

ANÁLISE DE EXPERIMENTOS
COM MEDIDAS REPETIDAS

ELISETE DA CONCEIÇÃO QUINTANEIRO AUBIN

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
ESTATÍSTICA
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ESTATÍSTICA
ORIENTADOR: PROF. DR. CLÓVIS DE ARAUJO PERES

- São Paulo, Dezembro de 1.985 -

Aos meus filhos,
FÁBIO e ALINE,
que suportaram
este sacrifício.

AGRADECIMENTOS

Um trabalho de mestrado não é o resultado do esforço de uma só pessoa, mas sim da participação e colaboração de diversas pessoas. Por isso, ao terminar este trabalho, quero agradecer a todos que contribuíram para sua realização.

Em particular, destaco:

- Professor Doutor Clóvis de Araujo Peres, orientador e amigo, pela forma dedicada com que me guiou para que fossem vencidas as muitas dificuldades do trabalho e pela forma paciente e agradável com que sempre me atendeu;
- Professor Doutor Wilton de Oliveira Bussab, que contribuiu com valiosas sugestões e esclarecimentos na fase final deste trabalho;
- Professor Doutor Armando M. Infante, da UFSC, pela atenção e seriedade com que encarou este meu trabalho;
- Professor Doutor Adolpho Walter Pimazoni Canton, pela amizade e incentivo no decorrer deste trabalho;
- Tereza de Jesus Andrade, pela eficiência na execução dos programas de computação;
- Sílvia Nagib Elian, amiga, pelo apoio e segurança que me transmitiu nos momentos difíceis deste trabalho;
- Carmen Diva Saldiva, pela amizade e incentivo constantes;
- Marina Corrêa Silva Pino, pela paciência e rapidez na execução da datilografia.

A todos, meus agradecimentos pelo cumprimento desta missão.

Elisete da Conceição Quintaneiro Aubin

Í N D I C E

CAP. 1 - INTRODUÇÃO	1
CAP. 2 - MÉTODOS GERAIS DE ANÁLISE DE PLANEJAMENTOS COM MEDIDAS REPETIDAS.	6
2.1 - Introdução	6
2.2 - Métodos Estatísticos de Análise de Medidas Repetidas.	10
2.3 - Solução Univariada Exata	12
2.4 - Solução Univariada Aproximada.	18
2.5 - Estimacão do Fator ϵ (Soluçao I)	25
2.6 - Estimacão do Fator de Proporcionalidade e Graus de Liberdade (Soluçao II). Procedimento GA e IGA.	31
2.7 - Soluçao por Análise de Variância Multivariada.	34
2.8 - Aplicacão.	38
CAP. 3 - PLANEJAMENTOS COM MEDIDAS REPETIDAS E COM PADRÃO DE CORRELAÇÃO SERIAL	51
3.1 - Introdução	51
3.2 - O Padrão de Correlaçao Serial.	52
3.3 - Teste da Razão de Verossimilhança Generalizada	56
3.4 - Alguns Comentários	64
CAP. 4 - EXPERIMENTOS COM MEDIDAS REPETIDAS E OBSERVAÇÕES ALOCADAS.	67
4.1 - Descrição do Problema.	67
4.2 - Alguns Exemplos e Consideraçoes.	68
4.3 - O Modelo Misto de Scheffé.	73
4.4 - O Modelo Misto de Alocacão	77
4.5 - Extensao a Outros Planejamento.	83
4.6 - Consideraçoes Finais	89
CAP. 5 - PROCEDIMENTOS DE SELECIONAR UM SUBCONJUNTO QUE CONTEM TODOS OS TRATAMENTOS MELHORES DO QUE UM CONTROLE	93
5.1 - Introdução	93
5.2 - Objetivo, Notacão e Algumas Consideraçoes.	95
5.3 - Procedimentos de Seleçao do Subconjunto Eficiente.	101
5.4 - Tamanho do Subconjunto Eficiente	114
5.5 - Intervalos de Confiança Simultaneos.	119
5.6 - Aplicacão.	122
5.7 - Consideraçoes Finais	126

CONSIDERAÇÕES FINAIS.	128
APÊNDICES	
A - A ESTRUTURA TIPO H DE HUYNH E FELDT.	129
A.1 - Experimentos em Blocos Aleatorizados	130
A.2 - Experimentos Split-Plot.	136
A.3 - Testes Preliminares para Verificação da Condição	141
B - SOLUÇÃO MULTIVARIADA DE GRAYBILL	147
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.	156
BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR	160

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Em alguns campos de pesquisa, tais como pesquisas na área biológica, educacional, agrícola e outras, é bastante frequente a necessidade de comparar diferentes *tratamentos*, através de uma ou mais variáveis, quando estes tratamentos são aplicados em ocasiões sucessivas, em uma mesma unidade experimental.

O termo tratamento, aqui referido, é de caráter bem geral, podendo corresponder a tempos sucessivos, ou alguma outra variável quantitativa, tal como, dose, temperatura, etc..., ou ainda, representar uma variedade de condições experimentais.

Em geral, as unidades experimentais em muitos destes experimentos são indivíduos, animais, canteiros de terra, etc... Uma mesma unidade experimental submetida às diferentes condições experimentais gera as unidades observacionais.

Na maioria das vezes, experimentadores adotam planejamentos deste tipo como uma maneira de reduzir o erro experimental ou, ainda, para "economizar" unidades experimentais, dado que uma única unidade experimental gera diversas unidades de observação ,

correspondentes aos diferentes tratamentos.

Alguns autores (Winer [1971], Morrison [1976] e outros) se referem a esta situação experimental como aquela em que " cada indivíduo serve como seu próprio controle".

A análise de dados oriundos deste tipo de planejamento é geralmente encontrada na literatura com diversos nomes, dentre os quais *Análise de Dados Longitudinais*, *Análise de Curvas de Crescimento* ou *Análise de Medidas Repetidas*, sendo que, as duas primeiras denominações são frequentemente usadas para experimentos cujo objetivo é descrever a evolução de determinada variável no tempo. Neste trabalho, usaremos a denominação de Winer [1971], referindo-se a esta forma de experimento de *Experimentos com Medidas Repetidas*, já que o objetivo é, principalmente, verificar efeito dos fatores envolvidos no experimento.

A finalidade deste trabalho é abordar algumas metodologias de análise estatística de experimentos com medidas repetidas. A análise que consideramos é somente referente a testes de hipóteses estatísticas para verificar a existência de efeito dos fatores envolvidos no experimento. Entretanto, a análise de dados não pára com a conclusão de rejeição ou não da hipótese nula de interesse. Ao contrário, a análise pode ser continuada através de comparações múltiplas de interesse do pesquisador. Entretanto, este aspecto não será abordado neste trabalho, mas pode ser encontrado em diversos textos estatísticos, por exemplo, Winer [1971], Neter e Wasserman [1974], entre outros.

No planejamento com medidas repetidas mais simples as

medidas de cada unidade experimental são repetidas em duas ocasiões, correspondendo ao pré-teste e ao pós-teste, e há um único tratamento experimental intervindo. Uma discussão sobre as formas de analisar esta situação experimental pode ser encontrada em Brogan e Kutner [1980]. Em planejamentos mais complexos, haverá medidas múltiplas e tratamentos múltiplos, ou combinações de tratamentos, estruturando o conjunto de unidades observacionais. Assim, em qualquer caso, para cada unidade experimental está associado um vetor y , cujos elementos são valores observados da unidade experimental quando submetida aos diferentes tratamentos, ou combinação de tratamentos, em ocasiões sucessivas.

Os elementos desse vetor podem ser observações do mesmo tipo, como por exemplo, quando mudanças temporais numa determinada medição são registradas para cada unidade experimental, ou elas podem ser diferentes, como quando indivíduos são submetidos a uma bateria de testes psicológicos caracterizados, em geral, por respostas metricamente diferentes. Neste último caso, se as características medidas são assim diferentes, de modo que os valores de duas observações no vetor não podem ser comparados, os dados são claramente multivariados por natureza, e realizaríamos uma análise univariada separadamente em cada elemento do vetor, ou alguma análise multivariada conveniente. Neste trabalho, experimentos deste tipo não serão tratados, consideraremos somente medidas repetidas gerando escores múltiplos para cada indivíduo, para os quais podemos supor com as mesmas propriedades métricas, isto é, medidos na mesma escala com mesma origem e unidade.

Essencialmente, dados de experimentos com medidas repetidas podem ser analisados através de modelos univariados ou multivariados. A decisão sob qual modelo adotar depende da natureza das suposições que o pesquisador é capaz de fazer sobre seus dados.

Tradicionalmente, entretanto, um modelo univariado tem sido, em geral, adotado para descrever dados destes planejamentos. Porém, a análise do modelo univariado necessita de determinadas suposições a cerca da estrutura de variância-covariância entre as observações, as quais não são exigidas na análise multivariada.

Assim, no Capítulo 2 abordamos alguns aspectos analíticos dos dois modelos de análise, bem como as suposições necessárias para uso de cada um deles. Várias análises univariadas aproximadas são também sugeridas, quando as suposições univariadas não estão satisfeitas.

Nos outros capítulos deste trabalho tratamos de situações particulares de experimentos envolvendo medidas repetidas.

No Capítulo 3 discutimos uma estrutura de covariância frequentemente encontrada em planejamentos com medidas repetidas, quando o fator de repetição é o tempo. Essa estrutura é denominada de correlação serial. Dada a importância desse padrão e dos efeitos que ele produz nos níveis empíricos do erro de tipo I nos testes univariados aproximados, apresentamos um teste da razão de verossimilhança generalizada para verificar a existência desse padrão.

No Capítulo 4 consideramos a análise de medidas repetidas como a

de um modelo misto (isto é, com um fator aleatório e um fixo). Entretanto, vamos considerar uma situação particular destes modelos mistos com medidas repetidas: as observações para cada unidade experimental somam um mesmo total. Assim, as observações são "alocadas" ou partilhadas entre os níveis do fator de repetição. A análise destes experimentos, segundo Shaffer [1981], pode ser feita através de uma adaptação no tradicional modelo misto de Scheffé [1959].

No Capítulo 5 tratamos de um dos problemas de decisão múltipla: o de selecionar um subconjunto dos tratamentos de interesse, tal que contenha todos aqueles que são melhores do que um padrão, desconhecendo a configuração real dos tratamentos. Consideramos a formulação de Chen [1979, 1980] que é uma adaptação à de Gupta e Sobel [1958] para observações independentes.

No Apêndice A, demonstramos a condição necessária e suficiente de Huynh e Feldt [1970], para a utilização dos testes univariados exatos em experimentos em blocos aleatorizados e Split-Plot.

No Apêndice B, apresentamos a solução multivariada de Graybill, para experimentos cruzados com N unidades experimentais e p níveis do fator de repetição.

CAPÍTULO 2

MÉTODOS GERAIS DE ANÁLISE DE EXPERIMENTOS COM MEDIDAS REPETIDAS

2.1 - INTRODUÇÃO

A finalidade deste capítulo é apresentar alguns resultados metodológicos pertinentes à análise estatística de experimentos envolvendo medidas repetidas.

Embora tais planejamentos surjam de maneiras diferentes a principal consideração que os distingue de experimentos fatoriais padrão é o estudo de uma unidade experimental, selecionada aleatoriamente, sob duas ou mais condições distintas (isto é, observações repetidas) as quais representam as unidades observacionais.

Este tipo de planejamento experimental é frequentemente utilizado em diversas áreas de pesquisa, tais como agricultura, indústria, medicina, psicologia, educação, e outras. Koch, Amara, Stokes e Gillings [1980] apresentam diversos exemplos que servem para ilustrar uma variedade de aplicação de estudos com medidas repetidas nas ciências biológica, física e social, e uma extensa

referência bibliográfica sobre este assunto.

Uma situação bem simples destes experimentos consiste em submeter cada uma de n unidades experimentais a p condições (ou tratamentos) distintas (os), observando as respostas de cada unidade experimental sob a influência destas p condições. Os dados para esta situação experimental podem ser dispostos conforme Tabela 2.1, onde supomos que as p condições correspondem a p níveis de um fator fixo, e as unidades experimentais representam uma amostra da população, ou seja, são os níveis de um fator aleatório.

Tabela 2.1 - Observações de um Experimento com Medidas Repetidas, com uma amostra de unidades experimentais

Unidades Experimentais	Condições Experimentais				Média
	1	2	...	p	
1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1p}	$\bar{y}_{1.}$
2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2p}	$\bar{y}_{2.}$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
N	y_{N1}	y_{N2}	...	y_{Np}	$\bar{y}_{N.}$
Média	$\bar{y}_{.1}$	$\bar{y}_{.2}$...	$\bar{y}_{.p}$	$\bar{y}_{..}$

onde,

y_{ij} : valor observado da j -ésima unidade de observação, da i -ésima unidade experimental, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, p$

$$\bar{y}_{.j} = \frac{\sum_{i=1}^N y_{ij}}{N}, \text{ média da } j\text{-ésima condição experimental,}$$

$$\bar{y}_{i.} = \frac{\sum_{j=1}^p y_{ij}}{p}, \text{ média da } i\text{-ésima unidade experimental.}$$

Assim, a cada unidade experimental está associado um vetor de dimensão p , cujos componentes são os valores da variável-resposta sob a influência das p condições. Desta forma teremos N vetores do tipo

$$\underline{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ip})', \quad i = 1, \dots, N.$$

O fato de as medidas serem obtidas em uma mesma unidade experimental implica, em geral, a existência de correlação entre elas, o que nem sempre é levado em conta nas análises usuais.

A análise estatística adequada deve ser feita, então, levando-se em conta esta possível correlação existente entre as observações, o que corresponde a uma estrutura de covariância diferente da usual $\sigma^2 I$.

A ligação entre as unidades experimentais e as unidades observacionais é talvez, o aspecto mais importante da formulação de métodos estatísticos para análise destes experimentos. Em outras palavras, a maneira segundo a qual uma mesma unidade experimental é submetida às diferentes condições experimentais, é de

grande importância para a escolha adequada do esquema de análise.

Há, basicamente, duas formas diferentes que podem ser consideradas. ¹⁾ Uma delas, é quando as diferentes condições experimentais são atribuídas de forma aleatória à mesma unidade experimental. Neste caso, a análise destes experimentos pode ser feita como a de um experimento em blocos aleatorizados, onde identificamos as unidades experimentais com os blocos e, as unidades observacionais com as unidades experimentais do planejamento em blocos.

2) A outra, é quando as condições experimentais são atribuídas segundo uma ordem sequencial, à mesma unidade experimental. A primeira é comum, quando as condições experimentais correspondem a drogas, então a aleatorização é possível de ser feita. A segunda é comum, quando as condições experimentais correspondem a tempos, então não é possível aleatorizar estas condições, na mesma unidade experimental.

Quando a atribuição é aleatória é comum supor correlação constante entre duas observações dentro da mesma unidade experimental. Esta suposição, em geral, não se verifica no processo sequencial de aplicação das condições experimentais, pois observações correspondentes a tempos mais próximos tendem a ser mais altamente correlacionadas do que aquelas correspondentes a tempos mais afastados. Este último fato pode produzir uma estrutura de covariância que é muito comum em análise de séries temporais.

Veremos mais adiante, nos procedimentos de análise, que a estrutura de variância-covariância entre as observações produzida pelo processo de aleatorização, permite um esquema de análise

dos dados, mais simples e, comprovadamente, mais eficiente. Desta forma, sempre que possível, o pesquisador deve planejar seu experimento através de um processo aleatório de atribuição de suas condições experimentais à mesma unidade experimental.

Na seção seguinte passamos, então, a discutir as técnicas estatísticas de análise dos experimentos com medidas repetidas.

2.2 - MÉTODOS ESTATÍSTICOS DE ANÁLISE DE MEDIDAS REPETIDAS

A situação mais simples, descrita na seção anterior, pode ser generalizada quando desejamos comparar diferentes grupos, diferenciados por algum outro fator-tratamento fixo. Neste caso, devemos ter uma amostra de unidades experimentais de cada grupo submetida às diferentes condições experimentais.

O fator cujos níveis serão aplicados a cada unidade experimental é, em geral, denominado de fator repetido ou de repetição, ou, simplesmente, níveis repetidos.

As observações destes experimentos podem ser dispostas conforme Tabela 2.2, onde y_{ijk} é o valor da variável-resposta da i -ésima unidade experimental, dentro do j -ésimo grupo, sob a k -ésima condição, $i = 1, \dots, n_j$, $j = 1, \dots, g$, $k = 1, \dots, p$.

A análise dos dados de experimentos com medidas repetidas, basicamente, é feita através de duas técnicas distintas: a técnica univariada e a técnica multivariada. A grande diferença entre estas técnicas é que a univariada se baseia no número total

Tabela 2.2 - Observações de um Experimento com medidas repetidas, com várias amostras

Grupos	Unidades amostrais	Condições				Média
		1	2	...	p	
1	1	y_{111}	y_{112}	...	y_{11p}	$\bar{y}_{11.}$
	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
	n_1	$y_{n_1 11}$	$y_{n_1 12}$...	$y_{n_1 1p}$	$\bar{y}_{n_1 1.}$
	média	$\bar{y}_{.11}$	$\bar{y}_{.12}$...	$\bar{y}_{.1p}$	$\bar{y}_{.1.}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
g	1	y_{1g1}	y_{1g2}	...	y_{1gp}	$\bar{y}_{1g.}$
	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
	n_g	$y_{n_g g1}$	$y_{n_g g2}$...	$y_{n_g gp}$	$\bar{y}_{n_g g.}$
	média	$\bar{y}_{.g1}$	$\bar{y}_{.g2}$...	$\bar{y}_{.gp}$	$\bar{y}_{.g.}$
Média geral		$\bar{y}_{..1}$	$\bar{y}_{..2}$...	$\bar{y}_{..p}$	$\bar{y}_{...}$

valor variável resposta

de observações enquanto que a multivariada se baseia no número total de unidades experimentais.

Em contrapartida, a análise dos dados através da técnica univariada requer algumas suposições na estrutura de covariância entre as observações, que a técnica multivariada não exige. Este fato será bastante evidenciado nas seções seguintes.

2.3 - SOLUÇÃO UNIVARIADA EXATA

Considerando um conjunto de dados como os da Tabela 2.2 a utilização da técnica de análise de variância univariada tradicionalmente necessita da suposição de que as observações para cada unidade experimental sejam comensuráveis (expressas em unidades comparáveis), obedeçam uma distribuição normal, com variância constante em cada uma das p condições e covariância constante entre duas observações dentro de cada unidade experimental e, ainda, que as unidades experimentais sejam independentes.

O ponto importante desta técnica está no fato de que as comparações entre tratamentos de interesse da análise, podem ser divididas em dois tipos: aquelas que são feitas controlando as diferenças entre unidades experimentais (isto é, dentro da unidade experimental) e aquelas que são feitas envolvendo unidades experimentais diferentes.

Este fato implica em uma divisão da variação residual em dois tipos básicos: uma delas é a variação entre unidades experimentais, algumas vezes, designada na literatura de variação "entre indivíduos", e, a outra é a variação entre unidades observa - cionais, dentro das unidades experimentais, designadas de varia - ção "dentro de indivíduos".

Segundo Kock et al. [1980], o erro experimental associado à variação entre unidades experimentais é, geralmente, maior do que o erro de resposta (ou medida) das unidades observacionais, dentro das unidades experimentais. Estes tipos de variação são endereçados separadamente na análise de variância e correspondem

a medidas de variância ("entre" e "dentro de" indivíduos).

As suposições descritas acima afirmam, portanto, que os vetores de observações $y_{ij} = (y_{ij1}, \dots, y_{ijp})'$, $i = 1, \dots, n_j$, $j = 1, \dots, g$, são independentes, com distribuição normal p-variada, com vetor-média $\underline{\mu}(px1)$ e matriz de variância-covariância, Σ , igual a:

$$\Sigma_{(p \times p)} = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho & \rho & \rho & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3.1)$$

onde ρ , constante, é a correlação entre dois elementos quaisquer dentro do mesmo vetor.

Esta forma especial da matriz Σ (2.3.1) é, muitas vezes, denominada de *matriz uniforme* ou padrão de uniformidade (Geisser [1963]), ou ainda, é dito que o planejamento satisfaz a propriedade de simetria composta (Winer [1971]).

Nestas condições, um modelo matemático adequado para analisar os dados da tabela 2.2 é o mesmo utilizado para analisar experimentos Split-Plot e pode ser expresso por (Winer [1971]):

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_j + \pi_i(j) + \beta_k + \alpha\beta_{jk} + \pi'_{ki}(j) + e_{ijk}, \quad (2.3.2)$$

$$i = 1, \dots, n_j, \quad j = 1, \dots, g, \quad k = 1, \dots, p,$$

re d. exper.

grupo

indivíduo

onde,

μ , α_j e β_k são, respectivamente, a média geral da população, o e-

feito do j -ésimo grupo-tratamento e o efeito da k -ésima condição,

$\pi_{i(j)}$ é o efeito aleatório da i -ésima unidade experimental, dentro do j -ésimo grupo,

$\alpha\beta_{jk}$ é a interação entre j -ésimo grupo e a k -ésima condição,

$\pi'_{ki(j)}$ é a interação aleatória entre a k -ésima condição e a i -ésima unidade experimental, dentro do j -ésimo grupo,

e ϵ_{ijk} é um erro aleatório da observação y_{ijk} ,

com as seguintes restrições:

$$\sum_j \alpha_j = \sum_k \beta_k = \sum_j \alpha\beta_{jk} = \sum_k \alpha\beta_{jk} = \sum_k \pi'_{ki(j)} = 0$$

No caso particular em que as amostras de unidades experimentais são de mesmo tamanho ($n_j = n$, $j = 1, \dots, g$), o quadro de análise de variância (ANOVA) correspondente é o apresentado na tabela 2.3, onde as somas de quadrados S_i , $i = 1, \dots, 6$ são definidas da maneira usual, e

$$\langle \sigma_\alpha^2 \rangle = (g-1)^{-1} \sum_{j=1}^g \alpha_j^2$$

$$\langle \sigma_\beta^2 \rangle = (p-1)^{-1} \sum_{k=1}^p \beta_k^2$$

$$\langle \sigma_{\alpha\beta}^2 \rangle = [(g-1)(p-1)]^{-1} \sum_{j=1}^g \sum_{k=1}^p \alpha\beta_{jk}^2$$

σ_π^2 é a variância "entre" indivíduos

$\sigma_{\pi'}^2$, é a variância "dentro" de indivíduos

σ^2 é a variância do erro.

Tabela 2.3 - Análise de Variância de Split-Plot

Fonte de Variação	Graus de Liberdade	Soma de Quadrados	Esperança do Quadrado médio	F
Entre grupos	$g-1$	S_1	$\sigma^2 + p\sigma_{\pi}^2 + np\langle\sigma_{\alpha}^2\rangle$	$F_1 = \frac{g(n-1)}{g-1} \frac{S_1}{S_2}$
Indivíduos (dentro de grupo)	$g(n-1)$	S_2	$\sigma^2 + p\sigma_{\pi}^2$	
Entre condições	$p-1$	S_3	$\sigma^2 + \sigma_{\pi}^2 + ng\langle\sigma_{\beta}^2\rangle$	$F_2 = g(n-1) \frac{S_3}{S_5}$
Grupo x condição	$(g-1)(p-1)$	S_4	$\sigma^2 + \sigma_{\pi}^2 + n\langle\sigma_{\alpha\beta}^2\rangle$	$F_3 = \frac{g(n-1)}{g-1} \frac{S_4}{S_5}$
Condição x Indivíduo (dentro de grupo)	$g(n-1)(p-1)$	S_5	$\sigma^2 + \sigma_{\pi}^2$	
Total	$ngp - 1$	S_6		

fator grupo
fator condições
fator grupo x condições

Fonte: Winer [1971], p.368.

Assim, a existência de efeito do fator grupo, do fator condição (fator-repetido) e da interação grupo x condição pode ser verificada estatisticamente através das razões F_1 , F_2 , e F_3 , respectivamente, definidas na última coluna da tabela 2.3, que têm, sob H_0 , distribuição central F com $(g-1)$ e $g(n-1)$, $(p-1)$ e $g(n-1)(p-1)$, e $(g-1)(p-1)$ e $g(n-1)(p-1)$ graus de liberdade, respectivamente.

Alguns autores, por exemplo Winer [1971], tradicionalmente consideram que o padrão de uniformidade e igualdade das matrizes de covariância dos grupos Σ_j é condição necessária e suficiente para que as razões F usuais para testar efeitos dentro de indivíduo tenham distribuição exata.

Entretanto, outros autores demonstraram que existe condição necessária e suficiente menos restritiva que garante a utilização das estatísticas F usuais.

Notável contribuição acerca dessa condição, foram os trabalhos de Rouanet e Lépine [1970] e Huynh e Feldt [1970]. Os primeiros autores discutiram essa condição para experimentos com uma amostra de unidades experimentais submetidas a dois fatores repetidos cruzados. Essa condição foi por eles denominada de condição de circularidade da matriz Σ .

Uma matriz de variância-covariância Σ , tal que satisfaça

$$C'\Sigma C = \lambda I_r \quad (2.3.3)$$

onde,

$C(p \times r)$ é uma matriz contraste p-ortonormal representando a comparação de interesse, isto é, as colunas de C são r contrastes ortonormais, associados à hipótese nula do tipo

$$C'\underline{\mu} = \underline{0},$$

λ é um escalar, onde $\lambda > 0$,

$\Sigma(p \times p)$ é a matriz de variância-covariância entre as observações,

é dita satisfazer a *condição de circularidade* para a particular comparação representada por C.

A condição de circularidade, expressa por (2.3.3), implica, portanto, que os r contrastes representados pelas colunas de C são independentes e com variâncias iguais.

A contribuição de Huynh e Feldt [1970] se restringiu a demonstrar a condição necessária e suficiente para experimentos com somente um fator repetido e com uma ou várias amostras de unidades experimentais. Segundo estes autores, a matriz Σ deve ser do tipo H, cujos elementos são expressos por:

$$\sigma_{jj'} = \begin{cases} a_j + a_{j'} + \lambda, & \text{se } j = j' \\ a_j + a_{j'}, & \text{se } j \neq j' \end{cases} \quad (2.3.4)$$

onde a_j , $a_{j'}$ e λ são constantes, com $\lambda > 0$ e $\sigma_{jj'}$ são os elementos da matriz Σ .

No caso em que a matriz C, mencionada na expressão (2.3.3), envolve os p-1 contrastes ortonormais entre todos os p níveis de repetição, a condição de circularidade é equivalente àquela de matriz Σ de tipo H. Pode, também, ser verificado que o padrão uniforme (2.3.1) é um caso particular de padrão tipo H.

As condições expressas por (2.3.3) e (2.3.4) foram posteriormente estendidas a planejamentos mais complexos. Mendoza, Toothaker e Crain [1976], consideraram experimentos envolvendo 3 fatores, J, K e L, com K e L os fatores de repetição e J o fator grupo. Nesta situação a suposição de circularidade estará satis -

feita se $C' \Sigma_j C = \lambda I_r$, $j = 1, \dots, g$, onde Σ_j é a matriz de variância-covariância das observações do j -ésimo nível do fator-grupo J , e C é a matriz contraste r -ortonormal associada à comparação de interesse.

No apêndice A deste trabalho apresentamos a demonstração dos resultados encontrados por Huynh e Feldt, para experimentos em blocos aleatorizados e Split-Plot, e um teste aproximado, sugerido por estes autores, para verificar a validade do padrão H.

2.4 - SOLUÇÃO UNIVARIADA APROXIMADA

A condição de circularidade da matriz Σ , para aplicação dos testes F univariados exatos, muitas vezes é aceita sem qualquer verificação de sua validade. Entretanto, quando testes de hipóteses para verificar tal padrão são realizados (Box[1949;1950]), nem sempre ela é confirmada.

Embora esse padrão especial da matriz Σ , muitas vezes não seja encontrado na prática, a solução univariada é ainda preferida quando são observados pequenos desvios desse padrão, porque, conforme afirma Morrison [1976], "sua estrutura e interpretação são familiares a qualquer conhecedor de planejamentos de experimentos, seus cálculos não requerem inversão de matrizes, nem extração de raízes características e as estatísticas dos testes estão ainda definidas mesmo quando o número de níveis (p) do fator repetido excede o número de unidades experimentais por grupo".

Por estas razões, alguns autores investigaram a análise de variância univariada sob o modelo multinormal, mas com uma matriz Σ qualquer e propuseram algumas soluções univariadas aproximadas.

2.4.1 - Solução I : Aproximação das Distribuições F, Através da Correção dos Graus de Liberdade pelo Fator ϵ

Box [1954b] demonstrou que em experimentos com uma amostra de N unidades experimentais e um fator de repetição com p níveis, a razão de quadrados médios, usada para testar a não existência de efeito do fator repetido, quando a matriz Σ é qualquer, tem aproximadamente distribuição F-Snedecor com $(p-1)\epsilon$ e $(p-1)(N-1)\epsilon$ graus de liberdade, onde ϵ é calculado por

$$\epsilon = \frac{p^2 (\bar{\sigma}_d - \bar{\sigma}_{..})^2}{(p-1) \left[\sum_{k=1}^p \sum_{k'=1}^p \sigma_{kk'} - 2p \sum_{k=1}^p \bar{\sigma}_{k.}^2 + p^2 \bar{\sigma}_{..}^2 \right]} \quad (2.4.1)$$

onde,

$\sigma_{kk'}$ são os elementos da matriz Σ ($p \times p$),

$\bar{\sigma}_d$ é a média dos p elementos diagonais de Σ ,

$\bar{\sigma}_{k.}$ é a média da k-ésima linha (ou coluna) de Σ ,

$\bar{\sigma}_{..}$ é a média de todos elementos de Σ ,

ou ainda por,

$$\epsilon = \frac{(\text{tr } C' \Sigma C)^2}{r \text{ tr } (C' \Sigma C)^2} \quad (2.4.1.)'$$

onde tr é o operador traço, C é a matriz contraste r -ortonormal e r é o número de contrastes ortonormais.

Geisser e Greenhouse [1958; 1959] estenderam o trabalho de Box para experimentos balanceados do tipo Split-Plot, nos quais estão envolvidas diferentes amostras de unidades experimentais. Nestes experimentos, as estatísticas F_2 e F_3 da ANOVA da tabela 2.3 são aproximadamente distribuídas, sob H_0 , como:

$$\begin{aligned} F_2 &\approx F((p-1)\epsilon, g(n-1)(p-1)\epsilon) \\ e \\ F_3 &\approx F((g-1)(p-1)\epsilon, g(n-1)(p-1)\epsilon) \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

onde ϵ é o mesmo fator de Box (expressão (2.4.1) ou (2.4.1)').

Pode ser verificado que quando Σ satisfaz a circularidade, ou mais particularmente, quando Σ é uniforme, o valor de ϵ é igual a um, que é seu limite superior. Neste caso, nenhuma correção nos graus de liberdade é feita e, portanto, as distribuições são exatas. À medida que Σ se afasta da condição de circularidade, ou equivalentemente do padrão H , o valor de ϵ decresce até no máximo igual a $(p-1)^{-1}$, que é o limite inferior de ϵ para esta situação envolvendo somente um fator de repetição.

Segundo Huynh [1978], estes resultados encontrados por Box e Geisser e Greenhouse podem ser generalizados a experimentos envolvendo mais do que um fator de repetição. Em geral, em experi

mentos com m fatores de repetição, há ao todo $2^m - 1$ ($m \geq 1$) índices ϵ 's a serem calculados. Cada um destes índices é apropriado para correção das distribuições F aproximadas associadas com cada um dos fatores de repetição e cada uma das interações entre estes fatores.

Por exemplo, considere um experimento com 3 fatores J , K e L , onde J é o fator grupo e K e L são fatores de repetição cruzados. Há três valores de ϵ populacionais a serem calculados: 1º) ϵ_K , para corrigir as distribuições F associadas ao efeito do fator K e interação $J \times K$; 2º) ϵ_L , para corrigir as distribuições F associadas ao efeito do fator L e interação $J \times L$ e, 3º) ϵ_{KL} , para corrigir as distribuições F associadas às interações $K \times L$ e $J \times K \times L$. A fórmula de cálculo desses índices é aquela da expressão (2.4.1)', com uma matriz C convenientemente escolhida para testar a hipótese correspondente à comparação de interesse. Nesta situação, o campo de variação destes índices está restrito a

$$(k-1)^{-1} \leq \epsilon_K \leq 1$$

$$(\ell-1)^{-1} \leq \epsilon_L \leq 1$$

$$[(k-1)(\ell-1)]^{-1} \leq \epsilon_{KL} \leq 1$$

onde, k e ℓ são, respectivamente, o número de níveis dos fatores K e L .

Deve ser notado que esta correção nos graus de liberdade somente se aplica às distribuições F relativas às estatísticas

dos testes de hipóteses de efeitos principais ou interações que envolvem os fatores de repetição. Nas estatísticas para testar efeitos de fatores "entre" unidades experimentais os graus de liberdade são aqueles usuais, isto é, sem correção.

2.4.2 - Solução II : Aproximação das Distribuições F, Através de um Fator de Proporcionalidade e de Alteração nos Graus de Liberdade

Segundo Box [1954a], nas situações mais gerais, ou seja nos experimentos não-balanceados, com matrizes de variância-covariância dos grupos Σ_j , $j = 1, \dots, g$, diferentes, sem nenhum padrão específico, as estatísticas F_2 e F_3 da tabela 2.3 são aproximadamente distribuídas por:

$$\begin{aligned} F_2 &\approx b F(h', h) \quad e \\ F_3 &\approx c F(h'', h) \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

onde b , c , h , h' e h'' são constantes, em geral desconhecidas, pois dependem dos elementos das matrizes de covariância Σ_j , $j=1, \dots, g$.

Essas constantes, segundo Box, são calculadas por:

$$b = \frac{(N-g) \operatorname{tr}(D\bar{\Sigma})}{\sum_{j=1}^g (n_j - 1) \operatorname{tr}(D\Sigma_j)}$$

$$h' = \frac{[\text{tr} (D\bar{\Sigma})]^2}{\text{tr} (D\bar{\Sigma})^2}$$

$$h = \frac{[\sum_{j=1}^g (n_j - 1) \text{tr} (D\Sigma_j)]^2}{\sum_{j=1}^g (n_j - 1) \text{tr} (D\Sigma_j)^2}$$

onde, $D = I_p - E_p/p$,

$$\bar{\Sigma} = \frac{\sum_{j=1}^g n_j \Sigma_j}{N}, \quad \text{onde } N = \sum_{j=1}^g n_j,$$

I_p é a matriz identidade de ordem p ,

E_p é a matriz quadrada de ordem p , com todos os elementos iguais

a 1.

Para calcular as constantes c e h'' necessitamos definir duas matrizes em blocos, Σ^* e G , da seguinte forma:

$$\Sigma^* (gp \times gp) = \begin{pmatrix} \Sigma_1/n_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma_2/n_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Sigma_g/n_g \end{pmatrix}$$

$$G(g_p \times g_p) = \begin{pmatrix} n_1 \left(1 - \frac{n_1}{N}\right) D & \frac{-n_1 n_2}{N} D & \dots & \frac{-n_1 n_g}{N} D \\ \frac{-n_1 n_2}{N} D & n_2 \left(1 - \frac{n_2}{N}\right) D & \dots & \frac{-n_2 n_g}{N} D \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{-n_1 n_g}{N} D & \frac{-n_2 n_g}{N} D & \dots & n_g \left(1 - \frac{n_g}{N}\right) D \end{pmatrix}$$

onde D é a matriz diagonal definida acima e posto $G = (p-1)(g-1)$.

Usando estas matrizes, as constantes c e h'' são calculadas da seguinte forma:

$$c = \frac{(N-g)}{(g-1)} \frac{\text{tr}(G\Sigma^*)}{\sum_{j=1}^g (n_j-1) \text{tr}(D\Sigma_j)}$$

$$h'' = \frac{(\text{tr}G\Sigma^*)^2}{\text{tr}(G\Sigma^*)^2}$$

Das expressões acima, podemos verificar que quando $n_j = n$, $j = 1, \dots, g$, então, $b = c = 1$.

2.5 - ESTIMAÇÃO DO FATOR ϵ (SOLUÇÃO 1)

Como o fator ϵ de Box depende de parâmetros, em geral, desconhecidos, alguns autores sugeriram substituir ϵ por alguma estimativa. Assim, os testes F aproximados foram distinguidos por formas diferentes de estimar ϵ .

2.5.1 - Teste Aproximado F ϵ -conservativo

Geisser e Greenhouse [1958] sugeriram usar o teste F aproximado univariado, substituindo o valor de ϵ por seu limite inferior.

Assim, para as estatísticas da tabela 2.3, em que o limite inferior de ϵ é $(p-1)^{-1}$, teríamos:

$$F_2 \approx F[1, g(n-1)]$$

$$F_3 \approx F[(g-1), g(n-1)]$$

Enquanto que usando o limite inferior de ϵ , tem a vantagem de ser conveniente computacionalmente, e independente dos elementos de Σ , tal procedimento é excessivamente conservativo e, conseqüentemente, perde em sensibilidade.

Tomando ϵ igual a seu limite inferior, estaremos assumindo máximo afastamento de Σ da suposição de circularidade e, portanto, máxima redução nos graus de liberdade. Assim, este teste

conservativo pode acarretar uma acentuada perda de poder.

Convém, também, lembrar que o limite inferior de ϵ depende do número de fatores de repetição envolvidos no experimento e do teste F específico de interesse, conforme já mencionamos na seção 2.4.

2.5.2 - Teste Aproximado F a "Três Passos"

Como um possível modo de contornar o problema que o procedimento anterior causa, Greenhouse e Geisser [1959] sugeriram uma solução, denominada por eles a "três passos", para testar significância.

1º passo: O valor observado de F é primeiramente comparado ao valor crítico de F com os usuais graus de liberdade (isto é, quando $\epsilon=1$). Se for menor, a análise pára com a conclusão de não significativa, pois o ajuste dos graus de liberdade resultaria num valor crítico ainda maior.

2º passo: Se, por outro lado, o valor de F observado for maior, então ele será comparado com o valor crítico do F conservativo, ou seja, com os graus de liberdade corrigidos pelo valor mínimo de ϵ . Se o valor observado for maior que o valor crítico conservativo, então o efeito certamente pode ser declarado significativo, pois os graus de liberdade foram reduzidos ao máximo.

3º passo: Quando o valor observado excede o valor crítico usual

($\epsilon=1$), mas não o valor crítico conservativo, os autores sugerem ajustar os graus de liberdade pelo fator ϵ estimado através da matriz de covariância amostral.

Assim, a decisão final tomada neste último estágio pode ser contrária àquela tomada usando somente o teste conservativo.

A vantagem deste procedimento é que, às vezes, em duas etapas já é possível tomar uma decisão, sem necessidade de estimar o valor de ϵ .

2.5.3 - Teste Aproximado F $\hat{\epsilon}$ -ajustado

O efeito em usar um valor amostral $\hat{\epsilon}$, para corrigir os graus de liberdade, foi investigado posteriormente por Collier, Baker, Mandeville e Hayes [1967] para diferentes valores populacionais de ϵ .

Nesse trabalho, os autores obtiveram informações de certos atributos da distribuição de $\hat{\epsilon}$. Motivados por estes resultados, foram feitas estimativas do tamanho dos testes, usando o fator $\hat{\epsilon}$ para aproximar as distribuições F, e os resultados foram considerados concordantes com os níveis nominais utilizados.

Por este motivo, estes autores sugeriram usar o teste aproximado F, com os graus de liberdade ajustados por $\hat{\epsilon}$, o qual é obtido substituindo os valores $\sigma_{kk'}$, da expressão (2.4.1) por suas estimativas amostrais usuais não viciadas $s_{kk'}$.

O estimador $\hat{\epsilon}$, assim obtido, é o estimador de máxima verossimilhança de ϵ , se a população é normal multivariada.

2.5.4 - Teste aproximado F $\hat{\epsilon}$ -ajustado

Huynh e Feldt [1976] observaram que, em pesquisas nas áreas de psicologia e educação, o valor de ϵ raramente fica abaixo de 0,75, o que traduz uma matriz de covariância próxima do padrão de circularidade.

Nesta situação ($\epsilon \geq 0,75$), os estudos de Collier et al. [1967] indicaram que $\hat{\epsilon}$ pode ser seriamente viciado, especialmente se o tamanho da amostra é pequeno.

Por estas razões, Huynh e Feldt [1976] propuseram um estimador alternativo $\tilde{\epsilon}$, que de acordo com seus estudos amostrais por simulação, é menos viciado e menos dependente de grandes tamanhos de amostra por grupo, do que o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\epsilon}$, especialmente no caso em que $\epsilon \geq 0,75$.

Assim, para o caso de experimentos com uma amostra de N unidades experimentais e um fator repetido com p níveis, sabemos que:

$$\tilde{\epsilon} = \frac{A}{(p-1)B}$$

onde,

$$A = p^2 (\bar{s}_d - \bar{s}_{..})^2$$

$$B = \sum_{k=1}^p \sum_{k'=1}^p s_{kk'}^2 - 2p \sum_{k=1}^p s_{k.}^2 + p^2 s_{..}^2$$

Então, o estimador $\tilde{\epsilon}$ de Huynh e Feldt é definido por:

$$\tilde{\epsilon} = \frac{NA - 2B}{(p-1)[(N-1)B-A]} \quad (2.5.1)$$

Esse estimador $\tilde{\epsilon}$, é tal que

$$\frac{E[NA - 2B]}{E[(p-1)((N-1)B-A)]} = \epsilon$$

O estimador $\tilde{\epsilon}$, dado por (2.5.1), pode ser expresso em termos do estimador $\hat{\epsilon}$, da seguinte forma:

$$\tilde{\epsilon} = \frac{N(p-1)\hat{\epsilon} - 2}{(p-1)[N-1-(p-1)\hat{\epsilon}]} \quad (2.5.2)$$

Pode ser verificado que para qualquer valor de N e p , $\tilde{\epsilon} \geq \hat{\epsilon}$, com a igualdade ocorrendo quando $\hat{\epsilon} = (p-1)^{-1}$.

Ao contrário do que ocorre com $\hat{\epsilon}$, $\tilde{\epsilon}$ pode ser maior do que um. Entretanto, como ele é um estimador para um parâmetro cujo máximo valor é um, $\tilde{\epsilon}$ será considerado igual a um sempre que ultrapassar este valor.

Da mesma forma, os autores encontraram a expressão de $\tilde{\epsilon}$, para experimentos envolvendo g grupos com um total de N unidades experimentais e com um fator repetido com p níveis. Neste situação, ϵ pode ser estimado por:

$$\tilde{\epsilon} = \frac{N(p-1)\hat{\epsilon} - 2}{(p-1)[N-g-(p-1)\hat{\epsilon}]} \quad (2.5.3)$$

e a mesma convenção é usada quanto ao seu limite superior.

Assim, para qualquer quantidade de fatores envolvida num experimento, podemos encontrar o estimador $\tilde{\epsilon}$ apropriado a cada um dos valores ϵ populacionais.

Ambos estimadores de ϵ , $\hat{\epsilon}$ de Greenhouse-Geisser [1959] e $\tilde{\epsilon}$ de Huynh-Feldt [1976], estão incorporados nas saídas dos programas computacionais BMDP2V e BMDP4V ou, ainda, podem ser obtidos usando o programa computacional SAS(MATRIX).

Barcikowski e Robey [1984], em um trabalho recentemente publicado, comentam que quando um teste univariado para analisar experimentos com medidas repetidas deve ser utilizado, então recomenda-se usar $\tilde{\epsilon}$ como estimador de ϵ sempre que $\epsilon < 0,75$, e $\hat{\epsilon}$ em caso contrário. Entretanto, se não temos nenhum conhecimento prévio sobre o valor de ϵ , o estimador mais conservativo $\hat{\epsilon}$ deve ser usado para corrigir os graus de liberdade. Estes autores discutem, também, a utilização de quatro "pacotes" computacionais apropriados para analisar experimentos com medidas repetidas: BMDP (Dixon [1983]), SAS (SAS User's Guide [1982]), SPSS (Hull and Nie [1979, 1981]), e SPSSX (SPSS Inc. [1983]).

2.6 - ESTIMAÇÃO DO FATOR DE PROPORCIONALIDADE E GRAUS DE LIBERDADE (SOLUÇÃO II): PROCEDIMENTO GA E IGA

A solução de Box [1954a] para aproximar as distribuições F, que denominamos de solução II (seção 2.4.2), é aplicável em situações bem gerais de experimentos envolvendo um fator grupo e um fator de repetição. Entretanto, esta solução também depende de parâmetros populacionais que, em geral, são desconhecidos.

Huynh [1978] propôs, então, duas formas de estimar estes parâmetros:

- i) A primeira solução, conhecida pelo nome de solução GA ("General Approximate"), consiste em substituir as matrizes populacionais Σ_j , pelos seus usuais estimadores não viciados S_j , obtendo assim, as estimativas $\hat{\sigma}$, \hat{c} , \hat{h} , \hat{h}' e \hat{h}'' . Desta forma, a significância dos efeitos e interações de interesse seria obtida comparando os valores observados de F com os valores críticos das distribuições F ajustadas por estas estimativas.
- ii) A segunda solução, conhecida por solução IGA ("Improved General Approximate"), consiste em encontrar estimativas "melhoradas", $\hat{\sigma}$, \hat{c} , \hat{h} , \hat{h}' e \hat{h}'' , para situações de matrizes de covariância Σ_j próximas da condição circularidade (ou seja, $\epsilon \geq 0,75$). O princípio usado aqui, para encontrar estas estimativas, foi o mesmo usado por Huynh e Feldt [1976] para encontrar a estimativa $\hat{\epsilon}$.

Assim, para o parâmetro h , o estimador "melhorado" \hat{h} , é expresso por:

$$\hat{h} = \frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\delta}}$$

onde,

$$\tilde{\eta} = \sum_{j=1}^g \frac{(n_j-1)^2}{(n_j+1)(n_j-2)} (n_j A_j^2 - 2B_j) + \sum_{j \neq j'} (n_j-1)(n_{j'}-1) A_j A_{j'}$$

$$\tilde{\delta} = \sum_{j=1}^g \frac{(n_j-1)^2}{(n_j+1)(n_j-2)} [(n_j-1)B_j - A_j^2]$$

com,

$$A_j = \text{tr } DS_j$$

$$B_j = \text{tr } (DS_j)^2$$

S_j : matriz de covariância amostral do j -ésimo grupo.

O estimador \hat{h} , definido acima, é tal que

$$E(\tilde{\eta}) = h$$

$$E(\tilde{\delta})$$

Aqui, também, o valor de \hat{h} deve ser igualado a $(p-1)(N-g)$ sempre que ultrapassar este valor, pois é o maior valor que o parâmetro h pode assumir.

As derivações correspondentes para h' e h'' são consideravelmente complexas e, portanto, foram deduzidas apenas para a situação de matrizes de covariância dos grupos Σ_j , iguais.

A expressão de $\tilde{\epsilon}$ para o caso de matrizes de covariâncias iguais, sugere o uso de:

$$\tilde{h}' = \frac{N\tilde{h}' - 2}{N-g-\tilde{h}'}$$

$$\tilde{h}'' = \frac{(g-1)[N\tilde{h}'' - 2(g-1)]}{(N-g)(g-1) - \tilde{h}''}$$

os quais são limitados superiormente por $(p-1)$ e $(p-1)(g-1)$, respectivamente.

Neste mesmo trabalho, o autor apresenta ainda, os resultados de um estudo de simulação, para comparar os quatro testes aproximados F ($\hat{\epsilon}$, $\tilde{\epsilon}$, GA e IGA), para $g=3$ grupos e $p=5$ níveis de repetição, através de porcentagens empíricas do erro de tipo I, para diferentes níveis nominais e para diferentes estruturas de variância-covariância.

Desse trabalho, o resultado talvez mais significativo foi o comportamento razoável do teste aproximado IGA e do teste $\tilde{\epsilon}$ -ajustado, sobre um grande número de situações, pois estes testes forneceram um controle razoável do erro de tipo I. Entretanto, de sua derivação, o procedimento IGA parece o mais apropriado para experimentos com medidas repetidas com matrizes de covariâncias.

arbitrárias. Sob o ponto de vista computacional, o teste IGA é contudo um pouco complexo. Recomenda-se, por esse motivo, o procedimento mais simples \tilde{e} , que, em muitas situações, funcionou tão bem quanto o IGA.

Embora esse estudo comparativo de simulação foi realizado, somente para experimentos com um fator de repetição e um fator grupo, segundo Huynh, não há nenhuma razão para esperarmos que estes resultados não ocorreriam para situações de experimentos mais complexos.

2.7 - SOLUÇÃO POR ANÁLISE DE VARIÂNCIA MULTIVARIADA

Uma forma alternativa de analisar dados com medidas repetidas é através da técnica de análise de variância multivariada, às vezes, denominada na literatura de MANOVA.

Das seções anteriores notamos que os procedimentos univariados de análise de tais dados, consideram como tamanho da amostra o número total de observações. Isto faz com que sejam mais precisos do que os procedimentos multivariados, que consideram o número de unidades experimentais como tamanho da amostra. Em contrapartida, a solução univariada exata é mais exigente no que diz respeito à estrutura de covariância entre as observações, dentro de cada unidade experimental. Sendo assim, quando este padrão de covariância não estiver satisfeito, nem ao menos próximo, podemos utilizar as técnicas de análise multivariada.

De acordo com Cole e Grizzle [1966], quando as observa-

ções sucessivas de uma unidade experimental são correlacionadas, os dados, embora originados de um experimento aparentemente univariado, são, essencialmente, multivariado e poderiam ser analisados como tal.

Segundo Bock [1975], nestes experimentos deve ser explorado o fato que, medidas repetidas gerando escores múltiplos para cada unidade experimental fornecem uma classe de dados multivariados. É, entretanto, segundo este autor, uma classe especial, em que os escores têm todas as mesmas propriedades métricas, isto é, são medidos na mesma escala, com a mesma origem e unidade.

Assim, as p medidas da i -ésima unidade experimental do j -ésimo grupo constituiriam as componentes de um vetor-observação amostrado aleatoriamente de uma distribuição normal p -variada. Sendo assim, podem ser usadas as técnicas multivariadas tradicionais, tais como, T^2 -Hotelling [1931], critério da razão de verossimilhança Λ -Wilks [1932], critério do traço V -Pillai/Bartlett [1955/1937] e outros, deduzidos do princípio da União-Interseção de Roy.

Essas técnicas são bastante conhecidas e estão apresentadas em vários textos, por exemplo, Timm [1975], Morrison [1976] e Scheffé [1959].

Se as p respostas de cada unidade experimental são valores de uma variável observada em p instantes de tempos distintos, ou, se são valores de uma variável observada após a aplicação de p doses crescentes de determinada droga, os dados podem ser analisados através de uma técnica multivariada especial, conhecida sob

o título geral de Análise de Curvas de Crescimento. O modelo matemático apropriado, bem como o procedimento geral desta técnica pode ser visto em Singer [1977], onde consta ampla discussão sobre o tema e diversas referências dos principais trabalhos desta área.

Ambos procedimentos, univariados e multivariados, exigem a suposição de que as componentes aleatórias de erro devem seguir uma distribuição normal. Por outro lado, enquanto que a solução univariada estipula uma particular estrutura para cada uma das matrizes de variância-covariância dos grupos, a solução multivariada é aplicável para Σ qualquer. Ou melhor, a única exigência da técnica multivariada a cerca de Σ , é que deve ser comum a todos os grupos.

Dada esta flexibilidade dos procedimentos multivariados, poderia ser questionado o porquê de não usá-los sistematicamente para analisar experimentos com dados repetidos.

Rogan, Keselman e Mendoza [1979] afirmam que, uma desvantagem do procedimento multivariado é sua efetiva falta de sensibilidade, quando comparado a técnicas univariadas. Enquanto que ambos procedimentos são assintoticamente equivalentes (Danford et al. [1960]), para os tamanhos de amostra encontrados na prática, a ANOVA convencional é mais poderosa do que a MANOVA, desde que estejam satisfeitas as suposições sobre Σ , pois as estimativas da análise univariada se baseiam em um número maior de g.l. do que a correspondente multivariada. Mais ainda, a técnica multivariada só pode ser aplicada nos experimentos em que o número

total de unidades experimentais menos o número de grupos é maior ou igual ao número de níveis do fator de repetição menos um, ou seja, se $N-g \geq p-1$. Esta condição se faz necessária, para que a matriz de erro, associada aos efeitos dentro de indivíduos, seja não-singular. Nestas condições tal matriz admite inversa, a qual é necessária para os cálculos das estatísticas multivariadas.

Cole e Grizzle [1966] comentam, também, que em alguns experimentos, a matriz de covariância Σ obedece algum outro padrão, como por exemplo, o de correlação serial, muito comum em análise de séries temporais. Em situações como esta, seria preferível usar uma técnica de análise que faça uso do particular padrão, esperando, talvez, que ocorra um aumento do poder. Alguns resultados a cerca do padrão de correlação serial serão apresentados no Capítulo 3.

Enquanto tais formas específicas de análise são utilizáveis apenas para uma classe de dados, isto é, aqueles dados cuja matriz de covariância segue a estrutura, o procedimento multivariado geral, em muitos casos, é o mais conveniente, se não o único procedimento apropriado entre todos.

Graybill [1961] também apresentou uma solução multivariada alternativa para o tipo de experimentos que temos considerado. Sua técnica de análise está apresentada no Apêndice B, para experimentos com uma amostra de unidades experimentais, cruzada com um fator de repetição. No caso de planejamentos com várias amostras de unidades amostrais e vários fatores de repetição uma das técnicas multivariadas mencionadas no início desta seção, pode ser usada.

Da apresentação deste capítulo, devemos notar que as soluções univariadas e multivariadas têm cada uma suas próprias vantagens e desvantagens, tal que uma solução não pode ser universalmente recomendada sobre a outra. Um ponto em comum entre as duas técnicas de análise, é que ambas necessitam da suposição de que as observações repetidas seguem uma distribuição normal multivariada. Neste sentido, as duas soluções também diferem no modo em que são sensíveis à violação desta suposição, por exemplo na presença de "outliers" multivariados.

Outro ponto que ficou bastante evidenciado é que num planejamento com medidas repetidas, sobre um grupo de unidades experimentais, o teste F univariado para o efeito do fator de repetição é geralmente mais poderoso, até mesmo usando a correção $\hat{\epsilon}$ ou $\tilde{\epsilon}$, quando comparado com o teste multivariado T^2 -Hotelling. Esta conclusão, pode ser justificada pelo fato de que, enquanto ambos testes têm os mesmos graus de liberdade no numerador (p-1), o teste univariado tem no numerador graus de liberdade ((p-1)(N-1)) maior do que do teste multivariado (N-p+1).

Alguns autores recomendam também que ambos testes, univariado e multivariado, sejam utilizados sempre que possível.

2.8 - APLICAÇÃO

Finalizando este capítulo, apresentamos nesta seção uma situação real para a qual iremos aplicar algumas das técnicas de análise sugeridas neste capítulo.

O experimento que descrevemos abaixo, refere-se a uma pesquisa realizada no Centro de Pesquisa Agropecuária do Trópico Úmido - EMBRAPA (Belém-PA).

Os cálculos necessários à análise estatística dos dados foram realizados com a utilização do "pacote" computacional BMDP - Statistical Software [1981], o qual encontra-se implantado no Centro de Computação Eletrônica da Universidade de São Paulo.

i) *Objetivo do Experimento :*

Estudar o efeito de cobertura viva e adubação química no desenvolvimento e produção de Dendê.

ii) *Descrição do Experimento :*

Uma área de um hectare foi preparada a fim de torná-la completamente homogênea. Essa área foi então dividida em duas partes iguais e em uma delas foi adicionado um adubo químico NPKMg. Na metade de cada uma destas duas partes foi aplicada cobertura viva (leguminosa Puerária).

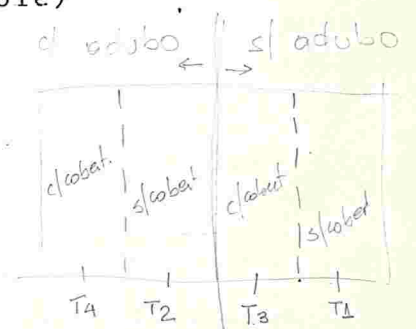
Podem ser identificados, portanto, quatro tratamentos:

T₁ : sem adubação e sem cobertura (controle)

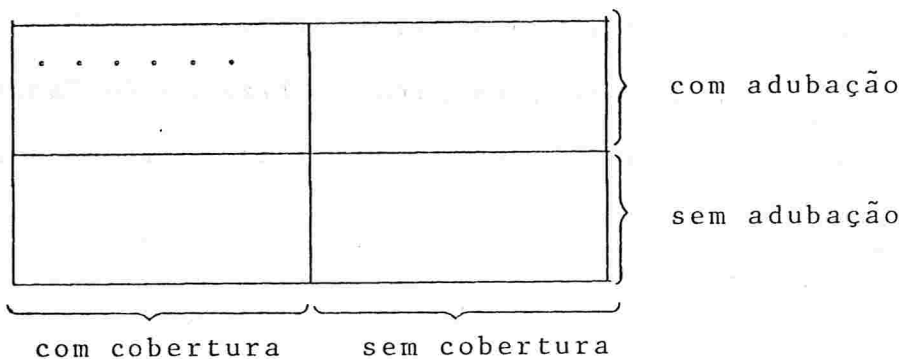
T₂ : com adubação e sem cobertura

T₃ : sem adubação e com cobertura

T₄ : com adubação e com cobertura



Foram, então, preparadas as mudas e plantadas n (*) delas em cada uma das quatro partes descritas anteriormente, conforme o mapa do experimento a seguir:



Variáveis Medidas :

No experimento foram consideradas três variáveis relativas ao desenvolvimento da planta:

- circunferência do coleto (Var.1)
- número de folhas emitidas (Var.2)
- comprimento da quarta folha (Var.3)

Vamos analisar somente a variável 1 (circunferência do coleto), pois a análise das outras variáveis pode ser feita de forma idêntica. Além disso, essa variável é a que melhor representa o desenvolvimento da planta.

(*) Não dispomos de informação sobre o valor de n mas existem observações para 23 plantas em cada tratamento.

Unidade de Observação :

Cada planta foi considerada como sendo uma unidade experimental, onde foram feitas medidas relativas ao seu desenvolvimento a partir de 1978, em intervalos sucessivos de três em três meses, gerando as unidades observacionais.

Devido às limitações para utilização do "pacote" computacional BMDP2V, não serão considerados na análise os dados referentes ao ano de 1981.

iii) *Análise Estatística* :

A fim de tornar mais clara a utilização das técnicas estatísticas, vamos dividir a análise em três etapas: análise descritiva, análise univariada e análise multivariada.

- Análise Descritiva :

Iniciamos com uma análise descritiva dos dados através do cálculo da média e desvio padrão das observações, de cada grupo-tratamento e para cada período de observação. Estes cálculos foram realizados pelo "pacote" computacional BMDP7D. Os resultados obtidos encontram-se na tabela 2.8.1.

Esta análise preliminar é útil para detectar valores aberrantes, que na maior parte das análises constituem erros de observação. Para os nossos dados tal fato não ocorreu e, portanto, todos os valores foram incluídos na análise.

Um segundo passo da análise descritiva seria encontrar as matrizes de variância-covariância amostrais $\hat{\Sigma}_j$, $j = 1, \dots, 4$,

Tabela 2.8.1 - Média \pm Desvio-Padrão das observações por tratamento e por período (Var.1)

Trat. Per. (1)	T ₁ média \pm desvio padrão	T ₂ média \pm desvio padrão	T ₃ média \pm desvio padrão	T ₄ média \pm desvio padrão	Marginal média \pm desvio padrão
P11	94.174 \pm 9.044	89.913 \pm 8.821	88.652 \pm 9.360	95.739 \pm 9.983	92.120 \pm 9.618
P12	128.696 \pm 19.492	120.000 \pm 14.924	116.000 \pm 18.126	130.261 \pm 22.396	123.739 \pm 19.545
P13	146.739 \pm 14.756	141.870 \pm 13.844	140.261 \pm 14.017	154.478 \pm 18.637	145.837 \pm 16.167
P14	167.348 \pm 15.065	159.913 \pm 16.629	161.478 \pm 23.185	171.043 \pm 17.811	164.946 \pm 18.832
P21	199.652 \pm 12.816	197.565 \pm 15.439	188.565 \pm 10.941	201.130 \pm 18.924	196.728 \pm 15.392
P22	211.304 \pm 19.553	221.087 \pm 17.383	206.957 \pm 14.361	211.957 \pm 17.629	212.826 \pm 17.810
P23	232.217 \pm 48.694	235.913 \pm 35.642	209.304 \pm 17.587	220.870 \pm 21.227	224.576 \pm 34.260
P24	221.652 \pm 29.060	232.478 \pm 30.912	217.522 \pm 17.029	221.609 \pm 18.158	223.315 \pm 24.822
P31	227.217 \pm 17.694	240.217 \pm 29.737	218.217 \pm 21.471	225.435 \pm 18.853	227.772 \pm 23.463
P32	270.261 \pm 14.091	255.522 \pm 23.320	256.217 \pm 28.881	254.652 \pm 21.904	259.163 \pm 23.163
P33	284.565 \pm 16.792	277.609 \pm 20.865	271.609 \pm 24.642	277.348 \pm 16.924	277.783 \pm 20.268
P34	287.826 \pm 25.218	279.391 \pm 22.645	282.609 \pm 35.703	274.130 \pm 22.696	280.989 \pm 27.119
P41	272.478 \pm 18.218	263.000 \pm 16.701	259.130 \pm 16.388	259.522 \pm 14.378	263.533 \pm 17.083
P42	271.304 \pm 16.802	279.565 \pm 11.032	273.522 \pm 17.809	265.435 \pm 15.069	272.457 \pm 15.972
P43	256.522 \pm 14.650	260.000 \pm 14.694	250.652 \pm 18.605	249.130 \pm 15.049	254.076 \pm 16.188

(1) Prs : sº período do rº ano, s = 1,2,3,4 e r = 1,2,3,4 onde r = 1 : 1978; r = 2 : 1979; r=3 : 1980 e r = 4 : 1981.

para verificar se existe alguma estrutura particular de covariância, entre os níveis de repetição. Entretanto, esta etapa pode ser eliminada, pois o "pacote" computacional que será utilizado para a análise de variância univariada fornece o teste estatístico para verificar o padrão H, o qual é de nosso interesse direto.

- Análise Univariada :

Nas etapas seguintes de análise iremos desprezar os valores relativos às observações dos três últimos períodos devido a limitações dos "pacotes" computacionais utilizados. Sendo assim, somente serão considerados 12 períodos de observação.

Para encontrar as soluções univariadas utilizaremos o programa BMDP2V. A técnica univariada foi realizada adotando dois modelos diferentes ao nosso conjunto de dados:

(i) No primeiro modelo consideramos o fator fixo Tratamento com 4 níveis cruzado com o fator fixo Período com 12 níveis, e com 23 unidades experimentais por tratamento. O quadro de Análise de Variância correspondente encontra-se na tabela 2.8.2a.

A técnica de análise univariada exata exige,entretanto, a suposição de circularidade total ou, equivalentemente, da estrutura H na matriz de variância-covariância entre as observações dos 12 níveis de repetição, para cada grupo. Examinando o resultado do teste estatístico, fornecido pelo programa BMDP2V, que verifica esta suposição, concluimos que este padrão não é aceito a um nível de significância menor que 1%. Sendo assim, as estatísticas F usuais, para testar efeitos envolvendo o fator de repetição, de

Tabela 2.8.2a - ANOVA para o modelo com um fator grupo (tratamento) cruzado com um fator de repetição (período)

F.V.	g.l.	QM	F	Nível desc. exato	Nível desc. Greenhouse-Geisser	Nível desc. Huynh-Feldt
Média	1	45263205,3	28498,87	0,0000(***)		
Trat.	3	4819,2	3,03	0,0334(*)		
Resíduo 1	88	1588,2				

Per.	11	332422,0	956,89	0,0000(***)	0,0000(***)	0,0000(***)
Per. x Trat.	33	772,3	2,22	0,0001(***)	0,0040(***)	0,0027(***)
Resíduo 2	968	347,4				

(***) : a estatística é significativa ao nível $\alpha = 0,01$;

(*) : a estatística é significativa ao nível $\alpha = 0,05$.

vem ser utilizadas com os graus de liberdade corrigidos pelo fator ϵ .

Como estamos considerando somente um fator de repetição há somente um fator ϵ a ser calculado. As duas estimativas de ϵ ($\hat{\epsilon}$ e $\tilde{\epsilon}$) são, também, fornecidas por este programa com as seguintes denominações: Greenhouse-Geisser para $\hat{\epsilon}$ e Huynh-Feldt para $\tilde{\epsilon}$, cujos valores estão apresentados abaixo, conforme "saída" deste programa.

EPSILON FACTORS FOR DEGREES OF FREEDOM ADJUSTMENT

GREENHOUSE-GEISSER
0.4942

HUYNH-FELDT
0.5485

Dos resultados da tabela 2.8.2a verificamos que todos os efeitos testados apresentam significância.

(ii) No segundo modelo adotado, consideramos o mesmo fator fixo Tratamento, cruzado com dois fatores de repetição cruzados: Ano com 3 níveis e Período com 4 níveis. Esta disposição dos fatores representa um planejamento com um fator "entre indivíduos" (Tratamento) e dois fatores cruzados "dentro de indivíduos" (Ano e Período).

Neste modelo há três suposições de circularidade a serem verificadas:

- a) circularidade que envolve o fator Ano;
- b) circularidade que envolve o fator Período;
- c) circularidade que envolve a interação Ano x Período.

Os respectivos níveis descritos dos testes estatísticos que verificam estas suposições, fornecidos pelo programa, foram:

- a) $\hat{\alpha} = 0,0725$
- b) $\hat{\alpha} = 0,0309$
- c) $\hat{\alpha} = 0,00001$

A partir destes resultados podemos concluir que a solução univariada exata pode ser utilizada para testar hipóteses envolvendo o fator Ano e o fator Período, mas hipóteses envolvendo a interação Ano x Período devem ser testadas utilizando a solução univariada aproximada.

Há três valores a serem calculados. As duas estimativas para cada um deles, conforme "saída" do programa, foram:

EFFECT TERM	EPSILON FACTORS FOR DEGREES OF FREEDOM ADJUSTMENT	
	GREENHOUSE-GEISLER	HUYNH-FELDT
2 (Ano)	0.9447	0.9977
3 (Período)	0.9223	0.9877
4 (AnoxPeríodo)	0.7642	0.7694

Estes resultados servem para mostrar que adotando este segundo modelo, há somente um pequeno afastamento da suposição de circularidade pois os valores estimados de ϵ estão muito próximos de um, o que não ocorre no primeiro modelo considerado.

O quadro de Análise de Variância correspondente está apresentado na Tabela 2.8.2b.

As conclusões, quanto à existência de efeitos de interações envolvidas no experimento, podem ser tiradas a partir da análise exata pois, conforme verificado anteriormente, a suposição pode ser considerada verdadeira. Sendo assim, concluímos que somente interação Tratamento x Período é estatisticamente não significativa.

- Análise Multivariada.:

A solução multivariada foi obtida utilizando o "pacote" computacional BMDP4V. Este programa é de grande utilidade, pois ele fornece os resultados da solução multivariada e também da univariada exata e aproximada. Contém, ainda, várias opções tais como cálculo de auto-valores e auto-vetores das matrizes envolvidas na técnica multivariada.

Tabela 2.8.2b - ANOVA para o modelo com um fator-grupo (tratamento) cruzado com dois fatores de repetição

F.V.	g.l.	QM	F	Nível descr. exato	Nível descr. Greenhouse-Geisser	Nível descr. Huynh-Feldt
Média	1	45263205,3	28498,87	0,0000(***)		
Trat.	3	14457,3	3,03	0,0334(*)		
Resíduo 1	88	139765,6				
Ano	2	3176318,2	2562,23	0,0000(***)	0,0000(***)	0,0000(***)
Ano x Trat.	6	12273,9	3,30	0,0042(***)	0,0051(***)	0,0042(***)
Resíduo 2	176	109090,9				
Per.	3	425255,1	621,03	0,0000(***)	0,0000(***)	0,0000(***)
Per. x Trat.	9	2992,5	1,46	0,1643(n.s.)	0,1710(n.s.)	0,1653(n.s.)
Resíduo 3	264	60259,1				
Ano x Per.	6	55066,5	29,03	0,0000(***)	0,0000(***)	0,0000(***)
Ano x Per. x Trat.	18	10218,5	1,80	0,0230(**)	0,0436(*)	0,0378(*)
Resíduo 3	528	166929,9				

(***) : A estatística é significativa ao nível $\alpha = 0,01$;
 (**) : a estatística é significativa ao nível $\alpha = 0,025$;
 (*) : a estatística é significativa ao nível $\alpha = 0,05$;
 (n.s.): a estatística é não significativa ao nível $\alpha = 0,05$.

Basicamente, este programa fornece quatro estatísticas multivariadas identificadas por:

- a) LRATIO (Wilks)
- b) TRACE (Pillai)
- c) TZSQ (Lawley-Hotelling)
- d) MXROOT (Roy)

O desenvolvimento teórico detalhado de cada um destes critérios pode ser encontrado, por exemplo, em Timm [1975].

Devido às limitações da análise multivariada, esta técnica só pode ser aplicada considerando o modelo com somente um fator de repetição com 12 níveis, o que não permite uma análise mais detalhada, como no caso da técnica univariada, onde foram adotados dois modelos diferentes para analisar os dados.

O quadro de análise de variância multivariada, fornecido pelo programa, encontra-se na Tabela 2.8.3, com as respectivas conclusões.

Examinando a Tabela 2.8.3 verificamos que este conjunto de dados forneceu as mesmas conclusões estatísticas, quando usamos a solução univariada ou multivariada. Entretanto, se isto não tivesse ocorrido, deveríamos decidir pelas conclusões da análise univariada pois ela é mais poderosa, já que as suposições básicas para sua utilização estão satisfeitas.

Tabela 2.8.3 - Análise de Variância Univariada/Multivariada do modelo com um fator-grupo (Trat.) e um fator de repetição (Per.)

F.V.	Estatística	F	g. l.	Nível descr.
Média	SQ = 45263205,3 QM = 45263205,3	28498,87	1 e 88	0,0000(***)
Trat.	SQ = 14457,3 QM = 4819,10	3,03	3 e 88	0,0334(*)
Per.	TSQ = 12825,2 SQ = 3656640,0 QM = 332422,0 Ajuste de Greenhouse-Geisser Ajuste de Huynh-Feldt	1033,43 956,89 956,89 956,89	11 e 78 11 e 968 5,4 e 478,4 6,0 e 530,9	0,0000(***) 0,0000(***) 0,0000(***) 0,0000(***)
Per. x Trat.	LRATIO = 0,537533 TRACE = 0,709921 TZSQ = 56,7937 CHISQ = 34,08 MXROOT = 0,296688 SQ = 25485,0 QM = 722,3 Ajuste de Greenhouse-Geisser Ajuste de Huynh-Feldt	1,64 2,22 2,22	33 e 230,51 19441 33 e 968 16,31 e 478,38 18,10 e 530,92	0,0200(*) 0,0210(*) 0,0301(*) 0,0001(***) 0,0040(***) 0,0027(***)
Resíduo	SQ = 336279,93 QM = 347,40 G-G EPSILON = 0,49419 H-F EPSILON = 0,54847			

(***) : a estatística é significativa ao nível $\alpha = 0,01$;
 (*) : a estatística é significativa ao nível $\alpha = 0,05$.

iv) *Conclusão final* :

Das análises estatísticas consideradas verificamos que as conclusões dependem do modelo escolhido para representar os dados.

Na prática, a escolha do modelo adequado só é possível através de uma perfeita interação entre o pesquisador e o estatístico, pois só assim a análise poderá atender os objetivos da pesquisa.

Devemos, ainda lembrar que os testes estatísticos considerados não esgotam toda análise possível dos dados. Por exemplo, nos casos em que o efeito do fator é significativo, poderia ser aplicado o método de comparações múltiplas de Bonferroni (Peres e Saldiva [1982]) para detectar a causa da significância. Entretanto, estas análises posteriores fogem do objetivo deste trabalho.

CAPÍTULO 3

PLANEJAMENTOS COM MEDIDAS REPETIDAS E COM PADRÃO DE CORRELAÇÃO SERIAL

3.1 - INTRODUÇÃO

É muito comum na área de bioestatística e psicometria a realização de experimentos com medidas repetidas nos quais o fator de repetição é o tempo.

Em geral, em experimentos desta natureza, a matriz de variância-covariância resultante entre as observações não satisfaz o padrão tipo H de Huynh e Feldt [1970], o qual garante a utilização dos testes F univariados exatos, mas apresenta uma forma frequentemente conhecida como padrão de correlação serial ou padrão simplex.

O objetivo, neste capítulo, é investigar o efeito produzido por esta particular estrutura de covariância, nos níveis empíricos do erro de tipo I, quando os testes F univariados aproximados são utilizados. Esta investigação foi baseada no trabalho dos autores Hearne, Clark e Hatch [1983], onde apresentaram também um teste da razão de verossimilhança generalizada para verificar a validade deste padrão, e está aqui apresentado na seção 5.3.

3.2 - O PADRÃO DE CORRELAÇÃO SERIAL

Por simplicidade, e sem perda de generalidade, vamos considerar experimentos com p níveis do fator de repetição, ou, mais especificamente, do fator tempo, para os quais será medida uma variável-resposta em cada uma das n_j unidades experimentais do j -ésimo grupo, $j = 1, \dots, g$.

Assim, como antes, o perfil da i -ésima unidade experimental do j -ésimo grupo é o vetor

$$y_{ij} = (y_{ij1}, \dots, y_{ijk}, \dots, y_{ijp})', \quad i = 1, \dots, n_j, \quad j = 1, \dots, g,$$

cujas matrizes de variância-covariância é dada por:

$$\Sigma_j = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \dots & \rho_{1p}\sigma_1\sigma_p \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \dots & \rho_{2p}\sigma_2\sigma_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1p}\sigma_1\sigma_p & \rho_{2p}\sigma_2\sigma_p & \dots & \sigma_p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1p} & \sigma_{2p} & \dots & \sigma_{pp} \end{pmatrix}$$

No capítulo anterior vimos que os testes F univariados exatos são válidos se as matrizes Σ_j , $j = 1, \dots, g$, são do tipo H , com a mesma constante, $\lambda > 0$. Um teste para verificar esta estrutura, proposto por Huynh e Feldt [1970], está apresentado no apêndice A.3.

Entretanto, o que frequentemente se observa em experi-

mentos onde o fator de repetição é o tempo, é uma correlação mais alta entre as observações correspondentes a tempos mais próximos do que aquelas correspondentes a tempos mais afastados ✓

Este tipo de dependência das observações, dentro de uma mesma unidade experimental, pode caracterizar uma matriz de variância-covariância da seguinte forma:

$$\Sigma_{\rho} = \frac{\sigma^2}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{p-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{p-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \rho^{p-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{p-1} & \rho^{p-2} & \rho^{p-3} & \dots & 1 \end{pmatrix} = \frac{\sigma^2}{1-\rho^2} C_{\rho} \quad (3.2.1)$$

(ARI)

*Correl. exponencial
cond. equidistantes*

onde,

C_{ρ} é a matriz de correlação,

ρ é o coeficiente auto-regressivo de ordem 1.

O padrão dado por (3.2.1) é discutido por Pothoff e Roy [1964] como o padrão de correlação serial e por Wallenstein e Fleiss [1979] como a configuração simplex. Esta matriz é também de aplicação em análise de séries temporais e identificada como matriz de covariância (ou de correlação, no caso de C_{ρ}) de um processo auto-regressivo de 1ª ordem. *(ARI)*

Como estamos diante de uma estrutura de covariância diferente daquela de tipo H, então a existência do efeito principal

do fator tempo ou da interação grupo x tempo pode ser testada através das distribuições F aproximadas, com os graus de liberdade corrigidos pelo fator ϵ (expressão 2.4.1 - Cap. 2).

Assim, considerando estas distribuições aproximadas, e assumindo igualdade das matrizes de variância-covariância dos grupos e seguindo o padrão de correlação serial, apresentamos na Tabela 3.2.1 os níveis observados do erro de tipo I, utilizando as estatísticas F_2 e F_3 da tabela 2.3 (Cap. 2), para níveis nominais de 5% e 1%. Estes resultados foram encontrados por Hearne, Clark e Hatch [1983], considerando $g = 3$ grupos.

Da tabela 3.2.1 observamos que, no caso do teste F_2 , o nível observado do erro de tipo I varia de 0,055 a 0,184, para um nível nominal de 5%, e de 0,012 a 0,091 para um nível nominal de 1%.

Para o teste F_3 , a variação do nível empírico do erro de tipo I é de 0,054 a 0,171 para o nível nominal de 5%, e de 0,012 a 0,083 para o nível nominal de 1%. Notamos, portanto, que nos casos mais extremos ($p = 10$, $n = 15$, $\rho = 0,8$), os níveis observados são mais do que três vezes os níveis nominais. Isto nos leva a concluir que os testes univariados aproximados, na situação de correlação serial entre as observações, são muito liberais.

Notamos ainda que para o menor valor de ρ considerado (0,4) a estrutura de correlação serial parece não afetar muito o nível observado. Este resultado é esperado, pois quanto mais baixo o valor de ρ mais Σ_{ρ} está próximo de $\sigma^2 I$ e assim ϵ está próximo da unidade, acarretando, portanto, pequena correção nos graus

Tabela 3.2.1 - Níveis observados do erro de 1ª espécie, na presença de Correção Serial

p (1)	n (2)	ρ (3)	ϵ (4)	Tempo (F_2)		Grupo x Tempo (F_3)	
				0,05	0,01	0,05	0,01
5	5	0,8	0,63	0,116	0,042	0,108	0,038
5	10	0,8	0,63	0,117	0,042	0,110	0,039
5	15	0,8	0,63	0,117	0,042	0,110	0,039
10	5	0,8	0,41	0,181	0,090	0,167	0,081
10	10	0,8	0,41	0,183	0,091	0,170	0,083
10	15	0,8	0,41	0,184	0,091	0,171	0,083
5	5	0,6	0,75	0,088	0,026	0,084	0,025
5	10	0,6	0,75	0,088	0,026	0,084	0,025
5	15	0,6	0,75	0,088	0,026	0,085	0,025
10	5	0,6	0,59	0,119	0,044	0,113	0,042
10	10	0,6	0,59	0,120	0,045	0,114	0,042
10	15	0,6	0,59	0,120	0,045	0,114	0,042
5	5	0,4	0,96	0,055	0,012	0,054	0,012
5	10	0,4	0,96	0,055	0,012	0,054	0,012
5	15	0,4	0,96	0,055	0,012	0,054	0,012
10	5	0,4	0,94	0,057	0,012	0,056	0,012
10	10	0,4	0,94	0,057	0,012	0,056	0,012
10	15	0,4	0,94	0,057	0,012	0,056	0,012

Fonte: Hearne, Clark e Hatch [1983].

- (1) p : número de níveis do fator repetido.
- (2) n : número de unidades experimentais por grupo.
- (3) ρ : coeficiente auto-regressivo de 1ª ordem.
- (4) ϵ : grau de afastamento da estrutura tipo H.

de liberdade usuais. Além disso, Wallestein e Fleiss [1979] conseguiram expressar o fator ϵ de Box como função de ρ e p , para esta situação de correlação serial, e verificaram que ϵ é uma função monotônica decrescente de ρ . Estudaram também o limite inferior de ϵ , nesta situação, e verificaram ser igual a $5(p+1)/(2p^2+7)$, com um valor assintótico, de $2,5/(p-1)$. Assim, quando um teste conservativo deve ser usado, os autores aconselham usar estes limites inferiores na situação de correlação serial, pois a redução dos graus de liberdade é menor do que aquela empregando $1/(p-1)$.

3.3 - TESTE DA RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇA GENERALIZADA

Como em determinadas situações o padrão de correlação serial tornou os testes F aproximados demasiadamente liberais, seria interessante verificar inicialmente a validade deste padrão ao conjunto de dados disponíveis. Isto pode ser feito utilizando o teste da razão de verossimilhança generalizada, deduzido por Hearne, Clark e Hatch [1983], apresentado a seguir.

A estatística do teste da razão de verossimilhança generalizada para testar as hipóteses,

$$H_0 : \Sigma = \Sigma_\rho$$

$$H_1 : \Sigma \neq \Sigma_\rho$$

é obtida pelo quociente,

$$\lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}$$

onde,

$\hat{\omega}$ é o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro, sob H_0 ,

$\hat{\Omega}$ é o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro, sob o modelo geral,

$L(\hat{\omega})$ é a função de verossimilhança, calculada em $\hat{\omega}$,

$L(\hat{\Omega})$ é a função de verossimilhança, calculada em $\hat{\Omega}$.

Para encontrar os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros sob H_0 e sob o modelo geral, vamos assumir normalidade.

Como estamos interessados apenas na estrutura de covariância iremos trabalhar com variáveis transformadas,

$x_{ijk} = y_{ijk} - \bar{y}_{.jk}$, eliminando desta forma do problema, o parâmetro média. Assim, o espaço paramétrico, sob H_0 , passa a ser $\omega = (\sigma^2, \rho)$ e, sob o modelo geral, $\Omega = (\Sigma)$.

Para encontrar $L(\hat{\omega})$ o primeiro passo, segundo os autores, é encontrar $\hat{\omega}$ que satisfaça o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \ln L(\omega) = - N\rho\sigma^2 + (1-\rho^2)(A_1 - \rho A_2) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L(\omega) = - N\rho\sigma^2 + A_2 + A_3 - 2A_1\rho + A_2\rho^2 = 0 \quad (2)$$

onde,

$$A_1 = \sum_{j=1}^g \left(\frac{n_j}{n_j - 1} \right) \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{k=2}^p x_{ijk} x_{ij(k-1)}$$

$$A_2 = \sum_{j=1}^g \left(\frac{n_j}{n_j - 1} \right) \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{k=2}^{p-1} x_{ijk}^2$$

$$A_3 = \sum_{j=1}^g \left(\frac{n_j}{n_j - 1} \right) \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij1}^2 + x_{ijp}^2)$$

Resolvendo (2) para σ^2 e substituindo em (1) obtemos,

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right) A_2 \rho^3 - \left(1 - \frac{2}{p}\right) A_1 \rho^2 - \left\{ \left(1 + \frac{1}{p}\right) A_2 + \frac{A_3}{p} \right\} \rho + A_1 = 0 \quad (3)$$

Para cada solução deste polinômio teremos um valor correspondente para σ^2 , obtido pela equação (2). Seguindo Koopmans [1942], podemos selecionar aquele valor de ρ que corresponde à raiz real mais próxima de $A_1 / (A_2 + A_3)$. Vamos denotar por $\hat{\rho}_0$ e $\hat{\sigma}_0^2$ essa solução deste sistema.

Para encontrar $L(\hat{\Omega})$ devemos obter o estimador de máxima verossimilhança de Σ de uma distribuição multivariada normal, com média zero e matriz de variância-covariância Σ . Seja $\hat{\Sigma}_j$ o estimador de máxima verossimilhança não viciado de Σ_j , a matriz de variância-covariância do grupo j . Então, o estimador de máxima verossimilhança não viciado em Ω é

$$\hat{\Sigma} = \sum_{j=1}^g \frac{n_j}{N} \hat{\Sigma}_j \quad (3.3.1)$$

onde N é o número total de unidades experimentais.

A estatística do teste da razão de verossimilhança generalizada encontrada pelos autores é dada por:

$$\lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} = \frac{|\hat{\Sigma}_\rho|^{-\frac{N}{2}}}{|\hat{\Sigma}|^{-\frac{N}{2}}} = \frac{|\hat{\Sigma}|^{\frac{N}{2}}}{[(\hat{\sigma}^2)^p / (1 - \hat{\rho}^2)]^{N/2}}$$

Então, a estatística $-2 \ln \lambda$ tem, sob H_0 , distribuição assintótica quiquadrado com $[p(p+1)/2 - 2]$ graus de liberdade.

Apresentamos, a seguir, o exemplo usado pelos autores, que serve para ilustrar a utilização do teste da razão de verossimilhança generalizado acima deduzido, cujos dados foram obtidos de um estudo feito por Hatch [1980].

Exemplo :

Um experimento foi realizado com o objetivo de investigar o efeito de diferentes quantidades de determinado "estímulo" que agia como uma retro-alimentação no batimento cardíaco. Foram utilizadas três quantidades desse estímulo, 100%, 75% e controle representando assim 3 grupos. Cada estímulo foi aplicado em 6 indivíduos diferentes cujos batimentos cardíacos foram registrados em 5 períodos, cada um com duração de 3 minutos e em intervalos de 2 minutos.

Na tabela 3.3.2 apresentamos as médias e os desvios padrões das observações, seguida pela matriz de variância-covariância amostral, calculada usando (3.3.1) e a matriz de correlação amostral correspondente.

Tabela 3.3.2 - Médias Amostrais dos batimentos cardíacos \pm desvio padrão

Grupos	Períodos de Tempo					Marginal
	1	2	3	4	5	
100%	64,2 \pm 2,3	64,4 \pm 2,5	63,0 \pm 2,4	65,3 \pm 2,2	65,5 \pm 1,8	64,5
75%	68,1 \pm 3,0	70,0 \pm 2,6	69,1 \pm 2,7	71,2 \pm 3,2	72,7 \pm 4,4	70,2
Controle	66,1 \pm 3,3	65,4 \pm 3,0	65,1 \pm 3,3	66,5 \pm 2,8	65,1 \pm 1,9	65,6
Marginal	66,1	66,6	65,7	67,7	67,8	66,8

Fonte: Hatch [1980].

- Matriz de variância-covariância amostral:

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 50,6 & & & & & \\ 43,5 & 44,7 & & & & \\ 42,4 & 45,1 & 48,8 & & & \\ 43,2 & 42,0 & 44,6 & 46,0 & & \\ 40,3 & 41,8 & 43,5 & 44,3 & 52,9 & \end{pmatrix}$$

onde,

$$|\hat{\Sigma}| = 34.709.$$

- Matriz de Correlação Amostral:

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 1,0 & & & & \\ 0,91 & 1,0 & & & \\ 0,85 & 0,97 & 1,0 & & \\ 0,90 & 0,93 & 0,94 & 1,0 & \\ 0,78 & 0,86 & 0,86 & 0,9 & 1,0 \end{pmatrix}$$

- As quantidades A_1 , A_2 , A_3 , $\hat{\rho}_0$ e $\hat{\sigma}_0^2$ foram calculadas obtendo - se,

$$A_1 = 3195,0$$

$$A_2 = 2510,6$$

$$A_3 = 1863,3$$

$$\hat{\rho}_0 = 0,93$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = 6,88$$

$$\frac{\hat{\sigma}_0^2}{1-\hat{\rho}_0^2} = 50,9$$

- As matrizes de variância-covariância e correlação amostral supondo o padrão de correlação serial são:

$$\hat{\Sigma}_\rho = \begin{pmatrix} 50,9 & & & & \\ 47,3 & 50,9 & & & \\ 44,0 & 47,3 & 50,9 & & \\ 40,9 & 44,0 & 47,3 & 50,9 & \\ 38,1 & 40,9 & 44,0 & 47,3 & 50,9 \end{pmatrix}$$

onde,

$$|\hat{\Sigma}_\rho| = 92696,8$$

$$\hat{C}_\rho = \begin{pmatrix} 1,0 & & & & & \\ 0,93 & 1,0 & & & & \\ 0,86 & 0,93 & 1,0 & & & \\ 0,80 & 0,86 & 0,93 & 1,0 & & \\ 0,75 & 0,80 & 0,86 & 0,8 & 1,0 & \end{pmatrix}$$

O valor observado da estatística qui-quadrado com 13 graus de liberdade é

$$- 2 \ln \left(\frac{34709}{92696,8} \right)^9 = 17,68$$

que é menor que seu valor crítico ($\chi_c^2 = 22,4$), a um nível de significância de 5%.

Portanto, a hipótese nula que estabelece o padrão de correlação serial não é rejeitada, ao nível de 5%.

A estrutura tipo H neste experimento foi rejeitada ($\hat{\alpha} = 0,0056$). Este seria o resultado mais provável de acontecer aqui, pois a não rejeição da estrutura H quando a estrutura de correlação serial foi aceita seria, teoricamente, inconsistente. Na prática, entretanto, pode ocorrer situações em que ambas estruturas são aceitas. Este fato pode ser explicado pelo erro de 2ª espécie que se comete ao realizarmos um teste de hipótese estatística.

O quadro de análise de variância tradicional está apresentado na tabela 3.3.3, com as respectivas probabilidades observadas do erro de tipo I (coluna 5) para cada um dos testes. Os

resultados foram obtidos pelos autores utilizando o programa BMDP2V (BMDP-79).

Tabela 3.3.3 - ANOVA

F.V.	g.l.	QM	F	P
Grupos	2	276,0	$F_1 = 1,25$	0,3148
Indivíduos (dentro de grupo)	15	220,9		
Tempo	4	15,34	$F_2 = 2,77$	0,0348
Grupo x Tempo	8	6,53	$F_3 = 1,18$	0,3253
Indivíduo x Tempo (dentro de grupo)	60	5,53		

Desde que a violação das suposições univariadas exatas afeta, como já vimos, os testes F_2 e F_3 foram então realizados os testes aproximados corrigindo os graus de liberdade pelo fator ϵ estimado a partir de $\hat{\Sigma}_\rho$ ($\hat{\epsilon} = 0,56$).

As distribuições F ajustadas são, portanto, $F_2 \sim F(2,24, 33,6)$, correspondendo a $P_{\hat{\epsilon}} = 0,0707$ e $F_3 \sim F(4,48, 33,6)$, correspondendo a $P_{\hat{\epsilon}} = 0,3386$.

Verificamos que o teste que verifica a existência do efeito de tempo (F_2) resultou em não significativo ao nível de 5%, quando usamos as distribuições aproximadas, resultado este contrário àquele obtido usando as distribuições exatas.

O procedimento em "três passos" descrito no Capítulo 2,

poderia ser utilizado. A correção máxima dos graus de liberdade, que produz o teste conservativo, seria dada por $5(p+1)/(2p^2+7)$, que neste caso é igual a 0,526. Assim, no caso da estatística F_3 , como o valor observado foi menor que o valor crítico usual, a conclusão de não significativa pode ser tirada sem necessidade de correção dos graus de liberdade. Para a estatística F_2 , como o valor observado foi maior que o valor crítico usual, então a etapa seguinte seria comparar o valor observado com o valor crítico do teste conservativo, isto é, com 2,1 e 31,6 graus de liberdade. Embora não dispomos deste valor crítico exato, certamente ele é maior do que o valor observado 2,77. Sendo assim, o próximo e último passo é comparar o valor observado com o valor crítico que é obtido corrigindo os graus de liberdade por $\hat{\epsilon} = 0,56$, e a conclusão é tirada, agora, baseando-se nestes graus de liberdade.

3.4 - ALGUNS COMENTÁRIOS

O estudo apresentado neste capítulo serve para indicar que, quando dados com medidas repetidas são analisados, a forma da matriz de variância-covariância deve ser investigada. Se a estrutura H é rejeitada, é conveniente usar as soluções univariadas aproximadas. Entretanto, se a estrutura aceita é a de correlação serial os procedimentos univariados aproximados devem ser utilizados com algum cuidado, pois os testes, em algumas destas situações podem ser demasiadamente tolerantes.

Essa estrutura de correlação serial considerada é a es-

estrutura correspondente ao modelo estacionário de séries temporais expresso por:

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, p \quad (3.4.1)$$

onde,

ρ é o coeficiente auto-regressivo de 1ª ordem,

ε_t são v. as. independentes com variância constante,

Y_t é a variável-resposta observada no instante t .

Do modelo (3.4.1) segue que:

$$\text{Var}(Y_t) = \rho^2 \text{Var}(Y_{t-1}) + \sigma^2$$

e como o modelo é estacionário, temos que $\text{Var}(Y_t) = \text{Var}(Y_{t-1})$, o que produz

$$\text{Var}(Y_t) = \frac{\sigma^2}{1-\rho^2}$$

De modo análogo, verificamos que,

$$\text{Cov}(Y_t, Y_{t+k}) = \frac{\rho^k \sigma^2}{1-\rho^2}$$

e assim,

$$\text{Corr}(Y_t, Y_{t+k}) = \rho^k$$

Então, para $k = 1$, segue que

$$\text{Corr}(Y_t, Y_{t+1}) = \rho, \quad t = 1, 2, \dots, p-1$$

O modelo (3.4.1) é denominado de modelo auto-regressivo de ordem 1. Entretanto, existem modelos auto-regressivos mais complicados que são mais adequados em determinadas situações. Um teste da razão de verossimilhança generalizada correspondente poderia ser deduzido para verificar a validade de tais estruturas de covariância.

Na presença de correlação serial pode também ser adotado o procedimento multivariado para analisar os dados. Entretanto, na teoria, procedimentos que dependem de estruturas específicas de covariância seriam os mais desejáveis, pois apresentam maior poder. Os autores recomendam ainda, um outro possível procedimento apresentado por Ljung e Box [1980].

CAPÍTULO 4

EXPERIMENTOS COM MEDIDAS REPETIDAS E OBSERVAÇÕES ALOCADAS

4.1 - DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Neste capítulo a atenção estará voltada para os planejamentos com medidas repetidas, envolvendo um fator aleatório e vários fatores fixos, os quais, às vezes, são denotados por planejamentos mistos.

O fator aleatório é cruzado com pelo menos um fator fixo, e é hierárquico em relação a outros. O fator aleatório aqui, representará uma amostra de unidades experimentais, ou, várias amostras de unidades experimentais, no caso em que ele é hierárquico em relação a outros fatores fixos. Assim, as diferentes unidades amostrais são os níveis do fator aleatório.

Será considerada, ainda, uma situação especial destes planejamentos mistos: os valores da variável-resposta, para cada nível do fator aleatório, somam uma constante fixa. O que varia, então, entre os níveis do fator aleatório são as distribuições dessa soma constante partilhada ou alocada aos níveis repetidos de

cada unidade experimental. Assim, o termo "*observações alocadas*", que adotaremos neste capítulo, estará designando que as observações de uma dada unidade experimental tem soma constante, ou ainda, que as observações formam uma partilha (ou repartição) de um total constante.

Na seção seguinte apresentamos 3 exemplos de planejamentos com medidas repetidas, envolvendo 1 fator aleatório e ou tros fixos, e com observações alocadas.

Nas seções 4.3 e 4.4 discutiremos, respectivamente, a formulação e análise do modelo misto de Scheffé, quando não há observação alocada e do *modelo misto de "alocação"*, que será uma modificação do modelo de Scheffé, nos planejamentos envolvendo apenas dois fatores.

Finalizando, apresentamos na última seção, uma breve extensão a planejamentos mais complexos envolvendo observações alocadas.

4.2 - ALGUNS EXEMPLOS E CONSIDERAÇÕES

Para melhor compreensão do que consiste experimentos com medidas repetidas e com observações alocadas, apresentamos, a seguir, três exemplos.

Exemplo 4.2.1:

Suponha que os professores de determinada faculdade, dentro de uma universidade, são divididos em grupos de acordo com

a disciplina que lecionam. Uma amostra de cada grupo de professores é sorteada, e cada elemento da amostra deve registrar as porcentagens do tempo profissional total gasto com didática, pesquisa e administração.

Neste experimento temos um fator aleatório, que são os professores amostrados, cruzado com o fator fixo atividade profissional com 3 níveis (didática, pesquisa e administração), e hierárquico em relação ao fator fixo disciplina. A variável-resposta, neste caso, é a porcentagem do tempo profissional total dedicado às três modalidades da atividade profissional. Sendo assim, as observações para cada unidade experimental (professor), tem soma constante e igual a 100.

Um experimento planejado desta forma pode ter como objetivo verificar a interação entre disciplina e atividade profissional.

Os dados, para este experimento, poderiam ser apresentados conforme tabela 4.2.1.

Tabela 4.2.1 - Apresentação dos dados do exemplo 4.2.1, com medidas repetidas e alocadas, com 2 fatores fixos e 1 fator aleatório

	Unidades Amostrais	Atividade Profissional			Total Constante
		Didática	Pesquisa	Administração	
G ₁ (Disciplina 1)	1	x	x	x	100
	2	x	x	x	100
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	n ₁	x	x	x	100
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
G _g (Disciplina g)	1	x	x	x	100
	2	x	x	x	100
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	n _g	x	x	x	100

Exemplo 4.2.2:

Num estudo de psicologia, uma amostra de n_1 homens e uma amostra de n_2 mulheres, devem ler dois romances de grande sucesso, um sobre um homem e outro sobre uma mulher. Após lidos, cada leitor deve julgar a causa do sucesso do personagem. Esse julgamento é feito segundo o quanto que ele atribui do sucesso do personagem ao esforço, à habilidade ou à sorte. Essa avaliação é feita em %.

Neste experimento temos, então, 3 fatores fixos que são atribuição ao sucesso do personagem do romance (habilidade, esforço e sorte), sexo do personagem do romance e sexo do indivíduo que irá julgar e, um fator aleatório, indivíduo. As observações para cada indivíduo, sob os três níveis do primeiro fator fixo, e para cada combinação de níveis dos fatores sexo do personagem e sexo do leitor, devem ter soma constante, e no caso, também igual a 100.

Uma representação tabular, para os dados deste experimento, poderia ser conforme tabela 4.2.2 a seguir.

Exemplo 4.2.3:

Este último exemplo ilustra o problema com 1 fator aleatório e um fator fixo, em que os níveis do fator fixo são tratados quantitativamente.

Considere um retângulo de papel que será cortado, de forma precisa, em tiras de 1cm paralelas a um dos lados. Suponha que cada uma destas tiras deve ser cortada em 10 partes, "a

Tabela 4.2.2 - Apresentação de dados do Exemplo 4.2.2, com medidas repetidas e alocadas, com 3 fatores fixos e 1 fator aleatório

Sexo do Leitor	Unidade Exper.	Sexo do Ind. da estória	Atribuição ao sucesso do personagem			Total Constante
			Habilidade	Esforço	Sorte	
M	1	M	x	x	x	100
		F	x	x	x	100
	2	M	x	x	x	100
		F	x	x	x	100
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n ₁	
F	1	M	x	x	x	100
		F	x	x	x	100
	2	M	x	x	x	100
		F	x	x	x	100
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n ₂	

olho" com uma tesoura (isto é, sem nenhum instrumento de medida), em cortes transversais ao longo da tira, e de tamanhos tão iguais quanto possíveis. Se isto é feito para m tiras, e os pedaços medidos segundo alguma variável (por exemplo, comprimento do pedaço cortado), temos, então, uma tabela de dados com m linhas e 10 co lunas, onde a soma dos valores de cada linha é constante e, no exemplo, igual ao comprimento total da tira, L, antes de ser cortada (pode-se assumir que os erros de medida da variável são desprezíveis).

Se cada uma das tiras é dada a indivíduos diferentes, então temos um experimento constituído de um fator aleatório (indivíduo) e um fator fixo (posição de corte ao longo da tira), e com observações alocadas sob cada nível do fator fixo L.

Num experimento deste tipo, poderia ser de interesse verificar a existência do efeito do fator fixo, ou ainda, testar uma tendência (talvez linear ou quadrática) na posição de corte ao longo da tira.

Assim, os dados deste experimento, poderiam ser tabulados conforme tabela 4.2.3.

Tabela 4.2.3 - Apresentação dos dados do Exemplo 4.2.3

Indivíduos	Posição do Corte				Total Constante
	1º	2º	. . .	10º	
1	x	x	. . .	x	L
2	x	x	. . .	x	L
.
.
.
m	x	x	. . .	x	L

Na classe destes planejamentos que estamos considerando, quando há somente um fator fixo cruzado com as unidades experimentais (fator aleatório), então as observações para cada unidade experimental, sob os níveis deste fator fixo, somam um total constante (exemplo 4.2.1 e 4.2.3). Entretanto, se há mais do que um fator fixo cruzado com as unidades experimentais, então as observa-

ções para cada unidade experimental somam uma constante sob os níveis de somente um dos fatores fixos, e para cada combinação entre os níveis dos outros fatores fixos (exemplo 4.2.2).

O fator fixo, para o qual as observações sob todos os seus níveis somam um total constante, será designado o *fator de alocação*.

Nos três exemplos apresentados, os fatores de alocação são, respectivamente, atividade profissional, atribuição ao sucesso do personagem e posição de corte da tira.

A seguir, apresentamos a formulação de Scheffé [1959] de experimentos envolvendo um fator aleatório e um fator fixo, sem a restrição de observações alocadas.

4.3 - O MODELO MISTO DE SCHEFFÉ

Para seguirmos a notação de Scheffé, faremos uma inversão nos índices que estavam sendo adotados até aqui.

Vamos considerar nesta seção experimentos cruzados com dois fatores, um fixo e um aleatório, e uma observação por casela. O modelo linear associado a este tipo de experimento pode ser dado por:

$$y_{ij} = m_{ij} + e_{ij}, \quad i = 1, \dots, a, \quad j = 1, \dots, b \quad (4.3.1)$$

onde,

y_{ij} é a observação do i -ésimo nível do fator fixo A e j -ésimo nível do fator aleatório B,

m_{ij} é a média da variável-resposta do i -ésimo nível do fator A e j -ésimo nível do fator B,

e_{ij} é o erro aleatório da observação y_{ij} .

As suposições fundamentais para este modelo são:

- 1) Os e_{ij} são variáveis aleatórias independentes com distribuição $N(0, \sigma_e^2)$, e independentes dos m_{ij} ;
- 2) Os vetores aleatórios $\underline{m}_j = (m_{1j}, m_{2j}, \dots, m_{aj})'$, $j = 1, \dots, b$, são independentes e distribuídos com distribuição normal a-variada, com vetor-média $\underline{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_a)'$ e matriz de variância-covariância arbitrária, positiva definida, $\Sigma_m = (\sigma_{ii})$.

Como conseqüências das suposições feitas acima, temos que os vetores aleatórios $\underline{y}_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{aj})'$, $j = 1, \dots, b$, são independentes e distribuídos com distribuição normal a-variada com vetor média $\underline{\mu}$, e matriz de variância-covariância Σ_y , positiva definida, expressa por:

$$\Sigma_y = \Sigma_m + \sigma_e^2 I_a \quad (4.3.2)$$

onde,

I_a é a matriz identidade de ordem a .

Os m_{ij} , definidos acima, podem ser escritos como:

$$m_{ij} = \mu + \alpha_i + b_j + c_{ij}, \quad i = 1, \dots, a, \quad j = 1, \dots, b \quad (4.3.3)$$

onde,

μ é a média geral,

α_i é o efeito principal do i -ésimo nível de A,

b_j é o efeito aleatório do j -ésimo nível de B no experimento,
 c_{ij} é a interação entre o i -ésimo nível de A e j -ésimo nível de B,

com as seguintes restrições:

$$\alpha_{.} = \sum_{i=1}^a \alpha_i = 0$$

$$c_{.j} = \sum_{i=1}^a c_{ij} = 0$$

O modelo e suas suposições implicam ainda que os vetores aleatórios $\{b_{\sim j}\}$ e $\{c_{ij}, i = 1, \dots, a\}, j = 1, \dots, b$, obedecem uma distribuição multivariada normal, com vetor-média zero e matriz de variância-covariância, expressa em termos dos elementos de $\Sigma_m = (\sigma_{ii'})$, como:

$$\text{Cov}(b_j, b_{j'}) = \delta_{jj'} \bar{\sigma}_{..}$$

$$\text{Cov}(c_{ij}, c_{i'j'}) = \delta_{jj'} (\sigma_{ii'} - \bar{\sigma}_{i.} - \bar{\sigma}_{.i'} + \bar{\sigma}_{..})$$

$$\text{Cov}(b_j, c_{ij'}) = \delta_{jj'} (\bar{\sigma}_{i.} - \bar{\sigma}_{..})$$

onde,

$$\bar{\sigma}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{i'=1}^a \sigma_{ii'}}{a^2}$$

$$\bar{\sigma}_{i..} = \frac{\sum_{i'=1}^a \sigma_{ii'}}{a}$$

$$\bar{\sigma}_{.i'} = \frac{\sum_{i=1}^a \sigma_{ii'}}{a}$$

$$\delta_{jj'} = \begin{cases} 1, & j=j' \\ 0, & j \neq j' \end{cases}$$

A tabela 4.3.1 mostra o quadro de análise de variância correspondente a este modelo onde, as somas de quadrados são calculadas da maneira usual e,

$$\sigma_B^2 = \text{Var}(b_j) = \bar{\sigma}_{..}$$

$$\sigma_{AB}^2 = \frac{\sum_{i=1}^a \text{Var}(c_{ij})}{a-1} = \frac{\sum_{i=1}^a (\sigma_{ii} - \bar{\sigma}_{..})}{a-1}$$

Tabela 4.3.1 - Quadro de Análise de Variância para o modelo misto (4.3.1)

F.V.	g.l.	SQ	QM	E(QM)
Fator A (fixo)	a-1	SQ _A	QM _A	$\sigma_e^2 + \sigma_{AB}^2 + \frac{b}{a-1} \sum_{i=1}^a \alpha_i^2$
Fator B (aleatório)	b-1	SQ _B	QM _B	$\sigma_e^2 + a\sigma_B^2$
Interação A x B	(a-1)(b-1)	SQ _{AB}	QM _{AB}	$\sigma_e^2 + \sigma_{AB}^2$
Total	ab-1	SQ _T		

Fonte: Shaffer, J.P. [1981].

Conforme afirma Scheffé [1959], embora QM_A e QM_{AB} são estatisticamente independentes e, sob a hipótese H_A : $\alpha_i = 0, i = 1, \dots, a$, tem o mesmo va

lor esperado, o quociente entre eles não tem, em geral, distribuição F exata, sob H_A . Isto decorre do fato de que a matriz de variância-covariância Σ_m nem sempre satisfaz a condição de circularidade ou o padrão tipo H de Huynh e Feldt, referida no Capítulo 2 deste trabalho.

Sendo assim, como já vimos, há duas alternativas para testarmos H_A :

- 1) solução exata multivariada baseada na estatística T^2 de Hotelling (Scheffé [1959], 271-274), ou solução multivariada proposta por Graybill [1961] (Apêndice B deste trabalho). Entretanto, qualquer um dos testes multivariados requer que $b \geq a$;
- 2) solução aproximada univariada baseada na razão QM_A/QM_{AB} que, sob H_A , tem distribuição aproximadamente F-Snedecor com $(a-1)\epsilon$ e $(a-1)(b-1)\epsilon$ graus de liberdade, onde o fator de correção ϵ , que é uma função dos elementos de Σ_y , pode ser estimado por uma das formas sugeridas no Capítulo 2 ($\hat{\epsilon}$ ou $\tilde{\epsilon}$). Se $\epsilon = 1$, então Σ_y é de tipo H e a solução univariada é exata.

O efeito do fator aleatório B não poderia ser testado, neste caso, pois só temos uma observação por casela.

Veremos, então, a seguir como podemos adaptar a situação de alocação nas observações a este modelo misto que acabamos de apresentar.

4.4 - O MODELO MISTO DE ALOCAÇÃO

O modelo misto agora proposto é uma adaptação ao modelo misto de Scheffé (expressão 4.3.1), onde existe a restrição de que as observações para cada nível do fator aleatório, sob os níveis do fator de alocação, somam um total fixo e constante.

Usaremos o subscrito * para denotar todas as quantida-

des do modelo misto (4.3.1), na situação em que temos observações alocadas. Isto é, o modelo agora é:

$$y_{ij}^* = m_{ij}^* + e_{ij}^*$$

ou,

$$y_{ij}^* = \mu^* + \alpha_i^* + b_j^* + c_{ij}^* + e_{ij}^*, \quad i = 1, \dots, a, \quad j = 1, \dots, b \quad (4.4.1)$$

onde, os elementos acima são definidos da mesma maneira como na seção anterior.

Parece natural, entretanto, que a restrição de alocação das observações produzem duas propriedades diferentes daquelas do modelo anterior (4.3.1):

1) Para cada nível j de B , os verdadeiros valores somam uma mesma constante C , ou seja, $\sum_{i=1}^a m_{ij}^* = C$, qualquer que seja j . Conceitualmente isto é equivalente à suposição de que há um verdadeiro conjunto de alocação para cada unidade experimental, o que implica que Σ_m^* é singular e que $\sigma_{B^*}^2 = 0$.

2) A soma dos erros aleatórios para cada j é zero, ou seja, $\sum_{i=1}^a e_{ij}^* = 0$, qualquer que seja j . Esta propriedade facilmente pode ser verificada, pois pela restrição de observações alocadas segue que $\sum_{i=1}^a y_{ij}^* = \sum_{i=1}^a m_{ij}^* = C$, qualquer que seja j . Assim, os vetores aleatórios $\underline{e}_j = (e_{1j}, \dots, e_{aj})'$, $j = 1, \dots, b$, são independentes e distribuídos com distribuição normal a -variada, com vetor-média $\underline{0}$ e matriz de variância-covariância Σ_e^* ,

elementos diagonais iguais a $\sigma_{e^*}^2$ e elementos fora da diagonal iguais a $-\sigma_{e^*}/(a-1)$.

As duas propriedades acima implicam que os vetores $y_j^* = (y_{1j}^*, \dots, y_{aj}^*)'$, $j = 1, \dots, b$, são independentes com distribuição normal a-variada, com vetor-média $\mu^* = (\mu_1^*, \dots, \mu_a^*)'$ e matriz de variância-covariância Σ_{y^*} , expressa por:

$$\Sigma_{y^*} = \Sigma_{m^*} + \Sigma_{e^*} \quad (4.4.2)$$

Assim, basicamente, a grande diferença entre os dois modelos é a estrutura de variância-covariância entre as observações (4.3.2 e 4.4.2).

O quadro de análise de variância correspondente ao modelo (4.4.1) é dado na tabela 4.4.1, onde as somas de quadrados são calculadas da maneira usual.

Tabela 4.4.1 - Quadro de Análise de Variância correspondente ao modelo misto de Alocação (4.4.1)

F.V.	g.l.	SQ	QM	E(QM)
Fator A (fixo)	a-1	SQ_{A^*}	QM_{A^*}	$\frac{a}{a-1} \sigma_{e^*}^2 + \sigma_{AB^*}^2 + \frac{b}{a-1} \sum_{i=1}^a \alpha_i^{*2}$
Fator B (aleatório)	0	0	0	0
Interação AxB	$(a-1)(b-1)$	SQ_{AB^*}	QM_{AB^*}	$\frac{a}{a-1} \sigma_{e^*}^2 + \sigma_{AB^*}^2$
Total	ab-1	SQ_{T^*}		

Fonte: Shaffer, J.P. [1981].

Assim, para inferir sobre o efeito do fator fixo (α_i^*) através de teste de hipótese, utilizaremos o resultado do teorema 4.4.1 apresentado a seguir.

Teorema 4.4.1:

Para um dado conjunto de observações $\{y_{ij}^*\}$, distribuído de acordo com o modelo misto de alocação (4.4.1), a distribuição de qualquer estatística, que é uma função de contrastes das observações entre os níveis do fator de alocação, é a mesma se os y_{ij}^* fossem distribuídos de acordo com o modelo misto de Scheffé (4.3.1), com parâmetros $\mu = \mu^*$, $\alpha_i = \alpha_i^*$, $\sigma_{AB}^2 = \sigma_{AB*}^2$ e $\sigma_e^2 = \frac{a}{a-1}\sigma_{e*}^2$

Demonstração:

O modelo misto de alocação é dado por:

$$y_{ij}^* = m_{ij}^* + e_{ij}^*$$

ou
$$y_{ij}^* = \mu^* + \alpha_i^* + b_j^* + c_{ij}^* + e_{ij}^*, \quad i = 1, \dots, a, \quad j = 1, \dots, b$$

onde,

$$\sigma_{B*}^2 = 0$$

$$\sigma_{AB*}^2 = \frac{\sum_{i=1}^a \text{Var}(c_{ij}^*)}{a-1}$$

$$E(e_{ij}^*) = 0, \quad V(e_{ij}^*) = \sigma_{e*}^2 \quad \text{e} \quad \text{Cov}(e_{ij}^*, e_{i'j'}) = -\frac{\sigma_{e*}^2}{a-1}$$

Consideremos as variáveis aleatórias independentes b_j e g_j , $j = 1, \dots, b$, com distribuição normal e independentes de

m_{ij}^* e e_{ij}^* , com:

$$E(b_j) = 0 \quad e \quad V(b_j) = \sigma_B^2 \text{ (constante), } j = 1, \dots, b$$

$$E(g_j) = 0 \quad e \quad V(g_j) = \frac{\sigma_{e^*}^2}{a-1}, \quad j = 1, \dots, b$$

Considere o modelo,

$$z_{ij} = m_{ij} + e_{ij}, \quad i = 1, \dots, a, \quad j = 1, \dots, b$$

onde,

$$m_{ij} = m_{ij}^* + b_j$$

$$e_{ij} = e_{ij}^* + g_j$$

Assim, podemos escrever,

$$z_{ij} = y_{ij}^* + b_j + g_j, \quad i = 1, \dots, a, \quad j = 1, \dots, b$$

Então, o modelo $\{z_{ij}, i = 1, \dots, a, j = 1, \dots, b\}$ é distribuído de acordo com o modelo misto de Scheffé (4.3.1), com

$$\mu = \mu^*$$

$$\alpha_i = \alpha_i^*$$

$$\sigma_{AB}^2 = \sigma_{AB^*}^2$$

$$e \quad e_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2), \text{ independentes, onde } \sigma_e^2 = \frac{a}{a-1} \sigma_{e^*}^2$$

A afirmação acima sobre os erros pode ser verificada por,

$$E(e_{ij}) = E[e_{ij}^* + g_j] = 0$$

$$V(e_{ij}) = V(e_{ij}^* + g_j) = V(e_{ij}^*) + V(g_j) = \sigma_{e^*}^2 + \frac{\sigma_{e^*}^2}{a-1} = \frac{a}{a-1} \sigma_{e^*}^2$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(e_{ij}, e_{i',j}) &= \text{Cov}[(e_{ij}^* + g_j), (e_{i',j}^* + g_j)] = \\ &= E[(e_{ij}^* + g_j)(e_{i',j}^* + g_j)] = \\ &= E(e_{ij}^* e_{i',j}^*) + E(g_j^2) = \\ &= \text{Cov}(e_{ij}^*, e_{i',j}^*) + V(g_j) = \\ &= -\frac{\sigma_{e^*}^2}{a-1} + \frac{\sigma_{e^*}^2}{a-1} = 0 \end{aligned}$$

Fica claro ainda que $\sum_{i=1}^a a_{ij} y_{ij}^* = \sum_{i=1}^a a_{ij} z_{ij}$, para quais-

quer a_{ij} tal que $\sum_{i=1}^a a_{ij} = 0$. □

Na seção anterior foram citadas três soluções alternativas para testar $H_A : \alpha_i = 0, \forall i : F$ (univariada), F_ϵ (univariada aproximada) e T^2 (multivariada exata). Pode ser mostrado que todas as estatísticas envolvidas nestes testes são funções das observações somente através de combinações lineares, com a soma dos coeficientes em i igual a zero. Portanto, a hipótese $H_{A^*} : \alpha_i^* = 0, \forall i$, no modelo de alocação, é testada da mesma maneira que $H_A : \alpha_i = 0, \forall i$, no modelo de Scheffé, com as respectiv

vas equivalências de parâmetros. As mesmas conclusões valem para intervalos de confiança e hipóteses mais gerais sobre os parâmetros α_i^* .

Ambos modelos, o de Scheffé ou o de alocação, podem ser generalizados para permitirem matrizes de variância-covariância dos erros, Σ_e e Σ_{e^*} , arbitrárias (desde que não-singulares). Sendo assim, o padrão tipo H de Huynh e Feldt [1970], sob o qual o teste F exato univariado é válido, se aplica, neste caso, não aos elementos de Σ_m ou Σ_{m^*} , mas àqueles de Σ_y e Σ_{y^*} , o que é muito pouco provável de acontecer.

4.5 - EXTENSÃO A OUTROS PLANEJAMENTOS

4.5.1 - Planejamentos Mistos Envolvendo mais do que Dois Fatores

O modelo misto (4.3.1) pode ser estendido a planejamentos envolvendo mais do que dois fatores e, assim, o modelo misto de alocação pode ser correspondentemente estendido. Em seu texto, Scheffé [1959] fornece regras para a definição e cálculo das somas de quadrados apropriadas, para os correspondentes graus de liberdade e ainda, para os respectivos valores esperados dos quadrados médios.

O teorema 4.4.1 pode, também, ser generalizado a planejamentos envolvendo fatores fixos adicionais. Desta forma, podemos definir o modelo misto de alocação correspondente, bem como a respectiva análise de variância apropriada. Desta forma, planeja

mentos tais como dos exemplos 4.2.1 e 4.2.2, com 2 e 3 fatores fixos respectivamente, podem ser analisados.

Isto implica que os procedimentos usuais, obtidos pela generalização das soluções F , F_e e T^2 , para inferência sobre o efeito do fator de alocação e das interações com outros fatores fixos, são válidos sob o modelo misto de alocação, desde que seja feita a correspondência devida entre os parâmetros dos dois modelos.

4.5.2 - Planejamentos Mistos com Réplicas: Inferência sobre o Efeito do Fator Aleatório

Vamos considerar o planejamento misto com dois fatores e com várias observações por casela, ou seja, existem réplicas para cada unidade experimental.

Das tabelas 4.3.1 e 4.4.1 notamos que a análise de variância usual, com uma observação por casela, não fornece elementos para estimação separada de σ_e^2 e σ_{AB}^2 e de σ_{e*}^2 e σ_{AB*}^2 , respectivamente, mas somente para a soma destes elementos. Entretanto, é possível estimar estes parâmetros individualmente através da presença de réplicas.

Nos planejamentos mistos com alocação nem sempre é possível a existência de réplicas dentro de cada casela, no sentido usual, desde que cada unidade experimental deve repartir ou alocar o total constante entre os níveis do fator de alocação uma única vez. Em alguns casos, entretanto, seria possível replicar conjuntos de

observações como um todo para cada indivíduo. Por exemplo, se considerássemos o último exemplo da seção 4.2, poderíamos dar várias tiras a cada indivíduo para cortá-las do modo desejado, e as observações correspondentes a cada tira representariam uma réplica para cada indivíduo.

Assim, se existe a possibilidade de réplicas, e se a dependência sobre réplicas dentro de cada indivíduo pode ser desprezada, então o experimento envolvendo conjuntos de réplicas pode ser analisado em termos de um modelo misto com 3 fatores, A (fixo) e B (aleatório), definidos como antes, e um 3º fator réplica R (aleatório), hierárquico em B e cruzado com A.

O modelo misto de Scheffé, apropriado a este caso sem a restrição de alocação nas observações, pode ser escrito por,

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + b_j + c_{ij} + r_{jk} + s_{ijk} + f_{ijk} \quad (4.5.1)$$

$$i = 1, \dots, a, \quad j = 1, \dots, b \quad \text{e} \quad k = 1, \dots, r$$

onde,

μ , α_i , b_j e c_{ij} seriam definidos como antes, exceto que seriam conceituados em termos dos valores esperados sobre réplicas,

r_{jk} é o efeito aleatório da k-ésima réplica do j-ésimo nível de B no experimento,

s_{ijk} é a interação entre o i-ésimo nível de A, j-ésimo nível de B e a k-ésima réplica no experimento,

f_{ijk} é o erro aleatório da observação y_{ijk} , independente dos outros termos e com variância σ_f^2 .

Assumimos também neste modelo um número igual de réplicas para cada nível de B ($k = 1, \dots, r$).

Então, com as definições apropriadas de cada termo (Scheffé [1959] - seção 8.2), podemos obter as expressões usuais para os quadrados médios e seus respectivos valores esperados.

O modelo misto de alocação com réplicas, correspondente ao modelo (4.5.1), seria escrito por

$$y_{ijk}^* = \mu^* + \alpha_i^* + c_{ij}^* + r_{jk}^* + s_{ijk}^* + f_{ijk}^* \quad (4.5.2)$$

com a restrição que $\sum_{i=1}^a y_{ijk} = C, \forall j, k$, o que implica que

$$\sigma_{B^*}^2 = \text{Var}(b_j^*) = 0$$

$$\sigma_{BR^*}^2 = \text{Var}(r_{jk}^*) = 0$$

Os vetores de erros $f_{\sim jk}^* = (f_{1jk}^*, \dots, f_{ajk}^*)'$ são independentes com distribuição a-variada, com vetor-média zero e matriz de variância-covariância Σ_{f^*} , com elementos diagonais iguais a $\sigma_{f^*}^2$ e fora da diagonal iguais a $-\sigma_{f^*}^2/(a-1)$.

Podemos considerar válida a extensão do teorema 4.4.1 para esta situação, onde está sendo considerado um 3º fator (aleatório), réplica.

Assim, na tabela 4.5.1 apresentamos o quadro de Análise de Variância para o modelo de alocação (4.5.2), com os quadrados médios e respectivos valores esperados.

Tabela 4.5.1 - Análise de Variância para o modelo misto de Alocação, com fator B (aleatório), um fator réplica R (aleatório), hierárquico em B, e B e R cruzados com A (fixo).

F.V.	g.l.	SQ	QM	E(QM)
Fator A (fixo)	a-1	SQ_{A^*}	QM_{A^*}	$\frac{a}{a-1} \sigma_{f^*}^2 + \sigma_{AR^*}^2 + r\sigma_{AB^*}^2 + \frac{br}{a-1} \sum_{i=1}^a \alpha_i^{*2}$
Fator B (aleat.)	0	0	0	0
Inter. A x B	(a-1)(b-1)	SQ_{AB^*}	QM_{AB^*}	$\frac{a}{a-1} \sigma_{f^*}^2 + \sigma_{AR^*}^2 + r\sigma_{AB^*}^2$
Fator R (aleat.)	b(r-1)	0	0	0
Inter. A x R	(a-1)b(r-1)	SQ_{AR^*}	QM_{AR^*}	$\frac{a}{a-1} \sigma_{f^*}^2 + \sigma_{AR^*}^2$

onde,

$$SQ_{A^*} = br \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i..}^* - \bar{y}_{...}^*)^2$$

$$SQ_{B^*} = ar \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j.}^* - \bar{y}_{...}^*)^2 = 0$$

$$SQ_{AB^*} = r \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij.}^* - \bar{y}_{i..}^*)^2$$

$$SQ_{R^*} = a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (\bar{y}_{.jk}^* - \bar{y}_{.j.}^*)^2 = 0$$

$$SQ_{AR^*} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (y_{ijk}^* - \bar{y}_{ij.}^*)^2$$

$$\bar{y}_{i..}^* = \frac{\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r y_{ijk}^*}{br} \quad \text{e} \quad \bar{y}_{.j.}^* = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^r y_{ijk}^*}{ar}$$

$$\bar{y}_{ij.}^* = \frac{\sum_{k=1}^r y_{ijk}^*}{r} \quad \text{e} \quad \bar{y}_{.jk}^* = \frac{\sum_{i=1}^a y_{ijk}^*}{a}$$

Verificamos da tabela 4.5.1 que a existência de réplica permite um estimador não viciado para σ_{AB*}^2 , dado por $(QM_{AB*} - QM_{AR*})/r$. Além disso, já que estamos considerando válida a extensão do Teorema 4.4.1, então as distribuições de QM_{AB*} e QM_{AR*} são as mesmas de QM_{AB} e QM_{AR} , respectivamente, do correspondente experimento sem alocação, com a devida correspondência entre os parâmetros dos dois modelos, exceto para σ_f^2 que seria igual a $[a/(a-1)]\sigma_{f*}^2$. Sendo assim, podemos usar os métodos padrões de inferência para σ_{AB*}^2 .

Em muitas situações práticas, é razoável supor a não existência da interação entre o fator A e o fator R, ou seja, que $\sigma_{AR*}^2 = 0$. Se assim for, um estimador não viciado de σ_{f*}^2 é dado por $[(a-1)/a]QM_{AR*}$ e, neste caso, podem ser utilizados métodos padrões de inferência de σ_{f*}^2 .

4.6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo foi feita uma breve apresentação de dois modelos mistos, adequados a experimentos envolvendo medidas repetidas: um é o clássico modelo misto de Scheffé e o outro é o modelo misto de Scheffé modificado, que foi designado de *modelo de alocação*, tal que satisfaça a restrição de observações partilhadas dentro de cada unidade experimental.

Os dois modelos diferem essencialmente na estrutura de covariância das observações dentro de cada unidade experimental, produzida pela condição de alocação ou não das observações.

Na tabela 4.6.1 apresentamos, resumidamente, uma comparação entre o modelo misto de Scheffé e o modelo de alocação, para experimentos envolvendo um fator fixo e um fator aleatório.

Na tabela 4.6.2 descrevemos os quadros médios e respectivos valores esperados dos dois modelos, considerando as suposições e restrições apresentadas na tabela 4.6.1.

As tabelas 4.6.1 e 4.6.2 permitem-nos observar o efeito que a restrição de observações partilhadas produz na análise de variância tradicional do modelo misto de Scheffé.

Outros autores têm proposto modelos mistos que diferem do modelo misto de Scheffé e que também são adequados à situação experimental que estamos considerando. Estes modelos alternativos têm gerado certa controvérsia quanto às expressões corretas para o valor esperado do quadrado médio associado com o fator aleatório. Uma comparação entre estes modelos mistos alternati -

Tabela 4.6.1 - Comparação entre o modelo misto de Scheffé (4.3.1) e o modelo de Alocação (4.4.1), para experimentos com um fator fixo e um fator aleatório

	Scheffé	Alocação
Modelo	$y_{ij} = m_{ij} + e_{ij}, \quad i=1, \dots, a, \\ j=1, \dots, b$ <p>onde</p> $m_{ij} = \mu + \alpha_i + b_j + c_{ij}$	$y_{ij}^* = m_{ij}^* + e_{ij}^*, \quad i=1, \dots, a, j=1, \dots, b$ <p>onde</p> $m_{ij}^* = \mu + \alpha_i + b_j + c_{ij} \quad e$ $\sum_{i=1}^a m_{ij}^* = C, \quad \forall j=1, \dots, b$
Suposições	$\left. \begin{array}{l} e_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2), \text{ indep.} \\ b_j \sim N(0, \sigma_B^2), \text{ indep.} \\ c_{ij} \sim N(0, \sigma_{AB}^2), \text{ indep.} \end{array} \right\} \text{ indep.}$ $m_{.j} \sim N(\mu, \Sigma_m)$ $y_{.j} \sim N(\mu, \Sigma_y)$ <p>onde</p> $\Sigma_y = \Sigma_m + \sigma_e^2 I_a$	$e_{ij}^* \sim N(0, \sigma_{e^*}^2)$ $c_{ij}^* \sim N(0, \sigma_{AB^*}^2)$ $m_{.j}^* \sim N(\mu, \Sigma_{m^*})$ $y_{.j}^* \sim N(\mu, \Sigma_{y^*})$ <p>onde</p> $\Sigma_{y^*} = \Sigma_{m^*} + \Sigma_{e^*}, \quad \text{com}$ $\Sigma_{e^*} = \begin{pmatrix} \sigma_{e^*} & -\frac{\sigma_{e^*}}{a-1} & \dots & -\frac{\sigma_{e^*}}{a-1} \\ -\frac{\sigma_{e^*}}{a-1} & \sigma_{e^*} & \dots & -\frac{\sigma_{e^*}}{a-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\sigma_{e^*}}{a-1} & -\frac{\sigma_{e^*}}{a-1} & \dots & \sigma_{e^*} \end{pmatrix}$
Restrições	$\sum_{i=1}^a \alpha_i = 0$ <p>Σ_m é não singular</p>	$\sum_{i=1}^a \alpha_i^* = 0$ $\sum_{i=1}^a y_{ij}^* = \sum_{i=1}^a m_{ij}^* \Rightarrow \sum_{i=1}^a e_{ij}^* = 0$ $\sigma_{B^*}^2 = \text{Var}(b_j^*) = 0$ <p>Σ_{m^*} é singular</p>

Tabela 4.6.2 - Quadrados Médios e seus valores esperados, para o modelo misto de Scheffé e modelo misto de Alocação

F.V.	QM		E(QM)	
	Scheffé	Alocação	Scheffé	Alocação
A	$\frac{1}{a-1} \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y})^2$	$\frac{1}{a-1} \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}^*)^2$	$\sigma_e^2 + \sigma_{AB}^2 + \frac{a}{a-1} \sum_{i=1}^a \alpha_i^2$	$\frac{a}{a-1} \sigma_{e^*}^2 + \sigma_{AB^*}^2 + \frac{a}{a-1} \sum_{i=1}^a \alpha_i^2$
B	$\frac{1}{a(b-1)} \sum_{i=1}^b (\bar{y}_{.j} - \bar{y})^2$	0	$\sigma_e^2 + a\sigma_{AB}^2$	0
AB	$\frac{1}{(a-1)(b-1)} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{i.} + \bar{y})^2$	$\frac{1}{(a-1)(b-1)} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij}^* - \bar{y}_{.j}^*)^2$	$\sigma_e^2 + \sigma_{AB}^2$	$\frac{a}{a-1} \sigma_{e^*}^2 + \sigma_{AB^*}^2$

vos, bem como as correspondentes expressões dos valores esperados dos quadrados médios, figura em Hocking [1973].

Neste trabalho foi considerado somente o modelo misto de Scheffé pois, segundo Hocking [1973], ele é capaz de explicar uma grande variedade de situações experimentais com um fator fixo e um fator aleatório. Além disso, estes outros modelos encontrados na literatura, segundo este mesmo autor, representam casos especiais do modelo misto de Scheffé.

CAPÍTULO 5

PROCEDIMENTOS DE SELECIONAR UM SUBCONJUNTO QUE CONTÉM TODOS OS TRATAMENTOS MELHORES DO QUE UM CONTROLE

5.1 - INTRODUÇÃO

Nos capítulos anteriores foram consideradas situações de planejamentos com medidas repetidas, cuja análise se fundamenta na teoria de teste de hipótese estatística ou estimação estatística. Esta formulação, entretanto, nem sempre atende os objetivos de um pesquisador em muitas situações experimentais, quando ele enfrenta o problema de comparar várias populações, as quais são identificadas por tratamentos. Os tratamentos podem ser, por exemplo, diferentes variedades de trigo num experimento agrícola, ou diferentes drogas para uma doença específica, etc.

O problema de comparação de populações, basicamente, pode ser formulado em termos de ordenação das populações ou de seleção das melhores populações.

Neste capítulo nós consideramos somente o problema de comparar vários tratamentos com um controle ou, mais especifica -

mente, de selecionar um subconjunto contendo todos os tratamentos que são melhores do que o controle, em experimentos com medidas repetidas.

Os problemas de seleção de populações, embora diferindo dos problemas da inferência clássica, de estimação ou testes de hipótese, são ainda baseados na teoria da decisão.

Os procedimentos aqui propostos são facilmente utilizados, pois dependem somente de valores críticos obtidos de tabelas da distribuição normal multivariada padrão (Gupta, Nagel, Panchapakesan [1973]) e distribuição multivariada t (Krishnaiah e Armitage [1966], Hahn e Hendrickson [1971]).

Historicamente, Paulson [1952] e Dunnett [1955] foram os primeiros autores a considerar problemas de comparação de tratamentos com o controle. Gupta e Sobel [1958] introduziram a formulação de seleção de subconjunto, a qual adotamos neste capítulo. Recentemente Chen [1979, 1980], Chen e Pickett [1980] e Berger [1981] consideraram a formulação de seleção de subconjunto para o caso de populações dependentes, situação encontrada nos experimentos com medidas repetidas.

As soluções que apresentamos neste capítulo se baseiam no trabalho de Chen [1979, 1980] e Berger [1981] e considerações mais teóricas da metodologia e formulação dos problemas de decisão múltipla são encontrados no texto de Gupta e Panchapakesan [1979].

Na seção 5.2 formalizamos o objetivo e apresentamos a notação e nomenclatura própria a este tipo de problema que vamos

considerar, e ainda alguns resultados que serão úteis para elucidar os procedimentos propostos.

Os procedimentos ou regras de seleção do subconjunto formado pelos tratamentos melhores do que o controle estão apresentados na seção 5.3, considerando diferente estrutura de covariância entre as observações.

Finalmente, nas seções 5.4 e 5.5 encontramos, respectivamente, o número esperado de populações que pertencerão ao subconjunto desejado de tratamentos, usando os procedimentos de seleção propostos em 5.3, e intervalos de confiança para diferença entre as médias populacionais de interesse.

5.2 - OBJETIVO, NOTAÇÃO E ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

5.2.1 - Objetivo

A situação experimental que estamos considerando é aquela em que cada unidade experimental é submetida em ocasiões sucessivas, a um tratamento padrão (que pode ser uma droga padrão, um placebo, ou algum tratamento controle) e vários outros tratamentos de interesse do pesquisador.

Em geral, estes experimentos têm como objetivo principal selecionar um subconjunto (não vazio) dos tratamentos de interesse, tal que inclua todos aqueles que são melhores do que o padrão, ou seja, que são tão ou mais eficientes do que o padrão. Esse subconjunto será denominado neste trabalho de *subconjunto eficiente*.

Queremos dizer por "tratamentos tão ou mais eficientes do que o padrão" aqueles tratamentos com média maior ou igual à do padrão.

Definimos, ainda, *seleção correta* (SC) como a seleção de qualquer subconjunto que contenha todos aqueles tratamentos melhores do que o controle. Assim, o objetivo é propor um procedimento P que assegure que a probabilidade de uma seleção correta, usando P , é pelo menos igual a um valor pré-fixado P^* ($0 < P^* < 1$), qualquer que seja a configuração (ou ordenação) verdadeira entre os tratamentos.

O valor de P^* deve ser especificado previamente pelo pesquisador e representa, de certa forma, um nível de confiança com o qual o procedimento, para obter o subconjunto eficiente, é definido. Segundo Chen [1980], P^* deve ser algum valor no intervalo $(1/k, 1)$, quando temos k tratamentos experimentais e um controle, aplicados em n unidades experimentais.

5.2.2 - Notação e Estrutura

Especificamente, desejamos comparar a eficiência de k tratamentos em relação a um controle, segundo uma determinada variável aleatória, medida em n unidades experimentais.

Assim, os valores observados estariam dispostos conforme tabela 5.2.1, onde y_{i0} é o valor da variável-resposta da i -ésima unidade experimental, sujeita ao tratamento controle e y_{ij} é o valor da variável-resposta da i -ésima unidade experimental, sujei

ta ao j -ésimo tratamento, $j = 1, \dots, k$, $i = 1, \dots, n$.

Tabela 5.2.1 - Dados de um Experimento com medidas repetidas, com k tratamentos e um controle

Unidades Experimentais	Controle	Trat. 1	...	Trat. k
1	y_{10}	y_{11}	...	y_{1k}
2	y_{20}	y_{21}	...	y_{2k}
.
.
.
n	y_{n0}	y_{n1}	...	y_{nk}
Média	$\bar{y}_{.0}$	$\bar{y}_{.1}$...	$\bar{y}_{.k}$

Designaremos por $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ ($k \geq 2$) as populações tratamentos, com médias $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$, respectivamente, e π_0 a população controle com média μ_0 . Assumiremos que $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_k$ obedecem uma distribuição normal multivariada.

Em outras palavras, se $\underline{y}_i = (Y_{i0}, Y_{i1}, \dots, Y_{ik})'$ é o vetor-observação da i -ésima unidade experimental sob os tratamentos $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_k$, então os vetores \underline{y}_i , $i = 1, \dots, n$ constituem uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição normal $(k+1)$ -variada com vetor-média $\underline{\mu} = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k)'$, matriz de variância-covariância $\Sigma = (\sigma_{jj'})$, $j, j' = 0, 1, \dots, k$ e matriz de correlação

$R = (\rho_{jj'})$, $j, j' = 0, 1, \dots, k$, ambas matrizes positivas-definidas.

Assim, $\bar{Y} = (\bar{Y}_0, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_k)$, onde $\bar{Y}_j = \sum_{i=1}^n Y_{ij} / n$,

$j = 0, 1, \dots, k$, é o vetor-média amostral e $S = (s_{jj'})$ representa a matriz de variância-covariância amostral usual, não-viciada, isto é, seus elementos são calculados por:

$$s_{jj'} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_j)(Y_{ij'} - \bar{Y}_{j'})}{n - 1}, \quad j, j' = 0, 1, \dots, k.$$

Denotaremos, ainda, por $R_0 = (\rho)$ a particular matriz de correlação, com coeficientes de correlação entre populações constantes e iguais a ρ .

5.2.3 - Algumas Considerações

Como visto no capítulo anterior, a análise estatística tradicional, de dados como os da tabela 5.2.1, consiste em testar $H_0 : \mu_0 = \mu_1 = \dots = \mu_k$ x $H_1 : \text{existe pelo menos um par } (s, t) \text{ de tratamentos tal que } \mu_s \neq \mu_t$. A solução pode ser obtida usando uma das estratégias de análise apresentadas no capítulo anterior. Entretanto, estas técnicas tradicionais são inadequadas se o objetivo é este que estamos considerando agora.

Assim, desenvolveremos uma técnica específica para o objetivo em questão, de selecionar um subconjunto eficiente de tratamentos, isto é, selecionar aqueles tratamentos π_i tais que

$$\mu_i \geq \mu_0.$$

Para melhor entendimento desta técnica, utilizaremos três resultados básicos, que enunciaremos a seguir, mas cujas demonstrações serão aqui omitidas. As demonstrações dos resultados 1 e 2 podem ser encontradas em Anderson [1958] e o resultado 3 está demonstrado em Feller[1968, cap. IV].

Resultado 1 :

Seja $\underline{Y} = (Y_0, Y_1, \dots, Y_k)'$ um vetor aleatório com distribuição normal $(k+1)$ -variada, com vetor-média $\underline{\mu} = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k)'$ e matriz de covariância $\sigma^2 R$, onde R é a matriz de correlação conhecida e σ^2 é a variância comum desconhecida. Então, os estimadores de máxima verossimilhança de $\underline{\mu}$ e σ^2 são, respectivamente,

$$\hat{\underline{\mu}} = \bar{\underline{Y}}$$

$$\hat{\sigma}^2 = (n-1) \frac{\text{tr } R^{-1} S}{n(k+1)}$$

onde $\bar{\underline{Y}}$ e S são aqueles definidos na seção anterior.

Resultado 2 :

Sob as mesmas condições do Resultado 1 temos:

- a) A variável aleatória $(n-1) \text{tr} \frac{R^{-1} S}{\sigma^2}$ tem distribuição qui-quadrado com $\nu = (k+1)(n-1)$ graus de liberdade, independente do vetor-média amostral $\bar{\underline{Y}}$;

b) O estimador não-viciado de σ^2 é

$$s^2 = \frac{\text{tr } R^{-1} S}{k+1}.$$

Então, o vetor aleatório $\frac{\bar{Y} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ tem distribuição t multivariada com v graus de liberdade e matriz de correlação R .

Resultado 3 : Desigualdade de Bonferroni

Para qualquer coleção de conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n , prova-se que:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - (n-1).$$

Vários casos de selecionar um subconjunto contendo todos os tratamentos melhores do que o controle são considerados. Estes casos são diferenciados pelo conhecimento ou não, a priori, da estrutura de covariância entre os tratamentos.

No caso em que os melhores tratamentos são definidos como sendo aqueles com as menores médias ($\mu_i \leq \mu_0$), o problema estatístico é idêntico e todos os resultados se aplicam mudando-se, apenas, os sinais das observações. Para o caso especial onde todas as populações são independentes os procedimentos se reduzem àqueles de Gupta e Sobel [1958].

5.3 - PROCEDIMENTOS DE SELEÇÃO DO SUBCONJUNTO EFICIENTE

Conforme já afirmamos anteriormente, o procedimento \mathbb{P} de selecionar o subconjunto eficiente será definido de tal forma que,

$$\Pr_{\mu}(\text{SC}|\mathbb{P}) \geq P^*, \quad (5.3.1)$$

isto é, a probabilidade de seleção correta usando o procedimento \mathbb{P} é pelo menos igual a P^* , qualquer que seja a verdadeira configuração entre as médias dos tratamentos.

Desde que exista um valor mínimo de $\Pr(\text{SC}|\mathbb{P})$, então a condição (5.3.1) estará satisfeita se

$$\inf_{\mu} \Pr(\text{SC}|\mathbb{P}) = P^* \quad (5.3.2)$$

Nós nos referimos a este requisito, dado por (5.3.2), como condição- P^* , conforme denominação usada por Chen [1980].

Basicamente, os procedimentos terão a seguinte forma: inclui o tratamento π_j no subconjunto selecionado se e somente se,

$$\bar{Y}_j \geq \bar{Y}_0 - d \times DP(\bar{Y}_j - \bar{Y}_0)$$

onde, d é uma constante apropriada e $DP(\bar{Y}_j - \bar{Y}_0)$ é o desvio padrão de $(\bar{Y}_j - \bar{Y}_0)$, ou uma estimativa dele.

Adotaremos, também, as seguintes notações:

- $\Phi_k(z_1, \dots, z_k; \rho)$ é a função distribuição no ponto (z_1, \dots, z_k) da distribuição normal padrão k-variada, com vetor-média 0, variâncias iguais a 1, e coeficientes de correlação entre as variáveis iguais a ρ .

- $F_{k,v}(t_1, \dots, t_k; \rho)$ é a função distribuição no ponto (t_1, \dots, t_k) da distribuição t k-variada, com v graus de liberdade e todos coeficientes de correlação iguais a ρ .

Quando $k = 1$, estamos no caso univariado e, assim, as funções $\Phi(z)$ e $F_v(t)$ são, respectivamente, as funções de distribuição da normal padrão univariada e da distribuição univariada t-student como v graus de liberdade.

5.3.1 - Matriz de Covariância Conhecida, tendo Variâncias Constantes e Correlações constantes

Consideremos o caso, em que os vetores Y_i , $i=1, \dots, n$, têm distribuição normal $(k+1)$ -variada, com variâncias constantes, conhecidas e iguais a σ^2 e covariâncias constantes, conhecidas e iguais a $\sigma^2 \rho$.

O procedimento de selecionar o subconjunto dos tratamentos melhores do que o padrão é, então, definido por:

Procedimento P_1 :

Inclui o tratamento π_j no subconjunto selecionado, se e somente se,

$$\bar{y}_j \geq \bar{y}_0 - d_1 \sigma \sqrt{\frac{2(1-\rho)}{n}}, \quad j = 1, \dots, k \quad (5.3.3)$$

onde, $d_1 = d_1(k, P^*)$ é uma constante, escolhida de tal forma que satisfaça,

$$\phi_k(d_1, \dots, d_1; 1/2) = P^*$$

Demonstração :

Denotemos por k_1 e k_2 as verdadeiras quantidades de tratamentos com médias $\mu \geq \mu_0$ e $\mu < \mu_0$, respectivamente, o que implica que $k_1 + k_2 = k$.

A probabilidade de incluir todos os k_1 tratamentos com $\mu_j \geq \mu_0(SC)$, é dada por:

$$\Pr(SC|P_1) = \Pr(\text{selecionar ao menos os } k_1 \text{ tratamentos})$$

$$= \Pr(\bar{Y}_j \geq \bar{Y}_0 - d_1 \sigma \sqrt{\frac{2(1-\rho)}{n}}, \quad j = 1, \dots, k_1)$$

$$= \Pr(Z_j \geq \delta_j - d_1, \quad j = 1, \dots, k_1) \quad (5.3.4)$$

onde,

$$\delta_j = \frac{\mu_0 - \mu_j}{\sigma \sqrt{\frac{2(1-\rho)}{n}}}$$

$$Z_j = \frac{\bar{Y}_j - \bar{Y}_0 - (\mu_j - \mu_0)}{\sigma \sqrt{\frac{2(1-\rho)}{n}}}$$

Pode ser mostrado que o vetor aleatório $(Z_j, j=1, \dots, k_1)$ tem distribuição normal padrão k_1 -variada, com coeficientes de correlação iguais a $1/2$.

Já que na relação correta consideramos apenas os k_1 tratamentos tais que $\mu_j \geq \mu_0$, então a probabilidade em (5.3.4) é uma função crescente dos μ_j , cujo valor mínimo ocorre quando $\mu_j = \mu_0$, isto é, $\delta_j = 0, j = 1, \dots, k_1$.

Então,

$$\Pr(SC | \mathbb{P}_1) \geq \Pr(Z_j \geq -d_1, j = 1, \dots, k_1)$$

Desde que o resultado dessa probabilidade depende do inteiro desconhecido k_1 , podemos obter um limite inferior tomando $k_1 = k$.

Assim,

$$\Pr(SC | \mathbb{P}_1) \geq \Pr(Z_j \geq -d_1, j=1, \dots, k) = \Pr(Z_j \leq d_1, j=1, \dots, k) =$$

$$\Phi_k(d_1, \dots, d_1; 1/2)$$

Como o procedimento é definido segundo a condição - P^* (expressão 5.3.2), então, d_1 fica totalmente especificado por

$$\Phi_k(d_1, \dots, d_1; 1/2) = P^*$$

A constante d_1 , que depende de k , P^* e $\rho = 1/2$, é o valor que encontra-se tabulado na Tabela I de Gupta, Nagel e Panchapakesan [1973]. A correspondência de notação dessa tabela com a adotada aqui seria $N=k$, $\alpha=1-P^*$ e $\rho=1/2$. Esta tabela considera valores de $P^* = 0,75; 0,90; 0,975; 0,99$, todos valores de k entre 1 e 10, e diferentes valores de ρ entre 0,1 e 0,9. Se outros valores de P^* são usados, então Tabela II de Gupta [1963b] pode ser usada, onde a correspondência de notação seria $H = d_1$, $N=k$, $\rho=1/2$ e o valor tabulado é P^* .

5.3.2 - Matriz de Covariância Conhecida Qualquer

Consideraremos, agora, a situação em que a matriz de covariância entre as observações é conhecida e qualquer.

Designemos por:

σ_0^2 : variância da população padrão;

σ_j^2 : variância da população π_j , $j = 1, \dots, k$;

σ_{0j} : covariância entre a população padrão π_0 e a população π_j , $j = 1, \dots, k$.

Nestas condições, propomos o seguinte procedimento:

Procedimento \mathbb{P}_2 :

Inclui a população π_j no subconjunto, se e somente se,

$$\bar{y}_j \geq \bar{y}_0 - d_2 \sqrt{\frac{\sigma_j^2 + \sigma_0^2 - 2\sigma_{0j}}{n}}, \quad j = 1, \dots, k \quad (5.3.5)$$

onde, a constante $d_2 = d_2(k, P^*)$ é um valor crítico determinado de tal forma que satisfaça,

$$k \cdot \Phi(d_2) - (k-1) = P^*$$

ou

$$d_2 = \Phi^{-1}\left(\frac{P^* + k - 1}{k}\right)$$

onde, $\Phi^{-1}(\cdot)$ é a função distribuição inversa da distribuição normal padrão univariada.

Demonstração :

Usando o mesmo raciocínio para a demonstração do procedimento \mathbb{P}_1 , obtemos:

$$\begin{aligned} \Pr(SC|\mathbb{P}_2) &= \Pr(\bar{Y}_j \geq \bar{Y}_0 - d_2 \sqrt{\frac{\sigma_j^2 + \sigma_0^2 - 2\sigma_{0j}}{n}}, \quad j = 1, \dots, k_1) \\ &= P_r(Z_j \geq \delta_j^* - d_2, \quad j = 1, \dots, k_1) \end{aligned}$$

onde,

$$\delta_j^* = \frac{(\mu_0 - \mu_j) \sqrt{n}}{\sqrt{\sigma_j^2 + \sigma_0^2 - 2\sigma_{0j}}}$$

$$Z_j = \frac{[\bar{Y}_j - \bar{Y}_0 - (\mu_j - \mu_0)] \sqrt{n}}{\sqrt{\sigma_j^2 + \sigma_0^2 - 2\sigma_{0j}}}$$

Pelo mesmo argumento usado no procedimento \mathbb{P}_1 , para a expressão (5.3.4), podemos concluir que,

$$\Pr(\text{SC} | \mathbb{P}_2) \geq \Pr(Z_j \geq -d_2, j=1, \dots, k) = \Pr(Z_j \leq d_2, j=1, \dots, k) \quad (5.3.6)$$

As variáveis aleatórias Z_j , $j = 1, \dots, k$ têm distribuição normal padrão, entretanto, os coeficientes de correlação entre elas não são iguais, pois as covariâncias entre os tratamentos são diferentes.

Sendo assim, não podemos utilizar a tabela de distribuição multivariada usada para o procedimento \mathbb{P}_1 , que só considera o caso de variáveis multinormais padrão com iguais coeficientes de correlação entre variáveis.

Para resolver a equação (5.3.6) utilizaremos o Resultado 3 (desigualdade de Bonferroni) da seção 5.2.3.

Assim, temos que

$$\Pr(\text{SC} | \mathbb{P}_2) \geq \Pr\left(\bigcap_{j=1}^k Z_j \leq d_2\right) \geq \sum_{j=1}^k \Pr(Z_j \leq d_2) - (k-1) = k\Phi(d_2) - (k-1)$$

Para que o procedimento P_2 satisfaça a condição $-P^*$, de vemos ter

$$k\phi(d_2) - (k-1) = P^*$$

e o valor d_2 pode ser facilmente obtido de tabelas de distribuição normal univariada padrão, para valores de k e P^* .

5.3.3 - Matriz de Covariância desconhecida, tendo variâncias e covariâncias constantes

Vamos considerar, agora, a situação experimental na qual o coeficiente de correlação entre os tratamentos é comum, conhecido e igual a ρ , porém as variâncias, embora constantes, são desconhecidas.

Neste caso, o procedimento de seleção é proposto por:

Procedimento P_3 :

Inclui o tratamento π_j no subconjunto, se e somente se

$$\bar{y}_j \geq \bar{y}_0 - d_3 s \sqrt{\frac{2(1-\rho)}{n}}, \quad j = 1, \dots, k \quad (5.3.7)$$

onde,

$s^2 = \text{tr} \frac{R_0^{-1} S}{k+1}$ é o estimador ótimo de σ^2 , conforme definido no resultado 2, da seção 5.2.3, e

$d_3 = d_3(P^*, k, v)$ é uma constante determinada da distribuição t multivariada com $v = (k+1)(n-1)$ graus de liberdade, tal que, para valores de k e P^* , satisfaça,

$$F_{k,v}(d_3, \dots, d_3; 1/2) = P^*$$

Demonstração:

Para demonstrarmos esta regra, seguiremos raciocínio análogo àquele usado na demonstração do procedimento \mathbb{P}_1 , com a diferença que a variância populacional em \mathbb{P}_1 será substituída pelo seu estimador ótimo s^2 , especificado no Resultado 2 b), da seção 5.2.3.

Então,

$$\begin{aligned} \Pr(\text{SC} | \mathbb{P}_3) &= \Pr(\bar{Y}_j \geq \bar{Y}_0 - d_3 s \sqrt{\frac{2(1-\rho)}{n}}, \quad j=1, \dots, k_1) \\ &= \Pr(T_j \geq \hat{\delta}_j - d_3, \quad j=1, \dots, k_1) \end{aligned} \tag{5.3.8}$$

onde,

$$\begin{aligned} T_j &= \frac{\bar{Y}_j - \bar{Y}_0 - (\mu_j - \mu_0)}{s \sqrt{\frac{2(1-\rho)}{n}}} \\ \hat{\delta}_j &= \frac{\mu_0 - \mu_j}{s \sqrt{\frac{2(1-\rho)}{n}}} \end{aligned}$$

$$s^2 = \text{tr} \frac{R_0^{-1} S}{k+1} = \frac{[1+(k-1)\rho] \sum_{j=0}^k s_{jj} - 2\rho \sum_{j=0}^k \sum_{j'>j} s_{jj'}}{(k+1)(1-\rho)(1+k\rho)}$$

O vetor aleatório (T_1, \dots, T_{k_1}) tem distribuição t_{k_1} - variada com $v = (k+1)(n-1)$ graus de liberdade e coeficientes de correlação comuns e iguais a $1/2$.

Para que o procedimento \mathbb{P}_3 satisfaça a condição P^* , da desigualdade (5.3.8) segue que,

$$\Pr(\text{SC} | \mathbb{P}_3) \geq \Pr(T_j \leq d_3, j=1, \dots, k) = F_{k,v}(d_3, \dots, d_3; 1/2) = P^*$$

O valor crítico d_3 , que depende de k , P^* , $\rho = 1/2$ e $v = (k+1)(n-1)$, é o valor tabulado em Krishnaiah e Armitage [1966]. A correspondente notação desta tabela, com a empregada aqui, é $p=k$, $\alpha=1-P^*$, $\rho=0,5$ e $n=v$. Esta tabela considera valores de $P^* = 0,95$ e $0,99$, $k= 1(1)10$, $\rho= 0,0(0,1)0,9$ e $v= 5(1)35$. Para valores grandes de v , a Tabela I de Gupta, Nagel e Panchapakesan [1973] pode ser usada para aproximar d_3 , desde que esta normal corresponde a $v \rightarrow \infty$. Gupta [1963 a] fornece, também, referências a algumas outras tabelas parciais da distribuição t multivariada.

5.3.4 - Matriz de Covariância Qualquer, Desconhecida

Finalizando, consideremos o caso de experimentos dos quais nada se conhece sobre a estrutura de variância-covariância entre os tratamentos. Esta situação é, talvez, a que mais ocorre na prática.

O procedimento de seleção é, então, definido usando os estimadores ótimos dos parâmetros desconhecidos.

Designemos por

s_0^2 : estimador ótimo da variância de π_0 ,

s_j^2 : estimador ótimo da variância de π_j , $j=1, \dots, k$,

s_{0j} : estimador ótimo da covariância entre π_0 e π_j , $j=1, \dots, k$.

O procedimento de selecionar o subconjunto desejado pode ser proposto por:

Procedimento \mathbb{P}_4 :

Inclui o tratamento π_j no subconjunto, se e somente se,

$$\bar{y}_j \geq \bar{y}_0 - d_4 \sqrt{\frac{s_j^2 + s_0^2 - 2s_{0j}}{n}}, \quad j=1, \dots, k \quad (5.3.9)$$

onde d_4 , uma constante que depende de k , P^* e n , é o valor crítico obtido da distribuição univariada t-student, com $v=n-1$ graus de liberdade, tal que satisfaça,

$$k F_v(d_4) - (k-1) = P^*$$

ou

$$d_4 = F_v^{-1} \left(\frac{P^* + k - 1}{k} \right)$$

onde, $F_v^{-1}(\cdot)$ é a função distribuição inversa da distribuição t-student com v graus de liberdade.

Demonstração :

A demonstração deste procedimento é análoga à do procedimento \mathbb{P}_2 , com a diferença que agora utilizamos estimadores ótimos s_0^2 , s_j^2 e s_{0j} para os parâmetros desconhecidos σ_0^2 , σ_j^2 e σ_{0j} , nas expressões de \mathbb{P}_2 . O uso destes estimadores resulta, então, em distribuição univariada t-student com $v = n-1$ graus de liberdade.

Sendo assim, o valor crítico d_4 é obtido de tabela de distribuição t univariada, para valores de P^* , k e n , e tal que satisfaça,

$$d_4 = F_{n-1}^{-1} \left(\frac{P^* + k - 1}{k} \right)$$

5.3.5 - Alguns Comentários

Na seção 5.3 foram propostos quatro procedimentos de selecionar um subconjunto eficiente de tratamentos, que, basicamente, se diferenciam por quatro estruturas diferentes de covariância entre os tratamentos, tal como considerado por Chen [1979].

Entretanto, existem outras situações práticas que não foram consideradas por este autor. Por exemplo, no procedimento \mathbb{P}_1 , os k tratamentos teriam variâncias iguais e covariâncias iguais, mas a variância do tratamento controle, σ_0^2 , poderia ser diferente das demais, e a covariância entre o controle e outro tratamento, também diferente da covariância entre dois tratamentos. Situação semelhante pode também ocorrer com as outras estruturas de covariâncias consideradas aqui.

Este tipo de relacionamento do controle com os demais tratamentos foi considerado no trabalho de Berger [1981]. Entretanto, pouca modificação é introduzida nos procedimentos, e as tabelas citadas continuam sendo empregadas, para satisfazer a condição- P^* , com os parâmetros agora devidamente modificados.

Uma outra situação que foi considerada por Chen [1980], foi aquela em que se conhece a média da população controle (μ_0). Neste caso, o mesmo princípio básico para definir o procedimento é, ainda, empregado e desta forma os procedimentos seriam definidos da seguinte forma: inclui π_j no subconjunto, se e somente se,

$$\bar{Y}_j \geq \mu_0 - d \times DP(\bar{Y}_j - \mu_0), \quad j = 1, \dots, k$$

com os parâmetros devidamente adaptados.

Devemos notar, entretanto, que qualquer que seja a estrutura de variância-covariância entre os tratamentos, certamente o número de tratamentos que irão pertencer ao subconjunto de interesse é uma variável aleatória. Assim, um procedimento deveria ser proposto, tal que o número esperado (ou média) de tratamentos

incluídos no subconjunto eficiente fosse tão pequeno quanto possível.

É este aspecto do problema que iremos abordar na seção seguinte.

5.4 - TAMANHO DO SUBCONJUNTO EFICIENTE

Na seção anterior, apresentamos quatro procedimentos diferentes de selecionar os tratamentos melhores do que o padrão os quais irão formar o subconjunto eficiente. Todos estes procedimentos foram propostos de tal forma que satisfaçam uma probabilidade pré-fixada P^* de seleção correta. Os procedimentos se diferenciam pelas diferentes estruturas de variância-covariância entre as observações. Entretanto, o número de tratamentos que serão incluídos no subconjunto eficiente, denominado de tamanho do subconjunto (T), não é fixo, mas sim uma variável aleatória. Podemos, portanto, encontrar expressões para o valor esperado ao tamanho do subconjunto, que denotaremos por $E(T)$, para os procedimentos de seleção propostos na seção anterior.

A quantidade $E(T)$ não depende somente de k , n , P^* e Σ , mas também da configuração (ou ordenação) verdadeira das médias dos tratamentos $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k$, a qual é desconhecida.

Segundo Chen [1979], a esperança do tamanho do subconjunto, para valores fixados de k , n , P^* e Σ , serve como um critério de eficiência de qualquer procedimento de seleção. Em outras palavras, se temos dois procedimentos competitivos, P e P' , que

satisfaçam a mesma condição P^* , adotaremos aquele que produz o menor valor de $E(T)$, qualquer que seja a configuração real entre as médias dos tratamentos.

Obteremos, também, os valores mínimo e máximo de $E(T)$, para duas diferentes configurações das médias, que podem ser úteis ao pesquisador.

Designando por $p_j | P$, a probabilidade que o tratamento π_j é incluído no subconjunto usando o procedimento P , então, por definição,

$$E_{\mu}(T) = E_{\mu}(T | P) = p_1 | P + p_2 | P + \dots + p_k | P \quad (5.4.1)$$

Usando a relação (5.4.1), calculamos o tamanho médio do subconjunto para cada um dos procedimentos, P_1 , P_2 , P_3 e P_4 , da seção anterior.

Procedimento P_1 :

$$\begin{aligned} E_{\mu}(T | P_1) &= \sum_{i=1}^k \Pr(\bar{Y}_i \geq \bar{Y}_0 - d_1 \sigma \sqrt{\frac{2(1-\rho)}{n}}) \\ &= \sum_{j=1}^{k_1} \Pr(\bar{Y}_j \geq \bar{Y}_0 - d_1 \sigma \sqrt{\frac{2(1-\rho)}{n}}) + \sum_{\ell=k_1+1}^k \Pr(\bar{Y}_{\ell} \geq \bar{Y}_0 - d_1 \sigma \sqrt{\frac{2(1-\rho)}{n}}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{k_1} \Pr \left(Z_j \geq \frac{\sqrt{n}(\mu_0 - \mu_j)}{\sigma \sqrt{2(1-\rho)}} - d_1 \right) + \sum_{\ell=k_1+1}^k \Pr \left(Z_\ell \geq \frac{\sqrt{n}(\mu_0 - \mu_\ell)}{\sigma \sqrt{2(1-\rho)}} - d_1 \right) \quad (5.4.2)$$

onde,

k_1 e k_2 são as quantidades reais de tratamentos com $\mu_j \geq \mu_0$ e de tratamentos com $\mu_j < \mu_0$, respectivamente;

Z_i , $i=1, \dots, k$, são variáveis aleatórias normais univariadas padrão, e

$\mu_j \geq \mu_0$, para $j=1, \dots, k_1$,

$\mu_\ell < \mu_0$, para $\ell = k_1+1, \dots, k$.

Da expressão (5.4.2), fazendo variar os valores de μ_i , $i=1, \dots, k$, concluímos que:

$\inf_{\mu} E(T | \mathbb{P}_1)$ ocorre quando $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{k_1} = \mu_0$ e $\mu_{k_1+1} = \dots = \mu_k = -\infty$;

$\sup_{\mu} E(T | \mathbb{P}_1)$ ocorre quando $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{k_1} = \infty$ e $\mu_{k_1+1} = \dots = \mu_k = \mu_0$.

Desta forma, temos que

$$\inf_{\mu} E(T | \mathbb{P}_1) = k_1 \Phi(d_1)$$

$$\sup_{\mu} E(T | \mathbb{P}_1) = k_1 + k_2 \Phi(d_1)$$

ou, $k_1 \Phi(d_1) \leq E_{\mu}(T | \mathbb{P}_1) \leq k_1 + k_2 \Phi(d_1)$.

- Procedimento \mathbb{P}_2 :

De forma análoga ao procedimento \mathbb{P}_1 , obtemos para \mathbb{P}_2 ,

$$E_{\underline{\mu}}(T | \mathbb{P}_2) = \sum_{j=1}^{k_1} \Pr \left(Z_j \geq \frac{\sqrt{n}(\mu_0 - \mu_j)}{\sqrt{\sigma_j^2 + \sigma_0^2 - 2\sigma_0\sigma_j}} - d_2 \right) +$$

$$+ \sum_{\ell=k_1+1}^k \Pr \left(Z_\ell \geq \frac{\sqrt{n}(\mu_0 - \mu_\ell)}{\sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_\ell^2 - 2\sigma_0\sigma_\ell}} - d_2 \right) \quad (5.4.3)$$

Pelo mesmo argumento usado em \mathbb{P}_1 , temos que

$$\inf_{\underline{\mu}} E(T | \mathbb{P}_2) = k_1 \phi(d_2)$$

$$\sup_{\underline{\mu}} E(T | \mathbb{P}_2) = k_1 + k_2 \phi(d_2)$$

ou $k_1 \phi(d_2) \leq E_{\underline{\mu}}(T | \mathbb{P}_2) \leq k_1 + k_2 \phi(d_2)$

- Procedimento \mathbb{P}_3 :

Como em \mathbb{P}_1 e \mathbb{P}_2 , obtemos a seguinte expressão para $E(T)$ usando o procedimento \mathbb{P}_3 :

$$E_{\underline{\mu}}(T | \mathbb{P}_3) = \sum_{j=1}^{k_1} \Pr \left(T_j \geq \frac{\sqrt{n}(\mu_0 - \mu_j)}{s \sqrt{2(1-\rho)}} - d_3 \right) +$$

$$+ \sum_{\ell=k_1+1}^k \Pr \left(T_\ell \geq \frac{\sqrt{n}(\mu_0 - \mu_\ell)}{s \sqrt{2(1-\rho)}} - d_2 \right) \quad (5.4.4)$$

onde,

$T_i, i=1, \dots, k$ são variáveis aleatórias univariadas t-student com $v = (k+1)(n-1)$ graus de liberdade.

Da expressão (5.4.4) obtemos que,

$$\inf_{\underline{\mu}} E(T | \mathbb{P}_3) = k_1 F_v(d_3)$$

$$\sup_{\underline{\mu}} E(T | \mathbb{P}_3) = k_1 + k_2 F_v(d_3)$$

ou $k_1 F_v(d_3) \leq E_{\underline{\mu}}(T | \mathbb{P}_3) \leq k_1 + k_2 F_v(d_3),$

onde $F_v(\cdot)$ é a função distribuição da variável aleatória t-student com v graus de liberdade.

- Procedimento \mathbb{P}_4 :

$$E_{\underline{\mu}}(T | \mathbb{P}_4) = \sum_{j=1}^{k_1} \Pr \left(T_j \geq \frac{\sqrt{n}(\mu_0 - \mu_j)}{\sqrt{s_0^2 + s_j^2 - 2s_0 s_j}} - d_4 \right) + \sum_{\ell=k_1+1}^k \Pr \left(T_\ell \geq \frac{\sqrt{n}(\mu_0 - \mu_\ell)}{\sqrt{s_0^2 + s_\ell^2 - 2s_0 s_\ell}} - d_4 \right) \quad (5.4.5)$$

onde,

$T_i, i=1, \dots, k$ são variáveis aleatórias univariadas t-student com $v = n-1$ graus de liberdade.

Então,

$$\inf_{\mu} E(T | \mathbb{P}_4) = k_1 F_{n-1}(d_4)$$

$$\sup_{\mu} E(T | \mathbb{P}_4) = k_1 + k_2 F_{n-1}(d_4)$$

$$\text{ou, } k_1 F_{n-1}(d_4) \leq E_{\mu}(T | \mathbb{P}_4) \leq k_1 + k_2 F_{n-1}(d_4).$$

Os valores de $E(T)$, bem como o respectivo intervalo de variação, dos quatro procedimentos considerados só podem ser exatamente obtidos com os valores reais de k_1 e k_2 . Entretanto, na prática, esses valores são desconhecidos.

Uma forma de tentar solucionar este problema, seria por exemplo, estudar o comportamento das expressões encontradas para diferentes pares (k_1, k_2) , segundo algum conhecimento prévio do pesquisador a respeito dos tratamentos.

5.5 - INTERVALOS DE CONFIANÇA SIMULTÂNEOS

Nos experimentos que estamos considerando pode, também, ser interessante ao pesquisador obter intervalos de confiança simultâneos para as diferenças entre as médias dos k tratamentos e a do padrão, isto é, para $\mu_j - \mu_0$, $j=1, \dots, k$.

A construção de tais intervalos é baseada nas diferenças das médias amostrais, $\bar{Y}_j - \bar{Y}_0$, $j=1, \dots, k$.

Se podemos supor que as $(k+1)$ observações de cada unidade experimental obedecem uma distribuição normal, com variância comum σ^2 e coeficiente de correlação entre elas comum e igual a um valor conhecido ρ , então:

1) Se σ^2 é conhecido, o vetor aleatório

$$\left[\frac{\bar{Y}_j - \bar{Y}_0 - (\mu_j - \mu_0)}{\sigma \sqrt{2(1-\rho)/n}}, j = 1, \dots, k \right]$$

segue uma distribuição normal padrão k -variada, com coeficiente de correlação comum e igual a $1/2$. Então, um intervalo de confiança simultâneo bilateral para as diferenças $\mu_j - \mu_0, j=1, \dots, k$ com coeficiente de confiança $(1-\alpha) \times 100\%$, é dado por:

$$\left[\bar{y}_j - \bar{y}_0 - d_{(1-\alpha/2)} \sigma \sqrt{\frac{2(1-\rho)}{n}}; \bar{y}_j - \bar{y}_0 + d_{(1-\alpha/2)} \sigma \sqrt{\frac{2(1-\rho)}{n}}, j=1, \dots, k \right] \quad (5.5.1)$$

onde,

$d_{(1-\alpha/2)}$ é o $(1-\alpha/2) \times 100$ -ésimo percentil da distribuição normal k -variada com coeficiente de correlação $1/2$.

2) Se σ^2 é desconhecido, então usamos seu melhor estimador dado

por

$$s^2 = \text{tr} \frac{R_0^{-1} S}{k+1}$$

Então, o vetor aleatório

$$\left[\frac{\bar{Y}_j - \bar{Y}_0 - (\mu_j - \mu_0)}{s \sqrt{2(1-\rho)/n}}, j = 1, \dots, k \right]$$

segue distribuição t k-variada com $v = (k+1)(n-1)$ graus de liberdade e coeficiente de correlação entre variáveis igual a $1/2$. Assim, um intervalo de confiança simultâneo bilateral é expresso por:

$$\left(\bar{Y}_j - \bar{Y}_0 - d_{(1-\alpha/2)}^* \sqrt{\frac{2(1-\rho)}{n} \operatorname{tr} \frac{R_0^{-1} S}{k+1}}; \right. \\ \left. \bar{Y}_j - \bar{Y}_0 + d_{(1-\alpha/2)}^* \sqrt{\frac{2(1-\rho)}{n} \operatorname{tr} \frac{R_0^{-1} S}{k+1}}, j=1, \dots, k \right) \quad (5.5.2)$$

onde,

$d_{(1-\alpha/2)}^*$ é o $(1-\alpha/2) \times 100$ -ésimo percentil da distribuição t k-variada com $v = (k+1)(n-1)$ graus de liberdade e coeficiente de correlação constante e igual a $1/2$.

Se a suposição de normalidade das observações, que mencionamos no início desta seção, pose ser considerada verdadeira, então, a distribuição conjunta do vetor aleatório $(\bar{Y}_j - \bar{Y}_0, j=1, \dots, k)$ é perfeitamente identificável, dependendo do conhecimento da estrutura de variância e covariância entre os tratamentos. Assim, segundo o autor, testes de hipóteses simultâneos podem ser usados para verificar se as médias de todos tratamentos são melhores ou iguais à média do tratamento padrão.

5.6 - APLICAÇÃO

Procuramos, através do exemplo a seguir, ilustrar a aplicação da técnica desenvolvida neste capítulo, de seleção de um subconjunto de tratamentos dados que contenha todos que são melhores do que um tratamento controle.

As observações deste exemplo foram retiradas do texto de Bock [1975] e referem-se a um experimento executado por Cushny e Peebles [1905].

Os dados foram obtidos de um experimento onde foi medida a duração de sono de 10 pacientes quando submetidos a três drogas hipnóticas: L-Hyoscyamine HBr, L-Hyoscine HBr e R-Hyoscine HBr. As drogas foram dadas oralmente em noites alternadas e as horas de sono foram comparadas com as da noite controle, em que nenhuma droga intervinha. Cada uma destas drogas foi aplicada, desta maneira, um número de vezes em cada paciente e a média dos resultados está apresentada na Tabela 5.6,1.

Neste experimento temos um controle e três novos tratamentos identificados por:

- π_0 : controle (sem efeito de droga hipnótica);
- π_1 : 0,6mg L-Hyoscyamine HBr;
- π_2 : 0,6mg L-Hyoscine HBr;
- π_3 : 0,6mg R-Hyoscine HBr.

Para aplicar um dos procedimentos descritos neste Capí-

Tabela 5.6.1 - Quantidade média de horas de sono, sob o efeito de certas drogas hipnóticas

Paciente	Controle (não hipnótica)	0,6mg L-Hyoscyamine HBr	0,6mg L-Hyoscine HBr	0,6mg R-Hyoscine HBr
1	0,6	1,3	2,5	2,1
2	3,0	1,4	3,8	4,4
3	4,7	4,5	5,8	4,7
4	5,5	4,3	5,6	4,8
5	6,2	6,1	6,1	6,7
6	3,2	6,6	7,6	8,3
7	2,5	6,2	8,0	8,2
8	2,8	3,6	4,4	4,3
9	1,1	1,1	5,7	5,8
10	2,9	4,9	6,3	6,4
Média	3,25	4,0	5,58	5,57
DP	1,78	2,10	1,66	1,91
Var.	3,16	4,42	2,76	3,64

Fonte: Bock [1975]-pág. 465.

tulo vamos, primeiramente, verificar em qual das estruturas de co variância consideradas se enquadram os dados deste experimento.

Assim, na primeira análise testamos se a matriz de variância-covariância é do tipo uniforme (variâncias constantes e covariâncias constantes).

Ou seja,

19) Testamos,

$$H_0 : \Sigma = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \rho \\ \rho & \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

$H_1 : \Sigma$ é qualquer.

O critério adotado foi o da Razão de Verossimilhança Generalizada de Wilks, apresentado em Morrison [1976], cuja estatística é dada por:

$$L = \frac{|S|}{(s^2)^p (1-r)^{p-1} [1+(p-1)r]}$$

onde,

$S = (s_{jj'})$ é a estimativa usual não-viciada de Σ , baseada em

$v = n-1$ graus de liberdade,

s^2 é a estimativa de σ^2 sob H_0 , calculada por $s^2 = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p s_{ii}$,

s^2_r é a estimativa de $\sigma^2 \rho$ sob H_0 , calculada por

$$s^2_r = \frac{1}{p(p-1)} \sum_{j \neq j'} s_{jj'}$$

p é o número de níveis do fator de repetição, ou seja,

$$p = k+1.$$

Para os dados da Tabela 5.6.1 obtemos:

$$S = \begin{pmatrix} 3,19 & 2,19 & 0,957 & 0,836 \\ & 4,42 & 2,827 & 3,064 \\ & & 2,76 & 3,018 \\ & & & 3,64 \end{pmatrix} \Rightarrow |S| = 2,52$$

s² = 3,495

r = 0,615

p = 4

L = 0,1040

A estatística,

$$\chi^2 = - \left[v - \frac{p(p+1)^2(2p-3)}{6(p-1)(p^2+p-4)} \right] \ln L$$

tem distribuição assintótica de qui-quadrado com f = p(p+1)/2 - 2 graus de liberdade sob H₀. Neste exemplo, f = 8.

O valor observado da estatística $\chi^2_{obs} = 16,4$ que é não-significante ao nível de significância $\alpha = 0,025$ ($\chi^2_{crit} = 17,5$), ou seja, aceitamos que a matriz de variância-covariância dos dados é do tipo uniforme.

ao nível de 5% rejeita a hipótese uniforme

Para a segunda análise adotamos, então, o procedimento P₃, o qual é adequado para a estrutura de covariância que acabamos de aceitar.

2º) \mathbb{P}_3 : Inclui $\pi_j \iff \bar{y}_j \geq \bar{y}_0 - d_3 s \sqrt{2(1-\rho)/n}$, $j=1, 2, 3$

onde,

$$s^2 = 3,495$$

$$\rho = 0,615$$

$$n = 10$$

$$\bar{y}_0 = 3,25$$

d_3 é tal que $F_{3,36}(d_3, d_3, d_3; 1/2) = P^*$. Para $P^* = 0,975$ então $d_3 = 2,468$ (Hahn e Hendrickson [1971]-pág.328).

Então,

$$\bar{y}_0 - d_3 s \sqrt{2(1-\rho)/n} = 1,97$$

Assim, inclui π_j , $j = 1, \dots, 3$ no subconjunto se e somente se, $\bar{y}_j \geq 1,97$.

Então, $\{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}$ é o subconjunto que contém todos os tratamentos que são melhores do que o padrão.

5.7 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

A formulação usada neste Capítulo, de selecionar um subconjunto de tamanho aleatório dos tratamentos experimentais, tal que inclua todos aqueles que são melhores do que um controle, com uma probabilidade mínima garantida P^* , é devido a Gupta e Sobel [1958]. Entretanto ela não é a única. Dunnett [1955] enfocou o problema de seleção de população um pouco diferente. Ele considerou um procedimento para escolher um subconjunto (possivelmente va

zio) dos tratamentos experimentais que consiste somente de todos aqueles que são melhores do que o controle. Desta forma a regra R de Dunnett é dada da seguinte forma:

R : Inclui π_j ($j = 1, \dots, k$) no subconjunto selecionado dos tratamentos experimentais se e somente se,

$$\bar{Y}_j \geq Y_0 + d \text{ DP}(\bar{Y}_j - \bar{Y}_0)$$

onde, o valor d é o obtido da mesma maneira como nos procedimentos P_1 , P_2 , P_3 e P_4 , dependendo da estrutura de variância-co-variância dos dados.

Se o subconjunto é vazio, então o controle é selecionado como o melhor.

Poderíamos aplicar a regra R de Dunnett aos dados do exemplo anterior e teríamos:

Inclui π_j ($j = 1, \dots, 3$) $\Leftrightarrow \bar{y}_j \geq \bar{y}_0 + d_3 s \sqrt{2(1-\rho)/n}$, isto é, $\bar{y}_j \geq 4,53$.

Sendo assim, usando a regra R , o subconjunto selecionado que contém somente os tratamentos melhores que o controle é $\{\pi_2, \pi_3\}$.

Verificamos, então, que o procedimento de Dunnett é mais restrito do que os procedimentos descritos anteriormente, devido a Gupta e Sobel. Assim, o procedimento de Dunnett pode ser interpretado como uma seleção "marginal" dos tratamentos, enquanto que o de Gupta e Sobel como uma seleção "conjunta" (ou simultânea) dos tratamentos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi organizado de tal modo a reunir informações contidas na literatura sobre alguns aspectos analíticos de diversos planejamentos com medidas repetidas.

Embora com isto conseguimos acumular um grande número de informações importantes sobre o assunto, ainda existe, dentro deste mesmo assunto, alguns caminhos abertos para pesquisa futura. Dentre eles destacamos dois aspectos deste problema, bastante frequentes em situações reais:

- i) análise de regressão com medidas repetidas, cujo estudo requer técnicas estatísticas apropriadas e mais refinadas;
- ii) análise de experimentos com medidas repetidas, com observações incompletas ou perdidas.

Deixamos de abordar, ainda, neste trabalho, técnicas para analisar planejamentos Crossover com medidas repetidas, com ou sem efeito Carryover, mas existe uma vasta literatura disponível sobre o assunto, dentre elas, podemos citar os trabalhos de Wallenstein e Fisher [1977] e Patel e Hearne III [1980], sendo que maiores detalhes sobre a análise destes planejamentos poderão ser encontrados em alguns dos textos estatísticos citados anteriormente.

APÊNDICE A

A ESTRUTURA TIPO H DE HUYNH E FELDT

Demonstramos neste apêndice a condição necessária e suficiente para que as razões de quadrados médios usuais da Análise de Variância de experimentos em blocos aleatorizados e Split-Plot tenham distribuição F exata sob H_0 .

Esta condição, encontrada por Huynh e Feldt [1970], é expressa em termos dos elementos da matriz de variância-covariância Σ , entre as observações de uma mesma unidade experimental.

A estrutura de Σ encontrada por estes autores é conhecida como tipo H e é mais geral do que aquela de igualdade de variâncias e igualdade de covariâncias.

Na seção A.1 demonstramos a condição para experimentos em blocos aleatorizados.

Na seção A.2 demonstramos como a condição se aplica em experimentos Split-Plot.

Na seção A.3 consideramos um teste estatístico para verificar o padrão tipo H, também apresentado por estes autores.

A.1 - EXPERIMENTOS EM BLOCOS ALEATORIZADOS

Consideremos o plano experimental em blocos casualizados. Nosso objetivo é demonstrar a condição necessária e suficiente para que a razão de quadrados médios dada por $RQM_A = QM_A / QM_{AS}$, onde QM_A é o quadrado médio do fator A e QM_{AS} é o quadrado médio da interação A x Bloco, tenha distribuição F exata e central, sob a hipótese de nenhum efeito do fator A.

Assumindo normalidade, as observações neste caso, dispostas conforme tabela 2.1 (Cap. 2), podem ser representadas por N vetores, $\underline{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ip})'$, $i = 1, \dots, N$, os quais constituem uma amostra aleatória da distribuição normal p-variada, com vetor-média $\underline{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_p)'$ e matriz de variância-covariância $\Sigma(p \times p) = (\sigma_{jj})$, positiva-definida.

Huynh e Feldt [1970] afirmam que Box [1950] provou que as somas de quadrados SQ_A e SQ_{AS} , envolvidas na RQM_A , podem ser escritas como combinações lineares de variáveis aleatórias qui-quadrado, da seguinte forma:

$$SQ_A = \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j \chi_j^2(1; \delta_j^2) \quad (A.1.1)$$

$$SQ_{AS} = \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j \chi_j^2(N-1) \quad (A.1.2)$$

onde,

λ_j são os auto-valores positivos da matriz $\Sigma(I_p - E_p/p)$,

$\chi_j^{2'}(1; \delta_j^2)$, $j=1, \dots, p-1$ são v.as. qui-quadrado não centrais , com 1. grau de liberdade e parâmetro de não-centralidade δ_j^2 ,

$\chi_j^2(N-1)$, $j = 1, \dots, p-1$ são v.as qui-quadrado centrais com (N-1) graus de liberdade,

I_p é a matriz identidade de ordem p,

E_p é a matriz quadrada de ordem p com todos os elementos iguais a 1,

e as $2(p-1)$ v.as. qui-quadrado são independentes.

Denominaremos os λ_j 's de *auto-valores associados* de Σ .

Com estas considerações, o seguinte teorema será demonstrado:

Teorema A.1.1 :

A razão RQM_A tem distribuição F exata central, sob H_0 : não existe efeito de tratamento, se e somente se os elementos da matriz de variância-covariância entre as observações de uma mesma unidade experimental têm a seguinte forma:

$$\sigma_{jj'} = a_j + a_{j'} + \lambda \delta_{jj'} , \quad \lambda > 0$$

onde

$$\delta_{jj'} = \begin{cases} 1, & j = j' \\ 0, & j \neq j' \end{cases}$$

Demonstração:

Conforme expressões A.1.1 e A.1.2, a razão RQM_A pode ser escrita como:

$$RQM_A = \frac{(N-1) \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j \chi_j^2(1; \delta_j^2)}{\sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j \chi_j^2 (N-1)}$$

A hipótese nula que estamos querendo testar é $H_0 : A_1 = A_2 = \dots = A_p = 0$, isto é, não existe efeito do fator A. Sob H_0 , $\delta_j^2 = 0$, e assim todas as v.as. qui-quadrado envolvidas na RQM_A são centrais.

Conforme mostrado por Baldessari [1965], a razão RQM_A tem distribuição F exata, se e somente se, todos auto-valores associados λ_j são iguais a λ . Sendo assim, a forma quadrática $\tilde{Y}'(I - E/p)\tilde{Y}$ pode ser escrita como $\lambda \chi^2(p-1, \delta^2)$ (Scheffé [1959]).

Lembrando que uma forma quadrática $\tilde{y}'A\tilde{y}$ tem distribuição proporcional a χ^2 se e somente se $A\Sigma A = \lambda A$, ou seja

$$\tilde{y}'A\tilde{y} \sim \lambda \chi^2 \iff A\Sigma A = \lambda A$$

então, Σ deve satisfazer a seguinte igualdade (Rao [1965]):

$$(I-E/p)\Sigma(I-E/p) = \lambda (I-E/p) \tag{A.1.3}$$

Para resolver (A.1.3) basta verificar que o elemento geral da matriz $(I - E/p)$ é $(\delta_{jj'} - 1/p)$, e o elemento geral da matriz $\Sigma(I - E/p)$ é $(\sigma_{jj'} - \bar{\sigma}_{j.})$. Sendo assim, o termo geral da identidade (A.1.3) é obtido efetuando-se:

$$\sum_{\ell=1}^p (\delta_{j\ell} - \frac{1}{p})(\sigma_{\ell j'} - \bar{\sigma}_{\ell.}) = \lambda(\delta_{jj'} - \frac{1}{p}),$$

o qual nos fornece

$$\sigma_{jj'} = \bar{\sigma}_{j.} + \bar{\sigma}_{j'.} - \bar{\sigma}_{..} + \lambda(\delta_{jj'} - \frac{1}{p}) \quad (A.1.4)$$

onde,

$$\bar{\sigma}_{j.} = \bar{\sigma}_{.j} = \frac{\sum_{\ell=1}^p \sigma_{j\ell}}{p} \quad \text{e} \quad \bar{\sigma}_{..} = \frac{\sum_{j=1}^p \bar{\sigma}_{j.}}{p}$$

Desta forma, os elementos da matriz Σ podem ser expressos como combinações lineares de $(p+1)$ constantes arbitrárias.

Podemos reescrever (A.1.4) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{jj'} &= (\bar{\sigma}_{j.} - \frac{\bar{\sigma}_{..}}{2} + \frac{\lambda}{2p}) + (\bar{\sigma}_{j'.} - \frac{\bar{\sigma}_{..}}{2} - \frac{\lambda}{2p}) + \lambda\delta_{jj'} = \\ &= a_j + a_{j'} + \lambda\delta_{jj'} \end{aligned}$$

onde,

$$a_j = \bar{\sigma}_{j.} - \frac{\bar{\sigma}_{..}}{2} + \frac{\lambda}{2p}, \quad j = 1, \dots, p,$$

produzindo, portanto, a estrutura de Σ estipulada pelo teorema \square

Se escolhermos $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \dots, \sigma_{pp}$ e λ como as constantes arbitrárias, então de (A.1.4) segue que

$$\sigma_{jj'} = \frac{\sigma_{jj} + \sigma_{j'j'}}{2} - \lambda, \quad \text{se } j \neq j', \quad (\text{A.1.5})$$

o que é equivalente a,

$$\text{Var}(Y_{ij} - Y_{ij'}) = 2\lambda$$

Este resultado gera, portanto, o Corolário A.1.1 a seguir, que é equivalente ao Corolário A.1.2.

Corolário A.1.1

A razão RQM_A tem distribuição F exata, se e somente se todas as possíveis diferenças entre variáveis-respostas dentro de um mesmo bloco (ou unidade experimental) têm variâncias constantes, ou seja, $\text{Var}(Y_{ij} - Y_{ij'})$ é constante, $\forall j \neq j'$.

Corolário A.1.2

A condição necessária e suficiente nos elementos de Σ , estipulada pelo teorema A.1.1, é equivalente a

$$\epsilon = \frac{\left(\sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j \right)^2}{(p-1) \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j^2} = 1$$

onde, ϵ é o fator multiplicativo de Box, que corrige os graus de liberdade nas distribuições univariadas aproximadas.

ALGUNS COMENTÁRIOS

- 1) as $(p+1)$ constantes arbitrárias seriam escolhidas de tal forma que a matriz Σ resultante é positiva definida, ou seja, tem p auto-valores estritamente positivos.
- 2) De (A.1.5) verificamos que quando as variâncias são iguais as covariâncias também são. Neste caso, matrizes deste tipo são designadas de tipo S e correspondem às matrizes com padrão uniforme, dado por (2.3.1) (Cap. 2).
- 3) Matriz satisfazendo (A.1.4) e (A.1.5), mas sem ser de tipo S, é designada de matriz de tipo H.
- 4) Matrizes de tipo H são definidas por $(p+1)$ constantes arbitrárias, enquanto que matrizes tipo S envolvem somente duas constantes arbitrárias. Portanto, matrizes tipo H são mais gerais que matrizes tipo S.
- 5) Abaixo, um exemplo de matriz que não é de tipo S (uniforme), mas é de tipo H.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1,0 & 0,5 & 1,5 \\ 0,5 & 3,0 & 2,5 \\ 1,5 & 2,5 & 5,0 \end{pmatrix}$$

onde,

$$a_1 = -0,25$$

$$a_2 = 0,75$$

$$a_3 = 1,75$$

$$\lambda = 1,5$$

A.2 - EXPERIMENTOS SPLIT-PLOT

Consideremos agora o plano experimental Split-Plot, onde o fator A com p níveis é o fator de repetição, e o fator B é o fator grupo com g níveis, com n_j unidades experimentais hierárquicas no nível j , $j = 1, \dots, g$.

As observações deste experimento podem ser dispostas conforme tabela 2.2 (Cap. 2), e de forma análoga como em A.1, os vetores

$$\underline{y}_{ij} = (y_{ij1}, y_{ij2}, \dots, y_{ijp})', \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n_j, \\ j = 1, \dots, g \end{array}$$

representam uma amostra aleatória da distribuição normal p -variada, com vetor-média $\underline{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_p)'$ e matriz de variância-covariância Σ_j positiva definida.

As somas de quadrados associadas ao fator A, interação A x B e erro dentro de unidades experimentais são, respectivamente, definidas por:

$$SQ_A = \sum_{k=1}^p N(\bar{y}_{..k} - \bar{y}_{...})^2$$

$$SQ_{AB} = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^g n_j (\bar{y}_{.jk} - \bar{y}_{..k} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2$$

$$SQ_{\text{Erro}(w)} = \sum_{j=1}^g \left[\sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{.jk} + \bar{y}_{.j.})^2 \right]$$

que têm, respectivamente, $(p-1)$, $(g-1)(p-1)$ e $(N-g)(p-1)$ graus de liberdade, onde $N = \sum_{j=1}^g n_j$.

As razões de quadrados médios, normalmente usadas para testar nenhum efeito do fator A e nenhum efeito da interação A x B são, respectivamente, definidas por

$$RQM_A = \frac{QM_A}{QM_{\text{Erro}(w)}} = (N-g) \frac{SQ_A}{SQ_{\text{Erro}(w)}} \quad (\text{A.2.1})$$

$$RQM_{AB} = \frac{QM_{AB}}{QM_{\text{Erro}(w)}} = \frac{(N-g)}{(g-1)} \frac{SQ_{AB}}{SQ_{\text{Erro}(w)}} \quad (\text{A.2.2})$$

Definimos a seguir, duas relações que serão úteis em derivações posteriores:

$$SQ_A + SQ_{AB} = \sum_{j=1}^g \sum_{k=1}^p n_j (\bar{y}_{.jk} - \bar{y}_{.j.})^2 = \sum_{j=1}^g SQ_A \text{ para } j \quad (\text{A.2.3})$$

$$SQ_{\text{Erro}(w)} = \sum_{j=1}^g SQ_{AS \text{ para } j} = \sum_{j=1}^g \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_{jk} \chi_k^2(n_j - 1) \quad (\text{A.2.4})$$

onde,

$SQ_A \text{ para } j$ é a soma de quadrados do fator A, para o grupo j,

$SQ_{AS \text{ para } j}$ é a soma de quadrados da interação AxBloco para o grupo j, e

λ_{jk} são os auto-valores da matriz $\Sigma_j (I_p - E_p/p)$.

Pode ser verificado que RQM_A pode ser escrito como

$$RQM_A = (N-g) \frac{\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k \chi_k^2(1, \delta_k^2)}{\sum_{j=1}^g \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_{jk} \chi_k^2(n_j - 1)} \quad (\text{A.2.5})$$

onde

$\lambda_k, k=1, \dots, p-1$ são os auto-valores da matriz $\sum_{j=1}^g \frac{n_j \Sigma_j}{N} (I_p - \frac{E_p}{p})$ e,

$\lambda_{jk}, k=1, \dots, p-1$ são os auto-valores da matriz $\Sigma_j (I_p - \frac{E_p}{p})$.

Todos os qui-quadrados envolvidos em (A.2.5) são independentes e aqueles do numerador são centrais, se e somente se , não existe efeito do fator A.

Ainda, segundo os autores, pode ser verificado de forma análoga que,

$$RQM_{AB} = \frac{(N-g) \sum_{k=1}^{(p-1)(g-1)} v_k \chi_k^2(1; \delta_k'^2)}{(g-1) \sum_{j=1}^g \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_{jk} \chi_k^2(n_j-1)} \quad (A.2.6)$$

Como antes, os parâmetros de não-centralidade $\delta_k'^2$ em (A.2.6) são iguais a zero, se e somente se, a interação $A \times B$ é nula.

Dadas estas propriedades para RQM_A (A.2.5) e RQM_{AB} (A.2.6) apresentamos, a seguir, o teorema que estabelece a condição necessária e suficiente sobre as matrizes Σ_j , para que RQM_A e RQM_{AB} em planejamentos Split-Plot tenham distribuições F exatas e centrais, sob a hipótese nula.

Teorema A.2.1 :

As razões de quadrados médios, RQM_A e RQM_{AB} , têm distribuições F exatas, com $(p-1)$ e $(N-g)(p-1)$ e, $(g-1)(p-1)$ e $(N-g)(p-1)$ graus de liberdade, respectivamente, se e somente se as matrizes de variância-covariância Σ_j são de tipo H, com a mesma constante λ .

Demonstração :

As razões RQM_A (A.2.5) e RQM_{AB} (A.2.6) são exatamente distribuídas como variáveis F, se e somente se, todas as constantes λ_k , λ_{jk} e v_k são iguais.

1. As constantes λ_{j_k} , $k=1, \dots, p-1$ são iguais a λ , pois são os auto-valores associados da matriz Σ_j , e assim, recaímos na demonstração do teorema A.1.1.
2. As constantes λ_k , também, são iguais a λ , porque como são os auto-valores associados da matriz $\sum_{j=1}^g \frac{n_j}{N} \Sigma_j$, e Σ_j é de tipo H com a constante λ , então segue que a média ponderada, também é de tipo H com a mesma constante λ .
3. Para verificar que as constantes v_k , $k=1, \dots, p-1$, são também iguais a λ , devemos reescrever a expressão (A.2.3) da seguinte forma:

$$\lambda_X^{2, (p-1; \delta^2)} + SQ_{AB} = \lambda \sum_{j=1}^g \chi_j^{2, (p-1; \delta_j^2)}$$

Segundo um teorema devido a Hogg e Craig [1958], mencionado por Huynh e Feldt [1970], pode ser concluído que

$$SQ_{AB} = \lambda_X^{2, [(g-1)(p-1); \delta'^2]}$$

e é independente de SQ_A .

Desta forma, segue que todos auto-valores v_k são também iguais a λ . □

Através deste teorema notamos que a análise de variância univariada é exata em planejamentos Split-Plot em situações mais gerais do que aquela de matrizes de covariâncias dos grupos iguais e do tipo uniforme, tal como é considerado por Winer [1971].

Para ilustrar uma situação do Teorema A.2.1, suponha que num experimento com 3 grupos nos quais suas unidades amostrais são submetidas a 4 tratamentos, tivéssemos as matrizes de variância-covariância dos grupos, Σ_1 , Σ_2 e Σ_3 , dadas por:

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 16 & 9 & 7 & 5 \\ 9 & 12 & 5 & 3 \\ 7 & 5 & 8 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } \Sigma_3 = \begin{pmatrix} 24 & 16 & 13 & 10 \\ 16 & 18 & 10 & 7 \\ 13 & 10 & 12 & 4 \\ 10 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Com estas três matrizes, rejeitaríamos a hipótese de igualdade das matrizes de covariâncias dos grupos e também do padrão de uniformidade. Entretanto, os testes F univariados são exatos para testar nenhum efeito de A e nenhum efeito de AxB, pois as três matrizes Σ_1 , Σ_2 e Σ_3 são de tipo H, com a mesma constante $\lambda = 10$.

A.3 - TESTES PRELIMINARES PARA VERIFICAÇÃO DA CONDIÇÃO

Para verificar se uma matriz Σ satisfaz o padrão tipo H, usaremos o resultado dado pelo teorema A.3.1 para blocos aleatorizados ou pelo teorema A.3.2 para Split-Plot, mais adiante, que fornecem uma condição equivalente àquela de padrão tipo H.

Para uso destes teoremas vamos considerar uma matriz C, de ordem $(p-1) \times p$, tal que satisfaça as seguintes propriedades:

- (i) todas as linhas de C somam zero,

$$(ii) CC' = I_{p-1}$$

$$(iii) C'C = I_p - \frac{E}{p}$$

(iv) dadas duas matrizes diferentes, satisfazendo as propriedades (i), (ii) e (iii), uma pode ser obtida da outra por uma transformação ortogonal.

Uma matriz C , tal como definida acima, é usualmente conhecida como matriz contraste p -ortonormalizada, pois suas linhas constituem os $(p-1)$ contrastes ortonormais entre as p variáveis.

Considerando, então, uma matriz contraste C p -ortonormalizada, temos o seguinte teorema:

Teorema A.3.1

Seja \underline{Y} um vetor aleatório de dimensão p , com matriz de variância-covariância Σ . Considere o vetor aleatório $\underline{Z} = C\underline{Y}$. Então a matriz Σ é de tipo H com constante λ , se e somente se, a matriz de variância-covariância de Z é $\Sigma^* = \lambda I_{p-1}$.

Demonstração :

i) Suponha que Σ é de tipo H .

$$\text{Então } \Sigma = A + A' + \lambda I_p, \text{ onde } A(p \times p) = (a_{jj'}) = (a_j)$$

$$\text{Assim, } \Sigma^* = \text{Var}(Z) = C\Sigma C' = C(A+A'+\lambda I_p)C' = CAC' + CA'C + \lambda CC'$$

Entretanto, verificamos que,

$$AC' = (d_{jj'}) = (a_j \sum_{k=1}^p c_{j'k}) = (0)$$

$$CA' = (e_{jj'}) = (a_j \sum_{k=1}^p c_{jk}) = (0)$$

$$\text{Logo, } \Sigma^* = \lambda CC' = \lambda I_{p-1}$$

ii) Suponha agora que $\Sigma^* = \text{Var}(Z) = \lambda I_{p-1}$

$$\Sigma^* = C \Sigma C' = \lambda I_{p-1}$$

$$\Rightarrow C' C \Sigma C' C = \lambda C' C$$

$$\Rightarrow \left(I_p - \frac{E}{p}\right) \Sigma \left(I_p - \frac{E}{p}\right) = \lambda \left(I_p - \frac{E}{p}\right)$$

Logo, Σ é de tipo H, com constante λ , como demonstrado pelo teorema A.1.1 □

O resultado dado pelo teorema A.3.1 garante que a razão RQM_A , de planejamentos em blocos aleatorizados, tem distribuição central F exata, sob a hipótese de nenhum efeito de A, se e somente se, as variáveis aleatórias p-ortonormalizadas, dadas pela transformação $\underline{Z} = C\underline{Y}$, são independentes e com variâncias iguais.

Sendo assim, verificar se uma matriz de variância-covariância Σ é de tipo H é equivalente a verificar se as variáveis ortonormalizadas das variáveis originais são independentes e homocedásticas.

Para verificar esta última afirmação, Huynh e Feldt [1970] sugerem usar a estatística definida pelo critério de esfe-

ricidade W , devido a Mauchly [1940]. Essa estatística W se baseia na matriz de covariância amostral S , estimada com v graus de liberdade, e no número de contrastes ortonormais, que neste caso é igual a $p-1$.

Assim, o valor observado de W é calculado por:

$$W = \frac{|CSC'|}{\left(\frac{\text{tr } CSC'}{p-1} \right)^{p-1}}$$

e a estatística

$$Q^2 = - \left[v - \frac{2p^2 - 3p + 3}{6(p-1)} \right] \ln W$$

tem distribuição assintótica qui-quadrado central com

$f = \frac{p(p-1)}{2} - 1$ graus de liberdade, sob a hipótese nula $H_0 : \Sigma$ é

de tipo H .

Anderson [1959] encontrou os momentos de W , e mostrou que, quando $p = 3$, a estatística Q^2 tem distribuição exata de qui-quadrado com 2 graus de liberdade. Consul [1967] encontrou distribuição exata de W , para outros valores de p .

No caso de experimentos Split-Plot o Teorema A.3.1 pode ser estendido, originando o teorema A.3.2, apresentado a seguir.

Teorema A.3.2 :

Para experimentos do tipo Split-Plot, as razões RQM_A (expressão A.2.1) e RQM_{AB} (expressão A.2.2) têm distribuição F exata, central sob H_0 , se e somente se,

a) as matrizes de variância-covariância dos grupos, $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_g$, satisfazem a relação,

$$C\Sigma_1C' = C\Sigma_2C' = \dots = C\Sigma_gC', \text{ e}$$

b) esta matriz comum é da forma λI_{p-1} .

A verificação da condição (a), pode ser feita, segundo Huynh e Feldt através do teste da hipótese nula,

$$H_{01} : C\Sigma_1C' = C\Sigma_2C' = \dots = C\Sigma_gC' = \Sigma^*.$$

Esta hipótese pode ser testada pela estatística M de Box [1949], que é uma generalização do teste de homogeneidade de variância de Bartlett [1937]. Este teste pode ser encontrado, por exemplo, em Morrison [1976 - pág. 252].

Se H_{01} é não rejeitada, então a hipótese,

$$H_{02} : \Sigma^* = \lambda I_{p-1}$$

é testada, usando o critério W de Mauchly [1940] apresentado no Teorema A.3.1, aplicado a uma matriz de variância-covariância amostral agrupada.

Entretanto, alguns autores (Hopkins e Clay [1963]; Korin [1972]; Olson [1974]) provaram que o critério M de Box [1949] para testar H_{01} é altamente sensível a afastamento da suposição de

normalidade multivariada das observações. Por outro lado, nada se conhece sobre a robustez do critério W de Mauchly [1940], para afastamentos desta suposição.

Sendo assim, estes testes não seriam usados indiscriminadamente com dados para os quais o modelo multinormal parece ser não-realista.

APÊNDICE B

SOLUÇÃO MULTIVARIADA DE GRAYBILL

Apresentamos neste apêndice a solução de Graybill [1961] para testes de hipótese sobre efeito de tratamento, em planejamentos em blocos aleatorizados, para uma estrutura qualquer de variância-covariância entre os erros.

O modelo paramétrico considerado é o modelo aditivo com 2 fatores, dado por:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + e_{ij}, \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, p \end{array} \quad (b.1)$$

onde, μ , τ_i , β_j e e_{ij} são definidos da forma usual, com as restrições:

$$\sum_{j=1}^p \tau_i = \sum_{i=1}^n \beta_j = 0$$

Assumiremos para o modelo (b.1) acima, a suposição que os vetores de erros aleatórios, $e_i' = (e_{i1}, \dots, e_{ip})$, $i=1, \dots, n$,

tem distribuição normal p-variada, com vetor-média zero (px1) e matriz de variância-covariância Σ , positiva-definida, com elementos na diagonal iguais a σ_{jj} , $j=1, \dots, p$, e fora da diagonal iguais a $\sigma_{jj'}$, para $j \neq j'$.

Em notação matricial, o modelo (b-1) pode ser escrito como:

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \tag{b.2}$$

onde,

\underline{Y} (np x1) é o vetor de observações,

X (np x(n+p+1)) é a matriz de planejamento,

$\underline{\beta}$ ((n+p+1)x1) é o vetor dos parâmetros

$\underline{\varepsilon}$ (np x1) é o vetor de erros aleatórios.

A hipótese a ser testada é:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_p$$

ou seja, não existe efeito de tratamento.

Consideremos os n vetores \underline{X}_i ((p-1)x 1), definidos por:

$$\underline{X}_i = \begin{pmatrix} Y_{i2} - Y_{i1} \\ Y_{i3} - Y_{i1} \\ \vdots \\ Y_{ip} - Y_{i1} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n$$

Então,

$$E(\underline{X}_i) = \underline{\gamma} = \begin{pmatrix} \tau_2 - \tau_1 \\ \tau_3 - \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_p - \tau_1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\text{Var}(\underline{X}_i) = V = [v_{\ell m}] \quad \text{onde,}$$

$$\begin{aligned} v_{\ell m} &= E\{[(Y_{i\ell} - Y_{i1}) - E(Y_{i\ell} - Y_{i1})][Y_{im} - Y_{i1}) - E(Y_{im} - Y_{i1})]\} = \\ &= E[(e_{i\ell} - e_{i1})(e_{im} - e_{i1})] \end{aligned}$$

ou seja,

$$v_{\ell m} = \sigma_{\ell m} - \sigma_{1\ell} - \sigma_{m1} + \sigma_{11}, \quad \ell, m = 2, 3, \dots, p.$$

A matriz V é positiva-definida desde que assumimos que Σ é positiva-definida, e os vetores \underline{X}_i e $\underline{X}_{i'}$ são independentes, para $i \neq i'$.

Assim, os n vetores \underline{X}_i , $i=1, \dots, n$ seguem uma distribuição $N_{p-1}(\underline{\gamma}, V)$ e $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_p$ se e somente se $\underline{\gamma} = \underline{0}$.

Vamos definir,

$$u = \frac{(n - p + 1)n}{(n-1)(p-1)} \bar{\underline{X}}' S^{-1} \bar{\underline{X}} \quad (\text{b.3})$$

onde,

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

(p-1) x 1

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})'$$

(p-1) x (k-1)

Então (Graybill [1961] - pág.206), a quantidade u tem distribuição F - Senedecor com $(p-1)$ e $(n-p+1)$ graus de liberdade se $\tau_1 = \dots = \tau_p$ ou $\underline{\gamma} = \underline{0}$.

Sendo assim, a hipótese de interesse pode ser testada usando o teorema B.1 dado abaixo.

Teorema B.1 :

Considere o modelo aditivo dado pela expressão (b.1) , tal que $E(e_{ij}^2) = \sigma_{jj}$, $E(e_{ij}e_{i'j'}) = \sigma_{jj'}$ e $E(e_{ij}e_{i'j'}) = 0$, se $i \neq i'$, $n \geq p$ e e_{ij} são v.as. com distribuição normal. Então, a hipótese $H_0: \tau_1 = \dots = \tau_p$ é rejeitada ao nível de significância α se

$$u > F_{\alpha}(p-1, n-p+1)$$

onde, u é dado pela expressão (b.3) e $F_{\alpha}(n,m)$ é o valor crítico da distribuição F-Snedecor com n e m graus de liberdade e nível de significância α .

Podê, também, ser de interesse testar hipótese do tipo $H_0: \sum_{i=1}^p c_i \tau_i = 0$ onde $\sum_{i=1}^p c_i = 0$, ou seja, um contraste entre

os tratamentos igual a zero. Com as suposições consideradas aqui para o modelo (b.1), o método convencional para testar esta hipótese não é exato. A solução exata para este caso pode ser obtida utilizando-se os resultados dos três teoremas que apresentamos a seguir.

Teorema B.2 :

Considere o modelo (b.1) e suposições. Então as quantidades,

$$z_i = \sum_{j=1}^p c_j y_{ij} \quad \text{com} \quad \sum_{j=1}^p c_j = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

são independentes e com distribuição $N(\sum_{j=1}^p c_j \tau_j, \sigma^2)$ onde,

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^p c_j^2 \sigma_{jj} + \sum_{j \neq j'}^p c_j c_{j'} \sigma_{jj'}$$

Teorema B.3 :

Sob as suposições do Teorema B.2, podemos tirar as seguintes conclusões:

i) $\frac{u^2}{\sigma^2} = \frac{n\bar{z}^2}{\sigma^2}$ tem distribuição não-central de qui-quadrado com 1 grau de liberdade e parâmetro de não-centralidade

$$\lambda = \frac{n \left(\sum_{j=1}^p c_j \tau_j \right)^2}{2\sigma^2}$$

ii) $\frac{w^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}{\sigma^2}$ tem distribuição de Qui-quadrado central com (n-1) graus de liberdade

iii) u e w são independentes.

Assim, a hipótese $H_0: \sum_{j=1}^p c_j \tau_j = 0$ pode ser testada uti-

lizando o Teorema B.4 a seguir.

Teorema B.4 :

Considere u^2 e w^2 como definidos no Teorema B.3. Então,

$$v = \frac{(n-1)u^2}{w^2} = \frac{n(n-1)\bar{z}^2}{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}$$

tem distribuição não-central $F'(1, n-1, \lambda)$, onde

$$\lambda = \frac{n \left(\sum_{j=1}^p c_j \tau_j \right)^2}{2\sigma^2}$$

é o parâmetro de não-centralidade. Assim, a hipótese é rejeitada ao nível de significância α se $u > F_{\alpha}'(1, n-1, \lambda)$.

Aplicaremos estes resultados ao exemplo dado por Graybill [1961], cujos dados foram supostamente representados pelo modelo que estamos considerando, e estão apresentados na Tabela B.1.

Tabela B.1 -

$\beta \backslash \tau$	1	2	3	4
1	19,41	43,60	24,05	19,47
2	23,84	40,40	21,76	16,61
3	16,08	18,08	14,19	16,69
4	18,29	19,57	18,61	17,78
5	30,08	45,20	29,33	20,19
6	27,04	25,87	25,60	23,31
7	39,95	55,20	38,77	21,15
8	25,12	55,32	34,19	18,56
9	22,45	19,79	21,65	23,31
10	29,28	46,24	31,52	22,48
11	22,56	14,88	15,68	19,79
12	22,08	7,52	4,69	20,53
13	43,95	41,17	32,59	29,25

Fonte: Graybill [1961].

Para testar $H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4$ usaremos o Teorema B.1, e portanto, devemos encontrar os vetores

$$\tilde{x}_i = (y_{i2} - y_{i1}, y_{i3} - y_{i1}, y_{i4} - y_{i1})', \quad i = 1, 2, \dots, 13$$

Sendo assim, obtemos:

$$\tilde{x}_1 = (24,19 \quad 4,64 \quad 0,06)'$$

$$\tilde{x}_2 = (16,56 \quad -2,08 \quad -7,23)'$$

$$\tilde{x}_3 = (2,00 \quad -1,89 \quad 0,61)'$$

$$\begin{aligned} \underline{x}_4 &= (1,28 \quad 0,32 \quad -0,51) ' \\ \underline{x}_5 &= (15,12 \quad -0,75 \quad -9,89) ' \\ \underline{x}_6 &= (-1,17 \quad -1,44 \quad -3,73) ' \\ \underline{x}_7 &= (15,25 \quad -1,18 \quad -18,80) ' \\ \underline{x}_8 &= (30,20 \quad 9,07 \quad -6,56) ' \\ \underline{x}_9 &= (-2,66 \quad -0,80 \quad 0,86) ' \\ \underline{x}_{10} &= (16,96 \quad 2,24 \quad -6,80) ' \\ \underline{x}_{11} &= (-7,68 \quad -6,88 \quad -2,77) ' \\ \underline{x}_{12} &= (-14,56 \quad -17,39 \quad -1,55) ' \\ \underline{x}_{13} &= (-2,78 \quad -11,36 \quad -14,70) ' \end{aligned}$$

o que nos fornece,

$$\bar{x} = (7,13 \quad -2,12 \quad -5,46) '$$

Obtemos ainda,

$$12 S = \sum_{i=1}^{13} (\underline{x}_i - \bar{x})(\underline{x}_i - \bar{x})' = \begin{pmatrix} 2151,87 & 894,54 & -274,19 \\ 894,54 & 542,10 & 36,34 \\ -274,19 & 36,34 & 446,37 \end{pmatrix}$$

cuja inversa é dada por:

$$\frac{S^{-1}}{12} = \begin{pmatrix} 0,002357 & -0,004009 & 0,001774 \\ -0,004009 & 0,008672 & -0,003169 \\ 0,001774 & -0,003169 & 0,003588 \end{pmatrix}$$

Assim, encontramos

$$u = \frac{(n-p+1)n}{(p-1)(n-1)} \frac{\bar{x}' S^{-1} \bar{x}}{\bar{x}' \bar{x}} = 7,59 > F_{(5\%)}(3,10) = 3,75$$

Portanto, a hipótese nula é rejeitada ou seja, existe efeito de tratamento.

Poderíamos detectar qual tratamento ou tratamentos levaram à rejeição da hipótese, através de algum contraste e, desta forma o resultado dado pelo Teorema B.4 poderia ser utilizado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDERSON, T.W. 1958. *An introduction to multivariate statistical analysis*. New York, John Wiley.

BARCIKOWSKI, R.S. & ROBEY, R.R. 1984. Decisions in single group repeated measures analysis: statistical tests and three computer packages. *The American Statistician*, 38(2): 148-150.

BERGER, R.L. 1981. Selecting all treatments better than a control using existing tables. *Communications in Statistics*. Part A. 10, (20): 2025-2037.

BOCK, R.D. 1975. *Multivariate statistical methods in behavioral research*. New York, McGraw-Hill.

CHEN, H.J. 1979. Selecting a group of treatments better than a standard in repeated measurements design. *American Statistical Association: Proceedings of the Statistical Computing Section*: 306-311.

CHEN, H.J. 1980. On selecting a subset which contains all populations better than a control. *Communications in Statistics*. Part A. 9 (8): 851-864

COLE, J.W.L. & GRIZZLE, J.E. 1966. Applications of multivariate analysis of variance to repeated measurements experiments. *Biometrics*, 22: 810-828.

COLLIER, R.O.; BAKER JR., F.B.; MANDEVILLE, G.K.; HAYES, Y.F. 1967. Estimates of test size for several test procedures based

- on conventional variance ratios in the repeated measures de
sign. *Psychometrika*, 32:339-353.
- CUSHNY, A.R. & PEEBLES, A.R. 1905. The action of optical isomers
II: hyoscines. *Journal of Physiology*, 32: 501-510
- DUNNETT, C.W. 1955. A multiple comparison procedure for compa
ring several treatments with a control. *Journal of the Ameri-*
can Statistical Association, 50: 1096-1121.
- GRAYBILL, F.A. 1961. *An introduction to linear statistical mo*
dels. New York, McGraw-Hill. v.1
- GUPTA, S.S. & PANCHAPAPESAN, S. 1979. *Multiple decisions proce*
dures: theory and methodology of selecting and ranking popula
tions. New York, John Wiley.
- HAHN, G.J. & HENDRICKSON, R.W. 1971. A table for percentage po-
intsof the distribution of the largest absolute value of k stu-
dent t varieties and its application. *Biometrika*, 58:31-56.
- HEARNE, E.M.; CLARK, G.M.; HATCH, J.P. 1983. A test for serial
correlation in univariate repeated measures analysis.
Biometrics, 39(1): 237-243.
- HOCKING, R.R. 1973. A discussion of the two-way mixed model.
The American Statistician, 27: 148-152.
- HUYNH, H. 1978. Some approximate tests for repeated measurement
designs. *Psychometrika*, 43(2): 161-175
- HUYNH, H & FELDT, L.S. 1970. Conditions under which mean square
ratios in repeated measurements designs have exact F-distribu-
tions. *Journal of the American Statistical Association*, 65

(332):1582-1589.

- HUYNH, H. & FELDT, L.S. 1976. Estimations of the Box corrections for degrees of freedom from sample data in the randomized block and splitplot designs. *Journal of Educational Statistics*, 1:69-82
- HUYNH, H. & FELDT, L.S. 1980. Performance of traditional F tests in repeated measures designs under covariance heterogeneity. *Communication in Statistics. Part A.* 9 (1):61-74.
- KOCK, G.C.; AMARA, I.A.; STOKES, M.E.; GILLINGS, D.B. 1980. Some views on parametric and non-parametric analysis for repeated measurements and selected bibliography. *International Statistical Review*, 48:249-265.
- MORRISON, D.F. 1976. *Multivariate Statistical Methods*. 2.ed. New York, McGraw-Hill.
- NETER, J. & WASSERMAN, W. 1974. *Applied linear statistical models: regression analysis of variance and experimental designs*. Homewood, Richard D. Irwin.
- PEREJ, C.A. & SALDIVA, C.D. 1982. Planejamento de experimentos. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA, 59 - São Paulo, IME-USP.
- RAO. C.R. 1965. *Linear statistical inference and its applications* New York, John Willey.
- ROGAN, J.C.; KESELMAN, H.J.; MENDOZA, J.L. 1979. Analysis of repeated measurements. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 32:269-286.

ROUANET, H & LÉPINE, D. 1970. Comparison between treatments in a repeated-measurement design: ANOVA and multivariate methods. *The British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 23(2):147-163.

SCHEFFÉ, H. 1959. *The analysis of variance*. New York, Wiley.

SHAFFER, J.P. 1981. The analysis of variance mixed model with allocated observations: application to repeated measurement designs. *Journal of the American Statistical Association*, 76(375):607-611.

SINGER, J.M. 1977. Análise de curvas de crescimento. São Paulo. 112p. Dissertação - Mestrado, IME-USP.

TIMM, N.H. 1975. *Multivariate analysis with applications in education and psychology*. Califórnia, Brookscole.

WALLENSTEIN, S. & FLEISS, J.L. 1979. Repeated measurements analysis of variance when the correlations have a certain pattern. *Psychometrika*, 44(2):229-233.

WINER, B.J. 1971. *Statistical principles in experimental design*. 2.ed. New York, McGraw-Hill.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

- BALDESSARI, B. 1965. Remarque sur le rapport de combinaisons linéaires de 2 . *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université Paris*, 14:379-392.
- BARTLETT, M.S. 1937. The statistical conception of mental factors. *British Journal of Psychology*, 28: 97-104.
- BOX, G.E.P. 1949. A general distribution theory for a class of likelihood ratio criteria. *Biometrika*, 36:317-346.
- BOX, G.E.P. 1950. Problems in the analysis of growth and wear curves. *Biometrics*, 6:362-389.
- BOX, G.E.P. 1954a. Some theorems on quadratic forms applied in the study of analysis of variance problems, I. Effect of inequality of inequality of variance and correlation between errors in the two-way classification. *Annals of Mathematical Statistics*, 25:484-498.
- BOX, G.E.P. 1954b. Some theorems on quadratic forms applied in the study of analysis of variance problems, II. Effects of inequality of variance and correlation between errors in the two way classification. *Annals of Mathematical Statistics*, 25:484-498.
- BROGAN, D.R. & KUTNER, M.H. 1980. Comparative analyses of pre test-posttest research design. *The American Statistician*, 34(4): 229-232.

- CARY, N.C. ed. 1982 *SAS User's statistics*. SAS Institute Inc.
- CHEN, H.J. & PICKET, J.R. 1980. Selecting a subset which contains all populations better than a control in repeated measurements designs. *Technical Report*.
- CONSUL, P.C. 1967. On the exact distributions of the criterion W for testing sphericity in a p -variate normal distribution. *Annals of Mathematical Statistics*, 38: 1170-1174
- DANFORD, M.B.; HUGHES, H.M.; MCNEE, R.C. 1960. On the analysis of repeated measurements experiments. *Biometrics*, 16: 547-565.
- DIXON, J.M. ed. 1983. *BMDP Statistical software*. Los Angeles, University of California Press, 1981.
- FELLER, W. 1968. *An introduction to probability theory and its applications*. 3.ed. New York, John Wiley. v.1
- GEISSER, S. 1963. Multivariate analysis of variance for a special covariance case. *Journal of American Statistical Association*, 58: 660-669.
- GEISSER, S. & GREENHOUSE, S.W. 1958. An extension of Box's results on the use of the F distribution in multivariate analysis. *Annals of Mathematical Statistics*, 29: 855-891.
- GEISSER, S. & GREENHOUSE, S.W. 1959. On methods in the analysis of profile data. *Psychometrika*, 24: 95-112.
- GUPTA, S.S. 1963a. Bibliography of the multivariate normal integrals and related topics. *Annals of Mathematical Statistics*, 34: 829-838

- GUPTA, S.S. 1963b. Probability integrals of multivariate normal and multivariate t. *Annals of Mathematical Statistics*, 34:792-828.
- GUPTA, S.S.; NAGEL, K.; PANCHAPAKESAN, S. 1973. On the order statistics from equally correlated normal random variables. *Biometrika*, 60:403-413.
- GUPTA, S.S. & SOBEL, M. 1958. On selecting a subset which contains all populations better than a standard. *Annals of Mathematical Statistics*, 29:235-244.
- HATCH, J.P. 1980. The effects of operant reinforcement schedules on the modification of human heart rate. *Psychophysiology*, 17:559-567.
- HOPKINS, J.W. & CLAY, P.P.F. 1963. Some empirical distributions of bivariate T^2 and homoscedasticity criterion M under unequal variance and leptokurtosis. *Journal of the American Statistical Association*, 58:1048-1053.
- HOTELLING, H. 1931. The generalization of student's ratio. *Annals of Mathematical Statistics*, 2:360-378.
- HULL, C.H. & NIE, N.H. 1979. *SPSS:Update*. New York, McGraw-Hill.
- HULL, C.H. & NIE, N.H. 1981. *SPSS:Update 7-9*. New York, McGraw-Hill.
- HUYNH, H. & MANDEVILLE, G.K. 1979. Validity conditions in repeated measures design. *Psychological Bulletin*, 86: 964-973.
- KOOPMANS, T. 1942. Serial correlation and quadratic forms in normal variables. *Annals of Mathematical Statistics*, 13:14.

KORIN, B.P. 1972. Some comments on the homoscedasticity criterion M and the multivariate analysis of variance tests T^2 , W and R . *Biometrika*, 59:215-216.

KRISHNAIAH, P.R. & ARMITAGE, J.V. 1966. Tables for multivariate t distribution. *Sankhya*, 28:31-56.

LJUNG, G.M. & BOX, G.E.P. 1980. Analysis of variance with autocorrelated observations. *Scandinavian Journal of Statistics*, 1:172-180.

MAUCHLY, J.W. 1940. Significance test for sphericity of a normal n -variate distribution. *Annals of Mathematical Statistics*, 11:204-209.

MENDOZA, J.L.; TOOTHAKER, L.E.; CRAIN, B.R. 1976. Necessary and sufficient conditions for F ratios in the $L_x J_x K$ factorial design with two repeated factors. *Journal of the American Statistical Association*, 71(356):992-993.

OLSON, C.L. 1974. Comparative robustness of six tests in multivariate analysis of variance. *Journal of the American Statistical Association*, 69:894-908.

PAULSON, E. 1952. On the comparison of several experimental categories with a control. *Annals of Mathematical Statistics*. 23:610-616.

PATEL, H.I. & HEARNE, E.M., III. 1980. Multivariate analysis for the two-period repeated measures crossover design with application to clinical trials. *Communications in statistics. Part A*, 9 (18): 1919-1929.

PILLAI, K.C.S. 1955. Some new test criteria in multivariate analysis. *Psychological Bulletin*, 83(4):579-586.

POTHOFF, R.F. & ROY, S.N. 1964. A generalized multivariate analysis of variance model useful especially for growth curve problems, *Biometrika*, 51:313-325.

SPSSX: *User's guide*. 1983. New York, McGraw-Hill.

WALLENSTEIN, S. & FISHER, A.C., 1977. The analysis of the two-period repeated measurements crossover design with applications to clinical trials. *Biometrics*, 33:261-269.

WILKS, S.S. 1932. Certain generations in the analysis of variance. *Biometrika*, 24:471-494.