

UM CASO DE ESTABILIDADE LOCAL
NÃO DETECTÁVEL POR JATOS

LUIZ AUGUSTO FERNANDES DE OLIVEIRA

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

ORIENTADOR:

Prof. Dr. Ângelo Barone Netto

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do
CNPq e do FINEP.

- SÃO PAULO, AGOSTO DE 1978 -

A Cleide
e
Renata

AGRADECIMENTOS

Desejo expressar minha sincera gratidão a todas as pessoas que de algum modo colaboraram na elaboração deste trabalho e, em especial, às seguintes:

professor Ângelo Barone Netto, pela orientação e bons conselhos, bem como seu estímulo constante.

professora Elvia Mureb Sallum, pela sua constante dedicação e valiosas sugestões com que acompanhou nossos estudos durante a ausência do nosso orientador.

São Paulo, agosto de 1978

Luiz Augusto F. de Oliveira

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
PARTE A - DIFEOMORFISMOS	
A1 - Variedades Invariantes	
§1 - Pontos Fixos	6
§2 - Existência e Unicidade da Variedade Central.	7
A2 - Conjugação	
§3 - λ -Lema	14
§4 - Fibrações.	19
§5 - Conjugação	21
PARTE B - CAMPOS DE VETORES	
§6 - Campos de Vetores.	25
BIBLIOGRAFIA	28

INTRODUÇÃO

Para motivarmos o problema que será abordado neste trabalho, faremos a seguir um breve resumo dos resultados obtidos em [1].

Seja $\chi_{\sigma}^r(S^3)$ o espaço de Banach dos campos de vetores de classe C^r ($r \geq 4$) em S^3 tangentes a uma folheação de Reeb σ . Indicamos por T^2 a folha compacta de σ .

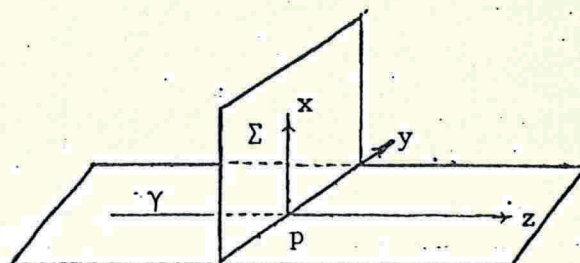
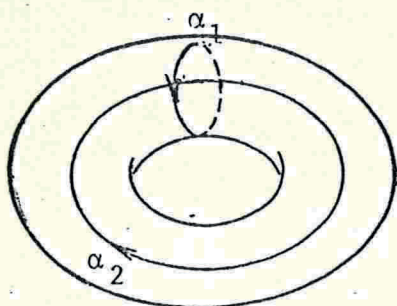
Seja G_1 o conjunto dos campos $X \in \chi_{\sigma}^r(S^3)$ que satisfazem as seguintes condições:

- (i) as singularidades de X são todas hiperbólicas, excepto um número finito delas, que são quase-genéricas e aparecem no máximo uma em cada folha
- (ii) $X|_{T^2}$ é um campo de Morse-Smale.

Em [1] está provado que G_1 é aberto e denso em $\chi_{\sigma}^r(S^3)$.

Sejam $[\alpha_1]$ e $[\alpha_2]$ os geradores do grupo fundamental do toro T^2 . As holonomias $H(\alpha_1)$ e $H(\alpha_2)$ de $[\alpha_1]$ e $[\alpha_2]$, respectivamente, são representadas por funções f_1 e f_2 tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = x, \text{ para } x \leq 0 \\ f_1(x) < x, \text{ para } x > 0 \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} f_2(x) = x, \text{ para } x \geq 0 \\ f_2(x) > x, \text{ para } x < 0 \end{array} \right.$$



Seja agora $X \in G_1$ e suponha que X tem uma órbita periódica γ contida em T^2 e homotópica a α_1 . Seja $p \in \gamma$ e escolha coordenadas $u = (x, y, z)$ tais que $u(p) = 0$, $x = \text{constante}$ e $z = 0$ determinam as folhas de σ , $z = 0$ determina uma secção transversal Σ ao campo e $X = \frac{\partial}{\partial z}$. Seja $P(Y, x, y)$ a transformação de Poincaré definida em Σ para campos Y pertencentes a uma vizinhança V de X em G_1 . Neste caso, tem-se $P(Y, x, y) = (H_Y \circ f_1 \circ H_Y^{-1}(x), g(Y, x, y))$, onde H_Y é um difeomorfismo que preserva o zero e a orientação, e portanto,

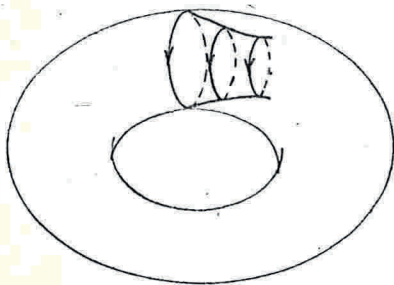
$$DP(X, p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(X, 0, 0) & \frac{\partial g}{\partial y}(X, 0, 0) \end{bmatrix}$$

Como $X|_{T^2}$ é um campo de Morse-Smale, segue que γ é hiperbólica, o que significa que $DP(X, p)$ tem um autovalor $\lambda \neq 1$, isto é, $\frac{\partial g}{\partial y}(X, 0, 0) = \lambda \neq 1$.

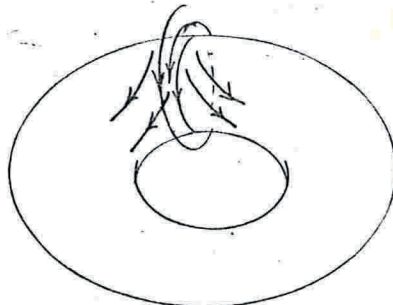
Suponhamos que $\lambda > 1$ e que V foi escolhida de modo que $\frac{\partial g}{\partial y}(Y, x, y) > a > 1$, para todo $Y \in V$. Pelo Teorema da Função Implícita, existe uma função $y = y(Y, x)$ definida numa vizinhança de $(X, 0)$ tal que $g(Y, x, y) = y$ se, e somente se, $y = y(Y, x)$. Como $f_1(x) = x$ para $x \leq 0$, os pontos fixos de $P(Y, x, y)$ são os

pontos da curva $y = y(Y, x)$ com $x \leq 0$. Portanto, existe uma vizinhança aberta V da órbita γ tal que a) as órbitas periódicas de $Y \in V$ (V reduzida, se necessário) contidas em V formam uma subvariedade difeomorfa a $S^1 \times (-1, 0]$, cuja intersecção com Σ é a curva $y = y(Y, x)$ com $x \leq 0$ e a órbita γ_Y correspondente a $x = 0$ está contida em T^2 e é o bordo dessa subvariedade; b) $W_{loc}^u(\gamma_Y) = V \cap T^2$.

Note ainda que $W_{loc}^s(\gamma_Y)$ é uma variedade bidimensional com bordo γ_Y , cuja intersecção com Σ é uma curva dada por uma equação $y = \bar{y}(Y, x)$ com $x \geq 0$, fato que em [1] é obtido mediante aplicação do teorema da variedade central ([9], [10]).



$x \leq 0$



$x \geq 0$

Dizemos, neste caso, que γ é do tipo sela.

Com os resultados obtidos neste trabalho, mostraremos, em particular, que X é estruturalmente estável em volta de γ , isto é, existe uma vizinhança U de X em G_1 tal que para todo $Y \in U$, existem vizinhanças U_Y de γ_Y e V_Y de γ_X tais

que $Y|_{U_Y}$ é topologicamente equivalente a $X|_{V_Y}$ (isto quer dizer que existe um homeomorfismo $H: V_Y \rightarrow U_Y$ que aplica trajetórias de X em trajetórias de Y), pois a transformação de Poincaré citada acima enquadra-se nos difeomorfismo aqui estudados. Provamos ainda a existência e unicidade da variedade central $W_{loc}^S(\gamma_X)$.

O trabalho se dedica ao estudo de uma classe de campos e difeomorfismos e está dividido da seguinte maneira:

Parte A - Difeomorfismos

A1 - Variedades Invariantes - é dedicada à prova da existência e unicidade da variedade central do ponto fixo $(0,0)$.

A2 - Conjugação - estabelece algumas propriedades essenciais tais como fibrações e λ -lema, das quais deduzimos a existência da conjugação.

Parte B - Campos de Vetores

Nesta parte aplicamos os resultados obtidos na parte A para campos de vetores e damos um exemplo de um difeomorfismo que não provém de campo.

Convém observar aqui que a equivalência topológica para campos do tipo considerados na parte B pode ser obtida diretamente com técnicas semelhantes às que se usam em [7] e [8]. Essa foi a linha que seguimos em nossos primeiros estudos relativos ao problema aqui abordado. A seguir, obtivemos conjugação topológica e naturalmente se colocou a questão de

se saber se aqueles difeomorfismos provinham de campo. A resposta é negativa, razão pela qual abordamos diretamente o problema dos difeomorfismos.

PARTE A - DIFEOMORFISMOS

A1 - VARIEDADES INVARIANTES

Em todo esse trabalho, P designará um difeomorfismo de uma vizinhança U do plano \mathbb{R}^2 contendo a origem, de classe C^r ($r \geq 2$), dado por

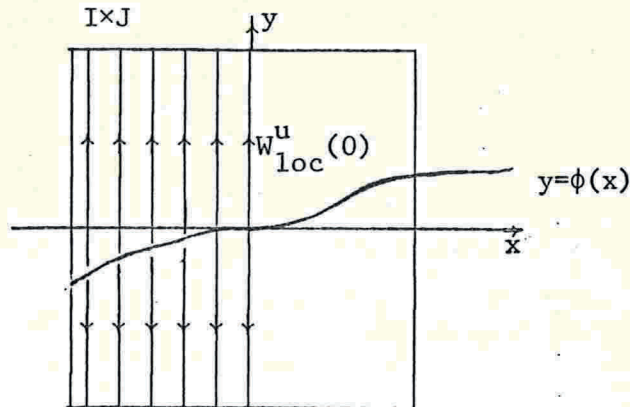
$$(1) \quad P(x,y) = (f(x), \lambda y + g(x,y))$$

onde f é um difeomorfismo de uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}$ que satisfaz $f(x) = x$ para $x \leq 0$ e $f(x) < x$ para $x > 0$, $\lambda > 1$ e $g(0,0) = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$.

§1 - PONTOS FIXOS

Os pontos fixos de P correspondem às soluções da equação $\lambda y + g(x,y) = y$ com $x \leq 0$. Seja $F(x,y) = (\lambda - 1)y + g(x,y)$. Então, F é de classe C^r , $F(0,0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = \lambda - 1 \neq 0$. Portanto, pelo teorema da função implícita, existem intervalos abertos I e $J = (-\alpha, \alpha)$ contendo 0 e uma função $\phi: I \rightarrow J$ de classe C^r satisfazendo $\phi(0) = \phi'(0) = 0$ tal que $F(x,y) = 0$ em $I \times J$ se, e somente se, $y = \phi(x)$. Assim, os pontos fixos de P nesta vizinhança são os do gráfico da função $y = \phi(x)$ com $x \leq 0$. Tais pontos fixos são α -limite dos pontos $(x,y) \in I \times J$ com primeira coordenada $x \leq 0$; em particular, o segmento do eixo $-y$ contido em $I \times J$ é a *variedade instável local* do ponto fixo não-hiperbólico $(0,0)$:

$$W_{loc}^u(0) = \{(x,y) \in I \times J; x \leq 0\}$$



§2. EXISTÊNCIA E UNICIDADE DA VARIIDADE CENTRAL

Para evitar dificuldades técnicas que se tornarão claras mais adiante, é conveniente substituir f e g em (1) por outras funções de mesma classe definidas em \mathbb{R} e \mathbb{R}^2 , respectivamente, que coincidam com f e g numa vizinhança da origem. Este é o conteúdo do seguinte lema, cuja demonstração pode ser encontrada em [2], página 232.

LEMA 1 - Seja $F: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ uma função de classe C^1 definida numa vizinhança U contendo a origem satisfazendo $F(0) = 0$ e $F'(0) = 0$. Seja $\theta > 0$ arbitrário. Então, existem um número real $s = s(\theta) > 0$ (que tende a 0 quando $\theta \rightarrow 0$) e uma função $\tilde{F}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^1 definida em todo \mathbb{R}^n tais que $\tilde{F}(\xi) = F(\xi)$ para $\|\xi\| \leq \frac{s}{2}$, $\tilde{F}(\xi) = 0$ para $\|\xi\| \geq s$ e $\|\tilde{F}'(\xi)\| \leq \theta$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Seja $0 < \theta_0 < \min\{1, \frac{\lambda-1}{3}, \alpha(\lambda-1), \frac{-3+\sqrt{5+4\lambda}}{2}\}$. Como $g(0,0) = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$, pelo lema anterior, existem

$s_1 > 0$ e uma função $\tilde{g}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 satisfazendo $\tilde{g}(x,y) = g(x,y)$ para $|(x,y)| \leq \frac{s_1}{2}$, $\tilde{g}(x,y) = 0$ para $|(x,y)| \geq s_1$

e $\left| \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}(x,y) \right| \leq \theta_0$, $\left| \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y}(x,y) \right| \leq \theta_0$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Também, $F(x) = f(x) - x$ satisfaz as hipóteses do lema 1, de modo que existem $s_2 > 0$ e uma função $\tilde{F}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tais que $\tilde{F}(x) = F(x)$ para $|x| \leq \frac{s_2}{2}$, $\tilde{F}(x) = 0$ para $|x| \geq s_2$ e $|\tilde{F}'(x)| \leq \theta_0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Escolhendo $s_0 \leq \min\{s_1, s_2\}$ de modo que a bola B de centro $(0,0)$ e raio $\frac{s_0}{2}$ esteja contida em $I \times J$ e modificando f e g como acima, se necessário, podemos supor que f e g estão definidas em \mathbb{R} e \mathbb{R}^2 , respectivamente, e satisfazem as seguintes condições:

- (i) $f(x) = x$ para $|x|$ suficientemente grande
- (ii) $g(x,y) = 0$ para $|(x,y)|$ suficientemente grande
- (iii) $1 - \theta_0 \leq f'(x) \leq 1 + \theta_0$, para todo $x \in \mathbb{R}$
- (iv) $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \right| \leq \theta_0$ e $\left| \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \right| \leq \theta_0$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Para referência futura necessitaremos também dos seguintes majorantes:

$$M = \sup_{|(x,y)| \leq \frac{s_0}{2}} \left\{ \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) \right|, \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) \right|, \left| \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) \right| \right\} \geq 0$$

$$e \quad k = \sup_{|x| \leq \frac{s_0}{2}} |f''(x)| > 0.$$

Vamos mostrar que existe uma única curva de classe C^1 , invariante por P , que passa pela origem com tangente horizontal, chamada *variedade central local* do ponto fixo $(0,0)$. Tal variedade é constituída pelos pontos fixos de P e pelos pontos que têm $(0,0)$ como ω -limite que pertencem a $\left[-\frac{s_0}{2}, \frac{s_0}{2}\right] \times J$. Para isso, mostraremos que certa equação funcional admite uma única solução de classe C^1 definida em $\left[-\frac{s_0}{2}, \frac{s_0}{2}\right]$, o que será feito pelo método de aproximações sucessivas [2].

PROPOSIÇÃO 1 - Existe uma única função $\psi: \left[-\frac{s_0}{2}, \frac{s_0}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 com $\psi(0) = \psi'(0) = 0$ cujo gráfico é invariante por P .

PROVA - Definamos a sequência de funções $\psi_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ do seguinte modo:

$$(*) \quad \psi_0(x) \equiv 0 \quad \text{e} \quad \psi_{n+1}(x) = \frac{1}{\lambda} \left[\psi_n(f(x)) - g(x, \psi_n(x)) \right]$$

É fácil verificar (por indução) que ψ_n é de classe C^r e $\psi_n(0) = \psi_n'(0) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos provar que (ψ_n) converge uniformemente para uma função de classe C^1 em $\left[-\frac{s_0}{2}, \frac{s_0}{2}\right]$. Seguirá então que ψ satisfaz a equação funcional

$$\psi(f(x)) = \lambda \psi(x) + g(x, \psi(x)), \quad x \in \left[-\frac{s_0}{2}, \frac{s_0}{2}\right]$$

de onde se conclui que o gráfico de ψ é invariante por P , is

to é, $P(x, \psi(x))$ pertence ao gráfico de ψ , para todo $x \in \left[-\frac{s_0}{2}, \frac{s_0}{2}\right]$.

A demonstração da convergência será feita em 3 etapas:

(a) a sequência das derivadas (ψ'_n) é uniformemente limitada. De fato, seja $\sigma = \frac{\theta_0}{\lambda - 1 - 2\theta_0}$. Como $\theta_0 < \frac{\lambda - 1}{3}$, segue que $\sigma < 1$. Provaremos que

$$(2) \quad |\psi'_n(x)| \leq \sigma \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \text{ e para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Claro, (2) vale para $n = 0$. Suponha que (2) vale para todo $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Seja $x \in \mathbb{R}$; temos:

$$\begin{aligned} |\psi'_{n+1}(x)| &= \frac{1}{\lambda} \left| \psi'_n(f(x)) f'(x) - \frac{\partial g}{\partial x}(x, \psi_n(x)) - \frac{\partial g}{\partial y}(x, \psi_n(x)) \psi'_n(x) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \left[|\psi'_n(f(x))| |f'(x)| + \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, \psi_n(x)) \right| + \left| \frac{\partial g}{\partial y}(x, \psi_n(x)) \right| |\psi'_n(x)| \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \left[\sigma(1 + \theta_0) + \theta_0 + \theta_0 \sigma \right] = \frac{1}{\lambda} \left[\sigma(1 + 2\theta_0) + \theta_0 \right] = \sigma \end{aligned}$$

Portanto, (2) vale para $n+1$, de modo que (ψ'_n) é uniformemente limitada.

(b) a sequência (ψ_n) converge uniformemente em qualquer intervalo limitado.

$$\text{Sejam } \rho = \frac{1 + \theta_0}{\lambda} \text{ (portanto, } 0 < \rho < 1) \text{ e } K = \frac{\sigma}{\rho}.$$

Vamos mostrar que

$$(3) \quad |\psi_n(x) - \psi_{n-1}(x)| \leq K|x| \rho^n, \quad \text{para todos } x \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Para $n = 1$, temos:

$$|\psi_1(x) - \psi_0(x)| = \frac{1}{\lambda} |g(x, 0)| \leq \frac{1}{\lambda} \theta_0 |x| \leq \frac{\theta_0}{\lambda - 1 - 2\theta_0} |x| = \sigma |x| = K |x| \rho;$$

portanto, (3) vale para $n = 1$.

Suponha que (3) vale para todo $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Sendo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} |\psi_{n+1}(x) - \psi_n(x)| &\leq \frac{1}{\lambda} \left[|\psi_n(f(x)) - \psi_{n-1}(f(x))| + |g(x, \psi_n(x)) - g(x, \psi_{n-1}(x))| \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \left[K |f(x)| \rho^n + \theta_0 |\psi_n(x) - \psi_{n-1}(x)| \right] \leq \frac{1}{\lambda} \left[K |x| \rho^{n+\theta_0} K |x| \rho^n \right] = \\ &= K |x| \rho^n \left(\frac{1+\theta_0}{\lambda} \right) = K |x| \rho^{n+1}. \end{aligned}$$

Portanto, (3) vale para $n+1$, e assim, vale para todo n .

(c) a sequência (ψ'_n) é uniformemente equicontinua em $\left[-\frac{s_0}{2}, \frac{s_0}{2}\right]$.

Seja $L = \frac{\sigma k + 4M}{\lambda - 1 - 3\theta_0 - \theta_0^2}$. Vamos provar que

$$(4) \quad |\psi''_n(x)| \leq L, \text{ para todos } x \in \left[-\frac{s_0}{2}, \frac{s_0}{2}\right] \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Obviamente, (4) vale para $n = 0$. Suponha que (4) vale para $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Suponha que $|x| \leq \frac{s_0}{2}$. Como $|f(x)| \leq |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $|f(x)| \leq \frac{s_0}{2}$ para $|x| \leq \frac{s_0}{2}$ de modo que

$$\begin{aligned} |\psi''_{n+1}(x)| &\leq \frac{1}{\lambda} \left[|\psi''_n(f(x))| |f'(x)|^2 + |\psi'_n(f(x))| |f''(x)| + \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, \psi_n(x)) \right| + \right. \\ &+ \left. 2 \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, \psi_n(x)) \right| |\psi'_n(x)| + \left| \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, \psi_n(x)) \right| |\psi'_n(x)|^2 + \left| \frac{\partial g}{\partial y}(x, \psi_n(x)) \right| |\psi''_n(x)| \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda} [L(1+\theta_0)^2 + \sigma k + M + 2M\sigma + M\sigma^2 + \theta_0 L] \leq \frac{1}{\lambda} [L(1+3\theta_0 + \theta_0^2) + \sigma k + 4M] = L. \end{aligned}$$

Portanto, (4) vale para $n+1$ e assim tem-se (4) para todo $n \in \mathbb{N}$.

Logo, dados $x_1, x_2 \in \left[-\frac{s_0}{2}, \frac{s_0}{2}\right]$, temos $|\psi'_n(x_1) - \psi'_n(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o que estabelece a equicontinuidade uniforme de (ψ'_n) no intervalo $\left[-\frac{s_0}{2}, \frac{s_0}{2}\right]$.

O final da demonstração da proposição 1 é agora óbvio: pela parte (b), (ψ_n) converge uniformemente para uma função contínua $\psi: \left[-\frac{s_0}{2}, \frac{s_0}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$; de (a) e (c) e do teorema de Arzelá-Ascoli, existe uma subsequência (ψ'_{n_k}) de (ψ'_n) que converge para uma função contínua $\bar{\psi}: \left[-\frac{s_0}{2}, \frac{s_0}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$. Segue, então, que (ψ_{n_k}) converge uniformemente para uma função de classe C^1 cuja derivada é $\bar{\psi}$. Como (ψ_n) converge para ψ , tem-se que ψ é de classe C^1 em $\left[-\frac{s_0}{2}, \frac{s_0}{2}\right]$.

A unicidade da variedade central decorre agora do seguinte

LEMA 2 - Existe no máximo uma função contínua $\psi: \left[-\frac{s_0}{2}, \frac{s_0}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$(5) \quad \psi(f(x)) = \lambda\psi(x) + g(x, \psi(x)), \quad \forall x \in \left[-\frac{s_0}{2}, \frac{s_0}{2}\right].$$

PROVA - Sejam ψ_1 e ψ_2 duas funções contínuas em $\left[-\frac{s_0}{2}, \frac{s_0}{2}\right]$ e suponha que elas satisfaçam (5). Para $-\frac{s_0}{2} \leq x \leq 0$ temos

$$\psi_i(x) = \lambda\psi_i(x) + g(x, \psi_i(x)), \quad (i=1, 2),$$

de modo que $\psi_1(x) = \psi_2(x) = \phi(x)$ para $-\frac{s_0}{2} \leq x \leq 0$ (ver §1).

Seja $x_0 \in (0, \frac{s_0}{2}]$ e suponha que $\psi_1(x_0) \neq \psi_2(x_0)$. Como $P^n(x_0, \psi_i(x_0)) = (f^n(x_0), \psi_i(f^n(x_0)))$, $\forall n \in \mathbb{N}$, temos $\psi_1(f^n(x_0)) \neq \psi_2(f^n(x_0))$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pois P^n é injetora. Como $f(x) < x$ para

$x > 0$, a sequência $(f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ é decrescente e limitada inferiormente (por 0) e portanto é convergente. Seja

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0).$$

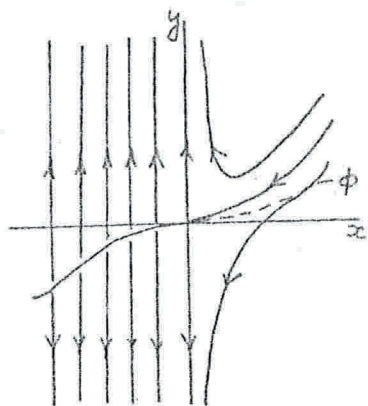
Como f é contínua, temos $f(l) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x_0) = l$ e como f não tem pontos fixos na semi-reta $x > 0$, segue que $l = 0$.

Por outro lado, é fácil verificar que

$$|\psi_1(f^n(x_0)) - \psi_2(f^n(x_0))| \geq (\lambda - \theta_0)^n |\psi_1(x_0) - \psi_2(x_0)|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e como $\lambda - \theta_0 \geq \lambda - \frac{\lambda-1}{3} = \frac{2\lambda+1}{3} > 1$, o segundo membro da desigualdade acima tende para $+\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$ o que contradiz o fato de ser $\lim_{n \rightarrow \infty} |\psi_1(f^n(x_0)) - \psi_2(f^n(x_0))| = 0$. Portanto, $\psi_1(x_0) = \psi_2(x_0)$ para $0 \leq x_0 \leq \frac{s_0}{2}$. \square

Observemos que a prova do lema 2 mostra que o gráfico de ψ é constituído pelos pontos fixos $(x, \psi(x))$ com $-\frac{s_0}{2} \leq x \leq 0$ e pelos pontos $(x, \psi(x))$, com $0 \leq x \leq \frac{s_0}{2}$ que tem a origem como ω -limite, isto é, para cada $x \geq 0$, $P^n(x, \psi(x)) \rightarrow (0, 0)$ quando $n \rightarrow \infty$.



O gráfico da função ψ será indicado por $W_{loc}^c(0)$, chamado *variedade central local* do ponto fixo $(0, 0)$. Dos resultados anteriores, concluímos que as órbitas de P numa vizinhança de $(0, 0)$ tem o aspecto indicado na figura ao lado.

PARTE A - DIFEOMORFISMOS

A2 - CONJUGAÇÃO

§3. λ -LEMA

Seja $\phi: B \rightarrow \phi(B)$ dada por $\phi(x,y) = (x, y - \psi(x))$, onde ψ e B são como anteriormente. Então, ϕ é um difeomorfismo de B sobre $\phi(B)$, que define uma mudança de coordenadas em B em relação à qual o difeomorfismo P se expressa na forma

$$\phi P \phi^{-1}(x,y) = (f(x), \lambda y + \bar{g}(x,y))$$

onde $\bar{g}(x,y) = \lambda \psi(x) + g(x, y + \psi(x)) - \psi(f(x))$.

Portanto, efetuando esta mudança de coordenadas, podemos supor que P é um difeomorfismo de classe C^1 definido numa vizinhança V de $(0,0)$ por

$$P(x,y) = (f(x), \lambda y + g(x,y))$$

onde $f(x) = x$ para $x \leq 0$, $f(x) < x$ para $x > 0$, $\lambda > 1$, $g(x,0) = 0$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$.

Isto significa que a variedade central local $W_{loc}^c(0)$ do ponto fixo $(0,0)$ é um intervalo aberto contendo $(0,0)$ no eixo $E^c = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ e a variedade instável local $W_{loc}^u(0)$ é um intervalo aberto contendo $(0,0)$ no local $E^u = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$.

A próxima proposição é uma adaptação do resultado classicamente conhecido como λ -lema de pontos fixos hiperbólicos para o nosso caso como observado em [3].

DEFINIÇÃO 1 - Sejam W_1 e W_2 duas subvariedades de uma variedade M . Dizemos que W_1 está ϵ - C^1 -próxima de W_2 se existe um di

feomorfismo $\gamma: W_1 \longrightarrow W_2$ tal que $|i_1 - i_2 \circ \gamma|_{C^1} < \varepsilon$, onde i_1 e i_2 indicam as aplicações de inclusões de W_1 e W_2 em M , respectivamente.

PROPOSIÇÃO 2 - Sejam $P(x,y) = (f(x), \lambda y + g(x,y))$ um difeomorfismo de classe C^1 com $f(x) = x$ para $x \leq 0$, $f(x) > x$ para $x > 0$, $0 < \lambda < 1$, $g(x,0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$ e σ uma seção transversal a $W_{loc}^S(0)$ no ponto $q \neq 0$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ e qualquer intervalo compacto $B^C \subset W_{loc}^C(0)$ de centro 0, existem V , vizinhança compacta de B^C e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que para $n \geq n_0$ têm-se $P^n(\sigma) \cap V$ ε - C^1 -próximo de B^C .

PROVA - Seja $0 < \ell < 1$ tal que $\frac{\lambda + \ell}{1 - \ell} = a < 1$ e tomemos uma vizinhança compacta $W = I_1 \times J_1$ de $(0,0)$ contida em B tal que

$$\sup_W \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| \leq \ell, \quad \sup_W \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right| \leq \ell \quad \text{e} \quad \sup_{I_1} |f'(x) - 1| \leq \ell$$

Suponhamos que B^C está contido em W . Sejam

$\vec{v}_0 = (\alpha_0, \beta_0)$ um vetor unitário tangente a σ no ponto q e

$\lambda_0 = \frac{|\beta_0|}{|\alpha_0|}$ a inclinação de \vec{v}_0 . Consideremos $q_n = P^n(q)$, $\vec{v}_n =$

$= DP(q_{n-1}) \cdot \vec{v}_{n-1}$ e λ_n a inclinação de \vec{v}_n . Temos

$$DP(q) \cdot \vec{v}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(q) & \lambda + \frac{\partial g}{\partial y}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\lambda_1 = \frac{|\alpha_0 \frac{\partial g}{\partial x}(q) + \beta_0 [\lambda + \frac{\partial g}{\partial y}(q)]|}{|\alpha_0|} \leq \ell + \lambda_0 (\lambda + \ell)$$

Analogamente,

$$\lambda_2 \leq \ell + \lambda_1 (\lambda + \ell) \leq \ell + \ell (\lambda + \ell) + \lambda_0 (\lambda + \ell)^2$$

e de modo geral,

$$\lambda_n \leq \lambda_0 (\lambda + \ell)^n + \sum_{i=0}^{n-1} \ell (\lambda + \ell)^i$$

Como $\lambda + \ell < 1$, temos ainda

$$\lambda_n \leq \lambda_0 (\lambda + \ell)^n + \frac{\ell}{1 - (\lambda + \ell)}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_0 (\lambda + \ell)^n = 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_1$ temos

$$\lambda_n \leq \frac{2\ell}{1 - (\lambda + \ell)}.$$

Seja $0 < k_1 < \min\{\epsilon, \ell\}$. Como B^C é compacto e $\frac{\partial g}{\partial x}|_{B^C} = 0$, existe $\delta < \epsilon$ tal que em $V_1 = B^C \times [-\delta, \delta]$ tem-se

$$\sup_{V_1} \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| \leq k_1.$$

Tomemos n_1 obtido anteriormente de modo que $P^{n_1}(q) \in \text{int}(V_1)$. Por continuidade, em um intervalo D mergulhado em $P^{n_1}(\sigma)$ com centro $P^{n_1}(q)$, a inclinação de qualquer vetor unitário $\vec{v} \in T_p(D)$, $p \in D$ satisfaz $\lambda_{n_1} \leq \frac{4\ell}{1-(\lambda+\ell)}$.

Seja $p \in D$ e $\vec{v} = (\alpha, \beta) \in T_p(D)$ um vetor unitário. Vamos calcular as inclinações λ_{n_1+m} dos iterados de \vec{v} por P . Temos

$$DP(p) \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} f'(x) & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(p) & \lambda + \frac{\partial g}{\partial y}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

e portanto,

$$\lambda_{n_1+1} \leq \frac{|\alpha| \left| \frac{\partial g}{\partial x}(p) \right| + |\beta| \left[\lambda + \left| \frac{\partial g}{\partial y}(p) \right| \right]}{|\alpha| |f'(x)|} \leq \frac{k_1 + \lambda_{n_1} (\lambda + \ell)}{1 - \ell}$$

Consequentemente,

$$\lambda_{n_1+m} \leq \lambda_{n_1} \left(\frac{\lambda + \ell}{1 - \ell} \right)^m + \frac{k_1}{1 - \ell} \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{\lambda + \ell}{1 - \ell} \right)^i$$

e portanto,

$$\lambda_{n_1+m} \leq \lambda_{n_1} \cdot a^m + \frac{k_1}{(1-\ell)(1-a)}$$

Assim, existe \tilde{n} tal que para $m \geq \tilde{n}$ tem-se

$$(*) \quad \lambda_{n_1+m} \leq \varepsilon \left[1 + \frac{1}{(1-\ell)(1-a)} \right]$$

Como os iterados de qualquer reta vertical são ainda retas verticais, para n suficientemente grande, os iterados $P^n(\sigma)$ definem funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de classe C^1 , definidas em B^C satisfazendo $f_n(0) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e a desigualdade (*) acima mostra que a sequência (f'_n) das derivadas de (f_n) converge uniformemente para a função nula de B^C . Logo, a sequência (f_n) converge para 0 na topologia C^1 . \square

Seja B^S um intervalo fechado de centro 0 contido em $W_{loc}^S(0)$ e $W = B^C \times B^S$. Como a parte linear de $P|_{B^S}$ é uma contração, para W suficientemente pequena, temos $P(B^S) \subset B^S$ e, portanto $P(\partial B^S) \subset B^S$.

DEFINIÇÃO 2 - O anel $G^S = B^S \setminus P(B^S)$ é chamado um *domínio fundamental* da variedade estável de 0. Qualquer vizinhança $N^S(0)$ de $G^S(0)$ em \mathbb{R}^2 , disjunta de $W_{loc}^C(0)$ é denominada *vizinhança fundamental* associada a $W_{loc}^S(0)$.

É claro que $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} P^n(G^S(0)) \supset W_{loc}^S(0) - \{0\}$.

Segue da proposição anterior o seguinte

COROLÁRIO - Seja $N^S(0)$ uma vizinhança fundamental associada

a $W_{loc}^S(0)$. Então,

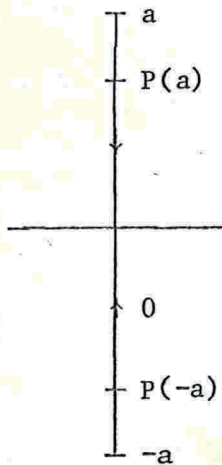
$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} P^n(N^S(0)) \supset V = W_{loc}^C(0),$$

onde V é uma vizinhança de 0 em \mathbb{R}^2 .

PROVA - Escrevamos $G^S(0) = (P(a), a] \cup [-a, P(-a))$. Seja u a função cujo gráfico é o iterado do gráfico da função u_0 constantemente igual a a por P . Escolhamos

B^C de modo que $u(x) < a$, para todo $x \in B^C$ e

$$V_0 = \{(x, y) : x \in B^C \text{ e } u(x) < y \leq a\} \subset N^S(0).$$



Seja $V = B^C \times [-a, a]$ e $P = (x_0, y_0)$ com $y_0 > 0$. Pela proposição anterior, os iterados $P^n(u_0)$ determinam funções (f_n) definidas em B^C que convergem para 0. Portanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $u_{n_0}(x_0) < y_0 \leq u_{n_0-1}(x_0)$, o que significa que $p \in P^{n_0}(V_0)$. Se $y_0 < 0$, procedemos de modo análogo.

Portanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $u_{n_0}(x_0) < y_0 \leq u_{n_0-1}(x_0)$, o que significa que $p \in P^{n_0}(V_0)$. Se $y_0 < 0$, procedemos de modo análogo. \square

§4 - FIBRAÇÕES

O objetivo deste parágrafo é construir fibrações que serão de grande importância na construção da conjugação.

PROPOSIÇÃO 3 - Existe uma vizinhança $V = B^C \times B^S$ de 0 e uma

aplicação contínua $\pi_S: V \longrightarrow B^S$ com as seguintes propriedades:

- (i) $\pi_S^{-1}(0) = B^C$
- (ii) para cada $p \in B^S$, $\pi_S^{-1}(p)$ é uma subvariedade de classe C^1 transversal a B^S em p
- (iii) a fibração definida por π_S é invariante por P no seguinte sentido: se $n \geq 0$, então,

$$P^n(\pi_S^{-1}(q)) \cap V = \pi_S^{-1}(P^n(q)), \quad \forall q \in B^S$$

PROVA - Com as notações do corolário anterior, vamos construir a folhação de V_0 cujas folhas são os gráficos das funções

$$H_t(x) = tu(x) + (1-t)a, \quad 0 \leq t < 1, \quad x \in B^C$$

e a projeção que a cada ponto de V_0 associa o único ponto do eixo- y que está na mesma folha.

Iterando tal projeção por P e definindo $\pi_S|_{B^C} = 0$, obtemos π_S com as propriedades desejadas. \square

Usando agora a projeção no primeiro fator $\pi_C(x,y) = (x,0)$ obtemos outra fibração satisfazendo as mesmas condições que π_S . Observemos que as fibras $\pi_C^{-1}(q)$, $q \in B^C$, são segmentos de retas verticais, de modo que $\pi_C^{-1}(q_1)$ e $\pi_C^{-1}(q_2)$, $q_1 \in B^C$ e $q_2 \in B^S$, interceptam-se transversalmente em apenas um ponto de V .

§5 - CONJUGAÇÃO

Sejam $P_1(x,y) = (f_1(x), \lambda_1 y + g_1(x,y))$ e $P_2(x,y) = (f_2(x), \lambda_2 y + g_2(x,y))$ difeomorfismos definidos numa vizinhança V de $(0,0)$, onde $\lambda_1, \lambda_2 > 1$ e as funções f_i e g_i ($i=1,2$) satisfazem

$$f_i(x) = x \text{ para } x \leq 0 \quad \text{e} \quad f_i(x) < x \text{ para } x > 0$$

$$g_i(x,0) = \frac{\partial g_i}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial g_i}{\partial y}(0,0) = 0$$

Indicamos por W_1^u , W_1^c , W_2^u e W_2^c as variedades instáveis e centrais do ponto fixo $(0,0)$ de P_1 e P_2 , respectivamente.

Como $P_1^u = P_1|_{W_1^u}$ e $P_2^u = P_2|_{W_2^u}$ são difeomorfismos tendo a origem como fonte hiperbólica, pelo teorema de Hartman-Grobman (ver, por exemplo, [3] ou [4]), P_1^u e P_2^u são localmente conjugados, isto é, existe um homeomorfismo

$H_1: W_1^u \longrightarrow W_2^u$ tal que $H_1 P_1(0,y) = P_2 H_1(0,y)$, para todo $(0,y) \in W_1^u$.

Para construir uma conjugação entre P_1 e P_2 , vamos mostrar inicialmente o seguinte

LEMA 3 - f_1 e f_2 são localmente conjugados.

PROVA - Seja $a > 0$ suficientemente pequeno e consideremos um homeomorfismo $h_1: (f_1(a), a] \rightarrow (f_2(a), a]$. Definamos $h(x) = x$ para $x \leq 0$ e $h(x) = f_2^n \circ h_1 \circ f_1^n(x)$, para $0 < x \leq f_1(a)$, onde n é o único número natural tal que $f_1^{-n}(x) \in (f_1(a), a]$. É fácil ver que h é um homeomorfismo que conjuga f_1 e f_2 . \square

Estamos agora em condições de provar o seguinte

TEOREMA A - P_1 e P_2 são localmente conjugadas.

PROVA - Pelo lema anterior, existe um homeomorfismo

$H_2: W_1^C \rightarrow W_2^C$ tal que $H_2 P_1(x, 0) = P_2 H_2(x, 0)$, $\forall (x, 0) \in W_1^C$.

Sejam $\pi_c^1: V \rightarrow W_1^C$, $\pi_u^1: V \rightarrow W_1^u$, $\pi_c^2: V \rightarrow W_2^C$ e $\pi_u^2: V \rightarrow W_2^u$ funções contínuas como na proposição 3, associadas aos difeomorfismos P_1 e P_2 , respectivamente. Se $p \in V$, definimos $H(p) = q$, onde q é tal que $\pi_c^2(q) = H_2 \pi_c^1(p)$ e $\pi_u^2(q) = H_1 \pi_u^1(p)$. Como as fibras interceptam-se transversalmente em um único ponto, H está bem definida e é fácil ver que é um homeomorfismo que conjuga P_1 com P_2 . \square

Como uma aplicação dos resultados obtidos aqui, temos o seguinte

TEOREMA B - Seja $X \in G_1$ com uma órbita periódica γ_X do tipo -sela (V. Introdução). Então, X é localmente estável em γ_X .

PROVA - Seja $p_X \in \gamma_X$ e Σ uma secção transversal a X em $p_X \in P_X$

a correspondente transformação de Poincaré, a qual depende continuamente do campo. Assim, para Y próximo de X , temos $Y \in G_1$ e P_Y próxima de P_X . Como os difeomorfismos P_X e P_Y são do tipo estudados anteriormente, pelo teorema A, existem vizinhanças $\Sigma_X \subset \Sigma$ e $\Sigma_Y \subset \Sigma$ de P_X e P_Y , respectivamente e um homeomorfismo $h_Y: \Sigma_X \rightarrow \Sigma_Y$ tal que $h_Y P_X = P_Y h_Y$.

Seja X_t o fluxo correspondente ao campo X no instante t . Suporemos, sem perda de generalidade, que $P_X = X_1$ e $P_Y = Y_1$.

Sejam

$$U_Y = \left(\bigcup_{\substack{0 \leq t \leq 1 \\ q \in \Sigma_X}} X_t(q) \right)^0 \quad \text{e} \quad V_Y = \left(\bigcup_{\substack{0 \leq t \leq 1 \\ q \in \Sigma_Y}} Y_t(q) \right)^0$$

Então, U_Y e V_Y são vizinhanças tubulares de γ_X e γ_Y , respectivamente; com a seguinte propriedade: para cada ponto $r \in U_Y$, existem um único $t \in [0, 1)$ e $q \in \Sigma_X$ tais que $r = X_t(q)$. Definimos $H: U_Y \rightarrow V_Y$ por $H(r) = Y_t h_Y X_t(r)$.

Pelo teorema da dependência contínua das condições iniciais, H é contínua nos pontos $q \in \Sigma_X$. Para verificar a continuidade de H em um ponto $q \in \Sigma_X$, tomemos uma sequência $q_n \in U_Y$ tal que $q_n \rightarrow q$. Podemos supor que $q_n \notin \Sigma_X$, $\forall n$ e que existe uma sequência $t_n \rightarrow 1$ tal que $X_{-t_n}(q_n) \in \Sigma_X$. Como h_Y é contí-

nua em Σ_X temos $h_{Y^{X-t_n}}(q_n)$ converge para $h_{Y^{X-1}}(q)$ e, portano
to, $H(q_n) = Y_{t_n} h_{Y^{X-t_n}}(q_n)$ converge para $Y_1 h_{Y^{X-1}}(q) =$
 $= Y_1 h_{Y^X}^{-1}(q) = h_Y(q) = H(q)$. \square

PARTE B - CAMPOS DE VETORES

§6 - CAMPOS DE VETORES

Em correspondência com os difeomorfismos estudados anteriormente, encontram-se os campos de vetores X definidos numa vizinhança de \mathbb{R}^2 contendo $(0,0)$ dados por

$$(5) \quad X(x,y) = (f(x), \lambda y + g(x,y))$$

onde $f(x) = 0$ para $x \leq 0$, $f(x) < 0$ para $x > 0$, $\lambda > 0$ e

$$g(0,0) = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0,$$

cujo difeomorfismo no tempo 1 é do tipo estudado anteriormente, de modo que podemos aplicar todos os resultados da parte A. Em particular, a existência e a unicidade da variedade central local do ponto crítico (não-hiperbólico) $(0,0)$ decorrem da proposição 1. Esta variedade é dada pelo gráfico de uma função $\psi: [-a,a] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 com $\psi(0) = \psi'(0) = 0$, que é constituída pelos pontos críticos de X e por uma órbita tendo $(0,0)$ como ω -limite.

O análogo da proposição 2 é a seguinte

PROPOSIÇÃO 4 - Seja σ uma secção transversal a $W_{loc}^u(0)$ no ponto $q \neq 0$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ e qualquer intervalo compacto $B^C \subset W_{loc}^C(0)$ contendo 0, existem uma vizinhança V de B^C e $t_0 > 0$ tal que para $t > t_0$, $X_{-t}(\sigma) \cap V$ está ε - C^1 -próximo de B^C .

Definindo fibrações como na proposição 3 e usando o mesmo argumento utilizado em [5], página 96, obtemos um resultado sobre conjugação topológica entre dois campos X e Y do tipo (5).

Para finalizar, damos abaixo um exemplo que mostra que difeomorfismos do tipo (1) não provém de campo do tipo (5), exemplo esse adaptado de [6] à nossa situação.

EXEMPLO - Seja $0 < \lambda < 1$ e g a função definida em $[-\lambda, \lambda]$ por

$$g(y) = \lambda y + \frac{y}{\ln|y|} \operatorname{sen}\left\{2\pi \frac{\ln|y|}{\ln\lambda}\right\},$$

se $y \neq 0$ e $g(0) = 0$.

É fácil ver que g é um difeomorfismo de classes C^1 . Seja $P: \mathbb{R} \times [-\lambda, \lambda] \rightarrow \mathbb{R}^2$ o difeomorfismo de classe C^1 satisfazendo $f(x) = x$, para $x \leq 0$ e $f(x) > x$, para $x > 0$.

Vamos mostrar que P não é fluxo tempo 1 de qualquer campo Lipschitziano. De fato, se $P = X_1$ para algum campo X, então X deve satisfazer $X(P(p)) = DP(p) \cdot X(p)$, para todo ponto p. Consideremos um ponto $p = (0, \lambda^{n_0})$, onde n_0 é suficientemente grande. Para $n > n_0$, devemos ter $X(P^n(p)) = DP^n(p) \cdot X(p)$, isto é,

$$X(0, g^n(\lambda^{n_0})) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Dg^n(\lambda^{n_0}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ X_2(p) \end{bmatrix} = (0, Dg^n(\lambda^{n_0})X_2(p))$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |X(P^n(p))| &= |Dg^n(\lambda^{n_0})| |X_2(p)| = \left(\prod_{i=0}^{n-1} |Dg \circ g^i(\lambda^{n_0})| \right) |X_2(p)| = \\ &= \lambda^n \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{2\pi}{\lambda(\ell n \lambda)^2} \frac{1}{n_0+i} \right) |X_2(p)| \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{|X(P^n(p))|}{|P^n(p)|} &= \frac{\lambda^n}{\lambda^{n_0+n}} \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{2\pi}{\lambda(\ell n \lambda)^2} \frac{1}{n_0+i} \right) |X_2(p)| = \\ &= \frac{|X(p)|}{\lambda^{n_0}} \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{2\pi}{\lambda(\ell n \lambda)^2} \frac{1}{n_0+i} \right) \end{aligned}$$

Como o produto infinito

$$\prod_{i=0}^{\infty} \left(1 + \frac{2\pi}{\lambda(\ell n \lambda)^2} \frac{1}{n_0+i} \right)$$

diverge, segue-se que X não pode ser Lipschitziano.

BIBLIOGRAFIA

- 1) Sallum, E.M. - Campos Tangentes a uma Folhação de Reeb em S^3 , tese de doutoramento, IME-USP, 1977.
- 2) Hartman, P. - Ordinary Differential Equations, Wiley, 1964.
- 3) Palis, J. - On Morse-Smale Dynamical Systems, Topology 8(1969), 385-404.
- 4) Palis, J. - Seminários de Sistemas Dinâmicos, Monografias Matemáticas nº 4, IMPA, 1975.
- 5) Palis, J. e Mello W. - Introdução aos Sistemas Dinâmicos, Projeto Euclides, 1978.
- 6) Palis, J. - Vector Fields Generate Few Diffeomorphisms, Bull. Am. Math. Soc. 80(1974) 503-505.
- 7) M.C. Peixoto e M.M. Peixoto - Structural Stability in the Plane with Enlarged Boundary Conditions, An. Acad. Bras. Ciências, 31(1959), 135-160.
- 8) Sansone, G. e Conti, R. - Non-Linear Differential Equations, MacMillan Company, N.Y., 1964.
- 9) Kelley, A.I. - The stable, center-stable, center, center-unstable and unstable manifolds, in Abraham, R. & Robbin, J. Transversal Mappings and Flows, Benjamin, N.Y., 1967.
- 10) Hirsch, M., Pugh, C. & Shub, M. - Invariant Manifolds, Lectures Notes in Mathematics, 583, Springer-Verlag, N.Y., 1977.