$

é o vetor normal de  $S$ .

**Definição 1.5.4** *Seja  $S = X(M)$  uma superfície do  $\mathbb{R}^3$ . Se o vetor  $H$  é identicamente nulo ( $H \equiv 0$ ), diz-se que  $S$  é uma superfície mínima, ou que  $X$  é uma imersão mínima.*

#### Exemplos de superfícies mínimas:

(a) Superfície de Enneper:

$$X(u, v) = \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2; v - \frac{v^3}{3} + vu^2; u^2 - v^2 \right), \quad \text{onde } (u, v) \in \mathbb{C}$$

(b) Catenóide:

$$X(u, v) = (\cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sen(v), u), \quad \text{onde } (u, v) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

**Observação:** A razão do adjetivo mínima na definição de superfície mínima é que localmente ela minimiza área dentre uma família de superfícies de classe  $C^2$  do  $\mathbb{R}^3$  que tem como bordo uma curva regular fechada.

Em coordenadas isotérmicas muitos dos objetos geométricos de  $S = X(M)$  têm expressões analíticas simplificadas. Por exemplo sobre  $M$ , a métrica induzida de  $\mathbb{R}^3$  por  $X$  é dada em termos da coordenada local  $(U_\alpha, V_\alpha, z_\alpha)$  tal que  $z_\alpha(P) = z = u + iv \in V_\alpha$  por:

$$ds^2 = X^*(\langle, \rangle) = \lambda^2(du^2 + dv^2) = \lambda^2|dz_\alpha|^2$$

Também temos,

$$\det(g_{ij}) = \lambda^4 > 0 \quad e \quad h = \frac{b_{11} + b_{22}}{2\lambda^2}.$$

Além disso, se

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}, \quad \Delta(X \circ z_\alpha^{-1}) := (\Delta(x_1 \circ z_\alpha^{-1}), \Delta(x_2 \circ z_\alpha^{-1}), \Delta(x_3 \circ z_\alpha^{-1})),$$

onde  $x_j \circ z_\alpha^{-1} : V_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, 3$  são as funções coordenadas de  $X$ , temos a:

**Proposição 1.5.5** *Seja  $X : M \rightarrow X(M)$  uma imersão conforme de uma superfície de Riemann  $M$  em  $\mathbb{R}^3$ , então*

$$\Delta(X \circ z_\alpha^{-1}) = 2\lambda^2 H \tag{1.20}$$

**Demonstração:** ver [19].

Observemos que desta proposição e a definição 1.5.4, concluímos que uma superfície é mínima se, e só se as funções coordenadas de  $X$  são harmônicas em  $V_\alpha$ .

**Corolário 1.5.6**  *$S = X(M)$  é uma superfície mínima se, e somente se as funções coordenadas de  $X(z)$  são harmônicas. Em particular  $S$  não é compacta.*

No que segue  $M$  é uma superfície de Riemann não compacta,  $\mathcal{H}_0 = \{(U_\alpha, v_\alpha, z_\alpha); \alpha \in I\}$  o Atlas holomorfo que induz a estrutura holomorfa de  $M$  e  $X : M \rightarrow X(M)$  uma imersão conforme que define a superfície  $S = X(M)$  em  $\mathbb{R}^3$ . Seja  $(U_\alpha, V_\alpha, z_\alpha)$  uma coordenada local de  $M$ , tal que  $z_\alpha(P) = z = u + iv$ , para todo  $P \in U_\alpha$ . Se

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) \quad e \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right) \tag{1.21}$$

Então

$$\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \tag{1.22}$$

e,

$$\phi_j^\alpha(z) := 2 \left( \frac{\partial}{\partial z} (x_j \circ z_\alpha^{-1})(z) \right) dz_\alpha, \quad j = 1, 2, 3 \tag{1.23}$$

são 1-formas diferenciais para cada coordenada local  $z_\alpha$  de  $M$ .

Agora se  $S = X(M)$  é uma superfície mínima, segue-se de 1.21 , 1.23 e proposição 1.5.5 que

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \phi_j^\alpha(z) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[ 2 \left( \frac{\partial}{\partial z} (x_j \circ z_\alpha^{-1})(z) \right) dz_\alpha \right] = 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} (x_j \circ z_\alpha^{-1})(z) \right) dz_\alpha = 0,$$

logo  $\phi_j^\alpha(z)$  é holomorfa em  $V_\alpha$ . Além disso, se  $(U_\alpha, V_\alpha, z_\alpha)$  e  $(U_\beta, V_\beta, z_\beta)$  são duas coordenadas locais de  $M$ , tais que  $z_\alpha(P) = z = u + iv$  e  $z_\beta(P) = \tilde{z} = \tilde{u} + i\tilde{v}$  para todo  $P \in U_\alpha \cap U_\beta$  vale:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{z}}(\tilde{z}) = (z_\beta \circ z_\alpha^{-1})'(z) \frac{\partial}{\partial z}(z)$$

Então pela definição 1.2.1 de 1-formas diferenciais, temos que 1.23 definem 1-formas diferenciais holomorfas  $\phi_j(z)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , globalmente em  $M$ .

No que segue,

$$\frac{\partial}{\partial z} X(z) := \frac{\partial}{\partial z} (X \circ z_\alpha^{-1})(z) = \frac{1}{2} (X_u - iX_v)(z)$$

Então podemos escrever,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} X(z) dz_\alpha &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} (x_1 \circ z_\alpha^{-1}) - i \frac{\partial}{\partial v} (x_1 \circ z_\alpha^{-1}), \frac{\partial}{\partial u} (x_2 \circ z_\alpha^{-1}) - i \frac{\partial}{\partial v} (x_2 \circ z_\alpha^{-1}), \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial u} (x_3 \circ z_\alpha^{-1}) - i \frac{\partial}{\partial v} (x_3 \circ z_\alpha^{-1}) \right) (z) dz_\alpha \\ \text{e } \Phi^\alpha &:= (\phi_1^\alpha, \phi_2^\alpha, \phi_3^\alpha) = 2 \frac{\partial}{\partial z} X(z) dz_\alpha \end{aligned} \quad (1.24)$$

**Observação:** No teorema abaixo,  $\langle, \rangle^{\mathbb{C}}$  denota à extensão a  $\mathbb{C}^3$  do produto interno usual do  $\mathbb{R}^3$ . Sempre que não houver dúvidas,  $\langle, \rangle^{\mathbb{C}}$  será ainda indicado por  $\langle, \rangle$ .

**Teorema 1.5.7** *Sejam  $S = X(M)$  uma superfície do  $\mathbb{R}^3$  e  $(U_\alpha, V_\alpha, z_\alpha)$  uma coordenada local de  $M$ , onde para todo  $P \in U_\alpha$ ,  $z_\alpha(P) = z = u + iv \in V_\alpha$ . Se  $\phi_j^\alpha(z)$ ,  $j = 1, 2, 3$  é dado por 1.23, então:*

(i)  $\phi_j^\alpha$  é holomorfa  $\Leftrightarrow x_j \circ z_\alpha^{-1}$  é harmônica em  $V_\alpha$ , isto é,  $\Delta(x_j \circ z_\alpha^{-1})(z) = 0, \forall z \in V_\alpha$ .

(ii)  $\langle \Phi^\alpha, \Phi^\alpha \rangle^{\mathbb{C}} = (\phi_1^\alpha)^2 + (\phi_2^\alpha)^2 + (\phi_3^\alpha)^2 = 0$ .

(iii)  $S$  é regular para todo ponto  $P \in U_\alpha \Leftrightarrow \langle \Phi^\alpha, \overline{\Phi^\alpha} \rangle^{\mathbb{C}} = |\phi_1^\alpha|^2 + |\phi_2^\alpha|^2 + |\phi_3^\alpha|^2 \neq 0$ .

Reciprocamente, se  $V_\alpha$  é um aberto de  $\mathbb{C}$  simplesmente conexo e  $\phi_j^\alpha$ ,  $j = 1, 2, 3$  são funções holomorfas em  $V_\alpha$  satisfazendo (ii) e (iii), então  $S = X(V_\alpha)$  dada por:

$$X(z) = \text{Re} \left\{ \int_{z_0}^z \Phi^\alpha \right\}, \quad z_0 \text{ fixo e } z_0, z \in V_\alpha \quad (1.25)$$

é uma superfície mínima do  $\mathbb{R}^3$

**Demonstração:** ver [19] ou [10]

Usando o fato,  $z_\alpha$  coordenada isotérmica o que implica pelo ítem (ii) do teorema 1.5.7 que  $(\phi_1^\alpha)^2 + (\phi_2^\alpha)^2 + (\phi_3^\alpha)^2 = 0$ , e que  $\phi_1^\alpha \neq i\phi_2^\alpha$ , temos o teorema:

**Teorema 1.5.8** *Sejam  $V_\alpha$  um aberto de  $\mathbb{C}$ ,  $g : V_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$  uma função meromorfa e  $\eta := fdz_\alpha$  uma diferencial holomorfa (i.e,  $f : V_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função holomorfa) tendo a propriedade que em cada ponto onde  $g$  tem um polo de ordem  $m$ ,  $\eta$  tem um zero de ordem  $2m$ . As diferenciais,*

$$\phi_1^\alpha := \frac{1}{2}(1 - g^2)\eta, \quad \phi_2^\alpha := \frac{i}{2}(1 + g^2)\eta, \quad \phi_3^\alpha := g\eta \quad (1.26)$$

são holomorfas em  $V_\alpha$  e satisfazem  $(\phi_1^\alpha)^2 + (\phi_2^\alpha)^2 + (\phi_3^\alpha)^2 = 0$ . Reciprocamente, quaisquer três funções holomorfas em  $V_\alpha$ ;  $\phi_1^\alpha, \phi_2^\alpha$  e  $\phi_3^\alpha$  satisfazendo  $(\phi_1^\alpha)^2 + (\phi_2^\alpha)^2 + (\phi_3^\alpha)^2 = 0$  podem ser escritas como em 1.26 se  $\phi_1^\alpha - i\phi_2^\alpha \neq 0$ .

A demonstração é imediata se escrevermos

$$(\phi_1^\alpha + i\phi_2^\alpha)(\phi_1^\alpha - i\phi_2^\alpha) = -(\phi_3^\alpha)^2 \quad (1.27)$$

E fizermos

$$g := \frac{\phi_3^\alpha}{\phi_1^\alpha - i\phi_2^\alpha} \quad \text{e} \quad \eta := \phi_1^\alpha - i\phi_2^\alpha \quad (1.28)$$

**Observação:** Quando  $\phi_1^\alpha - i\phi_2^\alpha = 0$ , de 1.27,  $\phi_3^\alpha = 0$ , logo a função coordenada  $x_3$  é uma constante e portanto se  $x_3$  for uma coordenada de uma imersão  $X$  que define  $S$ , esta estaria contida num plano do  $\mathbb{R}^3$ .

Segue de 1.25 e 1.26 que, no caso em que  $V_\alpha$  é simplesmente conexo e quando  $|\phi_1^\alpha|^2 + |\phi_2^\alpha|^2 + |\phi_3^\alpha|^2 \neq 0$ , então:

$$X(z) = \left( \text{Re} \left\{ \int_{z_0}^z \frac{1}{2}(1 - g^2)\eta \right\}, \text{Re} \left\{ \int_{z_0}^z \frac{i}{2}(1 + g^2)\eta \right\}, \text{Re} \left\{ \int_{z_0}^z g\eta \right\} \right) \quad (1.29)$$

é uma imersão conforme mínima. Chamaremos o par  $(g, \eta)$ , de acordo com 1.26 e 1.29, de *representação de Weierstrass* de  $S = X(V_\alpha)$

De 1.26 é fácil ver que  $(\phi_1^\alpha)^2 + (\phi_2^\alpha)^2 + (\phi_3^\alpha)^2 = 0$ . Além disso,

$$\langle \Phi^\alpha, \overline{\Phi^\alpha} \rangle = |\phi_1^\alpha|^2 + |\phi_2^\alpha|^2 + |\phi_3^\alpha|^2 = 2g_{11}|dz_\alpha|^2 = 2\lambda^2|dz_\alpha|^2 \quad (1.30)$$

Por outro lado, substituindo em 1.30 as expressões de  $\phi_1^\alpha, \phi_2^\alpha$  e  $\phi_3^\alpha$  dadas em 1.26 temos,

$$\lambda^2|dz_\alpha|^2 = \left( \frac{(1 + |g|^2)|\eta|}{2} \right)^2 \quad (1.31)$$

Portanto a métrica de  $X$  é dada por,

$$ds^2 = \frac{1}{4}(1 + |g|^2)^2|\eta|^2 \quad \text{ou} \quad ds^2 = \lambda^2|dz_\alpha|^2, \quad \text{onde} \quad \lambda = \frac{1}{2}|f|(1 + |g|^2)$$

Por um simples cálculo se verifica que em coordenadas  $z_\alpha$ ,

$$X_u \times X_v = \text{Im}\{(\phi_2^\alpha \overline{\phi_3^\alpha}, \phi_3^\alpha \overline{\phi_1^\alpha}, \phi_1^\alpha \overline{\phi_2^\alpha})\} / |dz_\alpha|^2$$

E como,

$$\|X_u \times X_v\|^2 = \lambda^4 = \left[ \frac{|f|(1 + |g|^2)}{2} \right]^4 \quad \text{segue}$$

$$N(z) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \left( \frac{2\text{Re}\{g\}}{|g|^2 + 1}, \frac{2\text{Im}\{g\}}{|g|^2 + 1}, \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \right) \quad (1.32)$$

que é o vetor unitário normal a superfície  $S$ . Podemos visualizar  $N$  dado em 1.32 como uma aplicação que vai de  $M$  sobre a esfera unitária  $S^2(1) \subset \mathbb{R}^3, M \rightarrow S^2(1)$ . Esta aplicação é chamada de aplicação normal de Gauss da superfície  $S = X(M)$ . Observemos que pelo exemplo (2) da seção 1.1 temos  $g = \pi_1 \circ N$ . Logo  $g$  é a representação analítica da aplicação normal de Gauss da imersão.

**Proposição 1.5.9** *A curvatura Gaussiana  $K$  de uma superfície  $S$ , definida pela imersão conforme  $X : M \rightarrow X(M) \subset \mathbb{R}^3$  é dada localmente por:*

$$K = -\frac{\Delta \log \lambda}{\lambda^2}, \quad \text{onde} \quad \lambda^2 = g_{ij}\delta_{ij} \quad (1.33)$$

**Demonstração:** Basta usar a fórmula da curvatura Gaussiana em coordenadas ortogonais.

$$K = \frac{-1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{(g_{22})_u}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{(g_{11})_v}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \right) \right\}$$

■

**Proposição 1.5.10** *Seja  $S$  uma superfície mínima definida pela imersão conforme  $X : M \rightarrow X(M) \subset \mathbb{R}^3$ . Então usando a representação (1.26), a curvatura de Gauss em cada ponto é dada por*

$$K = -4 \frac{\left| \left\langle \frac{\partial}{\partial z} \Phi^\alpha, N \right\rangle \right|}{\|\Phi^\alpha\|^4} \quad \text{ou equivalentemente} \quad K = - \left[ \frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2} \right]^2$$

**Demonstração:**

Usando que  $\Phi^\alpha = 2 \frac{\partial}{\partial z} X dz_\alpha$ , temos  $\frac{\partial}{\partial z} \Phi^\alpha = \left( \frac{1}{2}(X_{uu} - X_{vv}) - iX_{uv} \right) (dz_\alpha)^2$

Como as coordenadas são isotérmicas segue do teorema 1.5.8 que  $\Phi^\alpha$  é dado pelas diferenciais holomorfas 1.26 o que implica  $\Delta(x_j \circ z_\alpha^{-1}) = 0$ . Disto segue,

$$\left| \left\langle \frac{\partial}{\partial z} \Phi^\alpha, N \right\rangle \right|^2 = (b_{11}^2 + b_{12}^2) |dz_\alpha|^4 \quad \text{e} \quad \|\Phi^\alpha\|^4 = 4\lambda^4 |dz_\alpha|^4$$

Temos,

$$\frac{-4 \left| \left\langle \frac{\partial}{\partial z} \Phi^\alpha, N \right\rangle \right|^2}{\|\Phi^\alpha\|^4} = \frac{-4(b_{11}^2 + b_{12}^2) |dz_\alpha|^4}{4\lambda^4 |dz_\alpha|^4} = \frac{-(b_{11}^2 + b_{12}^2)}{\lambda^4} = K$$

Por outro lado,

$$\lambda^4 = \frac{|f|^4(1+|g|^2)^4}{16} \quad \text{e} \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial z} \Phi^\alpha, N \right\rangle = -fg'(dz_\alpha)^2, \quad \text{logo} \quad K = - \left( \frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2} \right)^2$$

■

Podemos agora dar uma interpretação geométrica da curvatura Gaussiana em termos de área sobre a esfera unitária através da aplicação normal de Gauss.

**Definição 1.5.11** *Sejam  $S$  uma superfície definida pela imersão conforme  $X : M \rightarrow X(M) \subset \mathbb{R}^3$ . Definimos a curvatura total de  $S$  por:*

$$C(S) := \int_M K dM,$$

onde  $dM$  é o elemento de área de  $M$ .



Sejam  $(U_\alpha, V_\alpha, z_\alpha)$  uma coordenada local de  $M$ ,  $D \subset V_\alpha$  uma região  $C^1$  por partes de  $\mathbb{C}$ , a curvatura total de  $S_D = X(z_\alpha^{-1}(D))$  é  $C(S_D) = \int \int_D K \lambda^2 dudv$ .

Como  $K \lambda^2 = - \left( \frac{2|g'|}{(1 + |g|^2)^2} \right)^2$  e

$$\text{Área}(N(S_D)) = \int \int_D dA = \int \int_D \|N_u \times N_v\| dudv = \int \int_D \left( \frac{2|g'|}{(1 + |g|^2)^2} \right)^2 dudv,$$

onde  $dA$  é o elemento de área de  $S^2(1)$ . Então,  $C(S_D) = -\text{Área}(N_D)$ .

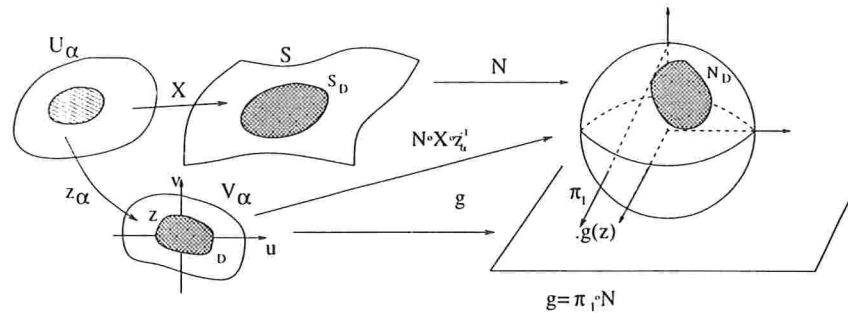


Figura 1.17

## 1.5.2 Resultados Globais sobre Superfícies Mínimas

Na subseção anterior estudamos algumas propriedades locais de imersão conforme. Agora resumiremos resultados que nos permitirão estudar superfícies mínimas globalmente, dando-nos uma ferramenta importante na construção de exemplos.

**Definição 1.5.12** 1) *Um curva diferenciável  $\gamma = X \circ \alpha : [0, 1) \rightarrow S$  é chamada divergente, se para qualquer subconjunto compacto  $\mathcal{Q}$  de  $M$ , existe  $t_0 \in [0, 1)$  tal que  $\alpha(t) \notin \mathcal{Q}$  para  $t > t_0$ .*

2) *O comprimento da curva  $\alpha : [0, 1) \rightarrow M$  é dada por:*

$$\text{comp}(\alpha) = \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \|\alpha'(t)\| dt$$

**Definição 1.5.13** *Uma superfície  $S = X(M)$  é completa, se toda curva divergente de  $M$ , tem comprimento infinito.*

A representação de Weierstrass local de acordo com 1.26 e 1.29, também podem ser definidas em termos globais sobre  $M$ . Já vimos que em 1.23

$$\phi_j^\alpha(z) = 2 \left( \frac{\partial}{\partial z} (x_j \circ z_\alpha^{-1})(z) \right) dz_\alpha, \quad j = 1, 2, 3$$

definem 1-formas diferenciais holomorfas globalmente em  $M$ , que chamaremos de  $\phi_j(z)$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

No que segue,

$$\Phi(z) := (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \left( \frac{1}{2}(1 - g^2)\eta, \frac{i}{2}(1 + g^2)\eta, g\eta \right)$$

As demonstrações dos dois teoremas abaixo podem ser encontradas, por exemplo, em [19].

**Teorema 1.5.14** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana de dimensão 2 conexa, orientada, completa, com curvatura Gaussiana  $K \leq 0$  e curvatura total  $C(S) > -\infty$ . Existe uma variedade compacta  $\overline{M}$  de dimensão 2, e um número finito de pontos  $P_1, \dots, P_N$  sobre  $\overline{M}$ , tais que  $M$  é isométrica a  $\overline{M} \setminus \{P_1, \dots, P_N\}$ .*

**Teorema 1.5.15** *Seja  $S$  uma superfície mínima regular completa, definida por  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Se a curvatura total de  $S$  é finita, então existe uma superfície de Riemann compacta  $\overline{M}$ , um número finito de pontos  $P_1, \dots, P_N$  de  $\overline{M}$ , tal que  $M$  é conformemente equivalente à  $\overline{M} \setminus \{P_1, P_2, \dots, P_N\}$ . Além disso a função  $g : M \rightarrow \mathbb{C}$  se estende meromorficamente sobre  $\overline{M}$ .*

A função  $g : \overline{M} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  é holomorfa. Pelo teorema 1.1.6  $g$  é sobrejetora, e cada valor de  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  é assumido um número fixo de vezes, digamos  $m$ . Este número é o grau de  $g$ .

**Definição 1.5.16** *Seja  $M$  uma superfície de Riemann completa conformemente equivalente a uma superfície de Riemann compacta  $\overline{M}$  de gênero  $p$ , menos um número finito de pontos  $P_1, P_2, \dots, P_N$ . Dizemos que  $M$  é de gênero  $p$  com  $N$  fins.*

Sejam  $F_j := X(D_j \setminus \{P_j\})$ ,  $j = 1, \dots, N$  os fins da imersão  $X : \overline{M} \setminus \{P_1, \dots, P_N\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  que define uma superfície completa  $S = X(M)$ , onde  $D_j \setminus \{P_j\}$  é um disco topológico de  $M$  perfurado em  $P_j$ , conforme a um disco perfurado de  $\mathbb{C}$ . Podemos dar um significado geométrico para as ordens  $k_\nu$  dos fins de  $S$ . Nesse sentido, temos:

**Teorema 1.5.17** *Seja  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão completa, onde  $M$  é conformemente equivalente a uma superfície compacta menos um número finito de pontos, ou seja,  $M$  é conformemente equivalente a  $\overline{M} \setminus \{P_1, P_2, \dots, P_N\}$ . Se a aplicação normal de Gauss se estende continuamente a  $\overline{M}$ , temos:*

(i)  $X$  é imersão própria.

(ii) Para  $r$  suficientemente grande,  $\frac{1}{r}(X(M) \cap S^2(r)) \subset S^2(1)$ , onde  $S^2(r) = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = r\}$  consiste de  $N$  curvas fechadas  $\{\gamma_1^r, \gamma_2^r, \dots, \gamma_N^r\}$  imersas em  $S^2(1)$ .

(iii) Quando  $r \rightarrow \infty$ ,  $\gamma_j^r$  converge  $C^1$  à uma geodésica com multiplicidade em  $S^2(1)$ .

(iv) Se  $X$  é uma imersão mínima, a convergência descrita no ítem (iii) é de classe  $C^\infty$

**Demonstração:** ver [4] pag. 88.

**Proposição 1.5.18** *Seja  $S = X(M)$  uma superfície mínima completa em  $\mathbb{R}^3$ . Então a curvatura total de  $S$  é dada por:  $C(S) = -4\pi \cdot \text{grau}(g)$ , ou  $C(S) = -\infty$ .*

**Teorema 1.5.19** *(Jorge-Meeks-Gackstätter) Seja  $S$  uma superfície mínima completa do  $\mathbb{R}^3$  com gênero  $p$ , curvatura total finita  $C(S)$ , definida pela imersão  $X : \overline{M} \setminus \{P_1, \dots, P_N\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Sejam  $F_j$  os fins de  $X$ , associados a  $P_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  e  $\Gamma_r^j = \frac{1}{r}F_j \cap S^2(r) \subset S^2(1)$ , como no teorema 1.5.17, convergindo  $C^\infty$  para a geodésica  $\gamma_j$  de  $S^2(1)$  com multiplicidade  $k_\nu$ , quando  $r$  tende para o infinito. Então*

vale:

(i)  $C(S) = 2\pi(\chi - \sum_{\nu=1}^N k_\nu)$  ou equivalentemente  $2m = 2p - 2 + \sum_{\nu=1}^N (k_\nu + 1)$ , onde  $m$  é o grau de  $g$  e  $\chi = 2 - 2p - N$ .

ii)  $F_j$  é mergulhado se, e somente se  $k_\nu = 1$ . Isto é,  $C(S) = 2\pi(\chi - N)$  se e só se os fins da imersão são mergulhados.

**Demonstração:** ver [13] ou [8]

Agora se  $m_\nu, \nu = 1, \dots, N$  são as ordens dos polos de  $\eta(z) = f(z)dz$  em  $P_j$ , temos a proposição:

**Proposição 1.5.20** *Seja  $F_j$  um fim correspondente à  $P_j, j = 1, \dots, N$ , da imersão  $X$  de uma superfície mínima completa  $S$  de curvatura total finita. Se  $(g, \eta)$  é uma representação de Weierstrass de  $S$ , tal que  $g(P_j) = 0$ , temos que  $F_j$  é mergulhada se, e somente se  $\eta$  tem um polo de ordem 2 em  $P_j$ . Em geral se  $\eta$  tem um polo de ordem  $m_\nu \geq 2$  em  $P_j$ , então  $k_\nu = m_\nu - 1$ .*

**Demonstração:** ver [4]

O teorema que enunciaremos abaixo contém os passos fundamentais, os quais seguirei, para a demonstração de existência dos exemplos de superfícies mínimas contidas neste trabalho.

**Teorema 1.5.21** *(Teorema de Huber-Osserman) Sobre uma superfície de Riemann compacta  $\overline{M}$  de gênero  $p$ , sejam  $g$  uma função meromorfa e  $\eta$  uma diferencial meromorfa. Sejam  $P_1, P_2, \dots, P_N$  pontos de  $\overline{M}$  e  $M$  conformemente equivalente a  $\overline{M} \setminus \{P_1, P_2, \dots, P_N\}$ .*

*Sejam  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  diferenciais holomorfas sobre  $M$  definidas por:*

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - g^2)\eta, \quad \phi_2 = \frac{i}{2}(1 + g^2)\eta, \quad \phi_3 = g\eta$$

*e a função  $X = (x_1, x_2, x_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde*

$$x_j = \operatorname{Re} \left\{ \int_{z_0}^z \phi_j \right\}, \quad j = 1, 2, 3, \quad z_0, z \in M, \quad z_0 \text{ fixado} \quad e$$

$$X(z) = \left( \operatorname{Re} \left\{ \int_{z_0}^z \frac{1}{2}(1 - g^2)\eta \right\}, \operatorname{Re} \left\{ \int_{z_0}^z \frac{i}{2}(1 + g^2)\eta \right\}, \operatorname{Re} \left\{ \int_{z_0}^z g\eta \right\} \right) \quad (1.34)$$

Então, se as condições  $\mathbf{c}_1$ ,  $\mathbf{c}_2$ ,  $\mathbf{c}_3$  e  $\mathbf{c}_4$  abaixo são verificadas,  $X$  é uma imersão mínima completa em  $\mathbb{R}^3$  de uma superfície de gênero  $p$  e  $N$  fins com curvatura total finita. Sob estas condições o par  $(g, \eta)$  é chamado representação de Weierstrass da imersão.

( $\mathbf{c}_1$ )  $\eta$  é holomorfa em  $M$ . Os zeros de  $\eta$  em  $M$  coincidem com os polos de  $g$  em  $M$ . Além disso,  $P \in M$  é um polo de ordem  $m$  de  $g$  se e somente se  $P$  é um zero de ordem  $2m$  de  $\eta$ .

( $\mathbf{c}_2$ ) Se  $\alpha$  é uma curva fechada em  $M$  e não trivial na homologia de  $\overline{M}$ , então  $\operatorname{Re} \left\{ \int_{\alpha} \phi_j \right\} = 0$ ,  $\forall j = 1, 2, 3$ .

( $\mathbf{c}_3$ ) Os resíduos de  $\phi_j$  em  $P_k$  são reais, isto é,  $\operatorname{Res}(\phi_j, P_k) \in \mathbb{R} \quad \forall j = 1, 2, 3$  e  $k = 1, 2, \dots, N$ . Ou equivalentemente,

$$\operatorname{Res}(g\eta; P_k) \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \overline{\operatorname{Res}(\eta, P_k)} + \operatorname{Res}(g^2\eta; P_k) = 0$$

( $\mathbf{c}_4$ ) Toda curva divergente  $\gamma$  em  $M$  possui comprimento infinito. Como a métrica é:

$$ds^2 = \left[ \frac{1}{2}(1 + |g|^2)|\eta| \right]^2, \quad \text{se } \eta = f dz \text{ temos}$$

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} ds = \frac{1}{2} \int_{\gamma} |f|(1 + |g|^2)|dz| = \infty.$$



## Capítulo 2

# Superfície Mínima de Chen–Gackstätter de Gênero 1

Neste capítulo será demonstrado que existe uma superfície mínima completa do  $\mathbb{R}^3$  com gênero um e curvatura total finita  $-8\pi$ . Na primeira seção exporemos resultados importantes, usados no decorrer na demonstração do teorema principal do capítulo, enunciado na segunda seção.

### 2.1 Fórmulas de $\wp$ e $\zeta$ no quadrado $[0, 1, 1 + i, i]$

**Lema 2.1.1** *No paralelogramo fundamental periódico  $F$  mais simétrico possível o quadrado de vértices  $[0, 1, 1 + i, i]$ , as funções  $\wp(z)$  e  $\zeta(z)$  são dadas explicitamente por:*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}} \left\{ \frac{1}{(z - m - ni)^2} - \frac{1}{(m + ni)^2} \right\}$$

e

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}} \left\{ \frac{1}{(z - m - ni)} + \frac{1}{(m + ni)} + \frac{z}{(m + ni)^2} \right\}$$

Valem as seguintes igualdades:



$$(i) \wp(1/2) + \wp(i/2) = e_1 + e_3 = 0 \Rightarrow e_1 = -e_3 \in \mathbb{R}$$

$$(ii) e_2 = g_3 = 0$$

$$(iii) g_2 = 4e_1^2 > 0$$

$$(iv) \wp'(z)^2 = 4\wp(z)(\wp^2(z) - e_1^2)$$

$$(v) \wp''(z) = 6\wp^2(z) - \frac{1}{2}g_2.$$

**Demonstração:**

Para provar o ítem (i), vamos calcular  $\wp(1/2)$  e  $\wp(i/2)$ . Primeiro

$$\begin{aligned} \wp(1/2) &= \frac{1}{(1/2)^2} + \sum_{w \neq 0} \left\{ \frac{1}{(1/2 - m - ni)^2} - \frac{1}{(m + ni)^2} \right\} \\ &= 4 + \sum_{w \neq 0} \left\{ \frac{4}{(1 - 2(m + ni))^2} - \frac{1}{(m + ni)^2} \right\} \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \wp(i/2) &= \frac{1}{(i/2)^2} + \sum_{w \neq 0} \left\{ \frac{1}{(i/2 - (m + ni))^2} - \frac{1}{(m + ni)^2} \right\} \\ &= -4 + \sum_{w \neq 0} \left\{ \frac{4}{(i - 2(m + ni))^2} - \frac{1}{(m + ni)^2} \right\} \\ &= -4 + \sum_{w \neq 0} \left\{ \frac{4}{i^2(1 - 2(-im + n))^2} - \frac{1}{i^2(-im + n)^2} \right\} \\ &= -4 + \sum_{w \neq 0} \left\{ \frac{-4}{(1 - 2(-im + n))^2} + \frac{1}{(-im + n)^2} \right\} \\ &= - \left( 4 + \sum_{w \neq 0} \left\{ \frac{1}{(1 - 2(-im + n))^2} - \frac{1}{(-im + n)^2} \right\} \right) \end{aligned}$$

cuja soma que aqui aparece, difere da soma de  $\wp(1/2)$  somente na ordem de seus termos. Como estas séries são absolutamente convergentes, fazendo um rearranjo dos termos,  $w' = -im + n$  para  $w = m + in$ , não alteramos o valor da soma.

Segue que  $\wp(i/2) = -\wp(1/2)$ , logo  $\wp(1/2) + \wp(i/2) = e_1 + e_3 = 0$ .

(ii) Pelo ítem (i) do corolário 1.4.13,  $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ , então usando (i) temos  $e_2 = 0$ . Como  $g_3/4 = e_1 \cdot e_2 \cdot e_3$ , então  $g_3 = 0$ .

(iii) Do ítem (ii) do corolário 1.4.13, temos  $e_1 \cdot e_2 + e_2 \cdot e_3 + e_1 \cdot e_3 = -g_2/4$ , usando (i),  $e_3 = -e_1$ ,  $-e_1^2 = -g_2/4 \Rightarrow g_2 = 4e_1^2 > 0$ .

(iv) Vimos que

$$\begin{aligned}\wp'^2(z) &= 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3) \\ &= 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_3)\wp(z) \\ &= 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) + e_1)\wp(z) = 4(\wp^2(z) - e_1^2)\wp(z) \\ &= 4\wp(z)(\wp^2(z) - g_2/4) = \wp(z)(4\wp^2(z) - g_2)\end{aligned}$$

(v) De 1.13, temos

$$\wp''(z) = \frac{6}{z^4} + 6G_4 + 60G_6z^2 + \dots$$

e de 1.12, segue

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + \dots$$

Logo,

$$6\wp^2 - \frac{1}{2}g_2 = \frac{6}{z^4} + 6G_4 + 60G_6z^2 + \dots$$

■

**Lema 2.1.2** Para todo  $z \in F$  como no lema 2.1.1, temos:

(i)  $\wp(z - \frac{1}{2}) - \wp(z - \frac{i}{2}) - 2 \cdot e_1 = 16 \cdot e_1^3 \cdot \frac{\wp(z)}{\wp'(z)}$

(ii)  $i\zeta(iz) = \zeta(z)$

(iii)  $\zeta(1/2) = i\zeta(i/2) = \pi/2$

(iv)  $\zeta(\frac{1+i}{2}) = \frac{(1-i)\pi}{2}$ .

**Demonstração:**

Para provar (i), usaremos a fórmula da adição para  $\wp(z)$ ,

$$\wp(z + z_0) + \wp(z) + \wp(z_0) = \frac{1}{4} \left[ \frac{\wp'(z) - \wp'(z_0)}{\wp(z) - \wp(z_0)} \right]^2. \quad (2.1)$$

Substituindo  $z_0 = -1/2$  em 2.1, temos

$$\wp\left(z - \frac{1}{2}\right) + \wp(z) + \wp\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \left[ \frac{\wp'(z) - \wp'(-\frac{1}{2})}{\wp(z) - \wp(-\frac{1}{2})} \right]^2.$$

$$\wp\left(z - \frac{1}{2}\right) + \wp(z) + e_1 = \frac{1}{4} \left[ \frac{\wp'(z)}{\wp(z) - e_1} \right]^2$$

$$\wp\left(z - \frac{1}{2}\right) + \wp(z) + e_1 = \frac{\wp'^2(z)}{4(\wp(z) - e_1)^2}$$

Pelo ítem (iv) do Lema 2.1.1, temos

$$\wp\left(z - \frac{1}{2}\right) + \wp(z) + e_1 = 4\wp(z) \frac{(\wp^2(z) - e_1^2)}{4(\wp(z) - e_1)^2}$$

$$\wp\left(z - \frac{1}{2}\right) + \wp(z) + e_1 = \wp(z) \frac{\wp(z) + e_1}{\wp(z) - e_1}$$

Donde segue,

$$\wp\left(z - \frac{1}{2}\right) = \frac{\wp(z)e_1 + e_1^2}{\wp(z) - e_1} \quad (2.2)$$

Agora substituindo  $z_0 = -i/2$  em 2.1,

$$\wp(z - i/2) = \frac{1}{4} \left[ \frac{\wp'(z) - \wp'(-i/2)}{\wp(z) - \wp(-i/2)} \right]^2 - \wp(z) - \wp(-i/2)$$

$$= \frac{\wp'(z)^2}{4(\wp(z) - e_3)^2} - \wp(z) - e_3$$

$$= \frac{4\wp(z)(\wp(z) + e_1)(\wp(z) - e_1)}{4(\wp(z) + e_1)^2} - (\wp(z) + e_3)$$

$$= \frac{\wp(z)(\wp(z) - e_1) - (\wp^2(z) - e_1^2)}{\wp(z) + e_1}$$

$$= \frac{\wp^2(z) - \wp(z)e_1 - \wp^2(z) + e_1^2}{\wp(z) + e_1} = \frac{e_1^2 - \wp(z)e_1}{\wp(z) + e_1}$$

$$\wp\left(z - \frac{i}{2}\right) = \frac{e_1^2 - \wp(z)e_1}{\wp(z) + e_1} \quad (2.3)$$

Então, de 2.2 e 2.3, temos

$$\wp\left(z - \frac{1}{2}\right) - \wp\left(z - \frac{i}{2}\right) - 2e_1 = \frac{\wp(z)e_1 + e_1^2}{\wp(z) - e_1} + \frac{\wp(z)e_1 - e_1^2}{\wp(z) + e_1} - 2e_1$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e_1(\wp(z) + e_1)^2 + e_1(\wp(z) - e_1)^2 - 2e_1(\wp^2(z) - e_1^2)}{(\wp(z) - e_1)(\wp(z) + e_1)} \\
&= \frac{2e_1\wp^2(z) + 2e_1^3 - 2e_1\wp^2(z) + 2e_1^3}{\wp^2(z) - e_1^2} = \frac{4e_1^3}{\wp^2(z) - e_1^2} \\
&= \frac{4e_1^3}{\frac{\wp'(z)}{4\wp(z)}} = 16e_1^3 \frac{\wp(z)}{\wp'^2(z)}
\end{aligned}$$

(ii) De

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{w \neq 0} \left\{ \frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} \right\}.$$

Obtemos,

$$\begin{aligned}
\zeta(iz) &= \frac{1}{iz} + \sum_{w \neq 0} \left\{ \frac{1}{iz-w} + \frac{1}{w} + \frac{iz}{w^2} \right\} \\
\zeta(iz) &= \frac{-i}{z} + \sum_{w \neq 0} \left\{ \frac{-i}{z-(-iw)} - \frac{i}{-iw} + \frac{(-i)^2 \cdot iz}{(-i)^2 \cdot w^2} \right\} \\
\zeta(iz) &= \frac{-i}{z} + \sum_{w \neq 0} \left\{ \frac{-i}{z-(-iw)} - \frac{i}{-iw} + \frac{-iz}{(-iw)^2} \right\} \\
\zeta(iz) &= -i \left( \frac{1}{z} + \sum_{w \neq 0} \left\{ \frac{1}{z-(-iw)} + \frac{1}{-iw} + \frac{z}{(-iw)^2} \right\} \right)
\end{aligned}$$

Por um rearranjo nos termos da soma em  $-iw$  para  $w$ , temos que  $\zeta(iz) = -i\zeta(z)$ , logo  $i\zeta(iz) = \zeta(z)$ .

(iii) Como  $\eta_1 = \zeta(w_1/2)$  e  $\eta_2 = \zeta(w_2/2)$ , fazendo  $z = 1/2$  em (ii),  $i\zeta(i/2) = \zeta(1/2)$  e sabendo que  $\eta_1 w_2 - \eta_2 w_1 = \pi i$ , e como  $w_1 = 1$  e  $w_2 = i$ , temos que

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right) \cdot i - \zeta\left(\frac{i}{2}\right) \cdot 1 = \pi i \Rightarrow i^2 \zeta\left(\frac{i}{2}\right) - \zeta\left(\frac{i}{2}\right) = \pi i \Rightarrow -2\zeta\left(\frac{i}{2}\right) = \pi i \Rightarrow i\zeta\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Portanto,

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = i\zeta\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

(iv) Como,

$$\zeta\left(z + \frac{w_1}{2}\right) = \zeta\left(z - \frac{w_1}{2}\right) + 2\zeta\left(\frac{w_1}{2}\right) \quad e$$

$$\zeta\left(z + \frac{w_2}{2}\right) = \zeta\left(z - \frac{w_2}{2}\right) + 2\zeta\left(\frac{w_2}{2}\right).$$

Pondo,  $z = \frac{w_2}{2}$  e  $z = \frac{w_1}{2}$ , respectivamente, na primeira e segunda equação acima. Temos:

$$\zeta\left(\frac{w_2}{2} + \frac{w_1}{2}\right) = \zeta\left(\frac{w_2}{2}\right) + \zeta\left(\frac{w_1}{2}\right) \Rightarrow \zeta\left(\frac{1+i}{2}\right) = \zeta\left(\frac{1}{2}\right) + \zeta\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{(1-i)\pi}{2}.$$

■

## 2.2 Exemplo de Chen–Gackstätter de gênero 1

Do teorema 1.1.4 segue que qualquer superfície de Riemann compacta de gênero 1, pode ser representada, a menos de equivalência conforme, por  $\mathbf{C}/L(1, \tau)$  onde  $\tau \in FM$  que denotaremos por  $\overline{R}_{(1, \tau)}$ . Quando  $\tau = i$ , o paralelogramo fundamental,  $F$ , é simplesmente o quadrado de vértices  $[0, 1, 1 + i, i]$ , portanto, a superfície de Riemann mais simétrica de gênero 1 é  $\overline{R}_{(1, i)}$ .

A idéia da construção que será feita no teorema abaixo, consiste em construir uma superfície mínima  $S$ , completa, com curvatura total finita, conformemente equivalente a uma superfície de Riemann compacta menos um ponto,  $\overline{R}_{(1, i)} \setminus \{0\}$ . Para tal usaremos a teoria das funções elípticas abordada no capítulo 1 e o teorema 1.5.21.

Quando o valor absoluto da curvatura total de uma superfície é grande, sua geometria se torna difícil. Logo, é interessante construir exemplos com  $|C(S)|$  tão pequeno quanto possível para gênero  $p$  fixo.

A fórmula,

$$C(S) = 2\pi(2 - 2p - N - \sum_{\nu=1}^N k_\nu)$$

do teorema 1.5.19, nos dá algumas informações:

$C(S)$	$p$	$N$	$\kappa_\nu$	Classificação	Existência
$-4\pi$	0	1	$\kappa_1 = 3$	superfície de Enneper	somente essas
		2	$\kappa_1 = \kappa_2 = 1$	Catenóide	
$-8\pi$	1	1	$\kappa_1 = 3$	tipo Enneper com uma alça	existe
		2	$\kappa_1 = \kappa_2 = 1$	tipo Catenóide com uma alça	não existe
$-12\pi$	2	1	$\kappa_1 = 3$	tipo Enneper com duas alças	existe
		2	$\kappa_1 = \kappa_2 = 1$	tipo Catenóide com duas alças	não existe
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	
$-4(p+1)\pi$	$p$	1	$\kappa_1 = 3$	tipo Enneper com $p$ alças	existe
		2	$\kappa_1 = \kappa_2 = 1$	tipo Catenóide com $p$ alças	não existe

**Observações:**

- (1) Osserman em [19], classificou as superfícies, Catenóide e Enneper, como as únicas superfícies mínimas completas orientadas de curvatura total  $-4\pi$ .
- (2) Em [16], Francisco J. López classificou totalmente as superfícies mínimas completas orientadas, com curvatura total  $-8\pi$ . Mais precisamente se  $S$  tem as propriedades acima, então  $S$  é uma das seguintes superfícies: Um plano, um Catenóide, a superfície de Enneper, as superfícies descritas em [16] nos teoremas 3, 4, 5 e 6 (superfícies mínimas de gênero 0 e curvatura total  $-8\pi$ ) ou a Superfície de Chen–Gackstätter dada no teorema 2.2.1 abaixo.
- (3) Ainda em [16], López provou que a superfície de Chen–Gackstätter dada no teorema 2.2.1 abaixo, é a única superfície mínima completa, orientada, de gênero 1 e com curvatura total  $-8\pi$ .
- (4) No capítulo 3 deste trabalho, trataremos do segundo exemplo de Chen–Gackstätter, que é uma superfície mínima de gênero 2, completa, orientada com curvatura total  $-12\pi$ , com um fim do tipo Enneper. López, Martín e Rodríguez em [17] provaram que esta superfície é única.
- (5) Richard M. Schoen, provou em [22] nas proposições 1 e teorema 3, que se  $S$  é uma superfície mínima completa do  $\mathbb{R}^3$ , com curvatura total finita e com 2 fins mergulhados, então  $S$  é o catenóide, ou um par de planos paralelos.



(6) É possível construir um exemplo do tipo Enneper com mais de duas alças, imergindo em  $\mathbb{R}^3$  uma superfície de Riemann hiperelíptica menos um ponto?.

No caso  $p = 3$  a resposta é afirmativa e a solução do problema se encontra em [6], e para  $p > 3$  ver [25].

(7) Seria interessante construir uma superfície mínima completa mergulhada de gênero 1. Celso Costa mostrou em [3] que existe uma constante  $C = 2e_1\sqrt{2\pi}$  tal que a escolha para o par  $(g, \eta)$ , com  $g = \frac{C}{\wp}$  e  $\eta = \wp dz$  é a representação de Weierstrass de uma superfície mínima completa  $S$  de gênero 1 com curvatura total  $C(S) = -12\pi$  em  $\mathbb{R}^3$ , com três fins mergulhados. Hoffman e Meeks em [12] deram uma prova analítica de que tal superfície é mergulhada .

**Teorema 2.2.1** (Chen–Gackstätter 1) *Existe uma superfície mínima completa  $S = X(R_{(1,i)})$  com gênero  $p = 1$ , curvatura total finita  $C(S) = -8\pi$ , um fim de ordem 3, a qual é uma superfície de tipo Enneper com uma alça, onde:*

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{(1,i)} = \overline{R}_{(1,i)} \setminus \{0\} \\ g(z) = A \frac{\wp'(z)}{\wp(z)}, \quad A = \sqrt{\frac{3\pi}{2g_2}} \\ \eta(z) = 2\wp(z)dz \end{array} \right.$$

**Demonstração:**

Precisamos provar que o par  $(g, \eta)$  é a *representação de Weierstrass* de uma imersão,

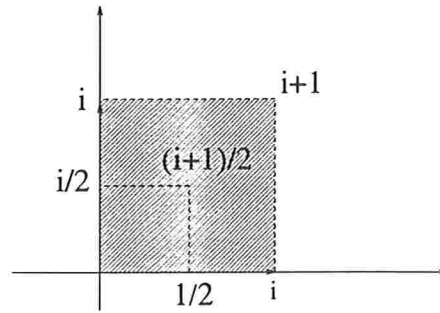
$$X = (x_1, x_2, x_3) : R_{(1,i)} = \overline{R}_{(1,i)} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

com as propriedades exigidas. Para isso mostraremos que o par  $(g, \eta)$  satisfaz as condições  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$  e  $\mathbf{c}_4$  do Teorema 1.5.21

**Demonstração de  $\mathbf{c}_1$  :**

Pela definição de  $\wp(z)$  já vimos que seus polos de ordem 2 pertencem ao reticulado  $L(1, i)$ . Porém, em  $R_{(1,i)} = \overline{R}_{(1,i)} \setminus \{0\}$ ,  $\wp(z)$  é holomorfa em todos os pontos, pois

neste caso estão fora as singularidades:  $0, 1, 1 + i, i$ . Logo,  $\eta = 2\wp(z)dz$  é holomorfa em  $R_{(1,i)}$ . Veja figura 2.1



**Figura 2.1**

Agora do lema (2.1.1) ítem (ii), temos que  $\wp(\frac{1+i}{2}) = e_2 = 0$ , e então  $z_0 = (1+i)/2$  é um zero duplo de  $\wp$ , já que  $\wp'(\frac{1+i}{2}) = e_2 = 0$ . Como a soma das ordens dos zeros menos a soma das ordens dos polos é igual a zero, e o único polo em  $\overline{R_{(1,i)}} \setminus \{0\}$  é o zero, concluímos que  $z_0 = (1+i)/2$  é o único zero duplo de  $\eta = 2\wp(z)dz$  em  $R_{(1,i)}$ . Por outro lado,  $g = A \frac{\wp'(z)}{\wp}$  é uma função elíptica em  $L(1, i)$  e tem um polo simples em  $R_{(1,i)}$ , pois em  $z_0 = (1+i)/2$ ,  $\wp'$  assume um zero simples e  $\wp$  um zero duplo. Portanto  $z_0$  é um polo simples de  $g$ . Segue que  $\mathbf{c}_1$  é satisfeita.

Antes de mostrar  $\mathbf{c}_2$ , observemos a seguinte tabela:

$z$	$0$	$\frac{1+i}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{i}{2}$
$\eta = 2\wp(z)dz$	$\infty^2$	$0^2$	$2e_1$	$-2e_1$
$g = A \frac{\wp'}{\wp}$	$\infty$	$\infty$	$0$	$0$
S	fim de ordem $k_1=3$	ponto regular	ponto regular	ponto regular

Em  $z = 0$ ,  $\wp$  tem um polo de ordem 2, então  $\eta$  tem um polo de ordem 2 e  $g$  tem um polo simples, pois  $\wp'$  tem um polo de ordem 3. É fácil ver que  $g$  e  $\eta$  tem os valores dados na quarta e quinta coluna da tabela.

Observamos que a função meromorfa  $g : R_{(1,i)} \rightarrow \mathbb{C}$ , estende-se holomorficamente para  $g : \overline{R_{(1,i)}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}_w}$ , e o seu grau é dois 2. Para provar isto basta usar

o fato de que toda função elíptica de grau 2, assume qualquer valor duas vezes no paralelogramo fundamental e que o grau de uma função elíptica é a soma das ordens de seus polos (ou zeros) em  $\overline{R}_{(1,i)}$ .

Observe na tabela acima, que os polos simples de  $g$  são  $z = 0$  e  $z = \frac{1+i}{2}$ . Logo  $\text{grau}(g) = 2$  e  $C(S) = -4\pi \cdot \text{grau}(g) = -8\pi$ .

Da fórmula de Jorge-Meeks,

$$C(S) = 2\pi \left( \chi - \sum_{\nu=1}^N k_{\nu} \right);$$

para  $N = 1$ ,  $p = 1$  e  $\chi = 2 - 2p - N = -1$ , temos

$$-8\pi = 2\pi(-1 - k_1) \text{ e então, } k_1 = 3.$$

Logo o fim não é mergulhado.

### Demonstração de $c_2$ :

Precisamos mostrar que se  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  é uma curva fechada em  $R_{(1,i)}$  e não trivial na homologia de  $\overline{R}_{(1,i)}$  (i.e.  $\alpha$  não é homotópica a zero), então  $\text{Re} \left\{ \int_{\alpha} \phi_j \right\} = 0$ ,  $\forall j = 1, 2, 3$ .

Usando as fórmulas de Weierstrass;

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{1}{2}(1 - g^2)\eta \\ \phi_2 = \frac{i}{2}(1 + g^2)\eta \\ \phi_3 = g\eta \end{cases}$$

com  $\eta = 2\wp dz$  e  $g = A \frac{\wp'}{\wp}$ , podemos expressar  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  em termos de  $\wp, \wp', \wp''$  e  $g_2$ .

$$\phi_1 = \frac{1}{2} 2\wp \left( 1 - \left( A \frac{\wp'}{\wp} \right)^2 \right) dz = \wp \left( 1 - A^2 \frac{\wp'^2}{\wp^2} \right) dz$$

Pelos itens (iv) e (v) do lema (2.1.1),  $\wp'^2 = 4\wp(\wp^2 - e_1^2)$ ,  $\wp'' = 6\wp^2 - \frac{1}{2}g_2$ .

$$\phi_1 = \wp \left( 1 - A^2 \frac{4\wp(\wp^2 - e_1^2)}{\wp^2} \right) dz = \wp \left( 1 - 4A^2 \frac{\wp^2 - e_1^2}{\wp} \right) dz$$

$$\phi_1 = (\wp - 4A^2(\wp^2 - e_1^2)) dz, \quad \text{mas } \wp^2 = \frac{\wp''}{6} + \frac{1}{12}g_2 \text{ e } e_1^2 = \frac{1}{4}g_2$$

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \left( \wp - 4A^2 \left( \frac{\wp''}{6} + \frac{1}{12}g_2 - \frac{1}{4}g_2 \right) \right) dz = \left( \wp - \frac{2}{3}A^2\wp'' + \frac{2}{3}A^2g_2 \right) dz \\ \phi_2 &= \frac{i}{2}2\wp \left( 1 + A^2\frac{\wp'^2}{\wp^2} \right) dz = i\wp \left( 1 + A^24\frac{\wp(\wp^2 - \frac{1}{4}g_2)}{\wp^2} \right) dz \\ \phi_2 &= \left( i\wp + iA^24 \left( \wp^2 - \frac{1}{4}g_2 \right) \right) dz = \left( i\wp + iA^24 \left( \frac{\wp''}{6} + \frac{1}{12}g_2 - \frac{1}{4}g_2 \right) \right) dz \\ \phi_2 &= \left( i\wp + 4iA^2\frac{\wp''}{6} - i\frac{8}{12}g_2A^2 \right) dz = \left( i\wp + \frac{2i}{3}A^2\wp'' - \frac{2i}{3}A^2g_2 \right) dz \\ \phi_3 &= g\eta = 2\wp A \frac{\wp'}{\wp} dz = 2A\wp' dz \end{aligned}$$

Sejam  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  curvas, definidas por:  $\alpha(t) = \frac{i}{2} + t$ ,  $t \in [0, 1]$  e  $\beta(t) = \frac{1}{2} + it$ ,  $t \in [0, 1]$ , cujas imagens pela projeção estão em  $\bar{R}_{(1,i)}$ . São duas curvas fechadas em  $R_{(1,i)}$  e não triviais na homologia de  $\bar{R}_{(1,i)}$  veja figura 2.2. Já que  $\bar{R}_{(1,i)}$  é homeomorfo a  $S^1 \times S^1$  e como o grupo fundamental  $\pi_1(S^1 \times S^1) = \pi_1(S^1) \oplus \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , temos  $\pi_1(\bar{R}_{(1,i)}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , pois  $\pi_1$  é um invariante topológico. Além disso,  $H_1(\bar{R}_{(1,i)}) = \pi_1(\bar{R}_{(1,i)})/[,]$ , onde  $[,]$  é o comutador de  $\pi_1$  que neste caso é abeliano. Logo,  $H_1(\bar{R}_{(1,i)}) = \pi_1(\bar{R}_{(1,i)}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Portanto, toda curva fechada  $\gamma$  em  $R_{(1,i)}$  é gerado por  $\{\alpha, \beta\}$ . Então, o período de  $\gamma$  fica completamente determinado calculando os períodos de  $\alpha$  e  $\beta$ , pois

$$\int_{\gamma} \phi_j(z) = m \int_{\alpha} \phi_j(z) + n \int_{\beta} \phi_j(z), \text{ onde } j = 1, 2, 3 \text{ e } m, n \in \mathbb{Z}$$

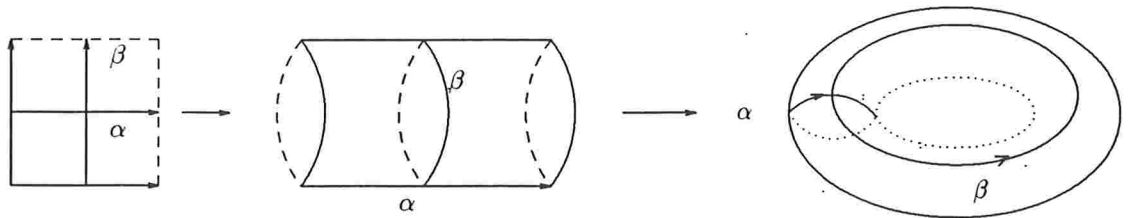


Figura 2.2

Vamos calcular agora o primeiro período de  $\phi_1$  em  $R_{(1,i)}$

$$\begin{aligned}\int_{\alpha} \phi_1(z) &= \int_{\alpha} \left( \wp - \frac{2}{3}A^2\wp'' + \frac{2}{3}A^2g_2 \right) dz \\ \int_{\alpha} \phi_1(z) &= \int_{\alpha} \wp(z)dz - \frac{2}{3}A^2 \int_{\alpha} \wp''(z)dz + \frac{2}{3}A^2g_2 \int_{\alpha} dz \\ &= [-\zeta(z)]_{\alpha(0)}^{\alpha(1)} - \frac{2}{3}A^2 [\wp'(z)]_{\alpha(0)}^{\alpha(1)} + \frac{2}{3}A^2g_2 [z]_{\alpha(0)}^{\alpha(1)} \\ &= -[\zeta(z)]_{\frac{i}{2}}^{\frac{i}{2}+1} - \frac{2}{3}A^2 [\wp'(z)]_{\frac{i}{2}}^{\frac{i}{2}+1} + \frac{2}{3}A^2g_2 [z]_{\frac{i}{2}}^{\frac{i}{2}+1}\end{aligned}$$

Então,

$$\int_{\alpha} \phi_1 = - \left( \zeta \left( \frac{i}{2} + 1 \right) - \zeta \left( \frac{i}{2} \right) \right) - \frac{2}{3}A^2 \left( \wp' \left( \frac{i}{2} + 1 \right) - \wp' \left( \frac{i}{2} \right) \right) + \frac{2}{3}A^2g_2 \left( \frac{i}{2} + 1 - \frac{i}{2} \right).$$

Como,  $\wp'(i/2 + 1) = \wp'(i/2) = 0$ , então:

$$\int_{\alpha} \phi_1(z) = \zeta \left( \frac{i}{2} \right) - \zeta \left( \frac{i}{2} + 1 \right) + \frac{2}{3}A^2g_2$$

Usando a fórmula:

$$\zeta(z + w_1) = \zeta(z) + 2\zeta \left( \frac{w_1}{2} \right), \quad \text{para } z = \frac{i}{2} \text{ e } w_1 = 1,$$

$$\text{segue, } \zeta \left( \frac{i}{2} \right) - \zeta \left( \frac{i}{2} + 1 \right) = -2\zeta \left( \frac{1}{2} \right).$$

Agora usando o ítem (iii) do lema 2.1.2, temos

$$\zeta \left( \frac{i}{2} \right) - \zeta \left( \frac{i}{2} + 1 \right) = -2\pi/2 = -\pi.$$

Logo,

$$\int_{\alpha} \phi_1(z) = -\pi + \frac{2}{3}A^2g_2$$

A parte real do primeiro período se anula se, e só se,

$$\text{Re} \left\{ \int_{\alpha} \phi_1 \right\} = 0 \Leftrightarrow -\pi + \frac{2}{3}(a^2 - b^2)g_2 = 0, \quad \text{onde } A = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$a^2 - b^2 = \frac{3\pi}{2g_2} > 0, \quad (2.4)$$

porque,  $g_2 > 0$

Cálculo do segundo período de  $\phi_1$ :

$$\begin{aligned}
\int_{\beta} \phi_1(z) &= -[\zeta(z)]_{\beta(0)}^{\beta(1)} - \frac{2}{3}A^2 [\wp'(z)]_{\beta(0)}^{\beta(1)} + \frac{2}{3}A^2 g_2 [z]_{\beta(0)}^{\beta(1)} \\
&= -[\zeta(z)]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+i} - \frac{2}{3}A^2 [\wp'(z)]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+i} + \frac{2}{3}A^2 g_2 [z]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+i} \\
\int_{\beta} \phi_1 &= -\zeta\left(\frac{1}{2}+i\right) + \zeta\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3}A^2 \left(\wp'\left(\frac{1}{2}+i\right) - \wp'\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{2}{3}A^2 g_2 \left(\frac{1}{2}+i - \frac{1}{2}\right) \\
&= -\zeta\left(\frac{1}{2}+i\right) + \zeta\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3}A^2 \left(\wp'\left(\frac{1}{2}\right) - \wp'\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{2}{3}A^2 g_2 \cdot i \\
&= -\zeta\left(\frac{1}{2}+i\right) + \zeta\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}A^2 g_2 \cdot i
\end{aligned}$$

Usando a fórmula  $\zeta(z+w_2) = \zeta(z) + 2\zeta\left(\frac{w_2}{2}\right)$ , e fazendo  $z = \frac{1}{2}$  e  $w_2 = i$ , temos

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+i\right) = \zeta\left(\frac{1}{2}\right) + 2\zeta\left(\frac{i}{2}\right) \Rightarrow \zeta\left(\frac{1}{2}\right) - \zeta\left(\frac{1}{2}+i\right) = -2\zeta\left(\frac{i}{2}\right).$$

Pelo ítem (ii) e (iii) do lema 2, segue-se  $\zeta\left(\frac{1}{2}\right) - \zeta\left(\frac{1}{2}+i\right) = 2i \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \cdot i$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\beta} \phi_1(z) &= \pi \cdot i + \frac{2}{3}i(a^2 - b^2 + 2abi)g_2 = \left(\pi + \frac{2}{3}(a^2 - b^2)g_2\right) i - \frac{4}{3}abg_2 \\
\operatorname{Re} \left\{ \int_{\beta} \phi_1 \right\} &\Leftrightarrow -\frac{4}{3}a \cdot b \cdot g_2 = 0 \Leftrightarrow a \cdot b = 0
\end{aligned}$$

Se  $a = 0$ , então da equação (2.4) temos  $-b^2 = 3\pi/2g_2 > 0$ , absurdo.

Logo  $b = 0$ , então  $A = a$  e  $A = \pm\sqrt{3\pi/2g_2}$ .

Similarmente podemos calcular os períodos de  $\phi_2$ :

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha} \phi_2 &= \int_{\alpha} \left( i\wp + \frac{2}{3}iA^2\wp'' - \frac{2}{3}iA^2g_2 \right) dz \\
&= -i[\zeta(z)]_{\frac{i}{2}}^{\frac{i}{2}+1} + \frac{2}{3}iA^2[\wp'(z)]_{\frac{i}{2}}^{\frac{i}{2}+1} - \frac{2}{3}iA^2g_2 [z]_{\frac{i}{2}}^{\frac{i}{2}+1} \\
&= -i \left( \zeta\left(\frac{i}{2}+1\right) - \zeta\left(\frac{i}{2}\right) \right) - \frac{2}{3}iA^2g_2
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\int_{\alpha} \phi_2 &= i \left( \zeta \left( \frac{i}{2} \right) - \zeta \left( \frac{i}{2} + 1 \right) \right) - \frac{2}{3} i A^2 g_2 = -2i \zeta \left( \frac{1}{2} \right) - \frac{2}{3} i A^2 g_2 \\ &= -2i \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} i A^2 g_2 = -\pi i - \frac{2}{3} i \cdot \frac{3\pi}{2g_2} \cdot g_2 = -2\pi i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\beta} \phi_2 &= -i \left( \zeta \left( \frac{1}{2} + i \right) - \zeta \left( \frac{1}{2} \right) \right) - \frac{2}{3} i A^2 g_2 i \\ &= i \left( \zeta \left( \frac{1}{2} \right) - \zeta \left( \frac{1}{2} + i \right) \right) + \pi = i(\pi i) + \pi = 0\end{aligned}$$

Portanto,

$$Re \left\{ \int_{\alpha} \phi_2 \right\} = Re \left\{ \int_{\beta} \phi_2 \right\} = 0$$

Por último, calculamos os períodos de  $\phi_3$ :

$$\begin{aligned}\int_{\alpha} \phi_3 &= \int_{\alpha} 2A \wp'(z) dz = 2A \int_{\alpha} \wp'(z) dz = 2A \wp(z) \Big|_{\alpha(0)}^{\alpha(1)} = 2A [\wp(z)]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+1} \\ &= 2A \left[ \wp \left( \frac{i}{2} + 1 \right) - \wp \left( \frac{i}{2} \right) \right] = 2A \left( \wp \left( \frac{i}{2} \right) - \wp \left( \frac{i}{2} \right) \right) = 0\end{aligned}$$

$$\int_{\beta} \phi_3 = 2A [\wp(z)]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+i} = 2A \left( \wp \left( \frac{1}{2} + i \right) - \wp \left( \frac{1}{2} \right) \right) = 2A \left( \wp \left( \frac{1}{2} \right) - \wp \left( \frac{1}{2} \right) \right) = 0$$

Usei aqui o fato de  $\wp$  ser elíptica com períodos primitivos  $w_1 = 1$  e  $w_2 = i$ .

Portanto,

$$Re \left\{ \int_{\alpha} \phi_3 dz \right\} = Re \left\{ \int_{\beta} \phi_3 dz \right\} = 0$$

O que prova  $c_2$ .

**Demonstração de  $c_3$  :**

Para demonstrar  $c_3$ , precisamos mostrar que o resíduo de  $\phi_j$  em  $P_1 = 0$  é real. Em símbolos  $Res(\phi_j; 0) \in \mathbb{R} \quad \forall j = 1, 2, 3$ , ou equivalentemente:

$$Res(g\eta; 0) = Res(gfdz; 0) = Res(\phi_3; 0) \in \mathbb{R} \quad e \quad \overline{Res(fdz; 0)} + Res(g^2 fdz; 0) = 0.$$

Sendo  $\eta = f dz = 2\wp(z)dz$ , temos

$$\text{Res}(g f dz; 0) = \text{Res}(2A\wp'(z)dz; 0) = 2A\text{Res}(\wp'(z)dz; 0).$$

Mas,  $\wp'(z)$  é uma função elíptica, logo a soma de seus resíduos em  $\overline{R}_{(1,i)}$  é igual a zero. Como o único polo de  $f dz$ ,  $g f dz$  e  $g^2 f dz$  em  $\overline{R}(1, i)$  é o zero, temos

$$\text{Res}(g f dz; 0) = 0 \in \mathbb{R}.$$

Pelo mesmo argumento, segue

$$\text{Res}(f dz; 0) = 2\text{Res}(\wp(z)dz; 0) = 0 \Rightarrow \overline{\text{Res}(f dz; 0)} = \overline{0} = 0.$$

Por último, usando o ítem (iv) do lema 2.1.2

$$g^2 f dz = 2\wp(z) \frac{A^2 \wp'^2(z)}{\wp^2(z)} dz = 2A^2 \frac{\wp'^2(z)}{\wp(z)} dz = 8A^2 \frac{\wp(z)}{\wp(z)} (\wp^2(z) - e_1^2) dz$$

$g^2 f dz = 8A^2(\wp^2(z) - e_1^2) dz$ . Logo,  $g^2 f$  é uma função elíptica e,  $\text{Res}(g^2 f dz; 0) = 0$ , pelo argumento acima. Portanto, temos  $\mathbf{c}_3$ .

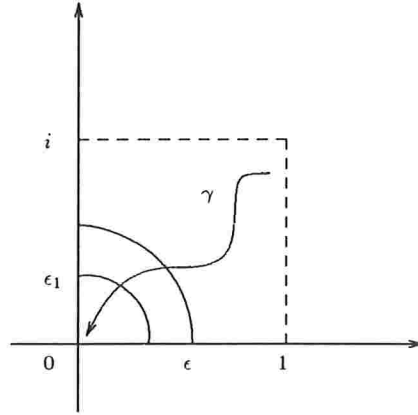
#### Demonstração de $\mathbf{c}_4$ :

Queremos mostrar que toda curva  $\gamma : [0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  divergente em  $R_{(1,i)}$ , possui comprimento infinito. Feito isso a imersão  $X : R_{(1,i)} \rightarrow \mathbb{R}^3$  que defini  $S$  é completa.

Seja  $ds = \frac{1}{2}|f|(1 + |g|^2)|dz| = \lambda|dz|$  a métrica induzida por  $X$ . Vamos mostrar que

$$\text{comp}(\gamma) = \int_{\gamma} ds = \int_{\gamma} \frac{1}{2}|f|(1 + |g|^2)|dz| = \int_{\gamma} \lambda|dz| = \infty.$$

A fim de que  $\gamma$  seja divergente em  $R_{(1,i)}$ , então  $\lim_{t \rightarrow 1^-} \gamma(t) = 0$ . Agora como  $f$  tem um polo de ordem 2 em  $z = 0$  e  $g$  tem um polo simples em  $z = 0$ , então  $f(1 + g^2)$  tem um polo de ordem 4 em  $z = 0$ . Portanto na vizinhança  $B_{\epsilon}(0)$  de zero, esta função pode ser escrita como,  $\frac{1}{z^4}h(z)$ , onde  $h(z)$  é holomorfa em  $B_{\epsilon}(0)$  e  $h(0) \neq 0$ . Mas, os zeros de uma função holomorfa são isolados, então existe  $\epsilon_1 < \epsilon$ , de modo que  $h(z) \neq 0$ ,  $\forall z \in B_{\epsilon_1}(0)$ . É possível encontrar uma constante  $M > 0$  tal que  $|h(z)| \geq M$ ,  $\forall z \in B_{\epsilon_1}(0)$ . Consideremos  $\gamma|_{[t_i, 1)} \subset B_{\epsilon_1}(0)$ .  $t_i > 0$ , em outras palavras é a parte de  $\gamma$  que cai dentro de  $B_{\epsilon_1}(0)$



**Figura 2.3**

Obviamente,

$$\text{comp}(\gamma) > \text{comp}(\gamma|_{[t_i, 1)}) = \int_{\gamma|_{[t_i, 1)}} \frac{1}{2} |f|(1 + |g|^2) |dz| \geq \int_{\gamma|_{[t_i, 1)}} \left| \frac{1}{2} f(1 + g^2) \right| |dz|$$

$$\text{comp}(\gamma) \geq \int_{\gamma|_{[t_i, 1)}} \frac{1}{2|z|^4} \cdot |h(z)| |dz|$$

$$\text{comp}(\gamma) \geq M \int_{\gamma|_{[t_i, 1)}} \frac{1}{2|z|^4} |dz| \geq \frac{M}{2} \left| \int_{\gamma|_{[t_i, 1)}} \frac{dz}{z^4} \right|.$$

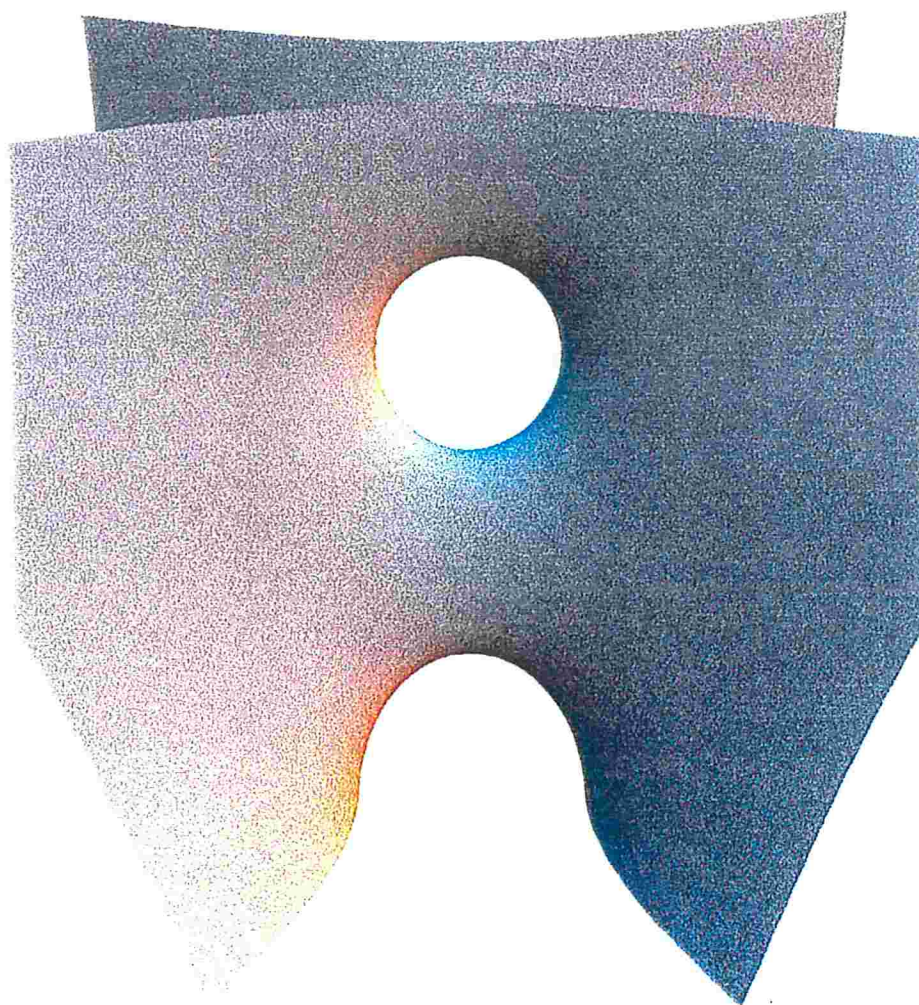
Seja  $t_0 \in [t_i, 1)$  o primeiro valor de  $t$ , tal que  $\gamma(t_0) \in B_{\epsilon_1}$ , escrevemos  $\gamma(t_0) = \zeta_0$  e  $t_i \rightarrow 1^-$ ,  $\gamma(t_i) = \zeta$

$$\text{comp}(\gamma) \geq \frac{M}{2} \left| \lim_{\zeta \rightarrow 0} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{1}{z^4} dz \right| = \frac{M}{2} \left| \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[ -\frac{1}{3z^3} \right]_{\zeta_0}^{\zeta} \right|$$

$$\text{comp}(\gamma) \geq \frac{M}{6} \left| \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\zeta_0^3} - \frac{1}{\zeta^3} \right) \right| \rightarrow \infty$$

■

Em [21] K. Sato esboça o gráfico da superfície descrita no teorema acima, e usando o *software mathematica 3.0* ver [10] construímos esse gráfico.



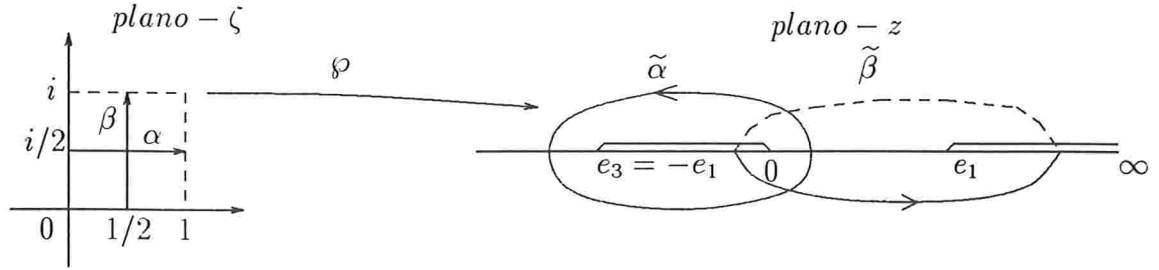
## Capítulo 3

# Superfície Mínima de Chen–Gackstätter de Gênero 2

Neste capítulo faremos inicialmente uma adaptação à linguagem hiperelíptica da representação de Weierstrass exibida no capítulo 2. E usando a teoria de superfícies de Riemann de funções algébricas, demonstraremos que existe uma superfície mínima completa de gênero 2 e curvatura total finita  $-12\pi$  do  $\mathbb{R}^3$

### 3.1 Adaptação à Linguagem Hiperelíptica do Exemplo de gênero 1

Para determinar uma superfície mínima com gênero  $p > 1$  é natural iniciar com uma superfície de Riemann hiperelíptica  $\bar{R}$ , a qual é realizada por uma função algébrica. Para ter uma idéia melhor do que faremos é interessante adaptar o teorema 2.2.1 à essa linguagem, veja figura 3.1 e as considerações a seguir.



**Figura 3.1**

onde a parte pontilhada de  $\tilde{\beta}$ , significa que pertence a folha II da superfície de Riemann compacta  $\bar{R}$ , a qual é realizada pela função algébrica

$$w(z) := 2\sqrt{z(z - e_1)(z + e_2)}.$$

Da equação diferencial de  $\wp$  dada em 1.15, temos que  $\wp'(\zeta)$ , satisfaz a equação algébrica,

$$[w(\wp(\zeta))]^2 = 4\wp(\zeta)(\wp(\zeta) - e_1)(\wp(\zeta) + e_1) \quad (3.1)$$

Pondo,  $z = \wp(\zeta)$ ,  $dz = \wp'(\zeta)d\zeta$ , de 3.1, segue

$$w^2(z) = 4z(z - e_1)(z + e_1). \quad (3.2)$$

Logo,  $d\zeta = \frac{1}{\wp'(\zeta)}dz = \frac{dz}{w(z)}$ , e portanto, temos  $g(\zeta)$  e  $\eta(\zeta) = f(\zeta)d\zeta$  como função de  $w(z)$ .

$$g(\zeta) = A \cdot \frac{\wp'(\zeta)}{\wp(\zeta)} \quad \text{corresponde a} \quad \tilde{g}(z) = A \cdot \frac{2\sqrt{z(z^2 - e_1^2)}}{z}$$

$$\eta(\zeta) = 2\wp(\zeta)d\zeta \quad \text{corresponde a} \quad \tilde{\eta}(z) = \frac{z \cdot dz}{\sqrt{z(z^2 - e_1^2)}},$$

onde  $\tilde{\eta}(z)$  é uma diferencial abeliana sobre  $\bar{R}$ ;  $\bar{R}$  é homeomorfo ao toro, e  $\{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\}$  forma uma base para sua homologia, veja figura 3.2 abaixo.



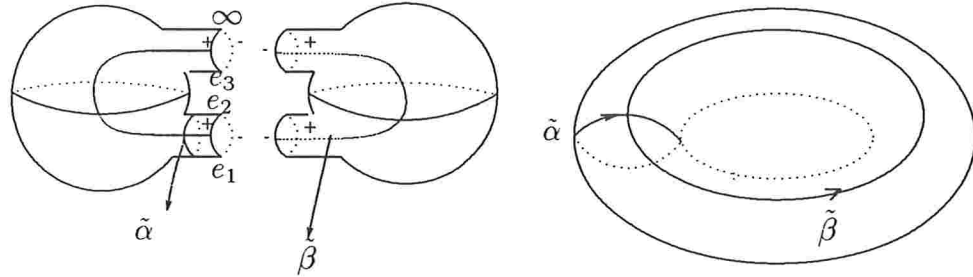


Figura 3.2

### 3.2 Exemplo de Chen–Gackstätter de gênero 2

O exemplo de Chen–Gackstätter de uma superfície mínima completa em  $\mathbb{R}^3$ , de gênero 2, consiste na imersão em  $\mathbb{R}^3$  de uma superfície de Riemann compacta, da função algébrica:  $w(z) = \sqrt{z(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}$ , onde  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $0 < a < b$ , menos um ponto. Mais precisamente, temos:

**Teorema 3.2.1** *Existe uma superfície mínima completa  $S$  do  $\mathbb{R}^3$  com gênero 2, curvatura total finita  $C(S) = -12\pi$  e um único fim de ordem 3. Esta superfície é do tipo Enneper com duas alças. Ela é a imersão da superfície de Riemann  $\bar{R}$ , da função algébrica,*

$$w(z) := \sqrt{z(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)},$$

menos um ponto de ramificação correspondente ao infinito. A representação de Weierstrass de  $S$  é dada por:

$$\begin{cases} g(z) = B \frac{w(z)}{(z^2 - a^2)} \\ \eta(z) = \frac{(z^2 - a^2)}{w(z)} dz, \end{cases}$$

onde  $a, b$  e  $B$  são constantes reais convenientes satisfazendo,  $0 < a < b$  e  $0 < B$ .

Antes de começar a demonstração do teorema acima, precisamos de alguns resultados obtidos nos lemas a seguir.

Seja  $\overline{R}$  a superfície de Riemann da função algébrica:

$$w(z) = [z(z^2 - a^2)^k(z^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}, \quad \text{onde } a, b \in \mathbb{R}, 0 < a < b, \text{ e } k \in \mathbb{Z}_+$$

Temos o lema:

**Lema 3.2.2** *Sejam  $\phi_1(z)$  e  $\phi_2(z)$  diferenciais meromorfas sobre uma superfície de Riemann compacta  $\overline{R}$ , definidas por:*

$$\begin{aligned} \phi_1(z) &:= \frac{1}{2} \left\{ \frac{[z(z^2 - a^2)^k(z^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{z(z^2 - b^2)} - B^2 \frac{z(z^2 - b^2)}{[z(z^2 - a^2)^k(z^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}} \right\} dz \\ \phi_2(z) &:= \frac{i}{2} \left\{ \frac{[z(z^2 - a^2)^k(z^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{z(z^2 - b^2)} + B^2 \frac{z(z^2 - b^2)}{[z(z^2 - a^2)^k(z^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}} \right\} dz \end{aligned}$$

onde  $a, b$  e  $B$  são constantes reais convenientes satisfazendo,  $0 < a < b$  e  $0 < B$ . Então valem as seguintes igualdades:

- (i)  $\int_{c_1} \phi_1(z) = \int_{c_1} \phi_2(z) = 0, \quad \forall z \in c_1 : z = \varepsilon e^{it}, t \in [0, 2\pi], \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0$
- (ii)  $\int_{c_2} \phi_1(z) = \int_{c_2} \phi_2(z) = 0, \quad \forall z \in c_2 : z = a + \varepsilon e^{it}, t \in [-\pi, \pi], \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0$
- (iii)  $\int_{c_3} \phi_1(z) = \int_{c_3} \phi_2(z) = 0, \quad \forall z \in c_3 : z = -b + \varepsilon e^{it}, t \in [0, 2\pi], \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0$
- (iv)  $\int_{c_4} \phi_1(z) = \int_{c_4} \phi_2(z) = 0, \quad \forall z \in c_4 : z = -a + \varepsilon e^{it}, t \in [-\pi, \pi], \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0$
- (v)  $\int_{\Gamma_1} \phi_1(z) = \int_{\Gamma_1} \phi_2(z) = 0, \quad \forall z \in \Gamma_1 : z = a + \varepsilon e^{it}, t \in [-\pi, 3\pi], \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0$
- (vi)  $\int_{\Gamma_2} \phi_1(z) = \int_{\Gamma_2} \phi_2(z) = 0, \quad \forall z \in \Gamma_2 : z = b + \varepsilon e^{it}, t \in [0, 4\pi], \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0$
- (vii)  $\int_{\Gamma_3} \phi_1(z) = \int_{\Gamma_3} \phi_2(z) = 0, \quad \forall z \in \Gamma_3 : z = -a + \varepsilon e^{it}, t \in [-\pi, 3\pi], \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0$

$$(viii) \int_{\Gamma_4} \phi_1(z) = \int_{\Gamma_4} \phi_2(z) = 0, \quad \forall z \in \Gamma_4 : z = \varepsilon e^{it}, \quad t \in [0, 4\pi], \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0$$

Onde as curvas  $c_1, c_2, c_3$  e  $c_4$  pertencem somente a uma das  $j$  folhas

$\mathbb{C} \setminus \{-b, -a\} \cup [0, a] \cup [b, \infty\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k+1$ , de  $w(z) = [z(z^2 - a^2)^k(z^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}$ , com  $k$  inteiro positivo. usadas na construção de  $\bar{R}$ , e o argumento de cada ramo de  $w(z)$  na parte superior dos cortes das folhas  $j$ , é  $\frac{2j\pi}{k+1}$ . Já as curvas  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  e  $\Gamma_4$  passam por duas das  $k+1$  folhas de  $w(z)$ .

**Demonstração:**

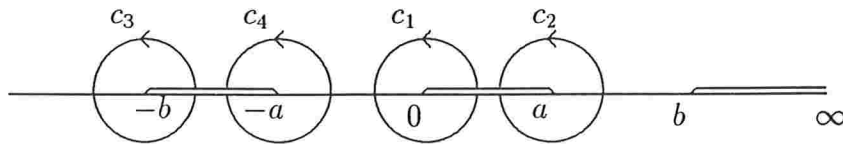
Provaremos que  $|\int \phi_1(z)| \rightarrow 0$  e  $|\int \phi_2(z)| \rightarrow 0$ , para todo  $z$  nas condições dos oito itens acima. De um modo geral, para cada ramo de  $w(z)$ , valem as desigualdades:

$$\begin{aligned} \left| \int \phi_1(z) \right| &\leq \frac{1}{2} \int \left| \frac{e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} [z(z^2 - a^2)^k(z^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{z(z^2 - b^2)} \right| |dz| + \\ &+ \frac{B^2}{2} \int \left| \frac{z(z^2 - b^2)}{e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} [z(z^2 - a^2)^k(z^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}} \right| |dz| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int \left[ \frac{|z^2 - a^2|}{|z|(|z^2 - b^2|)} \right]^{\frac{k}{k+1}} |dz| + \frac{B^2}{2} \int \left[ \frac{|z|(|z^2 - b^2|)}{(|z^2 - a^2|)} \right]^{\frac{k}{k+1}} |dz| \quad (3.3) \end{aligned}$$

Como  $0 < a < b$ ,

$$\left| \int \phi_1(z) \right| \leq \frac{1}{2} \int \left[ \frac{|z+a||z-a|}{|z|(|a^2 - |z|^2|)} \right]^{\frac{k}{k+1}} |dz| + \frac{B^2}{2} \int \left[ \frac{|z|(|z|^2 + b^2)}{(|a^2 - |z|^2|)} \right]^{\frac{k}{k+1}} |dz|$$

(i) Seja  $\varepsilon \leq a/2$  e  $c_1 = \varepsilon e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , como na figura 3.3 abaixo,



**Figura 3.3**

Logo,

$$\left| \int_{c_1} \phi_1(z) \right| \leq \frac{1}{2} \int_{c_1} \left[ \frac{|z+a||z-a|}{|z|(a^2-|z|^2)} \right]^{\frac{k}{k+1}} |dz| + \frac{B^2}{2} \int_{c_1} \left[ \frac{|z|(|z|^2+b^2)}{(a^2-|z|^2)} \right]^{\frac{k}{k+1}} |dz|$$

$$\left| \int_{c_1} \phi_1(z) \right| \leq \frac{1}{2} \int_{c_1} \left[ \frac{|z|+a}{|z|(a-|z|)} \right]^{\frac{k}{k+1}} |dz| + \frac{B^2}{2} \int_{c_1} \left[ \frac{|z|(|z|^2+b^2)}{(a^2-|z|^2)} \right]^{\frac{k}{k+1}} |dz|$$

Substituindo acima  $|z| = \varepsilon$  e  $|dz| = \varepsilon dt$ , temos

$$\left| \int_{c_1} \phi_1(z) \right| \leq \frac{1}{2} \left[ \frac{\varepsilon+a}{\varepsilon(a-\varepsilon)} \right]^{\frac{k}{k+1}} \int_0^{2\pi} \varepsilon dt + \frac{B^2}{2} \left[ \frac{\varepsilon(\varepsilon^2+b^2)}{(a^2-\varepsilon^2)} \right]^{\frac{k}{k+1}} \int_0^{2\pi} \varepsilon dt \quad \text{Assim,}$$

$$\left| \int_{c_1} \phi_1(z) \right| \leq \left\{ \left[ \frac{\varepsilon+a}{(a-\varepsilon)} \right]^{\frac{k}{k+1}} \varepsilon^{\frac{1}{k+1}} + B^2 \left[ \frac{(\varepsilon^2+b^2)}{(a^2-\varepsilon^2)} \right]^{\frac{k}{k+1}} \varepsilon^{\frac{2k+1}{k+1}} \right\} \pi$$

Portanto, fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , implica  $|\int \phi_1(z)| \rightarrow 0$ . Também  $|\int \phi_2(z)| \rightarrow 0$ . para todo  $z \in c_1$  e  $\varepsilon \rightarrow 0$ , já que vale novamente a desigualdade 3.3, com  $\phi_2$  no lugar de  $\phi_1$ .  
(ii) Sejam  $\varepsilon \leq \frac{b-a}{2}$ ,  $|z-a| = \varepsilon$  e  $c_2 : z = a + \varepsilon e^{it}$ ,  $t \in [-\pi, \pi]$ . Além disso, valem as desigualdades:

$$|z+a| = |z-a+2a| \geq 2a - |z-a| \quad \text{e} \quad |z+a| \leq 2a + |z-a|$$

$$|z+b| = |z-a+(b+a)| \geq (b+a) - |z-a| \quad \text{e} \quad |z+b| \leq (b+a) + |z-a|$$

$$|z-b| = |z-a-(b-a)| \geq (b-a) - |z-a| \quad \text{e} \quad |z-b| \leq (b-a) + |z-a|$$

$$|z| = |z-a+a| \geq a - |z-a| \quad \text{e} \quad |z| \leq a + |z-a|$$

Usando-as na inequação 3.3 temos,

$$\left| \int_{c_2} \phi_1(z) \right| \leq \frac{1}{2} \int_{c_2} \left[ \frac{|z-a|(2a+|z-a|)}{(a-|z-a|)((b+a)-|z-a|)((b-a)-|z-a|)} \right]^{\frac{k}{k+1}} |dz| +$$

$$+ \frac{B^2}{2} \int_{c_2} \left[ \frac{(|z-a|+a)(|z-a|+(b+a))(|z-a|+(b-a))}{(2a-|z-a|)|z-a|} \right]^{\frac{k}{k+1}} |dz|$$

$$\left| \int_{c_2} \phi_1(z) \right| \leq \frac{1}{2} \left[ \frac{\varepsilon(2a + \varepsilon)}{(a - \varepsilon)((b + a) - \varepsilon)((b - a) - \varepsilon)} \right]^{\frac{k}{k+1}} \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} dt +$$

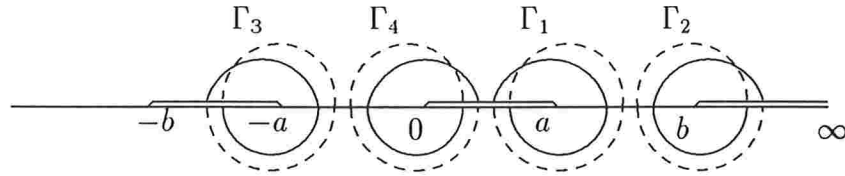
$$+ \frac{B^2}{2} \left[ \frac{(\varepsilon + a)(\varepsilon + (b + a))(\varepsilon + (b - a))}{(2a - \varepsilon)\varepsilon} \right]^{\frac{k}{k+1}} \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} dt$$

$$\left| \int_{c_2} \phi_1(z) \right| \leq \left\{ \left[ \frac{(2a + \varepsilon)}{(a - \varepsilon)((b + a) - \varepsilon)((b - a) - \varepsilon)} \right]^{\frac{k}{k+1}} \varepsilon^{\frac{2k+1}{k+1}} + \right.$$

$$\left. + B^2 \left[ \frac{(\varepsilon + a)(\varepsilon + (b + a))(\varepsilon + (b - a))}{(2a - \varepsilon)} \right]^{\frac{k}{k+1}} \varepsilon^{\frac{1}{k+1}} \right\} \pi$$

Agora fazendo,  $\varepsilon \rightarrow 0$  na expressão acima resulta,  $\left| \int_{c_2} \phi_1(z) \right| \rightarrow 0$ , assim como  $\left| \int_{c_2} \phi_2(z) \right| \rightarrow 0$ , com  $\varepsilon \rightarrow 0$ , usando os mesmo tipo de cálculo. A demonstração dos itens (iii) e (iv) é análoga a do item (ii).

(v) Seja  $\Gamma_1 = \Gamma_1^j \cup \Gamma_1^{j-1}$ , onde  $\Gamma_1^j$  (linha cheia) e  $\Gamma_1^{j-1}$  (linha pontilhada) são as partes de  $\Gamma_1$  que pertencem respectivamente às folhas  $j$  e  $j-1$ , indicadas na figura 3.4 abaixo.



**Figura 3.4**

Então,

$$\int_{\Gamma_1} \phi_1(z) = \int_{\Gamma_1^j} \phi_1(z) + \int_{\Gamma_1^{j-1}} \phi_1(z) \quad e$$

$$\int_{\Gamma_1} \phi_1(z) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1^j} \frac{e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} [z(z^2 - a^2)^k (z^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{z(z^2 - b^2)} dz -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{B^2}{2} \int_{\Gamma_1^j} \frac{z(z^2 - b^2)}{e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} [z(z^2 - a^2)^k (z^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}} dz + \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1^{j-1}} \frac{e^{\frac{2(j-1)\pi i}{k+1}} [z(z^2 - a^2)^k (z^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{z(z^2 - b^2)} dz - \\
& - \frac{B^2}{2} \int_{\Gamma_1^{j-1}} \frac{z(z^2 - b^2)}{e^{\frac{2(j-1)\pi i}{k+1}} [z(z^2 - a^2)^k (z^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}} dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Gamma_1} \phi_1(z) \right| & \leq \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1^j} \left| \frac{[z(z^2 - a^2)^k (z^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{z(z^2 - b^2)} \right| |dz| + \\
& + \frac{B^2}{2} \int_{\Gamma_1^j} \left| \frac{z(z^2 - b^2)}{[z(z^2 - a^2)^k (z^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}} \right| |dz| + \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1^{j-1}} \left| \frac{[z(z^2 - a^2)^k (z^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{z(z^2 - b^2)} \right| |dz| + \\
& + \frac{B^2}{2} \int_{\Gamma_1^{j-1}} \left| \frac{z(z^2 - b^2)}{[z(z^2 - a^2)^k (z^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}} \right| |dz|
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Pela inequação 3.3 e ítem (ii), usadas em 3.4 temos  $\left| \int_{\Gamma_1} \phi_1(z) \right| \rightarrow 0$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . E com um cálculo semelhante se prova os ítems (vi), (vii) e (viii). ■

#### Observações:

(1) Note que quando  $k = 1$ , então  $\overline{R}$  é uma superfície de Riemann compacta de gênero 2, hiperelíptica e  $j = 1, 2$ , isto é, temos duas folhas,  $\mathbb{C} \setminus \{-b, -a\} \cup [0, a] \cup [b, \infty)$ , da função algébrica  $w(z) = \sqrt{z(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}$ .

(2) Ainda quando  $k = 1$ , as expressões de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são dadas por:

$$\begin{aligned}
\phi_1(z) & = \frac{1}{2} \left[ \frac{(z^2 - a^2) - B^2 z(z^2 - b^2)}{\sqrt{z(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} \right] dz \\
\phi_2(z) & = \frac{i}{2} \left[ \frac{(z^2 - a^2) + B^2 z(z^2 - b^2)}{\sqrt{z(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} \right] dz
\end{aligned}$$



**Lema 3.2.3** *Seja  $1 < b < \infty$ , então valem as seguintes desigualdades:*

- (i)  $\frac{1+x}{(b+x)(b-x)} \leq \frac{2}{b(b-1)}$ , se  $0 \leq x \leq 1$
- (ii)  $\frac{(b-1+x)(b+1-x)}{(2-x)} \geq \frac{b(b-1)}{2}$ , se  $0 \leq x \leq 1$
- (iii)  $\frac{(1+x)(b+1+x)}{2+x} \leq 2b$ , se  $0 \leq x \leq b-1$
- (iv)  $\frac{b+1-x}{(b-x)(2b-x)} \geq \frac{1}{2b}$ , se  $0 \leq x \leq b-1$

**Demonstração:**

- (i) Basta observar que se  $0 \leq x \leq 1$ , então  $(1+x) \leq 2$ ,  $(b+x) \geq b$  e  $(b-x) \geq b-1$
- (ii) Notemos que,  $(2-x) \leq 2$ ,  $(b-1+x) \geq (b-1)$  e  $(b+1-x) \geq b$
- (iii) Usando o mesmo tipo de argumento dos itens anteriores, segue

$$\frac{(1+x)(b+1+x)}{2+x} \leq \frac{(1+x)(b+1+x)}{1+x} = b+1+x \leq 2b$$

(iv) Segue de

$$\frac{b+1-x}{(b-x)(2b-x)} \geq \frac{b-x}{(b-x)(2b-x)} = \frac{1}{(2b-x)} \geq \frac{1}{2b}$$

■

**Lema 3.2.4** *Sejam  $1 < b < \infty$  e  $\varepsilon \leq 0,21$ , então valem as seguintes desigualdades:*

- (i)  $\frac{1+x}{(1+\varepsilon+x)} \geq 0,81$ ,  $\forall 0 \leq x \leq 1$  e  $\forall 0 < \varepsilon \leq \frac{19}{81} \approx 0,23$
- (ii)  $\frac{2+\varepsilon-x}{2-x} \leq 1,21$ ,  $\forall 0 \leq x \leq 1$ ,  $\forall 0 < \varepsilon \leq 0,21$
- (iii)  $\frac{(1+x)(2+\varepsilon+x)}{2+x} \geq 1$ , se  $0 \leq x \leq \varepsilon$
- (iv)  $\frac{2+\varepsilon-x}{(1+\varepsilon-x)(2+2\varepsilon-x)} \leq 1$ , se  $0 \leq x \leq \varepsilon$
- (v)  $\frac{0,9}{\sqrt{1+\varepsilon-x}} \geq (1,1)\sqrt{\varepsilon+x}$ ,  $\forall 0 \leq x \leq 1$  e  $\forall 0 < \varepsilon \leq 0,21$

**Demonstração:**

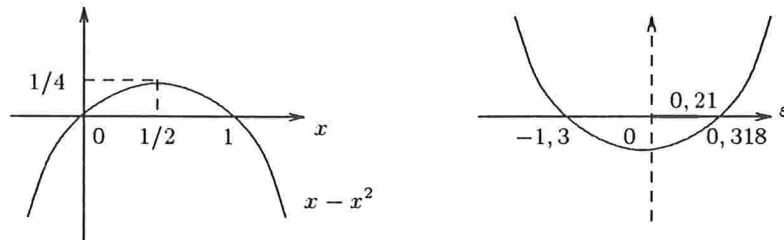
(i) Vale a inequação  $\frac{1+x}{(1+\varepsilon+x)} \geq 0,81 \Leftrightarrow \frac{(1+\varepsilon+x)}{1+x} \leq \frac{1}{0,81}$ , mas  $\frac{(1+\varepsilon+x)}{1+x} = \frac{1+x}{1+x} + \frac{\varepsilon}{1+x} = 1 + \frac{\varepsilon}{1+x} \leq 1 + \varepsilon$ , pois  $(1+x) \geq 1$ . Logo,  $(1+\varepsilon) \leq \frac{1}{0,81} \Leftrightarrow \varepsilon \leq \frac{19}{81} \approx 0,23$  implica  $\frac{(1+\varepsilon+x)}{1+x} \leq \frac{1}{0,81}$ .

(ii) Similarmente ao ítem anterior, podemos facilmente provar  $\frac{2+\varepsilon-x}{(2-x)} \leq 1,21 \Leftrightarrow 0 \leq \varepsilon \leq 0,21$ .

(iii) É óbvio, basta observar que  $1+x \geq 1$ ,  $2+\varepsilon+x \geq 2+\varepsilon$  e  $2+x \leq 2+\varepsilon$ .

(iv) De fato,  $\frac{2+\varepsilon-x}{(1+\varepsilon-x)(2+2\varepsilon-x)} \leq \frac{2+2\varepsilon-x}{(1+\varepsilon-x)(2+2\varepsilon-x)} = \frac{1}{(1+\varepsilon-x)} \leq 1$ .

(v) Vale,  $\frac{0,9}{\sqrt{1+\varepsilon-x}} \geq (1,1)\sqrt{\varepsilon+x} \Leftrightarrow 1,21(\varepsilon+x) \leq \frac{0,81}{1+\varepsilon-x} \Leftrightarrow (1+\varepsilon-x)(\varepsilon+x) \leq \frac{81}{121}$  como,  $(1+\varepsilon-x)(\varepsilon+x) = (\varepsilon+x) + (\varepsilon+x)(\varepsilon-x) = (\varepsilon+x) + \varepsilon^2 - x^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon + (x-x^2) \Rightarrow (1+\varepsilon-x)(\varepsilon+x) \leq \varepsilon^2 + \varepsilon + \frac{1}{4}$ , pois o máximo de  $x-x^2$ ,  $\forall x \in [0,1]$  é  $\frac{1}{4}$ . Logo reduzimos o problema em determinar valores de  $\varepsilon$  que satisfaçam a inequação  $\varepsilon^2 + \varepsilon + \frac{1}{4} \leq \frac{81}{121}$ . Esses valores para  $\varepsilon$  estão no intervalo  $(0, 0,318]$ . Portanto, (v) vale  $\forall \varepsilon \in (0, 0,21]$  e  $x \in [0,1]$

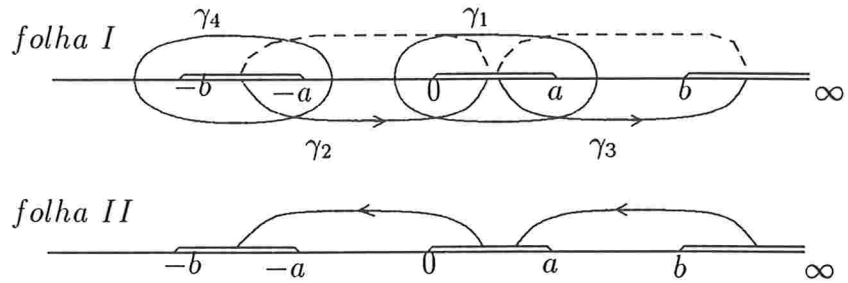


**Figura 3.5**

Abaixo começamos a demonstração do teorema 3.2.1

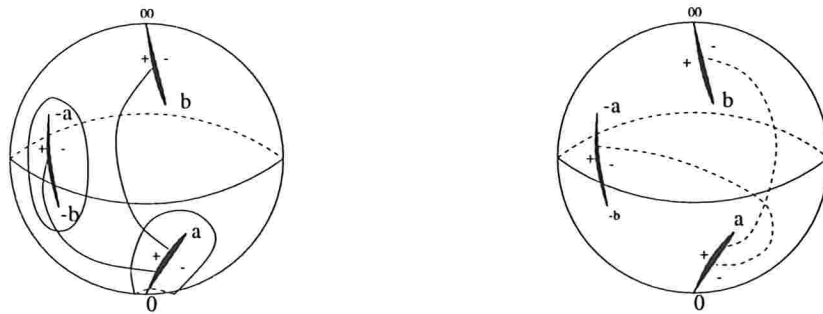
**Demonstração:**

Consideremos primeiramente as duas folhas usadas para construir a superfície de Riemann concreta  $\overline{R}$  de  $w(z)$ , veja figura 3.6.



**Figura 3.6**

Homeomorficamente as figuras, 3.7, que se seguem, exprimem esquematicamente a situação acima.



**Figura 3.7**

A superfície de Riemann de  $w(z)$ , é obtida, colando-se em cruz os bordos dos cortes indicados na figura 3.6. Homeomorficamente fazemos isso sobre as esferas cortadas  $\mathbb{C} \cup \infty$ , rotacionando de modo que o bordo  $+$  cole com o  $-$  como na figura 3.8

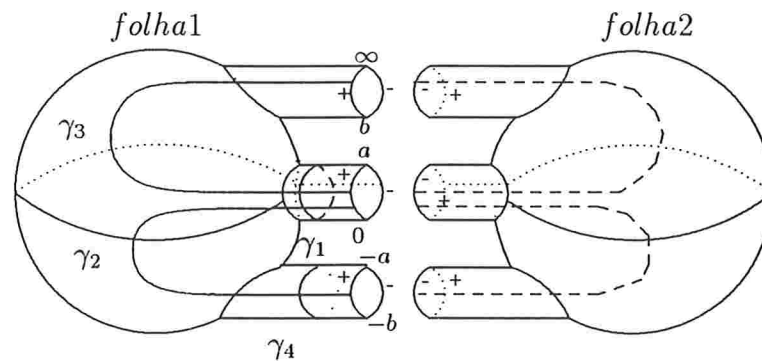


Figura 3.8

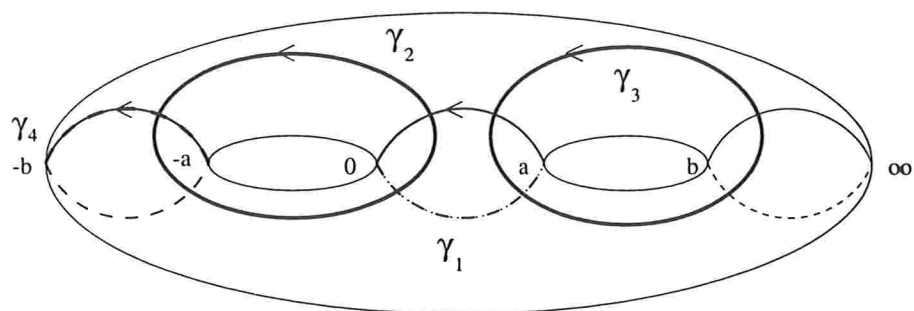
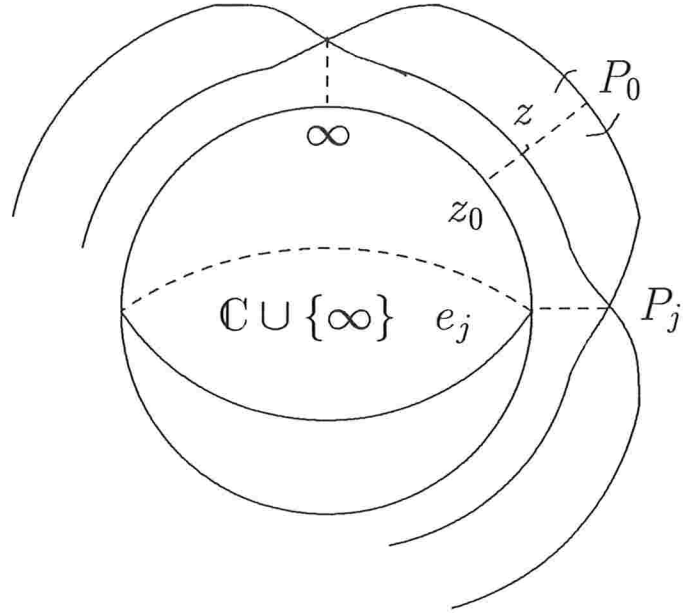


Figura 3.9

As curvas indicadas por  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  e  $\gamma_4$  nas figuras 3.6 e 3.9, formam uma base para a homologia de  $\bar{R}$ , que tem gênero  $p = 2$ .

**Demonstração de  $c_1$  :**

No que segue analisaremos o comportamento de  $g$  e  $\eta$  nas vizinhanças dos pontos de ramificação;  $-b, -a, 0, a, b$  e  $z = \infty$  de  $w(z)$ . Seja  $P_0$  um ponto regular da superfície de Riemann  $\bar{R}$ ,  $z : \bar{R} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  um sistema de coordenadas tal que  $z(P_0) = z_0 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  e  $z_0 \neq -b, -a, 0, a, b$  e  $\infty$  graficamente a situação é descrita na figura 3.10



**Figura 3.10**

Então, neste caso podemos escolher como coordenadas locais  $\zeta = z - z_0$ .

Logo:

$$\tilde{g}(\zeta) = g(\zeta + z_0) = B \cdot \frac{\sqrt{(\zeta + z_0)(\zeta + z_0 - a)(\zeta + z_0 + a)(\zeta + z_0 - b)(\zeta + z_0 + b)}}{(\zeta + z_0 - a)(\zeta + z_0 + a)}$$

Na vizinhança de  $\zeta = 0$ , que corresponde a  $z = z_0$ ,  $\tilde{g}(\zeta)$  é holomorfa.

$$\tilde{\eta}(\zeta) = \eta(\zeta + z_0) = \frac{(\zeta + z_0 - a)(\zeta + z_0 + a)}{\sqrt{(\zeta + z_0)(\zeta + z_0 - a)(\zeta + z_0 + a)(\zeta + z_0 - b)(\zeta + z_0 + b)}} d\zeta$$

também na vizinhança de  $\zeta = 0$   $\tilde{\eta}(\zeta)$  é holomorfa. Portanto,  $g$  e  $\eta$  o são em  $z_0$ .

Se  $z(P_j) = e_j$ , onde  $e_j$  é um dos pontos de ramificação, distinto do ponto de ramificação correspondente ao infinito, a coordenada local é  $\zeta = \sqrt{z - e_j}$ . Examinemos o caso em que  $e_j = -b$ . Temos,  $z = \zeta^2 - b$ ,  $dz = 2\zeta d\zeta$ ,

$$\tilde{g}(\zeta) = B \cdot \frac{\sqrt{(\zeta^2 - b)(\zeta^2 - b - a)(\zeta^2 - b + a)(\zeta^2 - 2b)\zeta^2}}{(\zeta^2 - b - a)(\zeta^2 - b + a)} =$$

$$= \zeta \cdot B \cdot \frac{\sqrt{(\zeta^2 - b)(\zeta^2 - b - a)(\zeta^2 - b + a)(\zeta^2 - 2b)}}{(\zeta^2 - b - a)(\zeta^2 - b + a)}.$$

Logo  $\tilde{g}(\zeta)$ , em  $\zeta = 0$ , tem um zero simples, isto é,  $g(\zeta)$  tem um zero simples em  $-b$ , pois  $0 < a < b$ . Na vizinhança do mesmo ponto vejamos o que acontece com  $\eta(z)$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(\zeta) &= \frac{(\zeta^2 - b - a)(\zeta^2 - b + a)}{\sqrt{(\zeta^2 - b)(\zeta^2 - b - a)(\zeta^2 - b + a)(\zeta^2 - 2b)}\zeta^2} 2\zeta d\zeta = \\ &= 2 \frac{(\zeta^2 - b - a)(\zeta^2 - b + a)}{\sqrt{(\zeta^2 - b)(\zeta^2 - b - a)(\zeta^2 - b + a)(\zeta^2 - 2b)}} d\zeta, \end{aligned}$$

que é holomorfa em  $\zeta = 0$ .

Se  $e_j = -a$ , então  $z = \zeta^2 - a$  e  $dz = 2\zeta d\zeta$ . Temos,

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\zeta) &= B \cdot \frac{\sqrt{(\zeta^2 - a)(\zeta^2 - 2a)\zeta^2(\zeta^2 - a - b)(\zeta^2 - a + b)}}{(\zeta^2 - 2a)\zeta^2} = \\ &= \frac{1}{\zeta} B \frac{\sqrt{(\zeta^2 - a)(\zeta^2 - 2a)(\zeta^2 - a - b)(\zeta^2 - a + b)}}{(\zeta^2 - 2a)}, \quad e \\ \tilde{\eta}(\zeta) &= \frac{(\zeta^2 - 2a)\zeta^2}{\sqrt{(\zeta^2 - a)(\zeta^2 - 2a)\zeta^2(\zeta^2 - a - b)(\zeta^2 - a + b)}} 2\zeta d\zeta = \\ &= \zeta^2 \cdot \frac{2(\zeta^2 - 2a)}{\sqrt{(\zeta^2 - a)(\zeta^2 - 2a)(\zeta^2 - a - b)(\zeta^2 - a + b)}} d\zeta \end{aligned}$$

Então, na vizinhança de  $\zeta = 0$   $\tilde{g}(\zeta)$  e  $\tilde{\eta}(\zeta)$  têm respectivamente um polo simples e um zero de ordem 2. Logo  $g(z)$  tem um polo simples em  $z = -a$  e  $\eta(z)$  um zero duplo nesse ponto.

Se  $e_j = 0$ , então  $z = \zeta^2$  e  $dz = 2\zeta d\zeta$ , logo na vizinhança de  $\zeta = 0$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\zeta) &= B \cdot \frac{\sqrt{\zeta^2(\zeta^2 - a)(\zeta^2 + a)(\zeta^2 - b)(\zeta^2 + b)}}{(\zeta^2 - a)(\zeta^2 + a)} = \\ &= \zeta \cdot B \frac{\sqrt{(\zeta^2 - a)(\zeta^2 + a)(\zeta^2 - b)(\zeta^2 + b)}}{(\zeta^2 - a)(\zeta^2 + a)}, \quad e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}(\zeta) &= \frac{(\zeta^2 - a)(\zeta^2 + a)}{\sqrt{\zeta^2(\zeta^2 - a)(\zeta^2 + a)(\zeta^2 - b)(\zeta^2 + b)}} 2\zeta d\zeta = \\ &= 2 \frac{(\zeta^2 - a)(\zeta^2 + a)}{\sqrt{(\zeta^2 - a)(\zeta^2 + a)(\zeta^2 - b)(\zeta^2 + b)}} d\zeta,\end{aligned}$$

Logo,  $\zeta = 0$  é um zero simples de  $\tilde{g}(\zeta)$  e um ponto regular de  $\tilde{\eta}$ , por conseguinte  $z = 0$  é um zero de  $g(z)$  e um ponto regular para  $\eta(z)$ .

No caso  $e_j = a$ , seja  $\zeta = \sqrt{z - a}$ , então  $dz = 2\zeta d\zeta$ , analogamente ao caso  $e_j = -a$ , temos

$$\tilde{g}(\zeta) = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{B\sqrt{(\zeta^2 + a)(\zeta^2 + 2a)(\zeta^2 + a - b)(\zeta^2 + a + b)}}{(\zeta^2 + 2a)} \quad e$$

$$\tilde{\eta}(\zeta) = \zeta^2 \frac{2(\zeta^2 + 2a)}{\sqrt{(\zeta^2 + a)(\zeta^2 + 2a)(\zeta^2 + a - b)(\zeta^2 + a + b)}} d\zeta.$$

Como  $0 < a < b$ , temos que em  $z = a$ ,  $g(z)$  tem um polo simples e  $\eta(z)$  tem um zero de ordem 2.

Se  $e_j = b$ , os cálculos são semelhantes ao caso em que  $e_j = -b$ . Então em  $z = b$ ,  $g(z)$  tem um zero simples e  $\eta(z)$  é regular nesse ponto.

Por último analisemos qual o comportamento de  $g(z)$  e  $\eta(z)$  na vizinhança de  $z = \infty$ . A coordenada local do ponto de ramificação  $e_j = \infty$  é  $\zeta = \frac{1}{\sqrt{z}}$ . Então:  $dz = \frac{-2}{\zeta^3} d\zeta$  e  $z = \frac{1}{\zeta^2}$ . E portanto,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\zeta) &= \frac{B\sqrt{\frac{1}{\zeta^2}(\frac{1}{\zeta^2} - a)(\frac{1}{\zeta^2} + a)(\frac{1}{\zeta^2} - b)(\frac{1}{\zeta^2} + b)}}{(\frac{1}{\zeta^2} - a)(\frac{1}{\zeta^2} + a)} = \\ &= \frac{1}{\zeta} \frac{B\sqrt{(1 - \zeta^2 a)(1 + \zeta^2 a)(1 - \zeta^2 b)(1 + \zeta^2 b)}}{(1 - \zeta^2 a)(1 + \zeta^2 a)}, \quad e \\ \tilde{\eta}(\zeta) &= \zeta^{-4} \frac{(1 - \zeta^2 a)(1 + \zeta^2 a)}{\zeta^{-5} \sqrt{(1 - \zeta^2 a)(1 + \zeta^2 a)(1 - \zeta^2 b)(1 + \zeta^2 b)}} - 2\zeta^{-3} d\zeta = \\ &= \frac{1}{\zeta^2} \frac{-2(1 - \zeta^2 a)(1 + \zeta^2 a)}{\sqrt{(1 - \zeta^2 a)(1 + \zeta^2 a)(1 - \zeta^2 b)(1 + \zeta^2 b)}} d\zeta.\end{aligned}$$



Logo em  $\zeta = 0$ ,  $\tilde{g}(\zeta)$  tem um polo simples e  $\tilde{\eta}(\zeta)$  tem um polo de ordem 2. E, por conseguinte,  $z = 0$  é um polo simples de  $g(z)$  e um polo duplo de  $\eta(z)$ . Portanto, se existir a tal superfície  $S$  este ponto é um “candidato” a fim. Os resultados acima estão resumidos na tabela a seguir.

$z$	$-b$	$-a$	$0$	$a$	$b$	$\infty$
$g(z)$	$0$	$\infty$	$0$	$\infty$	$0$	$\infty$
$\eta(z)$	$*$	$0^2$	$*$	$0^2$	$*$	$\infty^2$
$S$	ponto regular	ponto regular	ponto regular	ponto regular	ponto regular	fim de ordem $k_1=3$

Se existe a superfície mínima  $S$ , isto é, se as condições  $\mathbf{c}_1$ ,  $\mathbf{c}_2$ ,  $\mathbf{c}_3$  e  $\mathbf{c}_4$  do teorema 1.5.21 são satisfeitas, então  $S$  será conformemente equivalente à  $\overline{R} \setminus \{\infty\}$ . Assim sendo, teremos  $p = 2$ ,  $N = 1$  e  $\text{grau}(g) = 3$ . Logo  $C(S) = -4\pi \cdot \text{grau}(g) = -12\pi$ . Segue-se da fórmula de Jorge–Meeks–Gackstätter, dada em 1.5.19, que:

$$-12\pi = 2\pi(\chi(R) - k_1) = 2\pi(2 - 2p - N - k_1) = 2\pi(2 - 2 \cdot 2 - 1 - k_1) = 2\pi(-3 - k_1) \Rightarrow k_1 = 3$$

Logo o fim não é mergulhado.

Da tabela acima, é fácil ver que  $\eta(z)$  é holomorfa em  $R = \overline{R} \setminus \{\infty\}$ , e nos pontos em que  $g$  tem polo simples,  $\eta(z)$  tem zero de ordem 2, portanto a condição  $\mathbf{c}_1$  é satisfeita.

#### Demonstração de $\mathbf{c}_2$ :

Para calcular os períodos, precisamos analisar doze integrais:

$$\int_{\gamma_\nu} \phi_j(z) \quad , \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{e} \quad \nu = 1, 2, 3, 4$$

onde  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  e  $\gamma_4$  são as curvas fechadas  $\gamma_\nu : [0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  descritas na figura 3.6

Escrevendo, explicitamente, as expressões de  $\phi_1, \phi_2$  e  $\phi_3$  temos:

$$\begin{aligned}
\phi_1(z) &= \frac{1}{2}f(1-g^2)dz = \frac{1}{2} \frac{(z^2-a^2)}{w(z)} \left(1 - \frac{B^2w(z)^2}{(z^2-a^2)^2}\right) dz \\
&= \frac{1}{2} \frac{(z^2-a^2)}{w(z)} \left(1 - \frac{B^2z(z^2-b^2)}{(z^2-a^2)}\right) dz \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{(z^2-a^2) - B^2z(z^2-b^2)}{w(z)} \right] dz \\
\phi_1(z) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(z^2-a^2) - B^2z(z^2-b^2)}{\sqrt{z(z^2-a^2)(z^2-b^2)}} \right] dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2(z) &= \frac{i}{2}f(1+g^2)dz = \frac{1}{2} \frac{(z^2-a^2)}{w(z)} \left(1 + \frac{B^2w(z)^2}{(z^2-a^2)^2}\right) dz \\
&= \frac{i}{2} \frac{(z^2-a^2)}{w(z)} \left(1 + \frac{B^2z(z^2-b^2)}{(z^2-a^2)}\right) dz \\
&= \frac{i}{2} \left[ \frac{(z^2-a^2) + B^2z(z^2-b^2)}{w(z)} \right] dz \\
\phi_2(z) &= \frac{i}{2} \left[ \frac{(z^2-a^2) + B^2z(z^2-b^2)}{\sqrt{z(z^2-a^2)(z^2-b^2)}} \right] dz \\
\phi_3(z) &= gfdz = \left[ \frac{(z^2-a^2)}{w(z)} \cdot \frac{Bw(z)}{(z^2-a^2)} \right] dz = Bdz
\end{aligned}$$

Obviamente, não existe problema para anular a parte real do período de  $\phi_3$ , já que

$$\int_{\gamma_\nu} \phi_3(z) = \int_{\gamma_\nu} Bdz = B [z]_{\gamma_\nu(0)}^{\gamma_\nu(1)} = B(\gamma_\nu(1) - \gamma_\nu(0)) = 0$$

Se  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , então a terceira coordenada da imersão  $X : R \rightarrow \mathbb{R}^3$  se existir é  $x_3 = Bx$ . Restam “apenas” oito períodos a serem analisados; o primeiro é  $\int_{\gamma_1} \phi_1(z)$ . Vale ressaltar que as curvas da figura 3.6 são homotópicas as da figura abaixo. Os períodos calculados naquelas curvas são os mesmos sobre as curvas da figura 3.11 e 3.12 indicadas abaixo.

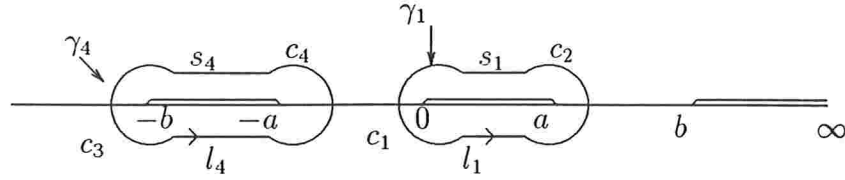


Figura 3.11

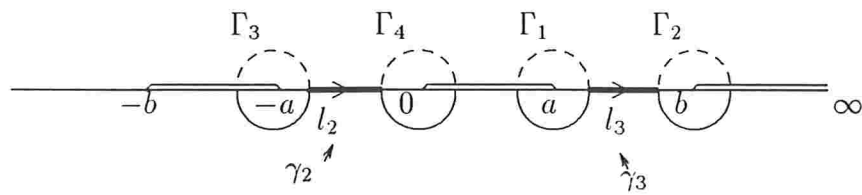


Figura 3.12

Onde,  $c_1 : z = \varepsilon e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ ,  $c_2 : z = a + \varepsilon e^{it}, t \in [-\pi, \pi]$ ,  $c_3 : z = -b + \varepsilon e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ ,  $c_4 : z = -a + \varepsilon e^{it}, t \in [-\pi, \pi]$ ,  $l_2 : -a + \varepsilon \leq x \leq -\varepsilon$  e  $l_3 : a + \varepsilon \leq x \leq b - \varepsilon$ . E  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$  são semelhantes a  $c_1, c_2, c_3$  e  $c_4$ , só que passam pelas duas folhas de  $w(z)$ . Então,

$$\int_{\gamma_1} \phi_1(z) = \int_{c_1} \phi_1(z) + \int_{l_1} \phi_1(x) + \int_{c_2} \phi_1(z) + \int_{s_1} \phi_1(x)$$

Quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , pelo lema 3.2.2 ítem *i)* e *ii)* temos que

$$\operatorname{Re} \left\{ \int_{\gamma_1} \phi_1(z) \right\} = \int_{\gamma_1} \phi_1(z) = \int_{l_1} \phi_1(x) + \int_{s_1} \phi_1(x)$$

Escolhendo um ramo de  $w(z) = \sqrt{z(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}$  definida sobre  $\mathbb{C} \setminus \{[-b, -a] \cup [0, a] \cup [a, \infty)\}$ , pertencente a uma das  $j = 1, 2$  folhas da superfície de Riemann compacta  $\bar{R}$ , de modo que, quando  $w(z)$  esteja na parte superior dos cortes das folhas  $j = 1, 2$ ,  $\arg(w(z)) = \pi j$ . Por exemplo, na parte superior do corte  $[0, a]$ ,  $w(z) = e^{j\pi i} \sqrt{z(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}$ . Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \phi_1(z) &= \frac{1}{2} \int_0^a \left[ \frac{(x^2 - a^2) - B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} \right] dx + \frac{1}{2} \int_a^0 \left[ \frac{(x^2 - a^2) - B^2 x(x^2 - b^2)}{e^{\pi i} \sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} \right] dx \\
\int_{\gamma_1} \phi_1(z) &= \frac{1}{2} \int_0^a \left[ \frac{(x^2 - a^2) - B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^a \left[ \frac{(x^2 - a^2) - B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} \right] dx \\
\int_{\gamma_1} \phi_1(z) &= \int_0^a \frac{(x^2 - a^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx - B^2 \int_0^a \frac{x(x^2 - b^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx \\
\int_{\gamma_1} \phi_1(z) &= - \int_0^a \frac{(a^2 - x^2)}{\sqrt{x(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}} dx + B^2 \int_0^a \frac{x(b^2 - x^2)}{\sqrt{x(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}} dx
\end{aligned}$$

Pondo,

$$F_1 = F_1(a, b) := \int_0^a \frac{(a^2 - x^2)}{\sqrt{x(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}} dx, \quad (3.5)$$

$$F_2 = F_2(a, b) := \int_0^a \frac{x(b^2 - x^2)}{\sqrt{x(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}} dx, \quad (3.6)$$

temos,

$$\int_{\gamma_1} \phi_1(z) = -F_1 + B^2 F_2 \in \mathbb{R}$$

Observemos que  $F_1 > 0$  e  $F_2 > 0 \quad \forall x \in [0, a]$ . Mostraremos, agora, que ambas integrais impróprias  $F_1$  e  $F_2$  convergem para um número finito.

$$F_1 = F_1(a, b) = \int_0^a \frac{(a^2 - x^2)}{\sqrt{x(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}} dx \leq \sqrt{\frac{2a}{(b^2 - a^2)}} \int_0^a \sqrt{\frac{a-x}{x}} dx$$

$$F_1 \leq \sqrt{\frac{2a}{(b^2 - a^2)}} \sqrt{a} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2a \sqrt{\frac{2a}{(b^2 - a^2)}}$$

$$F_2 = F_2(a, b) = \int_0^a \frac{x(b^2 - x^2)}{\sqrt{x(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}} dx \leq \sqrt{b(b+a)} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a-x}} dx = 2\sqrt{ab(b+a)}$$

Agora em  $\gamma_2$  temos,

$$\int_{\gamma_2} \phi_1(z) = \int_{\Gamma_3} \phi_1(z) + \int_{l_2} \phi_1(x) + \int_{\Gamma_4} \phi_1(z) + \int_{l_2^-} \phi_1(x)$$

Quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , pelo lema 3.2.2 ítem (vii) e (viii) temos que

$$\int_{\gamma_2} \phi_1(z) = \int_{l_2} \phi_1(x) + \int_{l_2^-} \phi_1(x)$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \phi_1(z) &= \frac{1}{2} \int_{-a}^0 \left[ \frac{(x^2 - a^2) - B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^{-a} \left[ \frac{(x^2 - a^2) - B^2 x(x^2 - b^2)}{e^{\pi i} \sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} \right] dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{-a} \frac{(x^2 - a^2) - B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx - \frac{1}{2} \int_0^{-a} \left[ \frac{(x^2 - a^2) - B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^a \frac{(x^2 - a^2) + B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{-x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx + \frac{1}{2} \int_0^a \frac{(x^2 - a^2) + B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{-x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx \\ &= -\frac{i}{2} \int_0^a \frac{(x^2 - a^2) + B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx - \frac{i}{2} \int_0^a \frac{(x^2 - a^2) + B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx \\ &= i \int_0^a \frac{(a^2 - x^2)}{\sqrt{x(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}} dx + iB^2 \int_0^a \frac{x(b^2 - x^2)}{\sqrt{x(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}} dx \end{aligned}$$

$$\int_{\gamma_2} \phi_1(z) = iF_1 + iB^2F_2 \in \mathbb{C}$$

Agora vamos calcular o período,

$$\int_{\gamma_1} \phi_2(z) = \int_{c_1} \phi_2(z) + \int_{l_1} \phi_2(x) + \int_{c_2} \phi_2(z) + \int_{s_1} \phi_2(x)$$

Análogo ao caso  $\int_{\gamma_1} \phi_1(z)$ , segue pelo ítem (i) e (ii) do lema 3.2.2 que

$$\int_{\gamma_1} \phi_2(z) = \int_{l_1} \phi_2(x) + \int_{s_1} \phi_2(x)$$

Logo,

$$\int_{\gamma_1} \phi_2(z) = \frac{i}{2} \int_0^a \left[ \frac{(x^2 - a^2) + B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} \right] dx + \frac{i}{2} \int_a^0 \left[ \frac{(x^2 - a^2) + B^2 x(x^2 - b^2)}{e^{\pi i} \sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} \right] dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{2} \int_0^a \left[ \frac{(x^2 - a^2) + B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} \right] dx + \frac{i}{2} \int_0^a \left[ \frac{(x^2 - a^2) + B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} \right] dx \\
&= i \int_0^a \frac{(x^2 - a^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx + iB^2 \int_0^a \frac{x(x^2 - b^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx \\
&= -i \int_0^a \frac{(a^2 - x^2)}{\sqrt{x(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}} dx - iB^2 \int_0^a \frac{x(b^2 - x^2)}{\sqrt{x(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}} dx \\
\int_{\gamma_1} \phi_2(z) &= -iF_1 - iB^2F_2 \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

Agora vamos calcular,  $\int_{\gamma_2} \phi_2(z)$ , pela figura 3.12 temos,

$$\int_{\gamma_2} \phi_2(z) = \int_{\Gamma_3} \phi_2(z) + \int_{l_2} \phi_2(x) + \int_{\Gamma_4} \phi_2(z) + \int_{l_2^-} \phi_2(x)$$

e, pelo lema 3.2.2 ítem (vii) e (viii), segue-se

$$\int_{\gamma_2} \phi_2(z) = \int_{l_2} \phi_2(x) + \int_{l_2^-} \phi_2(x)$$

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} \phi_2(z) &= \frac{i}{2} \int_{-a}^0 \left[ \frac{(x^2 - a^2) + B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} \right] dx + \frac{i}{2} \int_0^{-a} \left[ \frac{(x^2 - a^2) + B^2 x(x^2 - b^2)}{e^{\pi i} \sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} \right] dx \\
&= -\frac{i}{2} \int_0^{-a} \frac{(x^2 - a^2) + B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx - \frac{i}{2} \int_0^{-a} \frac{(x^2 - a^2) + B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx \\
&= \frac{i}{2} \int_0^a \frac{(x^2 - a^2) - B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{-x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx + \frac{i}{2} \int_0^a \frac{(x^2 - a^2) - B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{-x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^a \frac{(x^2 - a^2) - B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx + \frac{1}{2} \int_0^a \frac{(x^2 - a^2) - B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx \\
&= -\int_0^a \frac{(a^2 - x^2)}{\sqrt{x(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}} dx + B^2 \int_0^a \frac{x(b^2 - x^2)}{\sqrt{x(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}} dx \\
\int_{\gamma_2} \phi_2(z) &= -F_1 + B^2F_2 \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

Em resumo:

<i>curvas</i>	$\gamma_1$	$\gamma_2$
$\int \phi_1(z)$	$-F_1 + B^2 F_2$	$iF_1 + iB^2 F_2$
$\int \phi_2(z)$	$-iF_1 - iB^2 F_2$	$-F_1 + B^2 F_2$

A fim de encerrar os cálculos dos períodos, sejam  $\gamma_4$  e  $\gamma_3$  como nas figuras 3.11 e 3.12. Usando os itens (iii) e (iv) do lema 3.2.2, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_4} \phi_1(z) &= \int_{l_4} \phi_1(x) + \int_{s_4} \phi_1(x) \\
&= \frac{1}{2} \int_{-b}^{-a} \frac{x^2 - a^2 - B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx + \frac{1}{2} \int_{-a}^{-b} \frac{x^2 - a^2 - B^2 x(x^2 - b^2)}{e^{\pi i} \sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_{-a}^{-b} \frac{x^2 - a^2 - B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx - \frac{1}{2} \int_{-a}^{-b} \frac{x^2 - a^2 - B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{x^2 - a^2 + B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{-x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{x^2 - a^2 + B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{-x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{x^2 - a^2 - B^2 x(b^2 - x^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}} dx + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{x^2 - a^2 - B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}} dx \\
&= \int_a^b \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}} dx - B^2 \int_a^b \frac{x(b^2 - x^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}} dx
\end{aligned}$$

A primeira igualdade é consequência do lema 3.2.2; a segunda, da definição do ramo de  $w(z)$  e a quarta igualdade de uma simples mudança de variável ( $x = -t$ ). Introduzimos, agora, novos valores reais positivos:

$$F_3 = F_3(a, b) := \int_a^b \frac{(x^2 - a^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}} dx \leq \sqrt{\frac{b-a}{a}} \int_a^b \sqrt{\frac{1}{b-x}} dx$$

$$F_3 \leq \sqrt{\frac{b-a}{a}} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{b-x}} dx = \sqrt{\frac{b-a}{a}} 2\sqrt{b-a} = \frac{2(b-a)}{\sqrt{a}}$$

$$F_3 \geq \sqrt{\frac{a}{b^2(b-a)}} \int_a^b \sqrt{x-a} dx = \frac{2}{3} \sqrt{a}(b-a) > 0$$



$$F_4(a, b) := \int_a^b \frac{x(b^2 - x^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}} dx \leq \sqrt{\frac{b^2(b-a)}{a}} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x-a}} dx = \frac{2\sqrt{a}.b(b-a)}{a}$$

$$F_4 = F_4(a, b) \geq \sqrt{\frac{a}{b-a}} \int_a^b \sqrt{b-x} dx = \sqrt{a}(b-a) > 0$$

Então: 
$$\int_{\gamma_4} \phi_1(z) = F_3 - B^2 F_4 \in \mathbb{R}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_4} \phi_2(z) &= \int_{l_4} \phi_2(x) + \int_{s_4} \phi_2(x) \\ &= \frac{i}{2} \int_{-b}^{-a} \frac{x^2 - a^2 + B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx + \frac{i}{2} \int_{-a}^{-b} \frac{x^2 - a^2 + B^2 x(x^2 - b^2)}{e^{\pi i} \sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx \\ &= -\frac{i}{2} \int_{-a}^{-b} \frac{x^2 - a^2 + B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx - \frac{i}{2} \int_{-a}^{-b} \frac{x^2 - a^2 + B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx \\ &= \frac{i}{2} \int_a^b \frac{x^2 - a^2 - B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{-x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx + \frac{i}{2} \int_a^b \frac{x^2 - a^2 - B^2 x(x^2 - b^2)}{\sqrt{-x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx \\ &= \frac{i}{2} \int_a^b \frac{x^2 - a^2 + B^2 x(b^2 - x^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}} dx + \frac{i}{2} \int_a^b \frac{x^2 - a^2 + B^2 x(b^2 - x^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}} dx \\ &= i \int_a^b \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}} dx + iB^2 \int_a^b \frac{x(b^2 - x^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}} dx \end{aligned}$$

$$\int_{\gamma_4} \phi_2(z) = iF_3 + iB^2 F_4 \in \mathbb{C}$$

Por último falta calcular os períodos  $\int_{\gamma_3} \phi_1(z)$  e  $\int_{\gamma_3} \phi_2(z)$ , o faremos sobre a curva homotópica à  $\gamma_3$ , como indicada na figura 3.12. Levando-se em consideração o  $\arg(w(z))$  sobre  $l_3$  e  $l_3^-$ , segue dos ítems (v) e (vi) do lema 3.2.2,

$$\int_{\gamma_3} \phi_1(z) = \int_{l_3} \phi_1(x) + \int_{l_3^-} \phi_1(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{x^2 - a^2 - B^2x(x^2 - b^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx + \frac{1}{2} \int_b^a \frac{x^2 - a^2 - B^2x(x^2 - b^2)}{e^{\pi i} \sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx \\
&= \int_a^b \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)(-1)}} dx + B^2 \int_a^b \frac{x(b^2 - x^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)(-1)}} dx \\
&= -i \int_a^b \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}} dx - iB^2 \int_a^b \frac{x(b^2 - x^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}} dx \\
\int_{\gamma_3} \phi_1(z) &= -iF_3 - iB^2F_4 \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_3} \phi_2(z) &= \int_{l_3} \phi_2(x) + \int_{l_3^-} \phi_2(x) \\
&= \frac{i}{2} \int_a^b \frac{x^2 - a^2 + B^2x(x^2 - b^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx + \frac{i}{2} \int_b^a \frac{x^2 - a^2 + B^2x(x^2 - b^2)}{e^{\pi i} \sqrt{x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} dx \\
&= i \int_a^b \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)(-1)}} dx - iB^2 \int_a^b \frac{x(b^2 - x^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)(-1)}} dx \\
&= \int_a^b \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}} dx - B^2 \int_a^b \frac{x(b^2 - x^2)}{\sqrt{x(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}} dx \\
\int_{\gamma_3} \phi_2(z) &= F_3 - B^2F_4 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Resumindo os últimos resultados numa tabela temos:

<i>curvas</i>	$\gamma_3$	$\gamma_4$
$\int \phi_1(z)$	$-iF_3 - iB^2F_4$	$F_3 - B^2F_4$
$\int \phi_2(z)$	$F_3 - B^2F_4$	$iF_1 + iB^2F_4$

Finalmente podemos agrupar os oito períodos numa só tabela (abaixo), permitindo-nos relacioná-los como descreveremos a seguir.

<i>curvas</i>	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$
$\int \phi_1(z)$	$-F_1 + B^2F_2$	$iF_1 + iB^2F_2$	$-iF_3 - iB^2F_4$	$F_3 - B^2F_4$
$\int \phi_2(z)$	$-iF_1 - iB^2F_2$	$-F_1 + B^2F_2$	$F_3 - B^2F_4$	$iF_1 + iB^2F_4$

Analisando a tabela acima, é fácil concluir que:

$$Re \left\{ \int_{\gamma_\nu} \phi_1(z) \right\} = Re \left\{ \int_{\gamma_k} \phi_2(z) \right\} = 0, \quad \text{se } \nu = 2, 3 \text{ e } k = 1, 4.$$

Então para condição  $c_2$  do teorema 1.5.21 ser satisfeita, basta provar o seguinte,

$$Re \left\{ \int_{\gamma_\nu} \phi_1(z) \right\} = Re \left\{ \int_{\gamma_k} \phi_2(z) \right\} = 0, \quad \text{se } \nu = 1, 4 \text{ e } k = 2, 3$$

$$\text{Isto é, } -F_1 + B^2 F_2 = 0 \quad \text{e} \quad F_3 - B^2 F_4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_1 = B^2 F_2 \quad \text{e} \quad F_3 = B^2 F_4$$

Mostraremos, agora, a existência de  $B$  real para o qual as duas últimas equações valham simultaneamente. Em resumo, devemos determinar  $B$  tal que:

$$\begin{cases} F_1 \cdot F_4 = F_2 \cdot F_3 \\ F_1 = B^2 F_2 \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\text{Pois, } \frac{F_1}{F_2} = \frac{F_3}{F_4} = B^2.$$

Podemos escolher um número real  $B$  adequado, a fim de que satisfaça sempre a equação  $F_1 = B^2 F_2$  para qualquer valor de  $a$  e  $b$ , para isso basta fazer  $B = \sqrt{\frac{F_1}{F_2}}$ . Nosso objetivo agora é mostrar que existem números reais  $a$  e  $b$ , de tal modo que valha a primeira equação de 3.7, isto é,

$$\frac{F_1(a, b)}{F_2(a, b)} = \frac{F_3(a, b)}{F_4(a, b)}.$$

Sem perda de generalidade podemos supor que  $a = 1$  e  $b > 1$  (pois, sendo a transformação de Möbius  $T(z) := z - a + 1$ , temos  $T(a) = 1$  e  $T(b) > 1$ ). Sejam,

$$L(b) := F_1(1, b) \cdot F_4(1, b) = \int_0^1 \frac{1 - x^2}{\sqrt{x(1 - x^2)(b^2 - x^2)}} dx \cdot \int_1^b \frac{x(b^2 - x^2)}{\sqrt{x(x^2 - 1)(b^2 - x^2)}} dx \quad \text{e}$$

$$H(b) := F_2(1, b) \cdot F_3(1, b) = \int_0^1 \frac{x(b^2 - x^2)}{\sqrt{x(1 - x^2)(b^2 - x^2)}} dx \cdot \int_1^b \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x(x^2 - 1)(b^2 - x^2)}} dx$$

Então, o problema consiste em determinar o valor de  $b > 1$  para o qual  $L(b) = H(b)$ . Isto será feito com o auxílio do *teorema do valor intermediário*, mostrando que quando

$b \rightarrow \infty$ ,  $L(b) \leq H(b)$  e quando  $b \rightarrow 1$ ,  $L(b) \geq H(b)$ . Com esse objetivo façamos a seguinte mudança de variável  $y = x - 1$  nas integrais:

$$F_4(1, b) = \int_1^b \frac{x(b^2 - x^2)}{\sqrt{x(x^2 - 1)(b^2 - x^2)}} dx \quad \text{e} \quad F_3(1, b) = \int_1^b \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x(x^2 - 1)(b^2 - x^2)}} dx$$

Temos :

$$F_4 = \int_0^{b-1} \frac{(y+1)(b^2 - (y+1)^2)}{\sqrt{(y+1)((y+1)^2 - 1)(b^2 - (y+1)^2)}} dy \quad \text{e}$$

$$F_3 = \int_0^{b-1} \frac{(y+1)^2 - 1}{\sqrt{(y+1)((y+1)^2 - 1)(b^2 - (y+1)^2)}} dy$$

Logo,

$$\begin{aligned} L(b) &= \int_0^1 \frac{1-x^2}{\sqrt{x(1-x^2)(b^2-x^2)}} dx \int_0^{b-1} \frac{(x+1)(b^2 - (x+1)^2)}{\sqrt{(x+1)((x+1)^2 - 1)(b^2 - (x+1)^2)}} dx = \\ &= \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-x^2)^2}{x(1-x^2)(b^2-x^2)}} dx \int_0^{b-1} \sqrt{\frac{(x+1)^2(b^2 - (x+1)^2)^2}{(x+1)((x+1)^2 - 1)(b^2 - (x+1)^2)}} dx = \\ &= \int_0^1 \sqrt{\frac{(1+x)}{(b^2-x^2)}} \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx \int_0^{b-1} \sqrt{\frac{(x+1)(b^2 - (x+1)^2)}{x(x+2)}} dx \\ L(b) &= \int_0^1 \sqrt{\frac{(1+x)}{(b+x)(b-x)}} \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx \int_0^{b-1} \sqrt{\frac{(x+1)(b+x+1)}{x+2}} \sqrt{\frac{b-1-x}{x}} dx \end{aligned} \quad (3.8)$$

Já que estamos interessados em comparar  $H(b)$  com  $L(b)$ , expressá-lo-emos de modo semelhante. Assim,

$$\begin{aligned} H(b) &= \int_0^1 \sqrt{\frac{x^2(b^2-x^2)^2}{x(1-x^2)(b^2-x^2)}} dx \cdot \int_0^{b-1} \sqrt{\frac{((x+1)^2 - 1)^2}{(x+1)((x+1)^2 - 1)(b^2 - (x+1)^2)}} dx = \\ &= \int_0^1 \sqrt{\frac{x(b^2-x^2)}{(1-x^2)}} dx \cdot \int_0^{b-1} \sqrt{\frac{x(x+2)}{(x+1)(b^2 - (x+1)^2)}} dx \end{aligned}$$

Fazendo duas mudanças de variáveis,  $y = x - 1$  e  $y = x - (b - 1)$  respectivamente nas integrais.

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x(b^2-x^2)}{(1-x^2)}} dx \quad \text{e} \quad \int_0^{b-1} \sqrt{\frac{x(x+2)}{(x+1)(b^2 - (x+1)^2)}} dx, \quad \text{temos}$$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x(b^2 - x^2)}{(1 - x^2)}} dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{(b-1+y)(b+1-y)}{2-y}} \cdot \sqrt{\frac{1-y}{y}} dy \quad e$$

$$\int_0^{b-1} \sqrt{\frac{x(x+2)}{(x+1)(b^2 - (x+1)^2)}} dx = \int_0^{b-1} \sqrt{\frac{b+1-y}{(b-y)(2b-y)}} \sqrt{\frac{b-1-y}{y}} dy$$

Portanto,

$$H(b) = \int_0^1 \sqrt{\frac{(b-1+x)(b+1-x)}{2-x}} \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx \cdot \int_0^{b-1} \sqrt{\frac{b+1-x}{(b-x)(2b-x)}} \sqrt{\frac{b-1-x}{x}} dx \quad (3.9)$$

Agora pelos ítems (i) (iii) do lema 3.2.3 e equação 3.8 temos:

$$L(b) \leq \int_0^1 \sqrt{\frac{2}{b(b-1)}} \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx \cdot \int_0^{b-1} \sqrt{2b} \sqrt{\frac{b-1-x}{x}} dx$$

$$L(b) \leq \sqrt{\frac{4}{b-1}} \left\{ \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx \cdot \int_0^{b-1} \sqrt{\frac{b-1-x}{x}} dx \right\} \quad (3.10)$$

E pelos ítems (ii) (iv) do lema 3.2.3 e equação 3.9 segue,

$$H(b) \geq \int_0^1 \sqrt{\frac{b(b-1)}{2}} \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx \cdot \int_0^{b-1} \sqrt{\frac{1}{2b}} \sqrt{\frac{b-1-x}{x}} dx$$

$$H(b) \geq \sqrt{\frac{b-1}{4}} \left\{ \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx \cdot \int_0^{b-1} \sqrt{\frac{b-1-x}{x}} dx \right\} \quad (3.11)$$

Então, pelas inequações 3.10 e 3.11 temos:

$$H(b) \geq \sqrt{\frac{b-1}{4}} \cdot \frac{L(b)}{\sqrt{\frac{4}{b-1}}} \Leftrightarrow H(b) \geq \left(\frac{b-1}{4}\right) L(b)$$

Concluimos que para  $b \rightarrow \infty$ , segue  $H(b) \geq L(b)$ .

Agora para  $b = 1 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , a função  $H(b) \leq L(b)$ . De fato, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno podemos aplicar o lema 3.2.4. Primeiro usando os ítems (i) e (iii) em 3.8 obtemos,

$$L(1+\varepsilon) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1+\varepsilon+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon-x}} \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx \int_0^\varepsilon \sqrt{\frac{(1+x)(2+\varepsilon+x)}{2+x}} \sqrt{\frac{\varepsilon-x}{x}} dx$$

$$\begin{aligned}
L(1 + \varepsilon) &\geq \int_0^1 \sqrt{\frac{0,81}{1 + \varepsilon - x}} \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx \int_0^\varepsilon \sqrt{1} \sqrt{\frac{\varepsilon-x}{x}} dx \\
L(1 + \varepsilon) &\geq \int_0^1 \frac{0,9}{\sqrt{1 + \varepsilon - x}} \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx \int_0^\varepsilon \sqrt{\frac{\varepsilon-x}{x}} dx
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Por último usando os itens (ii) e (iv) do lema 3.2.4 em 3.9 obtemos,

$$\begin{aligned}
H(1+\varepsilon) &= \int_0^1 \sqrt{\frac{2 + \varepsilon - x}{2 - x}} \sqrt{\varepsilon + x} \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx \int_0^\varepsilon \sqrt{\frac{2 + \varepsilon - x}{(1 + \varepsilon - x)(2 + 2\varepsilon - x)}} \sqrt{\frac{\varepsilon-x}{x}} dx \\
H(1 + \varepsilon) &\leq \int_0^1 \sqrt{1,21} \sqrt{\varepsilon + x} \cdot \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx \int_0^\varepsilon \sqrt{1} \sqrt{\frac{\varepsilon-x}{x}} dx \\
H(1 + \varepsilon) &\leq \int_0^1 (1,1) \sqrt{\varepsilon + x} \cdot \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx \int_0^\varepsilon \sqrt{\frac{\varepsilon-x}{x}} dx
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Para poder comparar 3.12 e 3.13 só precisamos provar  $\frac{0,9}{\sqrt{1+\varepsilon-x}} \geq (1,1)\sqrt{\varepsilon+x}$ , o que já foi feito no item (v) do lema 3.2.4. Logo,

$$\begin{aligned}
L(1 + \varepsilon) &\geq \int_0^1 \frac{0,9}{\sqrt{1 + \varepsilon - x}} \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx \int_0^\varepsilon \sqrt{\frac{\varepsilon-x}{x}} dx \quad e \\
H(1 + \varepsilon) &\leq \int_0^1 \frac{0,9}{\sqrt{1 + \varepsilon - x}} \cdot \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx \int_0^\varepsilon \sqrt{\frac{\varepsilon-x}{x}} dx
\end{aligned}$$

Portanto,  $H(b) \leq L(b)$ , quando  $b \rightarrow 1$ .

Agora definimos a função  $f(b) = H(b) - L(b)$ , logo  $f(b) \geq 0$  quando  $b \rightarrow \infty$ , então existe  $k > 1$  tal que para todo  $b \geq k$ ,  $f(b) \geq 0$ . E  $f(b) \leq 0$  quando  $b = 1 + \varepsilon$  e  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Como  $f|_{[1+\varepsilon, k]}$  é contínua, pelo teorema do valor intermediário aplicado a  $f|_{[1+\varepsilon, k]}$ , existe um número real  $c \in (1 + \varepsilon, k)$  tal que  $f(c) = 0$ , isto é,  $H(c) = L(c)$ . Concluimos então que existe um número  $c > 1$ , para o qual vale,

$$\frac{F_1(1, c)}{F_2(1, c)} = \frac{F_3(1, c)}{F_4(1, c)}$$

**Demonstração de  $c_3$  :**

Aqui verificaremos que realmente os resíduos de  $\phi_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  no fim  $P_1 = \infty$  são

reais. É óbvio que  $Res(\phi_3; \infty) = 0$ , pois  $\phi_3 = Bdz$ . Usando a coordenada local  $\zeta = \frac{1}{\sqrt{z}}$ ,  $dz = \frac{-2}{\zeta^3}d\zeta$ , em  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , temos:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_1(\zeta) := \phi_1\left(\frac{1}{\zeta}\right) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{(\frac{1}{\zeta^4} - a^2) - B^2 \frac{1}{\zeta^2}(\frac{1}{\zeta^4} - b^2)}{\sqrt{\frac{1}{\zeta^2}(\frac{1}{\zeta^4} - a^2)(\frac{1}{\zeta^4} - b^2)}} \right\} \frac{-2}{\zeta^3}d\zeta = \\ &= \frac{-1}{\zeta^4} \left\{ \frac{\zeta^2(1 - \zeta^4 a^2) - B^2(1 - \zeta^4 b^2)}{\sqrt{(1 - \zeta^4 a^2)(1 - \zeta^4 b^2)}} d\zeta \right\}\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_2(\zeta) := \phi_2\left(\frac{1}{\zeta}\right) &= \frac{i}{2} \left\{ \frac{(\frac{1}{\zeta^4} - a^2) + B^2 \frac{1}{\zeta^2}(\frac{1}{\zeta^4} - b^2)}{\sqrt{\frac{1}{\zeta^2}(\frac{1}{\zeta^4} - a^2)(\frac{1}{\zeta^4} - b^2)}} \right\} \frac{-2}{\zeta^3}d\zeta = \\ &= \frac{-i}{\zeta^4} \left\{ \frac{\zeta^2(1 - \zeta^4 a^2) + B^2(1 - \zeta^4 b^2)}{\sqrt{(1 - \zeta^4 a^2)(1 - \zeta^4 b^2)}} d\zeta \right\}\end{aligned}$$

Logo,  $\phi_1$  e  $\phi_2$  têm um polo de ordem 4 em  $z = \infty$ , então  $Res(\phi_1; \infty) = Res(\phi_2; \infty) = 0$ . Portanto, acabamos de mostrar que existe a superfície mínima  $S$  com as hipóteses do teorema, exceto a referente à completeza.

#### Demonstração de $c_4$ :

Seja  $\gamma : [0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  uma curva divergente em  $\overline{R} \setminus \{\infty\}$ , com  $\lim_{t \rightarrow 1^-} |\gamma(t)| = \infty$ . Então,

$$comp(\gamma) = \int_{\gamma} \lambda(z)|dz| = \infty, \text{ onde } \lambda(z) = \frac{1}{2}|f|(1 + |g|^2).$$

De fato, como  $\phi_2(z)$  tem um polo de ordem 4 em  $z = \infty$ , na vizinhança  $V$  de  $\zeta = 0$ , sendo  $\zeta = \frac{1}{\sqrt{z}}$ , podemos escrever  $\tilde{\phi}_2(z) = \frac{1}{2\zeta^4}h(\zeta)d\zeta$ , onde  $h(z)$  é uma função holomorfa e  $h(0) \neq 0$  em  $V$ . Então, existe um número real  $M > 0$  tal que  $|h(z)| \geq M$ ,  $\forall z \in U \subset V$ . Logo para  $\tilde{\gamma}(t) := \frac{1}{\gamma(t)}$ ,  $\lim_{t \rightarrow 1^-} |\tilde{\gamma}(t)| = 0$  e  $\tilde{\lambda}(\zeta) = \lambda(\frac{1}{\sqrt{z}})$ . Seja  $\tilde{\gamma}(0) = \zeta_0$  e  $\tilde{\gamma}(t) = \zeta$ . Como,

$$\left| \frac{1}{2\zeta^4}h(\zeta)d\zeta \right| = |\tilde{\phi}_2(\zeta)| = \left| \frac{i}{2}f(1 + g^2)d\zeta \right| = \frac{1}{2}|f||1 + g^2||d\zeta| \leq \frac{1}{2}|f|(1 + |g|^2)|d\zeta| = \tilde{\lambda}(\zeta)|d\zeta|$$

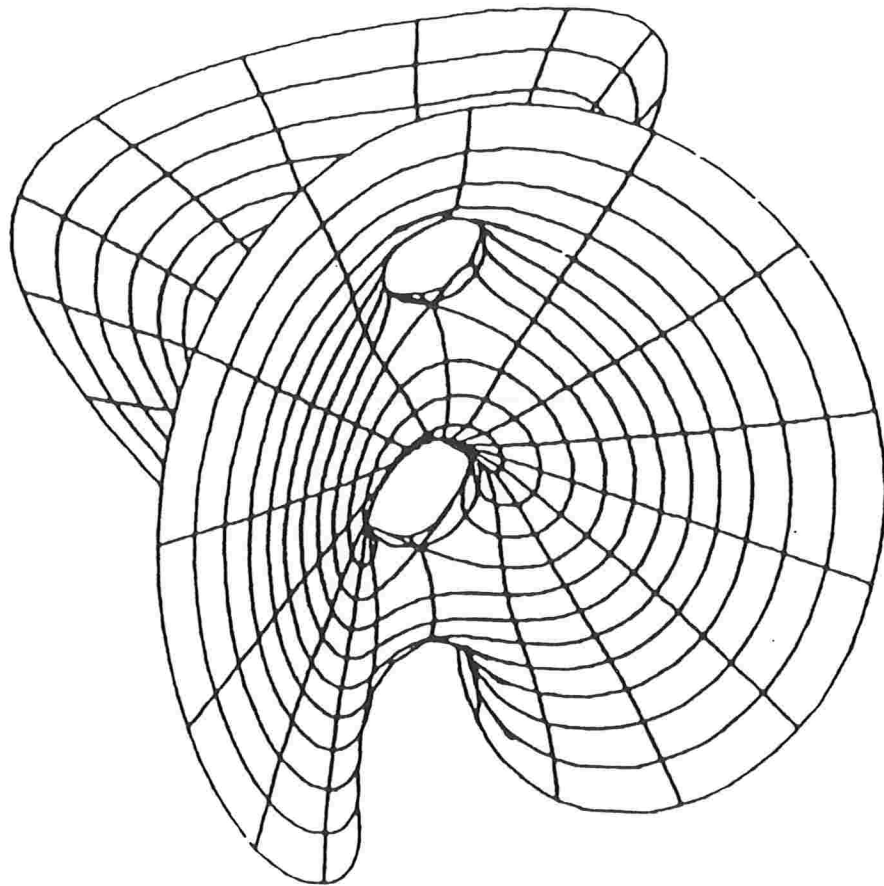
$$\text{Então, } comp(\tilde{\gamma}) = \int_{\tilde{\gamma}} \tilde{\lambda}(\zeta)|d\zeta| \geq \int_{\tilde{\gamma}} |\tilde{\phi}_2(\zeta)| = \frac{1}{2} \int_{\tilde{\gamma}} \left| \frac{1}{\zeta^4}h(\zeta)d\zeta \right| = \frac{1}{2} \int_{\tilde{\gamma}} |h(\zeta)| \left| \frac{1}{\zeta^4}d\zeta \right|$$



$$\text{Assim, } \text{comp}(\tilde{\gamma}) \geq \frac{M}{2} \int_{\tilde{\gamma}} \left| \frac{1}{\zeta^4} d\zeta \right| \geq \frac{M}{2} \left| \int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{\zeta^4} d\zeta \right| = \frac{M}{6} \left| \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\zeta^3} - \frac{1}{\zeta_0^3} \right) \right| = \infty$$

■

Em [21] o matemático K. Sato, esboça o gráfico da superfície acima demonstrada, veja figura abaixo.



## Capítulo 4

# Generalização da Superfície de Chen–Gackstätter de Gênero 1

No teorema 2.2.1 do capítulo 2 foi demonstrado que existe uma superfície mínima completa do  $\mathbb{R}^3$  com gênero 1, curvatura total  $-8\pi$  e um único fim. Além disso, na seção 3.1 do capítulo 3, fizemos uma adaptação à linguagem hiperelíptica para tal caso, de modo que poderíamos construí-la com:

$$\begin{cases} R = \bar{R} \setminus \{\infty\} \\ g(z) = \frac{2A\sqrt{z(z^2 - e_1^2)}}{z} = \frac{2Aw(z)}{z} \\ \eta(z) = \frac{zdz}{\sqrt{z(z^2 - e_1^2)}} = \frac{zdz}{w(z)} \end{cases}$$

onde  $\bar{R}$  é a superfície de Riemann de  $w(z) = 2\sqrt{z(z - e_1)(z + e_1)}$ .

Neste capítulo iremos generalizar a superfície descrita no teorema 2.2.1 para uma família de imersões mínimas completas com curvatura total  $-8k\pi$ , gênero  $k$  e um fim de ordem  $2k + 1$ .

Seja  $\bar{R}_k$  a superfície de Riemann compacta da função algébrica  $w(z)$ , dada por

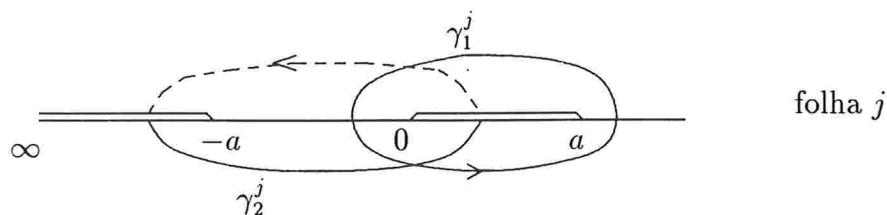
$$w^{k+1}(z) = z^k(z^2 - a^2) \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad a \in \mathbb{R}_+ \quad (4.1)$$

Intuitivamente a superfície de Riemann  $\bar{R}_k$  é obtida cortando a esfera de Riemann  $\mathbb{C} \cup \infty$  ao longo de duas curvas ligando  $\infty$  a  $-a$  e  $0$  a  $a$ , e em seguida colando

convenientemente as  $k + 1$  cópias destas esferas ao longo dos cortes. A superfície resultante  $\bar{R}_k$  é então uma esfera com  $k$  alças. Isto é facilmente comprovado pela equação dada no teorema 1.2.13, já que  $\infty, -a, 0, a$  são os pontos de ramificação de ordem  $k$  e o número de folhas é  $n = k + 1$ . De 1.5, temos:

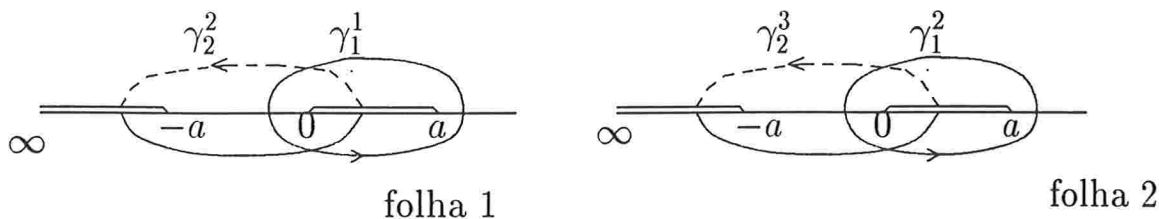
$$4k = 2(k + 1 + p - 1) \Rightarrow 4k = 2(k + p) \Rightarrow p = k$$

A base para homologia de  $\bar{R}_k$  é gerada por  $2k$  curvas fechadas não triviais de  $\bar{R}_k$ . Essas curvas serão denotadas por  $\gamma_1^j, \gamma_2^j, j = 1, 2, \dots, k + 1$  e o comportamento delas está esquematizado na figura 4.2. A mudança de índice  $j$  significa que essas curvas passam por cópias distintas das  $k + 1$  folhas de  $\bar{R}_k$ .



**Figura 4.1**

Por exemplo para  $k = 2$  temos uma superfície de Riemann  $\bar{R}_2$  construída com três folhas  $j = 1, 2, 3$  e  $\{\gamma_1^1, \gamma_1^2, \gamma_2^2, \gamma_2^3\}$  formam a base de sua homologia. Veja figura 4.3 abaixo.



**Figura 4.2**

Topologicamente:

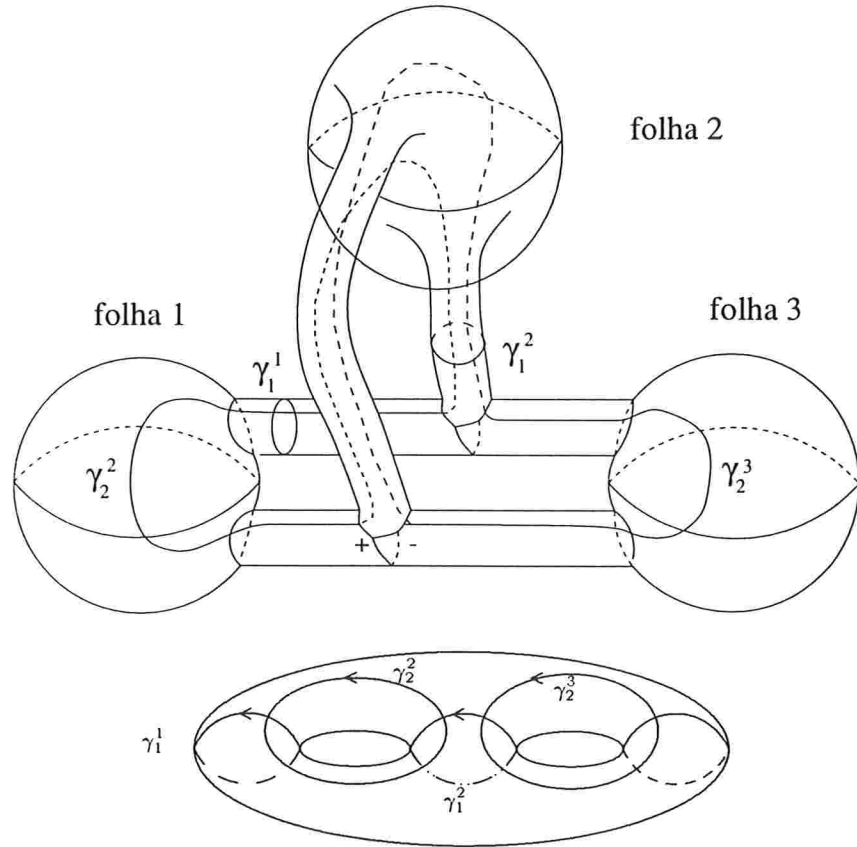


Figura 4.3

**Teorema 4.0.5 (H. Wang–J.Kang 1)** *Existe uma superfície mínima completa  $S$  do  $\mathbb{R}^3$  com gênero  $k$ , curvatura total finita  $C(S) = -8k\pi$  e um único fim de ordem  $2k + 1$ . Esta superfície é do tipo Enneper com  $k$  alças. Ela é a imersão da superfície de Riemann  $\bar{R}_k$ , da função algébrica,*

$$w(z) := [z^k(z^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}, \quad \text{onde } k \in \mathbb{Z}_+, a \in \mathbb{R}_+,$$

*menos um ponto de ramificação correspondente ao infinito. A representação de Weierstrass de  $S$  é dada por:*

$$\begin{aligned} g(z) &:= B \frac{w^k(z)}{z^k} \\ \eta(z) &:= \frac{z^k}{w^k(z)} dz \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde  $B$  é um número real a ser determinado. Em particular, quando  $k = 1$  temos o exemplo do teorema 2.2.1.

Para demonstrar este teorema, precisamos do lema:

**Lema 4.0.6** Sobre uma superfície de Riemann compacta  $\overline{R}_k$ , consideremos as diferenciais meromorfas  $\phi_1$  e  $\phi_2$  definidas por:

$$\begin{aligned}\phi_1 &:= \frac{1}{2} \left[ \frac{w(z)}{z^2 - a^2} - \frac{B^2(z^2 - a^2)}{w(z)} \right] dz \\ \phi_2 &:= \frac{i}{2} \left[ \frac{w(z)}{z^2 - a^2} + \frac{B^2(z^2 - a^2)}{w(z)} \right] dz\end{aligned}$$

onde  $\overline{R}_k$  é a superfície de  $w(z) = [z^k(z^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}$ , com  $a \in \mathbb{R}_+$  e  $k \in \mathbb{Z}_+$ .

Então valem as seguintes igualdades:

- (i)  $\int_{c_1} \phi_1 = \int_{c_1} \phi_2 = 0$ ,  $\forall z \in c_1 : z = \varepsilon e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$
- (ii)  $\int_{c_2} \phi_1 = \int_{c_2} \phi_2 = 0$ ,  $\forall z \in c_2 : z = a + \varepsilon e^{it}$ ,  $t \in [-\pi, \pi]$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$
- (iii)  $\int_{\Gamma_1} \phi_1 = \int_{\Gamma_1} \phi_2 = 0$ ,  $\forall z \in \Gamma_1 : z = \varepsilon e^{it}$ ,  $t \in [0, 4\pi]$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$
- (iv)  $\int_{\Gamma_2} \phi_1 = \int_{\Gamma_2} \phi_2 = 0$ ,  $\forall z \in \Gamma_2 : z = -a + \varepsilon e^{it}$ ,  $t \in [-\pi, 3\pi]$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$

onde  $\varepsilon$  é um real positivo suficientemente pequeno, as curvas  $c_1$  e  $c_2$  pertencem a uma das  $j$  folhas,  $\mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -a] \cup [0, a]\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k+1$ , de  $w(z)$ ; o argumento de cada ramo de  $w(z)$  sobre a parte superior dos cortes das folhas é  $\frac{2j\pi}{k+1}$ ;  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são curvas que passam por duas das  $k+1$  folhas de  $w(z)$ .

**Demonstração:**

dem. de (i): Como  $|z| = \varepsilon$ ,  $c_1 : z = \varepsilon e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , veja figura 4.4.

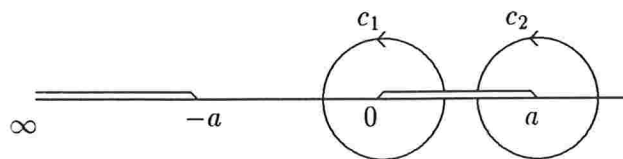


Figura 4.4

Temos,

$$\begin{aligned}
 \left| \int \phi_1(z) \right| &\leq \frac{1}{2} \int \left| \frac{e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} [z^k(z^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{(z^2 - a^2)} \right| |dz| + \frac{B^2}{2} \int \left| \frac{(z^2 - a^2)}{e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} [z^k(z^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}} \right| |dz| \\
 \left| \int \phi_1(z) \right| &\leq \frac{1}{2} \int \left| \frac{[z^k(z^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{(z^2 - a^2)} \right| |dz| + \frac{B^2}{2} \int \left| \frac{(z^2 - a^2)}{[z^k(z^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}} \right| |dz| \\
 \left| \int \phi_1(z) \right| &\leq \frac{1}{2} \int \left[ \frac{|z|}{|z^2 - a^2|} \right]^{\frac{k}{k+1}} |dz| + \frac{B^2}{2} \int \left[ \frac{|z^2 - a^2|}{|z|} \right]^{\frac{k}{k+1}} |dz| \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{c_1} \phi_1(z) \right| &\leq \frac{1}{2} \int_{C_1} \left[ \frac{|z|}{a^2 - |z^2|} \right]^{\frac{k}{k+1}} |dz| + \frac{B^2}{2} \int_{C_1} \left[ \frac{|z^2| + a^2}{|z|} \right]^{\frac{k}{k+1}} |dz| \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \pi \left[ \frac{\varepsilon}{a^2 - \varepsilon^2} \right]^{\frac{k}{k+1}} \varepsilon dt + \frac{B^2}{2} \int_0^{2\pi} \pi \left[ \frac{\varepsilon^2 + a^2}{\varepsilon} \right]^{\frac{k}{k+1}} \varepsilon dt \\
 &= \frac{1}{2} \varepsilon \left[ \frac{\varepsilon}{a^2 - \varepsilon^2} \right]^{\frac{k}{k+1}} \int_0^{2\pi} dt + \frac{B^2}{2} \varepsilon \left[ \frac{\varepsilon^2 + a^2}{\varepsilon} \right]^{\frac{k}{k+1}} \int_0^{2\pi} dt \\
 &= \left\{ \varepsilon \left[ \frac{\varepsilon}{a^2 - \varepsilon^2} \right]^{\frac{k}{k+1}} + B^2 \varepsilon^{\frac{1}{k+1}} [\varepsilon^2 + a^2]^{\frac{k}{k+1}} \right\} \pi
 \end{aligned}$$

Portanto,  $|\int_{c_1} \phi_1| \rightarrow 0$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . De modo análogo,  $|\int_{c_1} \phi_2| \rightarrow 0$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**dem. de (ii):** Agora em  $c_2$ ;  $|z - a| = \varepsilon$ ,  $c_2 : z = a + \varepsilon e^{it}$ ,  $t \in [-\pi, \pi]$ . Pela inequação 4.3, temos

$$\begin{aligned}
 \left| \int \phi_1(z) \right| &\leq \frac{1}{2} \int \left[ \frac{|z|}{|z^2 - a^2|} \right]^{\frac{k}{k+1}} |dz| + \frac{B^2}{2} \int \left[ \frac{|z^2 - a^2|}{|z|} \right]^{\frac{k}{k+1}} |dz| \\
 &= \frac{1}{2} \int \left[ \frac{|z|}{|z - a||z + a|} \right]^{\frac{k}{k+1}} |dz| + \frac{B^2}{2} \int \left[ \frac{|z + a||z - a|}{|z|} \right]^{\frac{k}{k+1}} |dz|
 \end{aligned}$$

Como,  $|z + a| \geq 2a - |z - a|$ ,  $|z| \geq a - |z - a|$ ,  $|z| \leq |z - a| + a$  e  $|z + a| \leq |z - a| + 2a$  segue,

$$\left| \int_{c_2} \phi_1(z) \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\varepsilon + a}{(2a - \varepsilon)\varepsilon} \right]^{\frac{k}{k+1}} \varepsilon dt + \frac{B^2}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{(\varepsilon + 2a)\varepsilon}{a - \varepsilon} \right]^{\frac{k}{k+1}} \varepsilon dt$$

$$\left| \int_{c_2} \phi_1(z) \right| \leq \left\{ \varepsilon^{\frac{1}{k+1}} \left[ \frac{\varepsilon + a}{2a - \varepsilon} \right]^{\frac{k}{k+1}} + \varepsilon B^2 \left[ \frac{\varepsilon(\varepsilon + 2a)}{a - \varepsilon} \right]^{\frac{k}{k+1}} \right\} \pi$$

Logo,  $|\int_{c_2} \phi_1| \rightarrow 0$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Similarmente  $|\int_{c_2} \phi_2| \rightarrow 0$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**dem. de (iii):** Em  $\Gamma_1$ ,  $|z| = \varepsilon$ ,  $\Gamma_1 : z = \varepsilon e^{it}$ ,  $t \in [0, 4\pi]$ , porque  $\Gamma_1$  é uma curva que passa por duas folhas, como na figura 4.5.

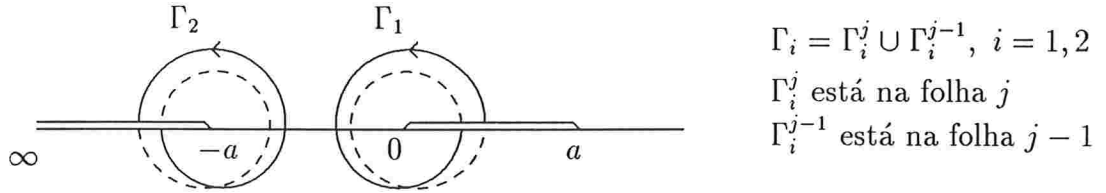


Figura 4.5

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \phi_1 &= \int_{\Gamma_1^j} \phi_1 + \int_{\Gamma_1^{j-1}} \phi_1 \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1^j} \frac{e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} [z^k(z^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{(z^2 - a^2)} dz + \frac{B^2}{2} \int_{\Gamma_1^j} \frac{(z^2 - a^2)}{e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} [z^k(z^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}} dz \right\} + \\ &+ \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1^{j-1}} \frac{e^{\frac{2(j-1)\pi i}{k+1}} [z^k(z^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{(z^2 - a^2)} dz + \frac{B^2}{2} \int_{\Gamma_1^{j-1}} \frac{(z^2 - a^2)}{e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} [z^k(z^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}} dz \right\} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_1} \phi_1 \right| &\leq \int_{\Gamma_1^j} \left| \frac{[z^k(z^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{(z^2 - a^2)} \right| |dz| + \frac{B^2}{2} \int_{\Gamma_1^j} \left| \frac{(z^2 - a^2)}{[z^k(z^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}} \right| |dz| + \\ &+ \int_{\Gamma_1^{j-1}} \left| \frac{[z^k(z^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{(z^2 - a^2)} \right| |dz| + \frac{B^2}{2} \int_{\Gamma_1^{j-1}} \left| \frac{(z^2 - a^2)}{[z^k(z^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}} \right| |dz| + \end{aligned}$$

Como em  $\Gamma_1^j$ ,  $|z| = \varepsilon$ , com  $z = \varepsilon e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  e em  $\Gamma_1^{j-1}$ ,  $|z| = \varepsilon$ , com  $z = \varepsilon e^{it}$ ,  $t \in [2\pi, 4\pi]$  segue do ítem (i) que  $|\int_{\Gamma_1} \phi_1(z)| \rightarrow 0$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .



**dem de (iv):** Com a mesma idéia de (iii); em  $\Gamma_2$ ,  $|z + a| = \varepsilon$ , e  $z = -a + \varepsilon e^{it}$ ,  $t \in [-\pi, 3\pi]$ . De modo que a parte de  $\Gamma_2$  pertencente a folha  $j$  é  $\Gamma_2^j : |z + a| = \varepsilon$  sendo  $z = -a + \varepsilon e^{it}$ ,  $t \in [\pi, 3\pi]$ , como na figura 4.5.

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} \phi_1 &= \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2^j} \frac{e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} [z^k(z^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{(z^2 - a^2)} dz + \frac{B^2}{2} \int_{\Gamma_2^j} \frac{(z^2 - a^2)}{e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} [z^k(z^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}} dz \right\} + \\ &+ \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2^{j-1}} \frac{e^{\frac{2(j-1)\pi i}{k+1}} [z^k(z^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{(z^2 - a^2)} dz + \frac{B^2}{2} \int_{\Gamma_2^{j-1}} \frac{(z^2 - a^2)}{e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} [z^k(z^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}} dz \right\} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_2} \phi_1 \right| &\leq \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2^j} \left[ \frac{|z|}{|z - a||z + a|} \right]^{\frac{k}{k+1}} |dz| + \frac{B^2}{2} \int_{\Gamma_2^j} \left[ \frac{|z - a||z + a|}{|z|} \right]^{\frac{k}{k+1}} |dz| + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2^{j-1}} \left[ \frac{|z|}{|z - a||z + a|} \right]^{\frac{k}{k+1}} |dz| + \frac{B^2}{2} \int_{\Gamma_2^{j-1}} \left[ \frac{|z + a||z - a|}{|z|} \right]^{\frac{k}{k+1}} |dz| \\ \left| \int_{\Gamma_2} \phi_1 \right| &\leq \left\{ \left[ \frac{\varepsilon + a}{\varepsilon(2a - \varepsilon)} \right]^{\frac{k}{k+1}} \varepsilon + \varepsilon B^2 \left[ \frac{\varepsilon(\varepsilon + 2a)}{a - \varepsilon} \right]^{\frac{k}{k+1}} \right\} 2\pi = \\ &= \left\{ \left[ \frac{\varepsilon + a}{2a - \varepsilon} \right]^{\frac{k}{k+1}} \varepsilon^{\frac{1}{k+1}} + \varepsilon^{\frac{2k+2}{k+1}} B^2 \left[ \frac{(\varepsilon + 2a)}{a - \varepsilon} \right]^{\frac{k}{k+1}} \right\} 2\pi \end{aligned}$$

Então,  $|\int_{\Gamma_2} \phi_1| \rightarrow 0$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Análogamente  $|\int_{\Gamma_2} \phi_2| \rightarrow 0$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . ■

**Demonstração:** Afirmamos que a superfície  $S$ , descrita no teorema 4.0.5, é obtida imergindo  $R_k := \overline{R}_k \setminus \{\infty\}$  em  $\mathbb{R}^3$ , tendo:

$$\begin{aligned} g(z) &:= B \frac{w^k(z)}{z^k} \\ \eta(z) &:= \frac{z^k}{w^k(z)} dz, \end{aligned} \tag{4.4}$$

como *representação de Weierstrass*, onde  $B$  uma constante real a ser determinada.

Analisaremos primeiramente o comportamento de  $g$  e  $\eta$ , nos pontos de ramificação de  $w(z)$ :  $\infty, -a, 0$  e  $a$ . Seja  $z : \overline{R}_k \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  um sistema de coordenadas, tal que  $z(P_i) = e_i$ , onde  $e_i$  é um dos pontos de ramificação distinto do infinito. A coordenada

local neste caso é  $\zeta = (z - e_i)^{\frac{1}{k+1}}$ . É fácil ver que das equações 4.1 e 4.4 temos:

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{B(z^2 - a^2)}{[z^k(z^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}} \\ \eta(z) &= \frac{[z^k(z^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{(z^2 - a^2)} dz \end{aligned} \quad (4.5)$$

Se  $e_i = -a$ , então  $\zeta = (z + a)^{\frac{1}{k+1}}$ ,  $z = \zeta^{k+1} - a$  e  $dz = (k+1)\zeta^k d\zeta$ . Logo,

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\zeta) &= \frac{B\zeta^{k+1}(\zeta^{k+1} - 2a)}{[(\zeta^{k+1} - a)^k(\zeta^{k+1} - 2a)\zeta^{k+1}]^{\frac{1}{k+1}}} = \zeta^k \frac{B(\zeta^{k+1} - 2a)}{[(\zeta^{k+1} - a)^k(\zeta^{k+1} - 2a)]^{\frac{1}{k+1}}} \\ \tilde{\eta}(\zeta) &= \frac{1}{\zeta^k} \frac{[(\zeta^{k+1} - a)^k(\zeta^{k+1} - 2a)]^{\frac{1}{k+1}}}{\zeta^{k+1} - 2a} (k+1)\zeta^k d\zeta = \frac{[(\zeta^{k+1} - a)^k(\zeta^{k+1} - 2a)]^{\frac{1}{k+1}}}{\zeta^{k+1} - 2a} (k+1)d\zeta \end{aligned}$$

Em  $\zeta = 0$ , temos que  $\tilde{g}(\zeta)$  tem um zero de ordem  $k$  e  $\tilde{\eta}(\zeta)$  é regular. O mesmo vale para  $e_i = a$ .

Se  $e_i = 0$ , então  $\zeta = z^{\frac{1}{k+1}}$ ,  $z = \zeta^{k+1}$  e  $dz = (k+1)\zeta^k d\zeta$ . Logo,

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\zeta) &= \frac{(\zeta^{k+1} - a)(\zeta^{k+1} + a)}{[\zeta^{k(k+1)}(\zeta^{k+1} - a)(\zeta^{k+1} + a)]^{\frac{1}{k+1}}} = \frac{1}{\zeta^k} \frac{(\zeta^{k+1} - a)(\zeta^{k+1} + a)}{[(\zeta^{k+1} - a)(\zeta^{k+1} + a)]^{\frac{1}{k+1}}} \\ \tilde{\eta}(\zeta) &= \zeta^k \frac{[(\zeta^{k+1} - a)(\zeta^{k+1} + a)]^{\frac{1}{k+1}}}{(\zeta^{k+1} - a)(\zeta^{k+1} + a)} (k+1)\zeta^k d\zeta = \zeta^{2k} \frac{[(\zeta^{k+1} - a)(\zeta^{k+1} + a)]^{\frac{1}{k+1}}}{(\zeta^{k+1} - a)(\zeta^{k+1} + a)} (k+1)d\zeta \end{aligned}$$

Portanto,  $g$  tem um polo se ordem  $k$  e  $\eta$  tem um zero de ordem  $2k$  em  $z = 0$ .

Agora, se  $z(P_i) = \infty$ , a coordenada local é  $\zeta = \frac{1}{z^{\frac{1}{k+1}}}$ ,  $z = \frac{1}{\zeta^{k+1}}$  e  $dz = \frac{-(k+1)}{\zeta^{k+2}} d\zeta$ .

Logo,

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\zeta) &= \frac{\left(\frac{1}{\zeta^{k+1}} - a\right) \left(\frac{1}{\zeta^{k+1}} + a\right)}{\left[\frac{1}{\zeta^{k(k+1)}} \left(\frac{1}{\zeta^{k+1}} - a\right) \left(\frac{1}{\zeta^{k+1}} + a\right)\right]^{\frac{1}{k+1}}} = \frac{\zeta^{-2(k+1)}(1 - \zeta^{k+1}a)(1 + \zeta^{k+1}a)}{\zeta^{-(k+2)}[(1 - \zeta^{k+1}a)(1 + \zeta^{k+1}a)]^{\frac{1}{k+1}}} \\ &= \frac{1}{\zeta^k} \frac{(1 - \zeta^{k+1}a)(1 + \zeta^{k+1}a)}{[(1 - \zeta^{k+1}a)(1 + \zeta^{k+1}a)]^{\frac{1}{k+1}}}; \quad (4.6) \\ \tilde{\eta}(\zeta) &= \zeta^k \frac{[(1 - \zeta^{k+1}a)(1 + \zeta^{k+1}a)]^{\frac{1}{k+1}}}{(1 - \zeta^{k+1}a)(1 + \zeta^{k+1}a)} \cdot \frac{-(k+1)}{\zeta^{k+2}} d\zeta \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\zeta^2} \frac{-(k+1)[(1-\zeta^{k+1}a)(1+\zeta^{k+1}a)]^{\frac{1}{k+1}}}{(1-\zeta^{k+1}a)(1+\zeta^{k+1}a)} d\zeta \quad (4.7)$$

Logo em  $\zeta = 0$   $\tilde{g}$  tem um polo de ordem  $k$  e  $\tilde{\eta}$  tem um polo de ordem 2. De onde segue que, em  $z = \infty$ ,  $g$  tem um polo de ordem  $k$  e  $\eta$  tem um polo de ordem 2. É fácil ver que se  $z(P_i) \neq e_i$  e  $\infty$ , então  $g$  e  $\eta$  são regulares. Resumindo os cálculos acima numa única tabela, segue que

$z$	$-a$	$0$	$a$	$\infty$
$g(z)$	$0^k$	$\infty^k$	$0^k$	$\infty^k$
$\eta(z)$	$*$	$0^{2k}$	$*$	$\infty^2$
S	ponto regular	ponto regular	ponto regular	fim de ordem $k_1=2k+1$

Da tabela acima, temos que:  $\eta$  é holomorfa em  $\overline{R}_k \setminus \{\infty\} = R_k$ , e nos pontos em que  $g$  tem polo de ordem  $k$ ,  $\eta$  tem zero de ordem  $2k$ . Portanto, a condição  $\mathbf{c}_1$  do teorema 1.5.21 é satisfeita.

**Observação:**

Do corolário 1.2.9,  $gr[(\eta)] = 2p - 2 = 2k - 2$ . Então,  $\mathcal{Z} - \mathcal{P} = 2k - 2$  deveria ser  $2k - 2$ , o que acontece na tabela acima.

Se a superfície  $S$  existir, então  $S$  será conformemente equivalente a  $\overline{R}_k \setminus \{\infty\}$ , e então teremos  $p = k$ ,  $N = 1$ ,  $grau(g) = 2k$  e  $C(S) = -8k\pi$ .

Usando-se a fórmula de Jorge-Meeks-Gackstätter, temos

$$-8k\pi = 2\pi(2 - 2k - 1 - k_1) = 2\pi(1 - 2k - k_1) \Rightarrow k_1 = 2k + 1.$$

Quando  $k = 1$ ,  $C(S) = -8\pi$  e  $k_1 = 3$ , como no teorema 2.2.1.

Da equação 4.5, obtemos facilmente

$$\begin{aligned} \phi_1(z) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{w(z)}{z^2 - a^2} - B^2 \frac{z^2 - a^2}{w(z)} \right] dz \\ \phi_2(z) &= \frac{i}{2} \left[ \frac{w(z)}{z^2 - a^2} + B^2 \frac{z^2 - a^2}{w(z)} \right] dz \\ \phi_3(z) &= B dz \end{aligned}$$

**Demonstração de  $\mathbf{c}_2$  :**

Para provar esta condição do teorema 1.5.21, é suficiente mostrar que para qualquer

uma das curvas descritas na figura 4.2,

$$\operatorname{Re} \left\{ \int_{\gamma_i^j} \phi_1 \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \int_{\gamma_i^j} \phi_2 \right\} = 0, \quad i = 1, 2 \quad \text{e} \quad j = 1, 2, \dots, k+1$$

Já que  $\int_{\gamma_i^j} \phi_3 = 0$ .

Explicitamente os períodos de  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , são:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_i^j} \phi_1 &= \frac{1}{2} \int_{\gamma_i^j} \frac{w(z)}{z^2 - a^2} dz - \frac{B^2}{2} \int_{\gamma_i^j} \frac{z^2 - a^2}{w(z)} dz \\ \int_{\gamma_i^j} \phi_2 &= \frac{i}{2} \int_{\gamma_i^j} \frac{w(z)}{z^2 - a^2} dz + \frac{iB^2}{2} \int_{\gamma_i^j} \frac{z^2 - a^2}{w(z)} dz \end{aligned} \quad (4.8)$$

Seja  $\omega(z)$  o ramo de  $w(z) = [z^k(z^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}$  definido sobre  $\mathbb{C} \setminus \{(\infty, -a] \cup [0, a]\}$  (como na figura 2) com valores na  $j$ -folha de  $\overline{R}_k$ , escolhido da seguinte maneira, quando  $\omega(z)$  estiver na parte superior do corte da  $j$ -ésima folha, temos  $\arg(\omega(z)) = \frac{2j\pi}{k+1}$ . Em particular, sobre a parte superior de  $[0, a]$  figura 4.2,

$$\omega(z) = e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} [x^k(x^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}$$

As curvas  $\gamma_1^j, \gamma_2^j$  descritas na figura 4.2, são homotópicas as da figura 4.6 abaixo. E as integrais calculadas sobre aquelas curvas são então iguais as integrais calculadas sobre estas curvas da figura 4.6.

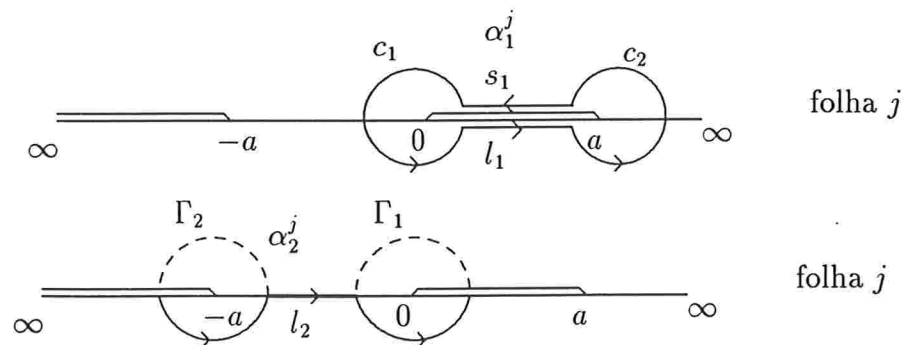


Figura 4.6

Vamos agora calcular os períodos de  $\phi_1$  e  $\phi_2$ .

$$\int_{\gamma_1^j} \phi_1(z) = \int_{\alpha_1^j} \phi_1(z) = \int_{c_1} \phi_1(z) \int_{l_1} \phi_1(x) + \int_{c_2} \phi_1(z) + \int_{s_1} \phi_1(x)$$

Pelos ítems (i) e (ii) do lema 4.0.6, temos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1^j} \phi_1(z) &= \int_{l_1} \phi_1(x) + \int_{s_1} \phi_1(x) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^a \frac{e^{\frac{2(j-1)\pi i}{k+1}} [x^k(x^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{x^2 - a^2} dx - \frac{B^2}{2} \int_0^a \frac{x^2 - a^2}{e^{\frac{2(j-1)\pi i}{k+1}} [x^k(x^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}} dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_a^0 \frac{e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} [x^k(x^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{x^2 - a^2} dx - \frac{B^2}{2} \int_a^0 \frac{x^2 - a^2}{e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} [x^k(x^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}} dx \\ &= \frac{1}{2} \left( e^{\frac{2(j-1)\pi i}{k+1}} - e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} \right) \int_0^a \frac{[x^k(x^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{x^2 - a^2} dx - \\ &\quad - \frac{B^2}{2} \left( e^{-\frac{2(j-1)\pi i}{k+1}} - e^{-\frac{2j\pi i}{k+1}} \right) \int_0^a \frac{x^2 - a^2}{[x^k(x^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}} dx \\ &= \frac{1}{2} \left( e^{\frac{2(j-1)\pi i}{k+1}} - e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} \right) \int_0^a \frac{[x^k(a^2 - x^2)e^{\pi i}]^{\frac{1}{k+1}}}{-(a^2 - x^2)} dx - \\ &\quad - \frac{B^2}{2} \left( e^{-\frac{2(j-1)\pi i}{k+1}} - e^{-\frac{2j\pi i}{k+1}} \right) \int_0^a \frac{-(a^2 - x^2)}{[x^k(a^2 - x^2)e^{\pi i}]^{\frac{1}{k+1}}} dx \\ &= \frac{1}{2} e^{\frac{\pi i}{k+1}} \left( -e^{\frac{2(j-1)\pi i}{k+1}} + e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} \right) \int_0^a \left[ \frac{x}{a^2 - x^2} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx - \\ &\quad - \frac{B^2}{2} e^{\frac{-\pi i}{k+1}} \left( -e^{\frac{-2(j-1)\pi i}{k+1}} + e^{\frac{-2j\pi i}{k+1}} \right) \int_0^a \left[ \frac{a^2 - x^2}{x} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx \\ \int_{\gamma_1^j} \phi_1(z) &= \frac{1}{2} e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} \left( e^{\frac{\pi i}{k+1}} - e^{\frac{-\pi i}{k+1}} \right) \int_0^a \left[ \frac{x}{a^2 - x^2} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx - \\ &\quad - \frac{B^2}{2} e^{\frac{-2j\pi i}{k+1}} \left( e^{\frac{-\pi i}{k+1}} - e^{\frac{\pi i}{k+1}} \right) \int_0^a \left[ \frac{a^2 - x^2}{x} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx \end{aligned}$$

Pondo,  $C_j := e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} \left( e^{\frac{\pi i}{k+1}} - e^{\frac{-\pi i}{k+1}} \right)$ ,

$$F(a) = F := \int_0^a \left[ \frac{x}{a^2 - x^2} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx \quad \text{e} \quad G(a) = G := \int_0^a \left[ \frac{a^2 - x^2}{x} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx$$

Temos:

$$\int_{\gamma_1^j} \phi_1(z) = \frac{1}{2} (C_j F - B^2 \overline{C_j} G)$$

Similarmente, levando-se em consideração a equação 4.8 e os ítems (i) e (ii) do lema 4.0.6, temos.

$$\int_{\gamma_1^j} \phi_2(z) = \frac{i}{2} (C_j F + B^2 \overline{C_j} G) = \frac{1}{2} (i C_j F - B^2 (i \overline{C_j}) G)$$

Agora, calculemos  $\int_{\gamma_2^j} \phi_1(z)$ . Temos (ver figura 4.6):

$$\int_{\gamma_2^j} \phi_1(z) = \int_{\alpha_2^j} \phi_1(z) = \int_{\Gamma_1} \phi_1(z) + \int_{l_2^-} \phi_1(x) + \int_{\Gamma_2} \phi_1(z) + \int_{l_2} \phi_1(x)$$

Segue então imediatamente dos ítems (iii) e (iv) do lema 4.0.6 que:

$$\int_{\Gamma_1} \phi_1(z) = \int_{\Gamma_2} \phi_1(z) = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2^j} \phi_1(z) &= \int_{l_2^-} \phi_1(x) + \int_{l_2} \phi_1(x) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{-a} \frac{e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} [x^k (x^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{x^2 - a^2} dx - \frac{B^2}{2} \int_0^{-a} \frac{x^2 - a^2}{e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} [x^k (x^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}} dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-a}^0 \frac{e^{\frac{2(j-1)\pi i}{k+1}} [x^k (x^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{x^2 - a^2} dx - \frac{B^2}{2} \int_{-a}^0 \frac{x^2 - a^2}{e^{\frac{2(j-1)\pi i}{k+1}} [x^k (x^2 - a^2)]^{\frac{1}{k+1}}} dx \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável  $x = -y$  e invertendo os limites de integração, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2^j} \phi_1(z) &= \frac{1}{2} e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} \int_0^a \frac{[(-1)^{k+1} x^k (a^2 - x^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{-(a^2 - x^2)} (-dx) - \\ &- \frac{B^2}{2} e^{\frac{-2j\pi i}{k+1}} \int_0^a \frac{-(a^2 - x^2)}{[(-1)^{k+1} x^k (a^2 - x^2)]^{\frac{1}{k+1}}} (-dx) - \\ &- \frac{1}{2} e^{\frac{2(j-1)\pi i}{k+1}} \int_0^a \frac{[(-1)^{k+1} x^k (a^2 - x^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{-(a^2 - x^2)} (-dx) + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{B^2}{2} e^{\frac{-2(j-1)\pi i}{k+1}} \int_0^a \frac{-(a^2 - x^2)}{[(-1)^{k+1} x^k (a^2 - x^2)]} (-dx) \\
\int_{\gamma_2^j} \phi_1(z) & = -\frac{1}{2} e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} \int_0^a \frac{[x^k (a^2 - x^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{a^2 - x^2} dx + e^{\frac{2(j-1)\pi i}{k+1}} \int_0^a \frac{[x^k (a^2 - x^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{a^2 - x^2} dx \\
& + \frac{B^2}{2} e^{\frac{-2j\pi i}{k+1}} \int_0^a \frac{a^2 - x^2}{[x^k (a^2 - x^2)]} dx - \frac{B^2}{2} e^{\frac{-2(j-1)\pi i}{k+1}} \int_0^a \frac{a^2 - x^2}{[x^k (a^2 - x^2)]} dx \\
& = -\frac{e^{\frac{-\pi i}{k+1}}}{2} \left( e^{\frac{(2j+1)\pi i}{k+1}} - e^{\frac{(2j-1)\pi i}{k+1}} \right) \int_0^a \frac{[x^k (a^2 - x^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{a^2 - x^2} dx + \\
& + \frac{B^2}{2} e^{\frac{\pi i}{k+1}} \left( e^{\frac{-(2j+1)\pi i}{k+1}} - e^{\frac{-(2j-1)\pi i}{k+1}} \right) \int_0^a \frac{a^2 - x^2}{[x^k (a^2 - x^2)]} dx \\
& = \frac{e^{\frac{-\pi i}{k+1}}}{2} \left\{ e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} \left( e^{\frac{\pi i}{k+1}} - e^{\frac{-\pi i}{k+1}} \right) \right\} \int_0^a \left[ \frac{x}{a^2 - x^2} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx \\
& + \frac{B^2}{2} e^{\frac{\pi i}{k+1}} \left\{ e^{\frac{-2j\pi i}{k+1}} \left( e^{\frac{-\pi i}{k+1}} - e^{\frac{\pi i}{k+1}} \right) \right\} \int_0^a \left[ \frac{a^2 - x^2}{x} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx \\
& = -\frac{1}{2} e^{\frac{-\pi i}{k+1}} C_j F + \frac{B^2}{2} e^{\frac{\pi i}{k+1}} \overline{C_j} G \\
\int_{\gamma_2^j} \phi_1(z) & = -\frac{1}{2} \left\{ (e^{\frac{-\pi i}{k+1}} C_j) F - B^2 (\overline{e^{\frac{-\pi i}{k+1}} C_j}) G \right\}
\end{aligned}$$

Além disso, pela equação 4.8 e os ítems (iii) e (iv) do lema 4.0.6 e com cálculos iguais aos acima, tem-se:

$$\int_{\gamma_2^j} \phi_2(z) = -\frac{1}{2} \left\{ (ie^{\frac{-\pi i}{k+1}} C_j) F - B^2 (\overline{ie^{\frac{-\pi i}{k+1}} C_j}) G \right\}.$$

O que encerra os cálculos dos períodos.

curvas	$\gamma_1^j$	$\gamma_2^j$
$\int \phi_1(z)$	$\frac{1}{2}(C_j F - B^2 \overline{C_j} G)$	$-\frac{1}{2}[(C_j e^{\frac{-\pi i}{k+1}}) F - B^2 (\overline{C_j e^{\frac{-\pi i}{k+1}}}) G]$
$\int \phi_2(z)$	$\frac{1}{2}[(iC_j) F - B^2 (\overline{iC_j}) G]$	$-\frac{1}{2}[(iC_j e^{\frac{-\pi i}{k+1}}) F - B^2 (\overline{iC_j e^{\frac{-\pi i}{k+1}}}) G]$

O próximo passo é provar que a parte real de cada período acima é igual a zero, para uma escolha conveniente da constante  $B$ .

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \left\{ \int_{\gamma_1^j} \phi_1 \right\} & = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(C_j F - B^2 \overline{C_j} G) + (\overline{C_j F - B^2 \overline{C_j} G})}{2} \right\} \\
& = \frac{1}{4} \{ (C_j + \overline{C_j})(F - B^2 G) \} = 0 \Leftrightarrow C_j + \overline{C_j} = 0 \quad \text{ou} \quad F - B^2 G = 0
\end{aligned}$$



Agora se  $C_j + \overline{C_j} = 0$ , então  $C_j$  é puramente imaginário, logo  $\int_{\gamma_j'} \phi_1$  também o é. Por outro lado  $F - B^2G = 0 \Leftrightarrow B = \pm \sqrt{F/G}$ . A constante  $B = -\sqrt{F/G}$  nos dá apenas uma superfície refletida da obtida considerando  $B = \sqrt{F/G}$ . Resta verificar que este valor para  $B$  é o mesmo para todos os períodos e que esse valor realmente existe. De fato,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \int_{\gamma_2'} \phi_1 \right\} &= -\frac{1}{4} \left\{ (C_j e^{\frac{-\pi i}{k+1}})F - B^2 \overline{(C_j e^{\frac{-\pi i}{k+1}})}G + \overline{(C_j e^{\frac{-\pi i}{k+1}})}F - B^2 (C_j e^{\frac{-\pi i}{k+1}})G \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left[ (C_j e^{\frac{-\pi i}{k+1}}) + \overline{(C_j e^{\frac{-\pi i}{k+1}})} \right] (F - B^2G) \right\} \end{aligned}$$

Logo,

$$\operatorname{Re} \left\{ \int_{\gamma_2'} \phi_1 \right\} = 0, \quad \text{se } B = \sqrt{F/G} \text{ ou } (C_j e^{\frac{-\pi i}{k+1}}) + \overline{(C_j e^{\frac{-\pi i}{k+1}})} = 0.$$

Se  $(C_j e^{\frac{-\pi i}{k+1}}) + \overline{(C_j e^{\frac{-\pi i}{k+1}})} = 0$ , então o complexo  $\alpha = C_j e^{\frac{-\pi i}{k+1}}$  é puramente imaginário, e

$$\int_{\gamma_2'} \phi_1 = -\frac{1}{2}(\alpha F - B^2 \overline{\alpha} G) = -\frac{1}{2}(\alpha F - B^2 \alpha G) = -\frac{1}{2}\alpha(F + B^2G) \in \mathbb{C}$$

Portanto,  $\operatorname{Re} \left\{ \int_{\gamma_2'} \phi_1 \right\} = 0$ .

Analogamente,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \int_{\gamma_1'} \phi_2 \right\} &= \frac{1}{4} \left\{ [(iC_j + \overline{C_j})] (F - B^2G) \right\} \\ \left\{ \int_{\gamma_2'} \phi_2 \right\} &= -\frac{1}{4} \left\{ \left[ (iC_j e^{\frac{-\pi i}{k+1}}) + \overline{(iC_j e^{\frac{-\pi i}{k+1}})} \right] (F - B^2G) \right\} \end{aligned}$$

Portanto,  $\operatorname{Re} \left\{ \int_{\gamma_1'} \phi_2 \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \int_{\gamma_2'} \phi_2 \right\} = 0$ , se  $B = \sqrt{F/G}$ . Observe que não podemos ter:  $C_j + \overline{C_j} = 0$ ,  $(iC_j) + \overline{(iC_j)} = 0$ ,  $(C_j e^{\frac{-\pi i}{k+1}}) + \overline{(C_j e^{\frac{-\pi i}{k+1}})} = 0$  e  $(iC_j e^{\frac{-\pi i}{k+1}}) + \overline{(iC_j e^{\frac{-\pi i}{k+1}})} = 0$ , válidos simultaneamente. Por exemplo, se  $C_j + \overline{C_j} = 0$ , temos que  $\operatorname{Re}\{C_j\} = 0$ ; e se  $(iC_j) + \overline{(iC_j)} = 0$ , temos que  $\operatorname{Re}\{iC_j\} = -\operatorname{Im}\{C_j\} = 0$ . Portanto, se as duas condições são satisfeitas  $C_j = 0$ ,  $\forall j$ , o que é uma contradição. Logo, devemos ter  $F - B^2G = 0$ .

Por último provaremos que,  $F > 0$  e  $G > 0$  e são finitos. Seja  $0 \leq x \leq a$  e  $0 < a < \infty$ , então é fácil ver que:

$$\frac{x}{2a^2} \leq \frac{x}{a^2 - x^2} \leq \frac{1}{a - x} \quad \text{e} \quad a - x \leq \frac{a^2 - x^2}{x} \leq \frac{2a^2}{x}$$

Logo, integrando temos:

$$0 < \frac{k+1}{(2k+1)2^{\frac{k}{k+1}}} a^{\frac{1}{k+1}} \leq F \leq (k+1)a^{\frac{1}{k+1}} \quad \text{e}$$

$$0 < \frac{k+1}{(2k+1)} a^{\frac{2k+1}{k+1}} \leq G \leq (k+1)2^{\frac{k}{k+1}} a^{\frac{2k+1}{k+1}}$$

O que prova  $c_2$ .

### Demonstração de $c_3$

Usando coordenadas locais  $\zeta = \frac{1}{z^{\frac{1}{k+1}}}$ , temos  $z = \frac{1}{\zeta^{k+1}}$  e  $dz = -\frac{(k+1)}{\zeta^{k+2}} d\zeta$  e as equações 4.6 e 4.7 podemos escrever,

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_1(\zeta) &= \phi_1 \left( \frac{1}{\zeta^{k+1}} \right) = \frac{1}{\zeta^{2k+2}} h(\zeta) \\ \tilde{\phi}_2(\zeta) &= \frac{i}{\zeta^{2k+2}} \tilde{h}(\zeta) \end{aligned} \quad (4.9)$$

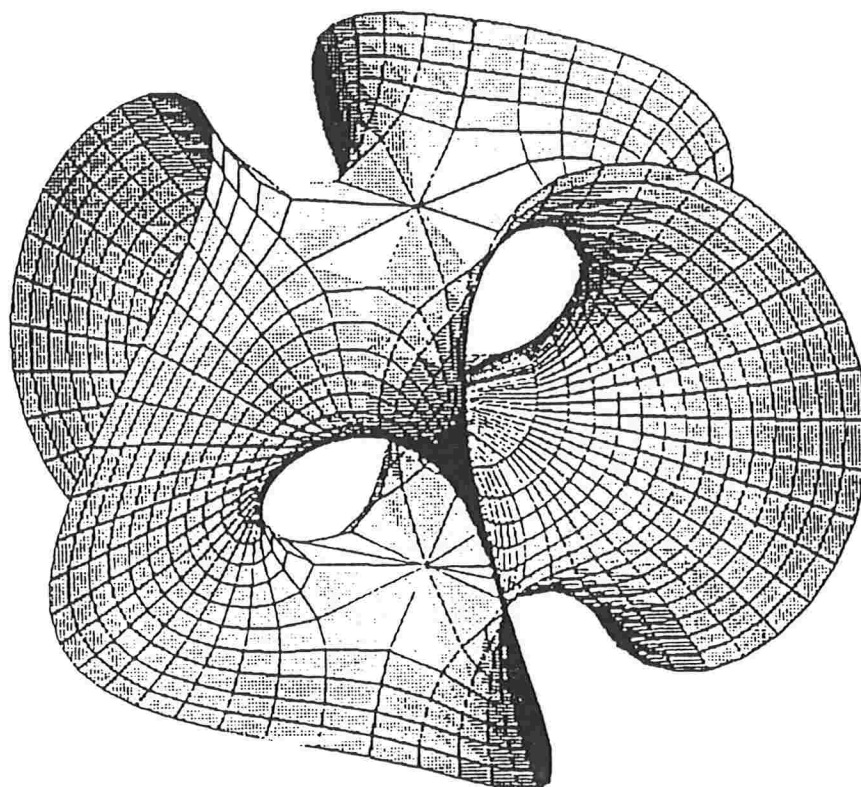
onde  $h$  e  $\tilde{h}$  são funções analíticas numa vizinhança de  $\zeta = 0$  e  $h(0) \neq 0$  e  $\tilde{h}(0) \neq 0$ . Portanto em  $\zeta = 0$ ,  $\tilde{\phi}_1$   $\tilde{\phi}_2$  tem um polo de ordem  $2k+2$ , assim  $\phi_1$  e  $\phi_2$  têm um polo de ordem  $2k+2$  em  $z = \infty$  que é o fim da superfície. Disto concluímos que,

$$Res(\phi_1; \infty) = Res(\phi_2; \infty) = Res(\phi_3; \infty) = 0.$$

### Demonstração de $c_4$

Já vimos na demonstração  $c_4$  do teorema 3.2.1, que  $|\tilde{\phi}_2(\zeta)| \leq \tilde{\lambda}(\zeta)|d\zeta|$ , logo da equação 4.9, segue que a superfície também é completa. ■

Quando  $k = 2$  no teorema 4.0.5, conforme as figuras 4.2 e 4.3, o gráfico da superfície mínima em  $\mathbb{R}^3$  de gênero 2, curvatura total  $-16\pi$  e um único fim do tipo Enneper é dada em [21] como na figura abaixo.



## Capítulo 5

# Generalização da Superfície de Chen-Gackstätter de Gênero 2

Neste capítulo o teorema principal generaliza a superfície de gênero 2 e curvatura total  $-12\pi$  descrita no teorema 3.2.1 do capítulo 3 para uma família de imersões mínimas completas com curvatura total  $-12k\pi$ , gênero  $2k$  e um fim de ordem  $2k + 1$ .

Seja  $\overline{R}_{2k}$  a superfície de Riemann compacta da função algébrica  $w(z)$ , dada por

$$w(z)^{k+1} = z(z^2 - a^2)^k(z^2 - b^2), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (5.1)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes reais satisfazendo,  $0 < a < b$  e  $k$  é um inteiro positivo maior ou igual a 1. Um modo topológico de construir a superfície  $\overline{R}_{2k}$ , é colar de modo conveniente as  $k + 1$  cópias de  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  ao longo dos cortes feitos ligando  $-b$  à  $-a$ ,  $0$  à  $a$  e  $b$  à  $\infty$ , como foi feito na figura 1.9. A superfície resultante,  $\overline{R}_{2k}$ , é homeomorfa a esfera com  $2k$  alças, isto é, tem gênero  $2k$ . De fato, pela equação de Riemann, do teorema 1.2.13,  $V = 2(n + p - 1)$ . Como os pontos de ramificação  $-b, -a, 0, a, b$  e  $\infty$  são todos de ordem  $k$  e o número de folhas usadas na construção de  $\overline{R}_{2k}$  é  $n = k + 1$  então,

$$6k = 2(k + 1 + p - 1) = 2(k + p) \Rightarrow p = 2k$$

A base para a homologia de  $\overline{R}_{2k}$  é formada por  $4k$  curvas fechadas não triviais sobre

$\overline{R}_{2k}$ . Essas curvas serão denotadas por  $\gamma_1^j, \gamma_2^j, \gamma_3^j$  e  $\gamma_4^j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k+1$ , indicadas na figura 5.1 abaixo. A mudança de índice  $j$ , nos diz que as curvas acima estão em cópias diferentes dentre as  $k+1$  folhas de  $w(z)$ . Observemos que quando  $k = 1$  essas curvas são as mesmas da figura 3.6 do teorema 3.2.1 do capítulo 3.

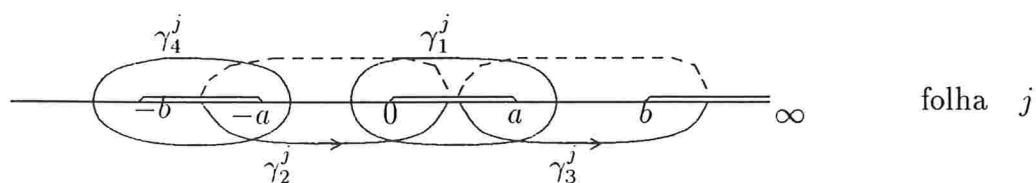


Figura 5.1

Por exemplo para  $k = 2$ , temos três folhas do tipo  $\mathbb{C} \setminus \{[-b, -a] \cup [0, a] \cup [b, \infty)\}$ , e oito curvas formando a base para homologia de  $\overline{R}_{2k}$ , indicadas nas figuras abaixo.

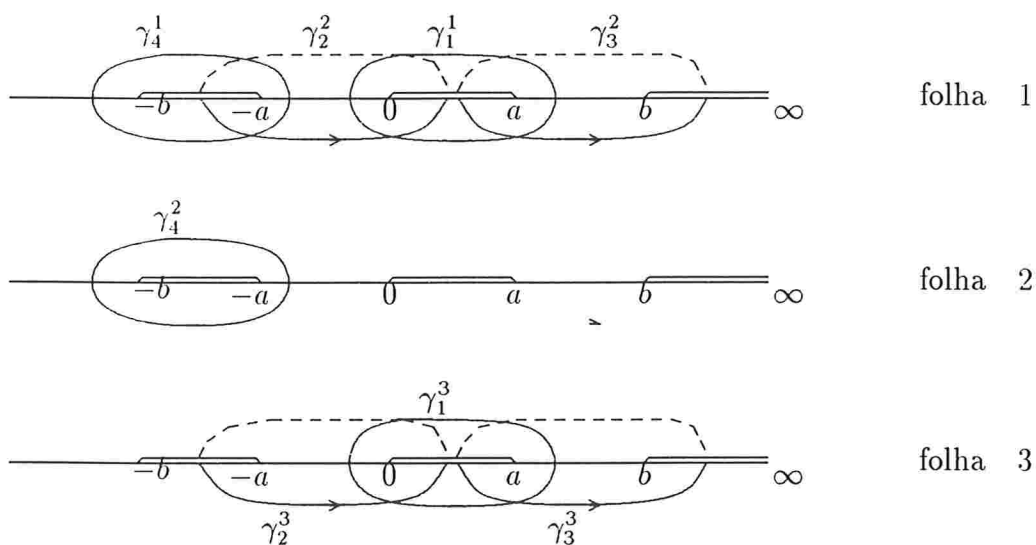


Figura 5.2

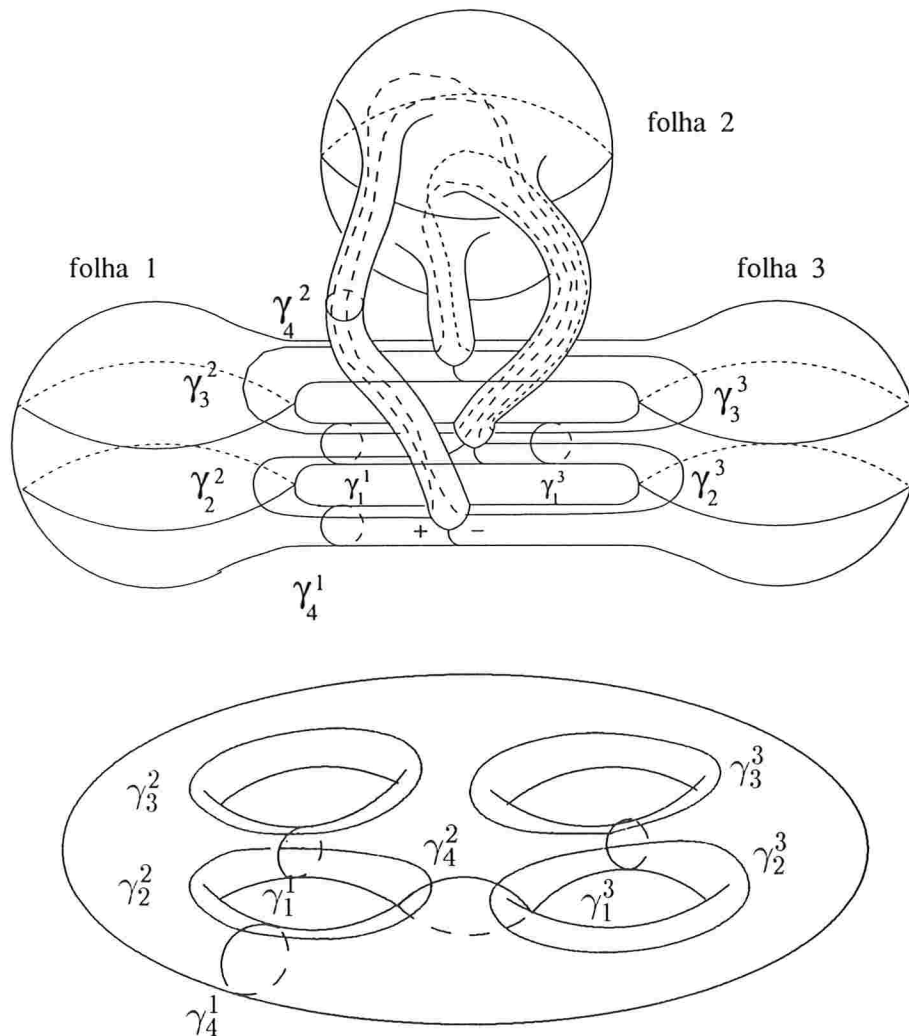


Figura 5.3

**Teorema 5.0.7 (H. Wang–J.Kang 2)** *Existe uma superfície mínima completa  $S$  do  $\mathbb{R}^3$  com gênero  $2k$ , curvatura total finita  $C(S) = -12k\pi$  e um único fim de ordem  $2k + 1$ . Esta superfície é do tipo Enneper com  $2k$  alças. Ela é a imersão da superfície de Riemann  $\bar{R}_{2k}$ , da função algébrica,*

$$w(z) := [z(z^2 - a^2)^k(z^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}, \quad \text{onde } k \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 < a < b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$



menos um ponto de ramificação correspondente ao infinito. A representação de Weierstrass de  $S$  é dada por:

$$\begin{cases} g(z) := \frac{Bw^k(z)}{(z^2 - a^2)^k} \\ \eta(z) := \frac{(z^2 - a^2)^k}{w^k(z)} dz \end{cases} \quad (5.2)$$

onde  $B$  é um número real a ser determinado. Em particular, quando  $k = 1$  temos o exemplo do teorema 3.2.1.

**Demonstração:**

O par  $(g, \eta)$ , dado em 5.2, candidato a representação de Weierstrass da superfície  $S$ , é dado explicitamente por:

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{Bz(z^2 - b^2)}{[z(z^2 - a^2)^k(z^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}} \\ \eta(z) &= \frac{[z(z^2 - a^2)^k(z^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{z(z^2 - b^2)} dz \end{aligned} \quad (5.3)$$

Logo, substituindo 5.3 nas expressões de  $\phi_1, \phi_2$  e  $\phi_3$  segue-se,

$$\begin{aligned} \phi_1(z) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{[z(z^2 - a^2)^k(z^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{z(z^2 - b^2)} - B^2 \frac{z(z^2 - b^2)}{[z(z^2 - a^2)^k(z^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}} \right\} dz \\ \phi_2(z) &= \frac{i}{2} \left\{ \frac{[z(z^2 - a^2)^k(z^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{z(z^2 - b^2)} + B^2 \frac{z(z^2 - b^2)}{[z(z^2 - a^2)^k(z^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}} \right\} dz \\ \phi_3(z) &= Bdz \end{aligned} \quad (5.4)$$

Agora, examinaremos o comportamento do par  $(g, \eta)$ , em seus zeros e polos. Seja  $z : \bar{R}_{2k} \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty$  tal que  $z(P_i) = e_i$ , onde  $e_i$  é um ponto de ramificação de  $w(z)$  distinto do  $\infty$ , isto é,  $-b, -a, 0, a$  e  $b$ . Para estes pontos consideremos a coordenada local  $\zeta = [z - e_i]^{\frac{1}{k+1}}$ . Então,  $z = \zeta^{k+1} + e_i$  e  $dz = (k+1)\zeta^k d\zeta$ .



Se  $e_i = -b$  temos,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\zeta) &= \frac{B(\zeta^{k+1} - b)(\zeta^{k+1} - 2b)\zeta^{k+1}}{[(\zeta^{k+1} - b)((\zeta^{k+1} - b)^2 - a^2)^k(\zeta^{k+1} - 2b)\zeta^{k+1}]^{\frac{1}{k+1}}} \\ &= \zeta^k \frac{B(\zeta^{k+1} - b)(\zeta^{k+1} - 2b)}{[(\zeta^{k+1} - b)((\zeta^{k+1} - b)^2 - a^2)^k(\zeta^{k+1} - 2b)]^{\frac{1}{k+1}}}\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}(\zeta) &= \frac{1}{\zeta^k} \frac{[(\zeta^{k+1} - b)((\zeta^{k+1} - b)^2 - a^2)^k(\zeta^{k+1} - 2b)]^{\frac{1}{k+1}}}{(\zeta^{k+1} - b)(\zeta^{k+1} - 2b)} (k+1)\zeta^k d\zeta \\ &= \frac{(k+1)[(\zeta^{k+1} - b)((\zeta^{k+1} - b)^2 - a^2)^k(\zeta^{k+1} - 2b)]^{\frac{1}{k+1}}}{(\zeta^{k+1} - b)(\zeta^{k+1} - 2b)} d\zeta,\end{aligned}$$

logo, em  $\zeta = 0$ ,  $\tilde{g}$  e  $\tilde{\eta}$  têm, respectivamente, um zero de ordem  $k$  e um ponto regular, o mesmo valendo para  $g$  e  $\eta$  em  $z = -b$ . O mesmo ocorre quando  $z = b$ .

Se  $e_i = -a$ , então  $z = \zeta^{k+1} - a$  e  $dz = (k+1)\zeta^k d\zeta$ . Assim:

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\zeta) &= \frac{B(\zeta^{k+1} - a)((\zeta^{k+1} - a)^2 - b^2)}{[(\zeta^{k+1} - a)(\zeta^{k+1} - 2a)^k \zeta^{k(k+1)}((\zeta^{k+1} - a)^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}} \\ &= \frac{1}{\zeta^k} \frac{B(\zeta^{k+1} - a)((\zeta^{k+1} - a)^2 - b^2)}{[(\zeta^{k+1} - a)(\zeta^{k+1} - 2a)^k((\zeta^{k+1} - a)^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}}\end{aligned}\quad e$$

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}(\zeta) &= \frac{[(\zeta^{k+1} - a)(\zeta^{k+1} - 2a)^k \zeta^{k(k+1)}((\zeta^{k+1} - a)^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{(\zeta^{k+1} - a)((\zeta^{k+1} - a)^2 - b^2)} (k+1)\zeta^k d\zeta \\ &= \zeta^{2k} \frac{(k+1)[(\zeta^{k+1} - a)(\zeta^{k+1} - 2a)^k((\zeta^{k+1} - a)^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{(\zeta^{k+1} - a)((\zeta^{k+1} - a)^2 - b^2)} d\zeta\end{aligned}$$

Portanto,  $\tilde{g}$  e  $\tilde{\eta}$  têm em  $\zeta = 0$ , respectivamente, um polo de ordem  $k$  e um zero de ordem  $2k$ . Logo em  $z = -a$ ,  $g$  tem um polo de ordem  $k$  e  $\eta$  tem um zero de ordem  $2k$ . A mesma conclusão se pode tirar quando  $z = a$ .

Por último se  $e_i = 0$  temos,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\zeta) &= \frac{B\zeta^{k+1}(\zeta^{2(k+1)} - b^2)}{[\zeta^{k+1}(\zeta^{2(k+1)} - a^2)^k(\zeta^{2(k+1)} - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}} \\ &= \zeta^k \frac{B(\zeta^{2(k+1)} - b^2)}{[(\zeta^{2(k+1)} - a^2)^k(\zeta^{2(k+1)} - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}}\end{aligned}\quad e$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\eta}(\zeta) &= \frac{\zeta [(\zeta^{2(k+1)} - a^2)^k (\zeta^{2(k+1)} - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{\zeta^{k+1} (\zeta^{2(k+1)} - b^2)} (k+1) \zeta^k d\zeta \\
&= \frac{(k+1) [(\zeta^{2(k+1)} - a^2)^k (\zeta^{2(k+1)} - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{(\zeta^{2(k+1)} - b^2)} d\zeta
\end{aligned}$$

Então em  $z = 0$ ,  $g$  e  $\eta$  têm, respectivamente, um zero de ordem  $k$  e um ponto regular.

Finalmente no último ponto de ramificação que falta,  $z(P_i) = \infty$ , a coordenada local a ser considerada é  $\zeta = \frac{1}{z^{\frac{1}{k+1}}}$ , então  $z = \frac{1}{\zeta^{k+1}}$  e  $dz = \frac{-(k+1)d\zeta}{\zeta^{k+1}}$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\zeta) &= \frac{B\zeta^{-(k+1)}(\zeta^{-2(k+1)} - b^2)}{[\zeta^{-(k+1)}(\zeta^{-2(k+1)} - a^2)^k (\zeta^{-2(k+1)} - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}} \\
&= \frac{B\zeta^{-(k+1)}\zeta^{-2(k+1)}(1 - \zeta^{2(k+1)}b^2)}{[\zeta^{-(k+1)}\zeta^{-2k(k+1)}(1 - \zeta^{2(k+1)}a^2)^k \zeta^{-2(k+1)}(1 - \zeta^{2(k+1)}b^2)]^{\frac{1}{k+1}}} \\
&= \frac{B\zeta^{-3(k+1)}(1 - \zeta^{2(k+1)}b^2)}{\zeta^{-(2k+3)}[(1 - \zeta^{2(k+1)}a^2)^k (1 - \zeta^{2(k+1)}b^2)]^{\frac{1}{k+1}}} \\
&= \frac{1}{\zeta^k} \frac{B(1 - \zeta^{2(k+1)}b^2)}{[(1 - \zeta^{2(k+1)}a^2)^k (1 - \zeta^{2(k+1)}b^2)]^{\frac{1}{k+1}}}
\end{aligned}$$

Segue, imediatamente que:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\zeta) &= \zeta^k \frac{[(1 - \zeta^{2(k+1)}a^2)^k (1 - \zeta^{2(k+1)}b^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{(1 - \zeta^{2(k+1)}b^2)} (-(k+1)\zeta^{-(k+2)})d\zeta \\
&= \frac{1}{\zeta^2} \frac{-(k+1)[(1 - \zeta^{2(k+1)}a^2)^k (1 - \zeta^{2(k+1)}b^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{(1 - \zeta^{2(k+1)}b^2)} d\zeta
\end{aligned}$$

Em  $z = \infty$ ,  $g$  e  $\eta$  têm, respectivamente, um polo de ordem  $k$  e um polo de ordem 2. Além disso, é óbvio que  $g$  e  $\eta$  são regulares em todo  $z \neq e_i$  e  $\infty$ . A tabela abaixo contém resumidamente os calculos feitos acima.

$z$	$-b$	$-a$	$0$	$a$	$b$	$\infty$
$g(z)$	$0^k$	$\infty^k$	$0^k$	$\infty^k$	$0^k$	$\infty^k$
$\eta(z)$	*	$0^{2k}$	*	$0^{2k}$	*	$\infty^2$
$S$	ponto regular	ponto regular	ponto regular	ponto regular	ponto regular	fim de ordem $k_1=2k+1$

Concluimos que  $\eta$  é holomorfa em  $\overline{R}_{2k} \setminus \{\infty\} = R_{2k}$ , e nos pontos em que  $g$  tem polos de ordem  $k$ ,  $\eta$  tem zeros de ordem  $2k$ , e a condição  $c_1$  do teorema 1.5.21 é satisfeita. Observe também que da tabela acima o número de zeros menos o número de polos de  $\eta$ , contando com a multiplicidade, é  $\mathcal{Z} - \mathcal{P} = 4k - 2$ . Por outro lado, pelo corolário 1.2.9,  $gr[(\eta)] = 2p - 2 = 4k - 2$ , e temos uma boa escolha para  $\eta$ .

Se de fato a superfície  $S$  existir, então ela será conformemente equivalente a  $\overline{R}_{2k} \setminus \{\infty\}$ , terá gênero  $2k$ , um fim em  $z(P_1) = \infty$  e  $grau(g) = 3k$ , pois pela tabela acima existem três valores distintos que são levados num mesmo ponto  $k$  vezes. Assim, a curvatura total será

$$C(S) = -4\pi \cdot grau(g) = -12k\pi,$$

e pela fórmula dada em 1.5 temos:

$$-12k\pi = 2\pi(2 - 2p - N - k_1) = 2\pi(2 - 4k - 1 - k_1) = 2\pi(1 - 4k - k_1) \Rightarrow k_1 = 2k + 1,$$

que será a ordem do único fim da superfície, caso exista, o qual, obviamente, não será mergulhado.

Daqui para a frente o objetivo é provar que  $\phi_1, \phi_2$  e  $\phi_3$  não têm períodos reais sobre  $\overline{R}_{2k} \setminus \{\infty\}$ . Tais períodos devem ser calculados sobre as curvas fechadas em  $\overline{R}_{2k} \setminus \{\infty\}$  e não triviais na homologia de  $\overline{R}_{2k}$ , indicadas na figura 5.1, já que todas as outras curvas fechadas serão combinação linear destas. É imediato verificar que  $Re\{\int_{\gamma_i} \phi_3\} = 0$ , para todo  $j = 1, 2, \dots, k + 1$  e  $i = 1, 2, 3, 4$ .

**Demonstração de  $c_2$  :**

Para demonstrar  $c_2$  precisamos somente provar que:

$$\operatorname{Re} \left\{ \int_{\gamma_i^j} \phi_1 \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \int_{\gamma_i^j} \phi_2 \right\} = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k+1, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

De 5.4 segue,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_i^j} \phi_1(z) &= \frac{1}{2} \int_{\gamma_i^j} \frac{[z(z^2 - a^2)^k(z^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{z(z^2 - b^2)} dz - \frac{B^2}{2} \int_{\gamma_i^j} \frac{z(z^2 - b^2)}{[z(z^2 - a^2)^k(z^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}} dz \\ \int_{\gamma_i^j} \phi_2(z) &= \frac{i}{2} \int_{\gamma_i^j} \frac{[z(z^2 - a^2)^k(z^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{z(z^2 - b^2)} dz + \frac{iB^2}{2} \int_{\gamma_i^j} \frac{z(z^2 - b^2)}{[z(z^2 - a^2)^k(z^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}} dz \end{aligned} \quad (5.5)$$

Consideremos  $\omega(z)$  o ramo de  $w(z) = [z(z^2 - a^2)^k(z^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}$  definido sobre  $\mathbb{C} \setminus \{[-b, -a] \cup [0, a] \cup [b, \infty)\}$  que é por exemplo uma das  $j = 1, 2, \dots, k+1$  folhas usadas na construção de  $\bar{R}_{2k}$ . Suponha que quando  $\omega(z)$  esteja na parte superior da linha do corte de cada ramo de  $w(z)$ , temos  $\arg(\omega) = \frac{2j\pi i}{k+1}$ . Por exemplo, na parte superior de  $[-b, -a]$ ,  $\omega(z) := e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} [x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}$ . Os períodos de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  sobre as curvas  $\gamma_1^j, \gamma_2^j, \gamma_3^j$  e  $\gamma_4^j$ , indicadas na figura 5.1, são os mesmos sobre as curvas indicadas na figura 5.4 abaixo.

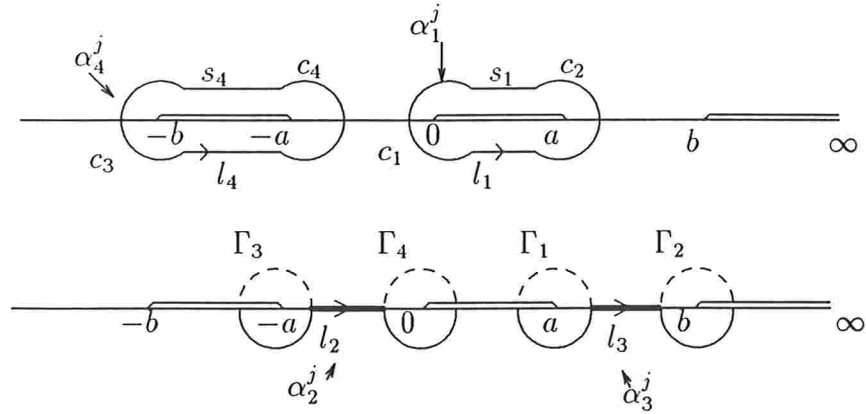


Figura 5.4

Passemos agora aos cálculos dos períodos. O primeiro será,  $\int_{\gamma_1^j} \phi_1$  que pela figura 5.4 acima é igual a,

$$\int_{\gamma_1^j} \phi_1(z) = \int_{\alpha_1^j} \phi_1(z) = \int_{c_1} \phi_1(z) + \int_{l_1} \phi_1(x) + \int_{c_2} \phi_1(z) + \int_{s_1} \phi_1(x)$$

Pelos ítems (i) e (ii) do lema 3.2.2, temos que  $\int_{c_1} \phi_1 = \int_{c_2} \phi_1 = 0$ , e então:

$$\int_{\gamma_1'} \phi_1(z) = \int_{\alpha_1'} \phi_1(z) = \int_{l_1} \phi_1(x) + \int_{s_1} \phi_1(x)$$

Assim de 5.5, temos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1'} \phi_1(z) &= \frac{1}{2} \int_0^a \frac{e^{\frac{2(j-1)\pi i}{k+1}} [x(x^2 - a^2)^k (x^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{x(x^2 - b^2)} dx - \\ &- \frac{B^2}{2} \int_0^a \frac{x(x^2 - b^2)}{e^{\frac{2(j-1)\pi i}{k+1}} [x(x^2 - a^2)^k (x^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}} dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_a^0 \frac{e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} [x(x^2 - a^2)^k (x^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{x(x^2 - b^2)} dx - \\ &- \frac{B^2}{2} \int_a^0 \frac{x(x^2 - b^2)}{e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} [x(x^2 - a^2)^k (x^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1'} \phi_1(z) &= \frac{1}{2} e^{\frac{2(j-1)\pi i}{k+1}} \int_0^a \frac{[x(a^2 - x^2)^k (b^2 - x^2)(-1)^{k+1}]^{\frac{1}{k+1}}}{-x(b^2 - x^2)} dx - \\ &- \frac{1}{2} e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} \int_0^a \frac{[x(a^2 - x^2)^k (b^2 - x^2)(-1)^{k+1}]^{\frac{1}{k+1}}}{-x(b^2 - x^2)} dx - \\ &- \frac{B^2}{2} e^{\frac{-2(j-1)\pi i}{k+1}} \int_0^a \frac{-x(b^2 - x^2)}{[x(a^2 - x^2)^k (b^2 - x^2)(-1)^{k+1}]^{\frac{1}{k+1}}} dx + \\ &+ \frac{B^2}{2} e^{\frac{-2j\pi i}{k+1}} \int_0^a \frac{-x(b^2 - x^2)}{[x(a^2 - x^2)^k (b^2 - x^2)(-1)^{k+1}]^{\frac{1}{k+1}}} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1'} \phi_1(z) &= \frac{1}{2} e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} \left( e^{\frac{-2\pi i}{k+1}} - 1 \right) \int_0^a \left[ \frac{a^2 - x^2}{x(b^2 - x^2)} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx - \\ &- \frac{B^2}{2} e^{\frac{-2j\pi i}{k+1}} \left( e^{\frac{2\pi i}{k+1}} - 1 \right) \int_0^a \left[ \frac{x(b^2 - x^2)}{a^2 - x^2} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx \end{aligned}$$

Pondo:

$$\begin{aligned}
F_1(a, b) = F_1 &:= \int_0^a \left[ \frac{a^2 - x^2}{x(b^2 - x^2)} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx, \\
G_1(a, b) = G_1 &:= \int_0^a \left[ \frac{x(b^2 - x^2)}{a^2 - x^2} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx \quad e \\
C_j &:= e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} \left( e^{\frac{-2\pi i}{k+1}} - 1 \right)
\end{aligned} \tag{5.6}$$

E, substituindo acima obtemos,

$$\int_{\gamma_1^j} \phi_1(z) = \frac{1}{2} (C_j F_1 - B^2 \overline{C_j} G_1) \tag{5.7}$$

Agora para calcular

$$\int_{\gamma_1^j} \phi_2(z) = \int_{\alpha_1^j} \phi_2(z) = \int_{c_1} \phi_2(z) + \int_{l_1} \phi_2(x) + \int_{c_2} \phi_2(z) + \int_{s_1} \phi_2(x),$$

de novo usamos os ítems (i) (ii) do lema 3.2.2, nos quais  $\int_{c_1} \phi_2 = \int_{c_2} \phi_2 = 0$ , e a equação 5.7, a menos de sinal e fator de multiplicação. Então:

$$\int_{\gamma_1^j} \phi_2(z) = \frac{i}{2} (C_j F_1 + B^2 \overline{C_j} G_1) = \frac{1}{2} [(iC_j) F_1 - B^2 (\overline{iC_j}) G_1]$$

Cálculo dos períodos de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  sobre  $\gamma_2^j$ :

$$\int_{\gamma_2^j} \phi_1(z) = \int_{\alpha_2^j} \phi_1(z) = \int_{\Gamma_3} \phi_1(z) + \int_{l_2} \phi_1(x) + \int_{\Gamma_4} \phi_1(z) + \int_{l_2^-} \phi_1(x) \quad e$$

$$\int_{\gamma_2^j} \phi_2(z) = \int_{\alpha_2^j} \phi_2(z) = \int_{\Gamma_3} \phi_2(z) + \int_{l_2} \phi_2(x) + \int_{\Gamma_4} \phi_2(z) + \int_{l_2^-} \phi_2(x),$$

Pelo lema 3.2.2 ítems (vii) (viii),

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2^j} \phi_1(z) &= \int_{l_2} \phi_1(x) + \int_{l_2^-} \phi_1(x) = \\
&= \frac{1}{2} \int_{-a}^0 \frac{e^{\frac{2(j-1)\pi i}{k+1}} [x(x^2 - a^2)^k (x^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{x(x^2 - b^2)} dx - \\
&- \frac{B^2}{2} \int_{-a}^0 \frac{x(x^2 - b^2)}{e^{\frac{2(j-1)\pi i}{k+1}} [x(x^2 - a^2)^k (x^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}} dx +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^{-a} \frac{e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} [x(x^2 - a^2)^k (x^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{x(x^2 - b^2)} dx - \\
& - \frac{B^2}{2} \int_0^{-a} \frac{x(x^2 - b^2)}{e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} [x(x^2 - a^2)^k (x^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}} dx
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável  $x = -y$ , invertendo os limites de integração, colocando sinais em evidência nos fatores  $(x^2 - a^2)$  e  $(x^2 - b^2)$ , com intuito de controlar o sinal da integral, e escrevendo  $(-1)^{k+2} = e^{(k+2)\pi i}$ ,  $(-1)^{\frac{(k+2)\pi i}{k+1}} = -e^{\frac{\pi i}{k+1}}$ , temos:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2^j} \phi_1(z) &= -\frac{1}{2} e^{\frac{2(j-1)\pi i}{k+1}} e^{\frac{\pi i}{k+1}} \int_0^a \frac{[x(a^2 - x^2)^k (b^2 - x^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{x(b^2 - x^2)} dx + \\
& + \frac{1}{2} e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} e^{\frac{\pi i}{k+1}} \int_0^a \frac{[x(a^2 - x^2)^k (b^2 - x^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{x(b^2 - x^2)} dx + \\
& + \frac{B^2}{2} e^{\frac{-2(j-1)\pi i}{k+1}} e^{\frac{-\pi i}{k+1}} \int_0^a \frac{x(b^2 - x^2)}{[x(a^2 - x^2)^k (b^2 - x^2)]^{\frac{1}{k+1}}} dx \\
& - \frac{B^2}{2} e^{\frac{-2j\pi i}{k+1}} e^{\frac{-\pi i}{k+1}} \int_0^a \frac{x(b^2 - x^2)}{[x(a^2 - x^2)^k (b^2 - x^2)]^{\frac{1}{k+1}}} dx \\
\int_{\gamma_2^j} \phi_1(z) &= -\frac{1}{2} e^{\frac{\pi i}{k+1}} \left[ e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} \left( e^{\frac{-2\pi i}{k+1}} - 1 \right) \right] \int_0^a \left[ \frac{a^2 - x^2}{x(b^2 - x^2)} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx - \\
& + \frac{B^2}{2} e^{\frac{-\pi i}{k+1}} \left[ e^{\frac{-2j\pi i}{k+1}} \left( e^{\frac{2\pi i}{k+1}} - 1 \right) \right] \int_0^a \left[ \frac{x(b^2 - x^2)}{a^2 - x^2} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\gamma_2^j} \phi_1(z) = -\frac{1}{2} \left[ \left( C_j e^{\frac{\pi i}{k+1}} \right) F_1 - B^2 \overline{\left( C_j e^{\frac{\pi i}{k+1}} \right)} G_1 \right]$$

Do mesmo modo:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2^j} \phi_2(z) &= -\frac{i}{2} \left[ \left( C_j e^{\frac{\pi i}{k+1}} \right) F_1 + B^2 \overline{\left( C_j e^{\frac{\pi i}{k+1}} \right)} G_1 \right] \\
\int_{\gamma_2^j} \phi_2(z) &= -\frac{1}{2} \left[ \left( i C_j e^{\frac{\pi i}{k+1}} \right) F_1 - B^2 \overline{\left( i C_j e^{\frac{\pi i}{k+1}} \right)} G_1 \right]
\end{aligned}$$

Os períodos de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  sobre  $\gamma_3^j$ , usando os itens (v) (vi) do lema 3.2.2 são:

$$\int_{\gamma_3^j} \phi_1(z) = \int_{l_3} \phi_1(x) + \int_{l_3^-} \phi_1(x) \quad \text{e} \quad \int_{\gamma_3^j} \phi_2(z) = \int_{l_3} \phi_2(x) + \int_{l_3^-} \phi_2(x)$$



Então,

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_3^j} \phi_1(z) &= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{e^{\frac{2(j-1)\pi i}{k+1}} [x(x^2 - a^2)^k (x^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{x(x^2 - b^2)} dx - \\
&- \frac{B^2}{2} \int_a^b \frac{x(x^2 - b^2)}{e^{\frac{2(j-1)\pi i}{k+1}} [x(x^2 - a^2)^k (x^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}} dx + \\
&+ \frac{1}{2} \int_b^a \frac{e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} [x(x^2 - a^2)^k (x^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{x(x^2 - b^2)} dx - \\
&- \frac{B^2}{2} \int_b^a \frac{x(x^2 - b^2)}{e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} [x(x^2 - a^2)^k (x^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}} dx
\end{aligned}$$

Por um cálculo análogo ao feito em  $\int_{\gamma_2^j} \phi_1$ , temos:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_3^j} \phi_1(z) &= -\frac{1}{2} e^{\frac{\pi i}{k+1}} \left[ e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} \left( e^{-\frac{2\pi i}{k+1}} - 1 \right) \right] \int_a^b \left[ \frac{x^2 - a^2}{x(b^2 - x^2)} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx + \\
&+ \frac{B^2}{2} e^{\frac{-\pi i}{k+1}} \left[ e^{-\frac{2j\pi i}{k+1}} \left( e^{\frac{2\pi i}{k+1}} - 1 \right) \right] \int_a^b \left[ \frac{x(b^2 - x^2)}{x^2 - a^2} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_3^j} \phi_1(z) &= -\frac{1}{2} \left[ \left( C_j e^{\frac{\pi i}{k+1}} \right) F_2 - B^2 \overline{\left( C_j e^{\frac{\pi i}{k+1}} \right) G_2} \right] \quad e \\
\int_{\gamma_3^j} \phi_2(z) &= -\frac{1}{2} \left[ \left( i C_j e^{\frac{\pi i}{k+1}} \right) F_2 - B^2 \overline{\left( i C_j e^{\frac{\pi i}{k+1}} \right) G_2} \right]
\end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}
F_2(a, b) = F_2 &= \int_a^b \left[ \frac{x^2 - a^2}{x(b^2 - x^2)} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx \quad e \\
G_2(a, b) = G_2 &= \int_a^b \left[ \frac{x(b^2 - x^2)}{x^2 - a^2} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx
\end{aligned} \tag{5.8}$$

são constantes reais positivas. Finalmente,

$$\int_{\gamma_4^j} \phi_1(z) = \int_{l_4} \phi_1(x) + \int_{s_4} \phi_1(x) \quad e \quad \int_{\gamma_4^j} \phi_2(z) = \int_{l_4} \phi_2(x) + \int_{s_4} \phi_2(x)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_4^j} \phi_1(z) &= \frac{1}{2} \int_{-b}^{-a} \frac{e^{\frac{2(j-1)\pi i}{k+1}} [x(x^2 - a^2)^k (x^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{x(x^2 - b^2)} dx - \\
&- \frac{B^2}{2} \int_{-b}^{-a} \frac{x(x^2 - b^2)}{e^{\frac{2(j-1)\pi i}{k+1}} [x(x^2 - a^2)^k (x^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}} dx + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{-a}^{-b} \frac{e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} [x(x^2 - a^2)^k (x^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}}{x(x^2 - b^2)} dx - \\
&- \frac{B^2}{2} \int_{-a}^{-b} \frac{x(x^2 - b^2)}{e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} [x(x^2 - a^2)^k (x^2 - b^2)]^{\frac{1}{k+1}}} dx
\end{aligned}$$

Donde vem,

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_4^j} \phi_1(z) &= \frac{1}{2} e^{\frac{2j\pi i}{k+1}} \left( e^{\frac{-2\pi i}{k+1}} - 1 \right) \int_a^b \left[ \frac{x^2 - a^2}{x(b^2 - x^2)} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx - \\
&- \frac{B^2}{2} e^{\frac{-2j\pi i}{k+1}} \left( e^{\frac{2\pi i}{k+1}} - 1 \right) \int_a^b \left[ \frac{x(b^2 - x^2)}{x^2 - a^2} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_4^j} \phi_1(z) &= \frac{1}{2} (C_j F_2 - B^2 \overline{C_j} G_2) \quad e \\
\int_{\gamma_4^j} \phi_2(z) &= \frac{1}{2} [(iC_j) F_2 - B^2 \overline{(iC_j)} G_2]
\end{aligned}$$

Reunindo nas tabelas abaixo todos os períodos obtemos,

<i>curvas</i>	$\gamma_1^j$	$\gamma_2^j$
$\int \phi_1$	$\frac{1}{2}(C_j F_1 - B^2 \overline{C_j} G_1)$	$-\frac{1}{2}[(C_j e^{\frac{\pi i}{k+1}}) F_1 - B^2 (C_j e^{\frac{\pi i}{k+1}}) G_1]$
$\int \phi_2$	$\frac{1}{2}((iC_j) F_1 - B^2 \overline{(iC_j)} G_1)$	$-\frac{1}{2}[(iC_j e^{\frac{\pi i}{k+1}}) F_1 - B^2 (iC_j e^{\frac{\pi i}{k+1}}) G_1]$

<i>curvas</i>	$\gamma_3^j$	$\gamma_4^j$
$\int \phi_1$	$-\frac{1}{2}[(C_j e^{\frac{\pi i}{k+1}}) F_2 - B^2 (C_j e^{\frac{\pi i}{k+1}}) G_2]$	$\frac{1}{2}(C_j F_2 - B^2 \overline{C_j} G_2)$
$\int \phi_2$	$-\frac{1}{2}[(iC_j e^{\frac{\pi i}{k+1}}) F_2 - B^2 (iC_j e^{\frac{\pi i}{k+1}}) G_2]$	$\frac{1}{2}(iC_j F_2 - B^2 \overline{(iC_j)} G_2)$

Precisamos determinar uma única condição, a fim de que todas as partes reais dos períodos das tabelas acima se anulem. Neste sentido,

$$Re \left\{ \int_{\gamma_1^j} \phi_1 \right\} = \frac{1}{4} (C_j + \overline{C_j}) (F_1 - B^2 G_1), \quad \text{e então,}$$

$$Re \left\{ \int_{\gamma_1^j} \phi_1 \right\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_j + \overline{C_j} = 0 \quad \text{ou} \quad F_1 - B^2 G_1 = 0$$

Caso  $C_j + \overline{C_j} = 0, \forall j$ , então  $Re\{C_j\} = 0$ , logo  $C_j$  é puramente imaginário. Das tabelas acima é fácil concluir que:

$$Re \left\{ \int_{\gamma_1^j} \phi_1 \right\} = 0, \quad \text{para todo } j=1,2, \dots, k+1 \quad \text{e somente } i = 1,4.$$

$$Re \left\{ \int_{\gamma_1^j} \phi_2 \right\} = \frac{1}{4} \left( (iC_j) + \overline{(iC_j)} \right) (F_1 - B^2 G_1).$$

Logo:

$$Re \left\{ \int_{\gamma_1^j} \phi_2 \right\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (iC_j) + \overline{(iC_j)} = 0 \quad \text{ou} \quad F_1 - B^2 G_1 = 0$$

Se  $(iC_j) + \overline{(iC_j)} = 0, \forall j$ ,  $Re\{iC_j\} = -Im\{C_j\} = 0$ . Suponhamos que  $F_1 - B^2 G_1 \neq 0$ , então  $Re \left\{ \int_{\gamma_1^j} \phi_1 \right\} = Re \left\{ \int_{\gamma_1^j} \phi_2 \right\} = 0$ , somente se, respectivamente,  $Re\{C_j\} = Im\{C_j\} = 0$ , isto é,  $C_j = 0$ , para todo  $j = 1,2, \dots, k+1$ . O que é uma contradição, isto é, não existe uma única condição para  $C_j$ , de modo que

$$Re \left\{ \int_{\gamma_1^j} \phi_1 \right\} = Re \left\{ \int_{\gamma_1^j} \phi_2 \right\} = 0 \quad \forall j = 1,2, \dots, k+1 \quad \text{e } i = 1,2,3,4.$$

Calculando as outras partes reais dos períodos restantes chegamos a:

$$Re \left\{ \int_{\gamma_2^j} \phi_1 \right\} = -\frac{1}{4} \left( (C_j e^{\frac{\pi i}{k+1}}) + \overline{(C_j e^{\frac{\pi i}{k+1}})} \right) (F_1 - B^2 G_1)$$

$$Re \left\{ \int_{\gamma_2^j} \phi_2 \right\} = -\frac{1}{4} \left( (iC_j e^{\frac{\pi i}{k+1}}) + \overline{(iC_j e^{\frac{\pi i}{k+1}})} \right) (F_1 - B^2 G_1)$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \left\{ \int_{\gamma_3^j} \phi_1 \right\} &= \frac{1}{4} (C_j + \overline{C_j}) (F_2 - B^2 G_2) \\
\operatorname{Re} \left\{ \int_{\gamma_3^j} \phi_2 \right\} &= \frac{1}{4} \left( (iC_j) + \overline{(iC_j)} \right) (F_2 - B^2 G_2) \\
\operatorname{Re} \left\{ \int_{\gamma_4^j} \phi_1 \right\} &= -\frac{1}{4} \left( (C_j e^{\frac{\pi i}{k+1}}) + \overline{(C_j e^{\frac{\pi i}{k+1}})} \right) (F_2 - B^2 G_2) \\
\operatorname{Re} \left\{ \int_{\gamma_4^j} \phi_2 \right\} &= -\frac{1}{4} \left( (iC_j e^{\frac{\pi i}{k+1}}) + \overline{(iC_j e^{\frac{\pi i}{k+1}})} \right) (F_2 - B^2 G_2)
\end{aligned}$$

Assim, para que os períodos reais sejam nulos, temos que satisfazer às condições:

$$F_1 - B^2 G_1 = 0 \quad \text{e} \quad F_2 - B^2 G_2 = 0, \quad \text{ou equivalentemente,} \quad B^2 = \frac{F_1}{G_1} = \frac{F_2}{G_2} \quad (5.9)$$

Para concluir que vale  $c_2$ , o problema se reduz em provar que existem constantes reais  $a, b$  e  $B$ , com  $0 < a < b$ ,  $0 < B$  tal que valha 5.9.

As integrais  $F_m$  e  $G_m$ ,  $m = 1, 2$  definidas em 5.6 e 5.8 são constantes reais positivas. Por exemplo, mostremos que:  $0 < F_1 < \infty$ .

De fato,

$$\frac{a-x}{b(b+a)} \leq \frac{a^2-x^2}{x(b^2-x^2)} \leq \frac{2a^2}{b(b-a)x}$$

Assim,

$$0 < \frac{k+1}{2k+1} \left[ \frac{1}{b(b+a)} \right]^{\frac{k}{k+1}} a^{\frac{2k+1}{k+1}} \leq F_1 \leq (k+1) \left[ \frac{2a^2}{b(b-a)} \right]^{\frac{k}{k+1}} a^{\frac{1}{k+1}}$$

**Lema 5.0.8** *Sejam  $F_m$  e  $G_m$   $m = 1, 2$  constantes reais positivas definidas em 5.6 5.8. Para qualquer  $k \in \mathbb{Z}_+$ , existem constantes reais  $a, b$  e  $B$  satisfazendo,  $0 < a < b$ ,  $0 < B$ , tais que  $B^2 = \frac{F_1}{G_1} = \frac{F_2}{G_2}$ .*

**Demonstração:**

Fixados  $a$  e  $b$ , escolhemos  $B = \sqrt{\frac{F_1}{G_1}}$ . Além disso, através de uma transformação de Möbius podemos supor  $a = 1$ . Logo,  $F_m$  e  $G_m$  passam a depender somente de  $b > 1$ . Daí, o lema ficará provado se existir  $b$  tal que

$$F_1(1, b)G_2(1, b) = F_2(1, b)G_1(1, b).$$

Agora de 5.6 e 5.8 temos,

$$\begin{aligned} F_1 G_2 &= \int_0^1 \left[ \frac{1-x^2}{x(b^2-x^2)} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx \int_1^b \left[ \frac{x(b^2-x^2)}{x^2-1} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx \\ F_2 G_1 &= \int_1^b \left[ \frac{x^2-1}{x(b^2-x^2)} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx \int_0^1 \left[ \frac{x(b^2-x^2)}{1-x^2} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx \end{aligned} \quad (5.10)$$

Fazendo a mudança de variável  $y = x - 1$  em  $F_2$  e  $G_2$  obtemos,

$$\begin{aligned} F_2 &= \int_0^{b-1} \left[ \frac{y(y+2)}{(y+1)(b^2-(y+1)^2)} \right]^{\frac{k}{k+1}} dy \\ G_2 &= \int_0^{b-1} \left[ \frac{(y+1)(b^2-(y+1)^2)}{(y+2)y} \right]^{\frac{k}{k+1}} dy \end{aligned}$$

Assim, de 5.10, segue

$$\begin{aligned} F_1 G_2 &= \int_0^1 \left[ \frac{1+x}{(b+x)(b-x)} \right]^{\frac{k}{k+1}} \left[ \frac{1-x}{x} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx \cdot \\ &\quad \cdot \int_0^{b-1} \left[ \frac{(x+1)(b+x+1)}{x+2} \right]^{\frac{k}{k+1}} \left[ \frac{(b-x-1)}{x} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx \quad (5.11) \\ F_2 G_1 &= \int_0^{b-1} \left[ \frac{(x+2)x}{(x+1)(b^2-(x+1)^2)} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx \int_0^1 \left[ \frac{x(b^2-x^2)}{1-x^2} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx \end{aligned}$$

Agora fazendo, mais duas mudanças de variáveis  $y = x - 1$  e  $y = x - (b - 1)$ , respectivamente, nas integrais

$$\int_0^1 \left[ \frac{x(b^2-x^2)}{1-x^2} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx \quad \text{e} \quad \int_0^{b-1} \left[ \frac{(x+2)x}{(x+1)(b^2-(x+1)^2)} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx$$

E, substituindo na segunda equação de 5.11 obtemos,

$$\begin{aligned} F_2 G_1 &= \int_0^1 \left[ \frac{(b-1+x)(b+1-x)}{2-x} \right]^{\frac{k}{k+1}} \left[ \frac{1-x}{x} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx \cdot \\ &\quad \cdot \int_0^{b-1} \left[ \frac{b+1-x}{(b-x)(2b-x)} \right]^{\frac{k}{k+1}} \left[ \frac{b-1-x}{x} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx \quad (5.12) \end{aligned}$$

Pelos itens (i) (iii) do lema 3.2.3, substituídos na primeira equação de 5.11, segue-se,

$$F_1 G_2 \leq \left( \frac{4}{b-1} \right)^{\frac{k}{k+1}} \left\{ \int_0^1 \left[ \frac{1-x}{x} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx \int_0^{b-1} \left[ \frac{b-1-x}{x} \right]^{\frac{k}{k+1}} dx \right\} \quad (5.13)$$

Ainda pelo lema 3.2.3 ítems (ii) e (iv) substituídos na equação 5.12 temos,

$$F_2G_1 \geq \left(\frac{b-1}{4}\right)^{\frac{k}{k+1}} \left\{ \int_0^1 \left[\frac{1-x}{x}\right]^{\frac{k}{k+1}} dx \int_0^{b-1} \left[\frac{b-1-x}{x}\right]^{\frac{k}{k+1}} dx \right\} \quad (5.14)$$

Portanto, de 5.13 e 5.14 e para  $b \rightarrow \infty$  obtemos,

$$F_1G_2 \leq F_2G_1 \quad (5.15)$$

Por outro lado, se  $b \rightarrow 1$ , e pondo  $b = 1 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ . Segue-se do lema 3.2.4 ítems (i) e (iii) e da primeira equação de 5.11,

$$F_1G_2 \geq \int_0^1 \left[\frac{0,81}{1+\varepsilon-x}\right]^{\frac{k}{k+1}} \left[\frac{1-x}{x}\right]^{\frac{k}{k+1}} dx \int_0^\varepsilon \left[\frac{\varepsilon-x}{x}\right]^{\frac{k}{k+1}} dx \quad (5.16)$$

Em em 5.12 se usarmos os ítems (ii) (iv) do lema 3.2.4 resulta,

$$F_1G_2 \leq \int_0^1 [(0,21)(\varepsilon+x)]^{\frac{k}{k+1}} \left[\frac{1-x}{x}\right]^{\frac{k}{k+1}} dx \int_0^\varepsilon \left[\frac{\varepsilon-x}{x}\right]^{\frac{k}{k+1}} dx \quad (5.17)$$

O ítem (v) do lema 3.2.4 junto com as inequações 5.16 e 5.17 implica que:

$$F_1G_2 \geq F_2G_1 \quad (5.18)$$

Portanto, de 5.15, 5.18 e o *teorema do valor intermediário*, existe pelo menos um  $b \in (1, \infty)$  tal que vale a equação  $F_1G_2 = F_2G_1$  é válida.  $\square$

Voltando a demonstração do teorema, concluímos que a partir do lema acima não só resolvemos o problema dos períodos como também determinamos o valor de  $B$ ,  $B = \sqrt{\frac{F_1}{G_1}}$ .

### Demonstração de $c_3$ :

Como a superfície  $S$  só tem um fim, no ponto  $z(P_1) = \infty$ , então o problema local dos períodos equivale a calcular o resíduo de  $\phi_1, \phi_2$  e  $\phi_3$  em torno de  $P_1$ . Mas, da tabela dos períodos é fácil concluir que nesse ponto  $\phi_1$  e  $\phi_2$  têm polos de ordem  $2k + 2$ . Logo,  $Res(\phi_1; \infty) = Res(\phi_2; \infty) = Res(\phi_3; \infty) = 0$ . Isto prova a condição  $c_3$ .

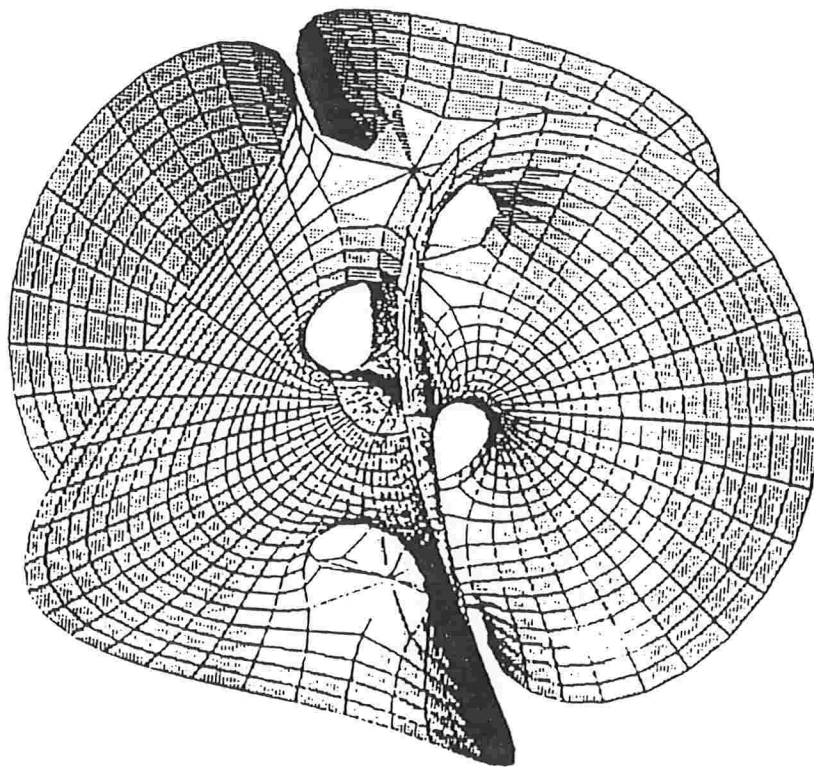
**Demonstração de  $c_4$  :**

De fato, pondo  $\zeta = 1/z$ , para verificar que a superfície é completa em termos da métrica  $ds^2 = \lambda^2|d\zeta|^2$ , é suficiente analisar o comportamento da curva  $\gamma$  divergente para  $\zeta = 0$ . Sabemos que  $(g, \eta)$  têm, respectivamente, polo de ordem  $k$  e 2 em  $z = \infty$ . Logo, é fácil provar que:

$$ds = \lambda(\zeta)|d\zeta| \geq \frac{M}{|\zeta|^{2k+2}}|d\zeta| \text{ e portanto, } \text{comp}(\gamma) = \int_{\gamma} ds \geq M \left| \lim_{\zeta \rightarrow 0} \int \frac{1}{\zeta^{2k+2}} d\zeta \right| \rightarrow \infty.$$

O que conclue a demonstração do teorema. ■

Quando  $k = 2$  no teorema 5.0.7, conforme figuras 5.2 e 5.3, o gráfico da superfície mínima em  $\mathbb{R}^3$  de gênero 4, curvatura total  $-24\pi$  e um único fim do tipo Enneper é dado como em [21] por:





## Referências Bibliográficas

- [1] Chen, C.C., Gackstätter, F.: *Elliptische und Hyperellitische Funktionen und Vollständige Minimalflächen vom Enneperschen Typ*. Math. Ann. 250; 359-369, 1982.
- [2] Conway, J.B.: *Complex Analysis*. Springer-Verlag
- [3] Costa, C.J.: *Imersões mínimas completas em  $\mathbb{R}^3$  de gênero um e curvatura total finita*. Tese de Doutorado, IMPA, 1982.
- [4] Costa, C.J.: *Funções Elípticas, Algébricas e Superfícies Mínimas*. 18<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1991.
- [5] Dierkes, U., Hildebrandt, S., Küster, A., Wohlrab, O.: *Minimal Surfaces I*. Springer-Verlag, 1992.
- [6] Espírito Santo, N.: *Superfícies mínimas completas em  $\mathbb{R}^3$  com fim do tipo Enneper*. Tese de Doutorado, IMPA, 1993.
- [7] Farkas, H.M., Kra, Irwin.: *Riemann Surfaces*. Springer-Verlag, 1980.
- [8] Gackstätter, F.: *Über Abelsche Minimalflächen*. Math. Nachr. 74, 157-165, 1974.
- [9] Galvão, M.E.E.L.: *Superfícies Mínimas*. Programa de Verão, UFBA (versão preliminar).

- [10] Gray, A.: *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematics*. CRC Press, 2<sup>nd</sup> edition, 1998.
- [11] Hoffman, D., Karcher, H.: *Complete Embedded Minimal Surfaces of Finite Total Curvature*
- [12] Hoffman, D., Meeks III, W.H.: *A complete embedded minimal surface in  $\mathbb{R}^3$  with genus one and three ends*. J. Differential Geom., 21, 109–127, 1985.
- [13] Jorge, L.P., Meeks III, W.H.: *The topology of complete surfaces of finite total Gaussian curvature*. Topology 22, num 2, 203–221, 1983.
- [14] Jost, J. : *Compact Riemann Surfaces: an introduction to contemporary mathematics*. Springer–Verlag, 1997.
- [15] Lima, E.L.: *Curso de Análise, vol 1*. Projeto Euclides, IMPA, 1976.
- [16] López, F.J.: *The classification of complete minimal surfaces with total curvature greater than  $-12\pi$* . Trans. AMS 334, num 1, 49–74, 1992.
- [17] López, F.J., Martín, F., Rofriguez, D.: *Complete minimal surfaces derived from Chen–Gackstätter genus two example*. Pacific Journal of mathematics, 184, No. 2, 1998.
- [18] Nevanlinna R., Paatero V.: *Introduction to Complex Analysis*. Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- [19] Osserman, R.: *A survey of Minimal Surfaces*. Dover Publications, 2<sup>nd</sup> edition, 1986.
- [20] Rodrigues, A.M.: *Teoria das Superfícies de Riemann*. Faculdade de Filosofia da U. de São Paulo, 1957–1958.
- [21] Sato, K.: *Construction of higher genus complete minimal surfaces with one end and finite total curvature*. titech–math 24, 15–93, 1993.

- [22] Schoen, M. R. : *Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces*. D. Geometry., 18, 791–809, 1983.
- [23] Spivak, M. : *Comprehensive introduction to differential geometry*. Boston, Publish or Perish, 1975, vol. 4.
- [24] Springer, G.: *Introduction to Riemann Surfaces*. Addison–Wesley, 1957.
- [25] Thayer, E. C.: *Higher genus Chen–Gackstätter surfaces and the Weierstrass representation for infinite genus surfaces*. to appear in Jour. of Experimental Mathematics, 4(1) (1995), 11-31.
- [26] Wang, H., Kang, J.: *A family of complete immersed minimal surfaces with only one end*. IMPA, 1991.

# Índice Remissivo

- $L$ -equivalente, 6
- $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , 5
- estrutura
  - diferenciável, 4
  - holomorfa, 4
- gênero, 50
- ordem de ramificação, 9
- ponto de ramificação, 9
- atlas, 4
- biholomorfa, 8
- bijeção conforme, 20
- comprimento infinito, 67
- coordenadas isotérmicas, 40
- curva
  - divergente, 67
- divisor, 11
- elemento de função, 19
- equação de  $\wp'$ , 36
- fórmula
  - da adição, 55
  - de Riemann, 16
  - Jorge–Meeks–Gackstätter, 58
- fórmulas
  - de Weierstrass, 62
- figura modular, 7
- fm, 50
- FM, 58
- função
  - $\wp$  de Weierstrass, 31
  - $\zeta$  de Weierstrass, 31
  - algébrica, 19
  - elíptica, 30
- grau de  $f$ , 9
- hiperelíptica, 17
- multiplicade, 9
- multiplicidade  $k_\nu$ , 50
- período
  - primeiro, 64
  - segundo, 65
- quadrado, 53
- relação de Legendre, 33
- reticulado, 5

superfície, 41

com  $C(S) = -16\pi$ , 115

com  $C(S) = -24\pi$ , 133

de Riemann, 4

hiperelíptica, 28

mínima, 42

mínima completa, 49

teorema

Chen-Gackstätter 1, 60

Chen-Gackstätter 2, 72

H. Wang-J.Kang 2, 118

H. Wang-J.Kang 1, 102

Huber-Osserman, 51

Riemann-Roch, 13

variedade diferenciável, 3