8.8. tétel. (Andronov–Witt) [5] [6] Ha a Γ periodikus pálya karakterisztikus multiplikátorainak abszolút értéke 1-nél kisebb, akkor a Γ pálya stabilis határciklus.

Bizonyítás. Mivel a Poincaré-leképezés sajátértékeinek abszolút értéke egynél kisebb, azért a 8.6. tétel szerint a Γ pálya p pontja aszimptotikusan stabilis fix pontja a Poincaré-leképezésnek. Ekkor viszont a 8.7. tétel szerint a Γ pálya orbitálisan aszimptotikusan stabilis, azaz stabilis határciklus. ■

8.3.3.2. Kétdimenziós rendszerek

Kétdimenziós rendszerekben periodikus megoldás létezését a Poincaré–Bendixson-elmélet[7] segítségével; hiányát pedig a Bendixson–Dulac[8]-féle kritériummal lehet igazolni. Legyen ebben a szakaszban $M \subset \mathbb{R}^2$ tartomány és legyen $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ olyan dinamikai rendszer, amelyet egy (8.9) alakú autonóm differenciálegyenlet ad meg, ahol most $f : M \to \mathbb{R}^2$. Nézzünk meg először periodikus pálya létezésének bizonyítására egy példát.

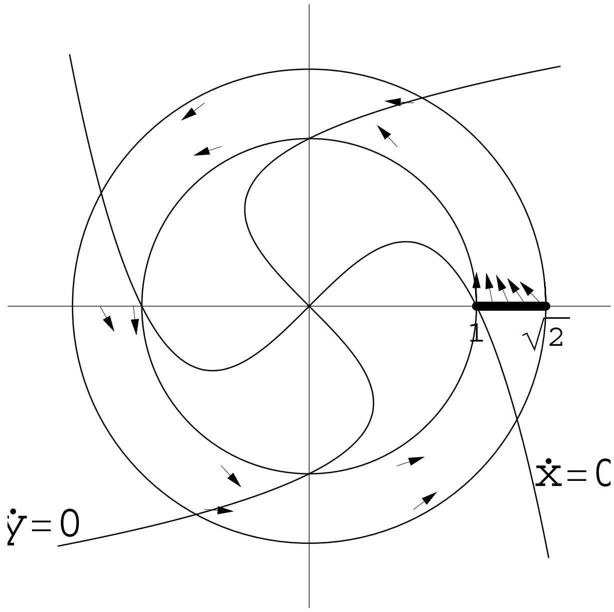
8.26. példa. Tekintsük az $\dot{x} = x - y - x^3$ $\dot{y} = x + y - y^3$ rendszert. Az $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$ nullavonalakat felrajzolva látszik, hogy az egyetlen egyensúlyi pont az origó, valamint hogy a trajektóriák körbejárnak az origó körül (8.20. ábra). A linearizálás szerint az origó instabilis fókusz. Szeretnénk eldönteni, hogy van-e a rendszernek periodikus pályája. Vegyük az $\mathbb{R}^2 \ni (p,q) \mapsto V(p,q) := p^2 + q^2$ Ljapunov-függvényt. Rövid számolás után ez azt mutatja, hogy az origó körüli 1 sugarú körben a trajektóriák távolodnak az origótól, a $\sqrt{2}$ sugarú körön kívül viszont közelednek hozzá. Így az 1 és a $\sqrt{2}$ sugarú körök által meghatározott gyűrű pozitívan invariáns halmaz. A $\Sigma := [1,\sqrt{2}] \times \{0\}$ vízszintes szakasz transzverzális metszet, ugyanis a trajektóriák minden pontjában lefelé haladnak keresztül rajta. Egyszerűen igazolható (például polárkoordinátákra áttérve), hogy a Σ szakasz pontjaiból induló trajektóriák körbejárnak a gyűrűben, és visszatérnek a Σ szakaszra. Ezért értelmezhető a $P : \Sigma \to \Sigma$ Poincaré-leképezés, amely tekinthető egy

[5] Andronov Alexandr Alexandrovics (1901–1952): orosz matematikus, a differenciálgyenletek kvalitatív elméletével foglakozott.

[6] Witt, Alexandr Adolfovics (1902–1938): orosz matematikus, a differenciálegyenletek kvalitatív elméletével, oszcilláló reakciók modelljeivel foglalkozott.

[7] Bendixson, Ivar Otto (1861–1935): svéd matematikus; differenciálegyenleteken kívül halmazelmélettel és algebrával is foglalkozott.

[8] Dulac, Henri (1870–1955): francia matematikus, a differenciálegyenletek kvalitatív elméletének egyik úttörője.



8.20. ábra. Periodikus pálya létezése

$P : [1, \sqrt{2}] \to [1, \sqrt{2}]$ függvénynek is. Mivel P folytonos, és egy zárt intervallumot önmagába képez, azért létezik fix pontja (lásd az alábbi feladatot), tehát rendszerünknek van periodikus pályája.

8.3. feladat. A Bolzano[9]-tételt felhasználva igazoljuk, hogy korlátos és zárt intervallumot önmagába képező folytonos függvénynek van fix pontja. (Megoldás: 357. oldal.)

A fenti példában tulajdonképpen a Poincaré–Bendixson-tétel gyengébb alakját igazoltuk az adott differenciálegyenletre. A tétel kétdimenziós rendszerek aszimptotikus állapotait írja le, mi most itt csak a gyengébb változatot ismertetjük, amely periodikus pályák létezésének igazolására használható. A tétel általános megfogalmazása megtalálható például itt: [58, 104].

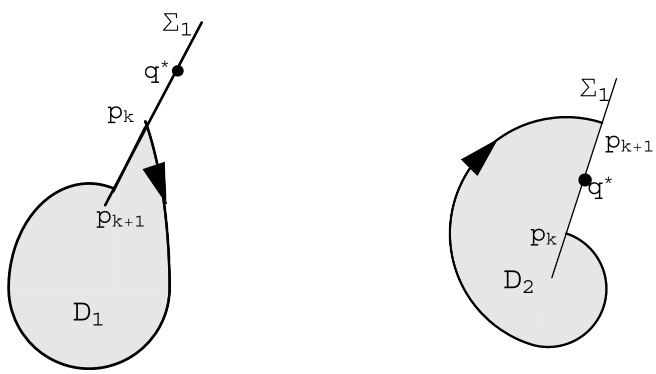
8.9. tétel. (A Poincaré–Bendixson-tétel gyenge alakja) Ha $K \subset M$ olyan pozitívan invariáns, korlátos és zárt halmaz, amelyben nincs egyensúlyi pont,[10] akkor a K halmazban van periodikus pálya.

[9] Bolzano, Bernard Placidus Johann Nepomuk (1781–1848): cseh matematikus, filozófus és teológus.

[10] Az ilyet szokták **Bendixson-féle zsák**nak nevezni.

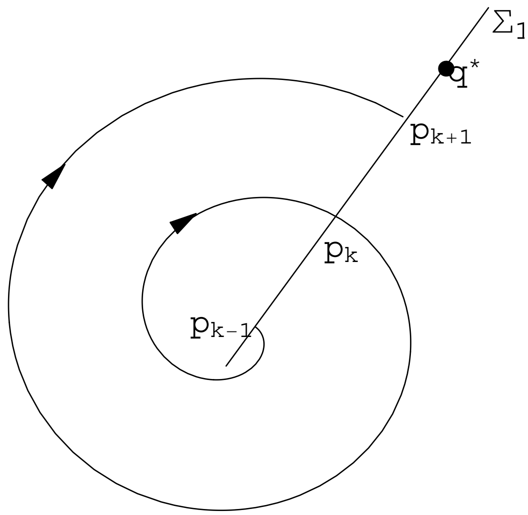
Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy van olyan $\Sigma \subset K$ zárt transzverzális metszet (azaz szakasz), amelyen értelmezhető a Poincaré-leképezés, és ez a leképezés a szakaszt önmagába képezi. Ekkor a fenti feladat szerint a Poincaré-leképezésnek van fix pontja, azaz a rendszernek van periodikus pályája.

Legyen $p \in K$ tetszőleges pont, és tekintsük a $\overline{q}_n := \varphi(n, p) \quad (n \in \mathbb{N})$ sorozatot. Mivel K pozitívan invariáns, azért a sorozat minden tagja a K halmazban van. Ezért $(\overline{q}_n)$ korlátos sorozat, tehát van konvergens részsorozata, amit jelöljön (q_n). A K halmaz zártsága miatt a sorozat q^* határértéke is a K halmazban van. Mivel a K halmazban nincs egyensúlyi pont, azért q^* sem az, tehát megadható egy azt tartalmazó Σ_1 transzverzális metszet. Ez lehet például a $\partial_1\varphi(0, q^*)$ vektorra (azaz a q^* pontból induló pálya érintőjére) merőleges, kellően rövid szakasz. Mivel $(\varphi(n, p))$ részsorozata q^*-hoz tart, és $q^* \in \Sigma_1$, azért egyszerűen megmutatható, hogy a p pontból induló pálya végtelen sokszor metszi a Σ_1 szakaszt. Az időben egymást követő metszéspontokat jelölje $p_1, p_2, \ldots$. Megmutatjuk, hogy ezek monoton módon követik egymást a Σ_1 szakaszon, azaz a p_{k+1} pont a p_k és a q^* pont közé esik. Ugyanis indirekt módon tegyük fel, hogy nem ez a helyzet. Ekkor két



8.21. ábra. Periodikus pálya létezésének igazolásához I.

eset lehetséges. A p_{k+1} pont vagy p_k előtt van, amint a 8.21. ábra (a) részén látható, vagy q^* után, amint az ábra (b) része mutatja. Az előbbi esetben az ábrán jelölt D_1 halmaz pozitívan invariáns, így $p_l \in D_1$ minden $l > k+1$ esetén, ami ellentmond annak, hogy $p_l \to q^*$. A második esetben az ábrán jelölt D_2 halmaz negatívan invariáns, így $p_l \notin D_2$ minden $l > k+1$ esetén, ami ismét ellentmond annak, hogy $p_l \to q^*$. Tehát a p_{k+1} pont valóban a p_k és a q^* pont közé esik, amint azt a 8.22. ábra mutatja. Az ábráról azt is láthatjuk, hogy a Σ_1 szakasz p_{k-1} és p_k közötti részéről induló pályák visszatérnek a Σ_1 szakaszra, mégpedig egy p_k és p_{k+1} közé eső pontban. Így a Σ_1 szakasz



8.22. ábra. Periodikus pálya létezésének igazolásához II.

p_1 és q^* közötti részéből induló pályák visszatérnek a szakasz ugyanezen részére. Ezért a kezdeti feltételtől való folytonos függés miatt a q^* pontból induló pálya is visszatér a Σ_1 szakasz p_1 pont és q^* pont által meghatározott zárt részére. Jelölje Σ ezt a zárt szakaszt. A Poincaré-leképezés tehát ezen a zárt szakaszon értelmezhető, és a szakaszt önmagába képezi, amit bizonyítani akartunk. Megjegyezzük, hogy a q^* pont periodikus, ugyanis a belőle induló pálya a Σ szakasz más pontjába nem térhet vissza. ■

Most rátérünk a periodikus megoldás hiányát biztosító tételek ismertetésére. Ezek az úgynevezett Bendixson-kritérium, illetve a Bendixson–Dulac-kritérium. Mindkettő egyszerűen következik a Stokes[11]–(Gauss[12]–Osztrogradszkij[13])-tétel alábbi kétdimenziós változatából.

[11] Stokes, George Gabriel (1819–1903): ír fizikus, hidrodinamikával és optikával foglalkozott.

[12] Gauss, Carl Friedrich (1777–1855): német matematikus, a **matematikusok fejedelme**, számelmélettel, differenciálgeometriával, valószínűségszámítással, az algebra és az analízis legkülönbözőbb fejezeteivel; a matematikán kívül pedig a mágnesességgel és geodéziával foglalkozott.

[13] Osztrogradszkij, Mihail Vaszilјevics (1801–1862): orosz matematikus, komplex függvénytannal, potenciálelmélettel, közönséges és parciális differenciálegyenletekkel foglalkozott.

8.3. lemma. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ olyan egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, amelynek ∂G határa sima egyzerű zárt görbe, $G : D \to \mathbb{R}^2$ pedig legyen olyan folytonosan differenciálható függvény, amely D lezárására folytonosan terjeszthető ki. Ekkor $\int_D(\partial_1 G_1 + \partial_2 G_2) = \int_{\partial D}(-G_2, G_1)$.

8.10. tétel. (Bendixson-kritérium) Ha $E \subset \mathbb{R}^2$ olyan egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, amelyen a $\operatorname{div} f = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2$ függvény állandó előjelű, és legfeljebb véges sok sima egyszerű zárt görbe pontjaiban tűnik el, akkor a (8.9) rendszernek nincs teljesen az E halmazban haladó periodikus pályája.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van teljesen az E halmazban haladó periodikus megoldás, legyen egy ilyen Γ. Jelölje ennek belsejét D. Felírva a Stokes-tételt az f függvényre és a D tartományra ellentmondást kapunk. ■

Teljesen hasonlóan igazolható az alábbi állítás.

8.11. tétel. (Bendixson–Dulac-kritérium) Legyen $E \subset \mathbb{R}^2$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, és legyen $B : E \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, melyre a $\operatorname{div}(Bf)$ függvény állandó előjelű, és legfeljebb egy görbe pontjaiban tűnik el. Ekkor a (8.9) rendszernek nincs teljesen az E halmazban haladó periodikus pályája.

8.27. példa. Az $\dot{x} = x + y^2 + x^3$, $\dot{y} = -x + y + x^2 y$ rendszernek a Bendixson-kritérium szerint nincs periodikus megoldása. Ugyanis $\operatorname{div} f(p,q) = 2 + 4p^2 > 0$ a sík minden pontjában.

8.28. példa. Az $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x - ay + 2x^2 + by^2$ rendszernek a Bendixson–Dulac-kritérium szerint nincs periodikus megoldása. Ugyanis az $\mathbb{R}^2 \ni (p,q) \mapsto B(p,q) = a\mathrm{e}^{-2bp}$ segédfüggvényt alkalmazva $\operatorname{div}(Bf)(p,q) = -a^2\mathrm{e}^{-2bp} < 0$ a sík minden pontjában. Láthatjuk, hogy a segédfüggvényt ugyanúgy nehéz lehet megtalálni, mint a Ljapunov-módszer esetében.

8.4. feladat.

(a) $\dot{x} = y, \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - 2y^2)$. Mutassuk meg, hogy ebben az esetben az $1/\sqrt{2}$ és az 1 sugarú kör által meghatározott gyűrű Bendixson-zsák, így a Poincaré–Bendixson-tétel szerint az egyenletrendszernek van periodikus megoldása.

(b) $\dot{x} = x - xy^2 + y^3$, $\dot{y} = 3y - x^2 y + x^3$. Mutassuk meg, hogy a Bendixson-kritérium szerint az origó középpontú 2 sugarú körben nincs periodikus megoldás.