BPC-RBM
Robotika a manipulátory

T05: Kinematika
T05.V2: Jakobián

Přednáška

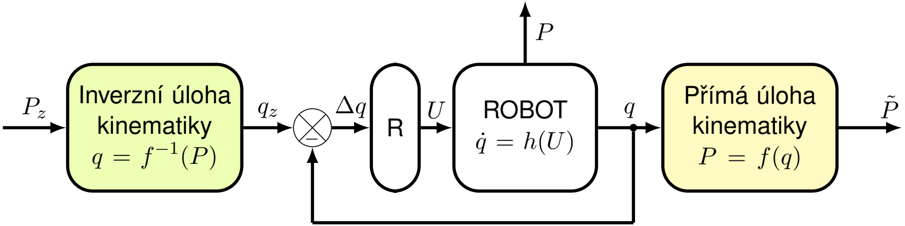
21. října 2021

Ing. František Burian Ph.D.

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ústav automatizace a měřicí techniky

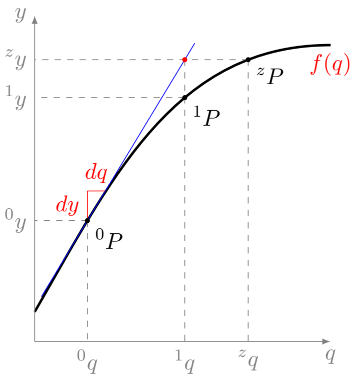
Motivace

Snažíme se zjednodušit řešení Inverzní úlohy kinematiky:



Funkce $P = f(q)$ je nelineární, je obtížné najít inverzi $q = f^{-1}(P)$.

Linearizace



Známe:

^0P ... počáteční pozice manipulátoru

P_z ... žádaná pozice manipulátoru

^0q ... poč. pozice kloubu

$^0y = f(^0q)$ ... poč. pozice konce

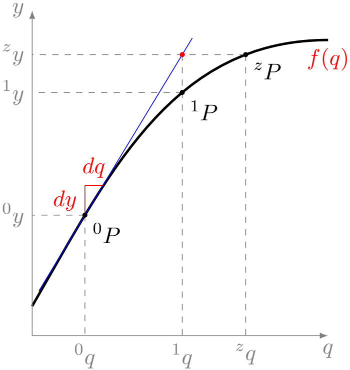
^zy ... žádaná pozice konce

Dokážeme vyjádřit:

$$\frac{dy}{dq} = \frac{d}{dq} f(q) \Big|_{^0q}$$ ... směrnice tečny

$$\frac{dy}{dq} = \frac{^zy - {}^0y}{^1q - {}^0q}$$ ... trojčlenkou z grafu

Linearizace



$$\frac{dy}{dq} = \frac{^{z}y - {^{0}y}}{^{1}q - {^{0}q}} = \frac{d}{dq} f(q) \Big|_{^{0}q}$$

Substituce $\Delta y = {^{z}y} - {^{0}y}; \quad \Delta q = {^{1}q} - {^{0}q}$:

$$\Delta y = f'(q) \Big|_{^{0}q} \Delta q$$

Vyjádříme Δq:

$$\boxed{\Delta q = f'(q)^{-1} \big|_{^{0}q} \Delta y}$$

Řešíme **iterativně**

$$\boxed{{^{1}q} = {^{0}q} + f'(q)^{-1} \big|_{^{0}q} \left({^{z}y} - {^{0}y}\right)}$$

Póza P má v prostoru 6 stupňů volnosti, obecně m
$\vec{P} = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)^T$
šetiosý manipulátor má 6 kloubů, obecně n
$\vec{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)^T$
Přímá úloha kinematiky $\vec{P} = f(\vec{q})$ obsahuje více nelineárnch rovnic:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \\ f_y(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \\ f_z(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \\ f_\alpha(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \\ f_\beta(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \\ f_\gamma(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \end{pmatrix} = f(\vec{q})$$

Iterační výpočet musíme převést na maticový:

$$\Delta q = f'(q)^{-1}\Big|_{{}^0q} \Delta y \qquad \rightarrow \qquad \Delta\vec{q} = J(\vec{q})^{-1}\Big|_{{}^0q} \Delta\vec{P}$$

Více rozměrů - odvození

$$\Delta\vec{P} = f'(\vec{q})\Delta\vec{q}$$

derivace vírerozměrné funkce - totální diferenciál:

$$f'(\vec{q}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}(\vec{q})dq_i$$

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \frac{\partial f_x}{\partial q_1}(\vec{q})\Delta q_1 + \frac{\partial f_x}{\partial q_2}(\vec{q})\Delta q_2 + \frac{\partial f_x}{\partial q_3}(\vec{q})\Delta q_3 + \frac{\partial f_x}{\partial q_4}(\vec{q})\Delta q_4 + \frac{\partial f_x}{\partial q_5}(\vec{q})\Delta q_5 + \frac{\partial f_x}{\partial q_6}(\vec{q})\Delta q_6 \\
\Delta y &= \frac{\partial f_y}{\partial q_1}(\vec{q})\Delta q_1 + \frac{\partial f_y}{\partial q_2}(\vec{q})\Delta q_2 + \frac{\partial f_y}{\partial q_3}(\vec{q})\Delta q_3 + \frac{\partial f_y}{\partial q_4}(\vec{q})\Delta q_4 + \frac{\partial f_y}{\partial q_5}(\vec{q})\Delta q_5 + \frac{\partial f_y}{\partial q_6}(\vec{q})\Delta q_6 \\
\Delta z &= \frac{\partial f_z}{\partial q_1}(\vec{q})\Delta q_1 + \frac{\partial f_z}{\partial q_2}(\vec{q})\Delta q_2 + \frac{\partial f_z}{\partial q_3}(\vec{q})\Delta q_3 + \frac{\partial f_z}{\partial q_4}(\vec{q})\Delta q_4 + \frac{\partial f_z}{\partial q_5}(\vec{q})\Delta q_5 + \frac{\partial f_z}{\partial q_6}(\vec{q})\Delta q_6 \\
\Delta \alpha &= \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_1}(\vec{q})\Delta q_1 + \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_2}(\vec{q})\Delta q_2 + \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_3}(\vec{q})\Delta q_3 + \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_4}(\vec{q})\Delta q_4 + \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_5}(\vec{q})\Delta q_5 + \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_6}(\vec{q})\Delta q_6 \\
\Delta \beta &= \frac{\partial f_\beta}{\partial q_1}(\vec{q})\Delta q_1 + \frac{\partial f_\beta}{\partial q_2}(\vec{q})\Delta q_2 + \frac{\partial f_\beta}{\partial q_3}(\vec{q})\Delta q_3 + \frac{\partial f_\beta}{\partial q_4}(\vec{q})\Delta q_4 + \frac{\partial f_\beta}{\partial q_5}(\vec{q})\Delta q_5 + \frac{\partial f_\beta}{\partial q_6}(\vec{q})\Delta q_6 \\
\Delta \gamma &= \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_1}(\vec{q})\Delta q_1 + \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_2}(\vec{q})\Delta q_2 + \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_3}(\vec{q})\Delta q_3 + \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_4}(\vec{q})\Delta q_4 + \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_5}(\vec{q})\Delta q_5 + \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_6}(\vec{q})\Delta q_6
\end{aligned}$$

$$\Delta\vec{P} = J(\vec{q})\,\Big|_{{}^0q}\,\Delta\vec{q}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta\alpha \\ \Delta\beta \\ \Delta\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1}(\vec{q}) & \frac{\partial f_x}{\partial q_2}(\vec{q}) & \frac{\partial f_x}{\partial q_3}(\vec{q}) & \frac{\partial f_x}{\partial q_4}(\vec{q}) & \frac{\partial f_x}{\partial q_5}(\vec{q}) & \frac{\partial f_x}{\partial q_6}(\vec{q}) \\ \frac{\partial f_y}{\partial q_1}(\vec{q}) & \frac{\partial f_y}{\partial q_2}(\vec{q}) & \frac{\partial f_y}{\partial q_3}(\vec{q}) & \frac{\partial f_y}{\partial q_4}(\vec{q}) & \frac{\partial f_y}{\partial q_5}(\vec{q}) & \frac{\partial f_y}{\partial q_6}(\vec{q}) \\ \frac{\partial f_z}{\partial q_1}(\vec{q}) & \frac{\partial f_z}{\partial q_2}(\vec{q}) & \frac{\partial f_z}{\partial q_3}(\vec{q}) & \frac{\partial f_z}{\partial q_4}(\vec{q}) & \frac{\partial f_z}{\partial q_5}(\vec{q}) & \frac{\partial f_z}{\partial q_6}(\vec{q}) \\ \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_1}(\vec{q}) & \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_2}(\vec{q}) & \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_3}(\vec{q}) & \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_4}(\vec{q}) & \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_5}(\vec{q}) & \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_6}(\vec{q}) \\ \frac{\partial f_\beta}{\partial q_1}(\vec{q}) & \frac{\partial f_\beta}{\partial q_2}(\vec{q}) & \frac{\partial f_\beta}{\partial q_3}(\vec{q}) & \frac{\partial f_\beta}{\partial q_4}(\vec{q}) & \frac{\partial f_\beta}{\partial q_5}(\vec{q}) & \frac{\partial f_\beta}{\partial q_6}(\vec{q}) \\ \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_1}(\vec{q}) & \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_2}(\vec{q}) & \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_3}(\vec{q}) & \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_4}(\vec{q}) & \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_5}(\vec{q}) & \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_6}(\vec{q}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \\ \Delta q_3 \\ \Delta q_4 \\ \Delta q_5 \\ \Delta q_6 \end{pmatrix}$$

Složení

Někdy je výhodné počítat pozici a orientaci odděleně, proto lze jakobián rozdělit na dvě části, na část lineární J_v a část úhlovou J_ω

$$J(\vec{q}) = \begin{pmatrix} J_v(\vec{q}) \\ J_\omega(\vec{q}) \end{pmatrix}$$

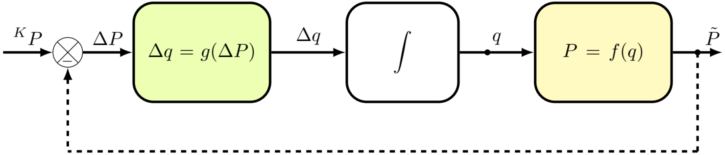
Poté je vstup pro řešení pozice P_x a orientace P_α následující:

$$\Delta \vec{P}_x = J_v(\vec{q}) \Big|_{{}^0 q} \Delta \vec{q}$$

$$\Delta \vec{P}_\alpha = J_\omega(\vec{q}) \Big|_{{}^0 q} \Delta \vec{q}$$

Díky tomuto rozdělení můžeme řešit pozici a orientaci odděleně.

Jak použít Jakobián ?



Řešíme soustavu lin. rovnic $\Delta\vec{P} = J(\vec{q})\,\big|_{{}^0q}\,\Delta\vec{q}$ pro neznámou $\Delta\vec{q}$.

Iterativní postup pro pohyb do cíle ${}^{K}P$:

$\Delta\,{}^{i}P = {}^{K}P - {}^{i-1}P$ ... vektor odchylky

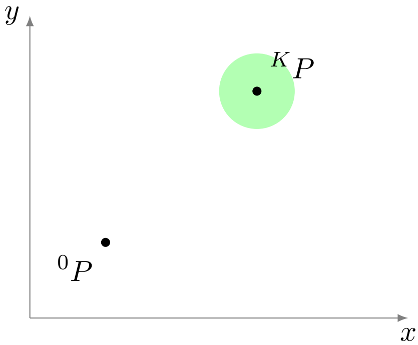
$\Delta\,{}^{i}\vec{q} = J\left({}^{i-1}\vec{q}\right)^{-1}\Delta\,{}^{i}\vec{P}$ ... korekce q

${}^{i}q = {}^{i-1}q + \Delta\,{}^{i}q$ ... korigujeme q

${}^{i}P = f({}^{i}q)$ ... zjistíme funkční hodnotu z q

Iterace končíme při dosažení $\left|\Delta\,{}^{i}P\right| \leq$ konst

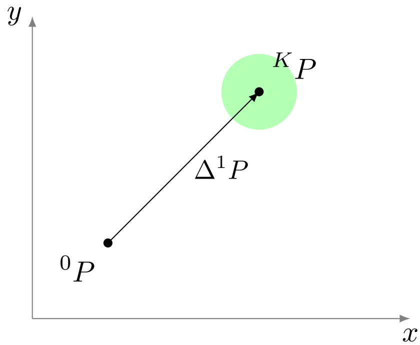
Jak použít Jakobián ?

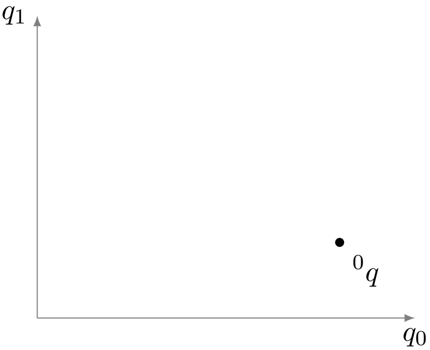


1. $\Delta^{i}P = {}^{K}P - {}^{i-1}P$
2. $\Delta^{i}\vec{q} = J\left({}^{i-1}\vec{q}\right)^{-1}\Delta^{i}\vec{P}$
3. ${}^{i}q = {}^{i-1}q + \Delta^{i}q$
4. ${}^{i}P = f({}^{i}q)$

Inicializace

Jak použít Jakobián ?



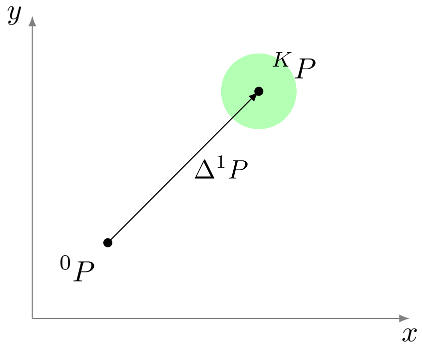


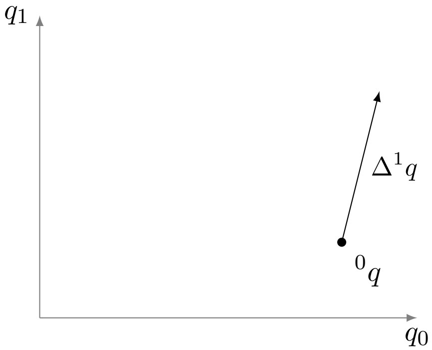
1. $\Delta^{i}P = {}^{K}P - {}^{i-1}P$
2. $\Delta^{i}\vec{q} = J\left({}^{i-1}\vec{q}\right)^{-1}\Delta^{i}\vec{P}$
3. ${}^{i}q = {}^{i-1}q + \Delta^{i}q$
4. ${}^{i}P = f({}^{i}q)$

První cyklus

1. Odchylka

Jak použít Jakobián ?



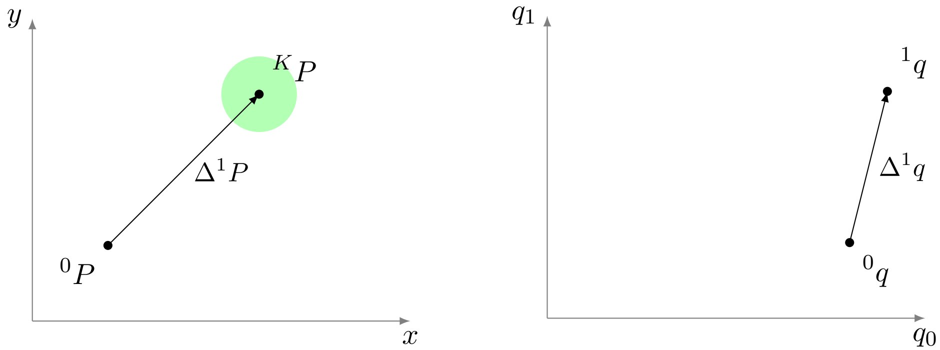


1. $\Delta^i P = {}^K P - {}^{i-1} P$
2. $\Delta^i \vec{q} = J\left({}^{i-1}\vec{q}\right)^{-1} \Delta^i \vec{P}$
3. ${}^i q = {}^{i-1} q + \Delta^i q$
4. ${}^i P = f({}^i q)$

První cyklus
2. Korekce

Jak použít Jakobián ?

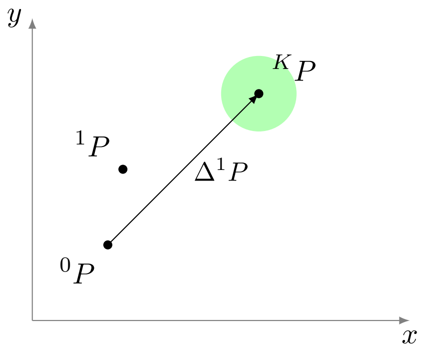
Jakobián
- Motivace
- Linearizace
- Více rozměrů
- Použití
- Inverze matice
- Zobrazení
- Příklad
- Singularity
- Shrnutí

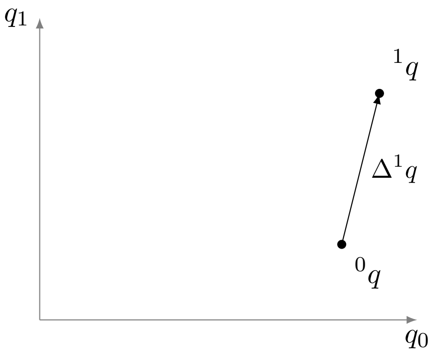


1. $\Delta^i P = {}^K P - {}^{i-1}P$
2. $\Delta^i \vec{q} = J\left({}^{i-1}\vec{q}\right)^{-1} \Delta^i \vec{P}$
3. ${}^i q = {}^{i-1}q + \Delta^i q$
4. ${}^i P = f({}^i q)$

První cyklus
3. Nové q

Jak použít Jakobián ?



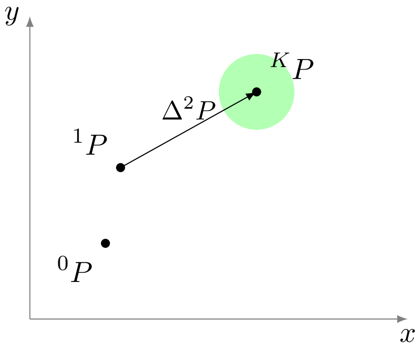


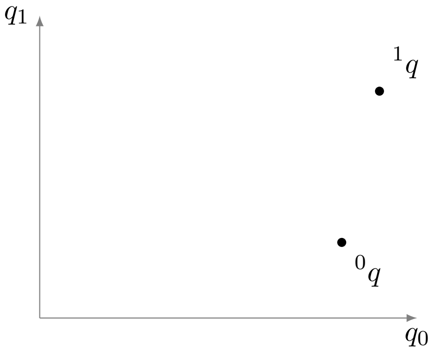
1. $\Delta^{i}P = {}^{K}P - {}^{i-1}P$
2. $\Delta^{i}\vec{q} = J\left({}^{i-1}\vec{q}\right)^{-1}\Delta^{i}\vec{P}$
3. ${}^{i}q = {}^{i-1}q + \Delta^{i}q$
4. ${}^{i}P = f({}^{i}q)$

První cyklus

4. Nová hodnota P

Jak použít Jakobián ?



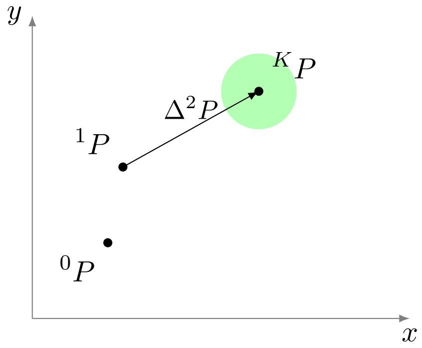


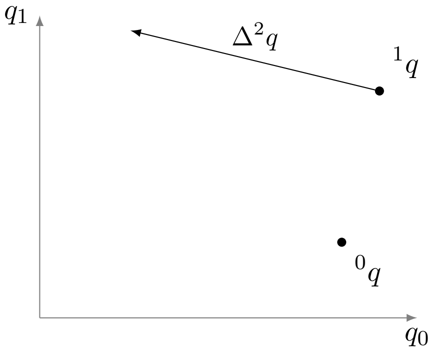
1. $\Delta^i P = {}^{K}P - {}^{i-1}P$
2. $\Delta^i \vec{q} = J\left({}^{i-1}\vec{q}\right)^{-1} \Delta^i \vec{P}$
3. ${}^{i}q = {}^{i-1}q + \Delta^i q$
4. ${}^{i}P = f({}^{i}q)$

Druhý cyklus

1. Odchylka

Jak použít Jakobián ?



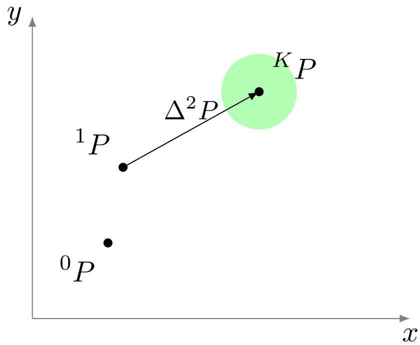


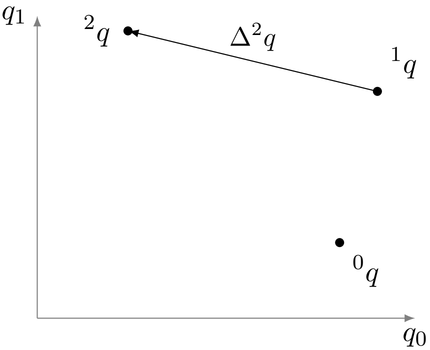
1. $\Delta^i P = {}^{K}P - {}^{i-1}P$
2. $\Delta^i \vec{q} = J\left({}^{i-1}\vec{q}\right)^{-1} \Delta^i \vec{P}$
3. ${}^{i}q = {}^{i-1}q + \Delta^i q$
4. ${}^{i}P = f({}^{i}q)$

Druhý cyklus

2. Korekce

Jak použít Jakobián ?



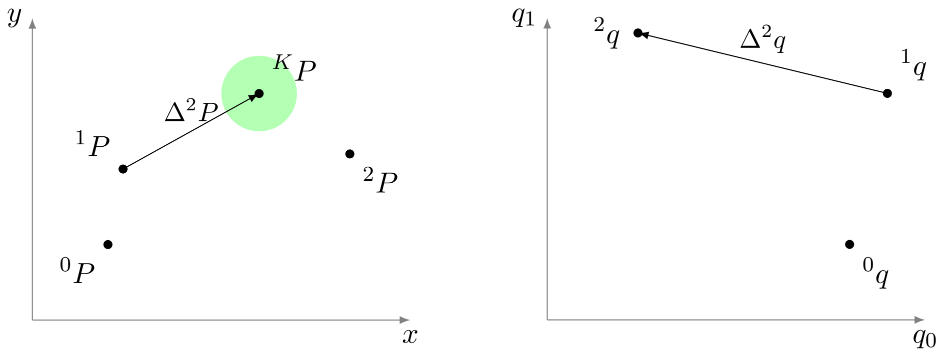


1. $\Delta^{i}P = {}^{K}P - {}^{i-1}P$
2. $\Delta^{i}\vec{q} = J\left({}^{i-1}\vec{q}\right)^{-1}\Delta^{i}\vec{P}$
3. ${}^{i}q = {}^{i-1}q + \Delta^{i}q$
4. ${}^{i}P = f({}^{i}q)$

Druhý cyklus

3. Nové q

Jak použít Jakobián ?

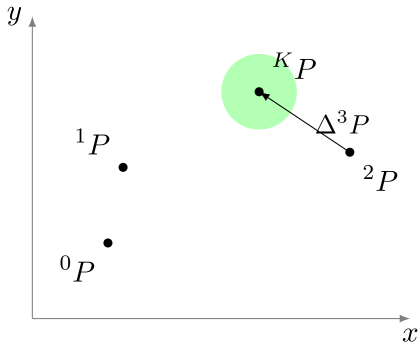


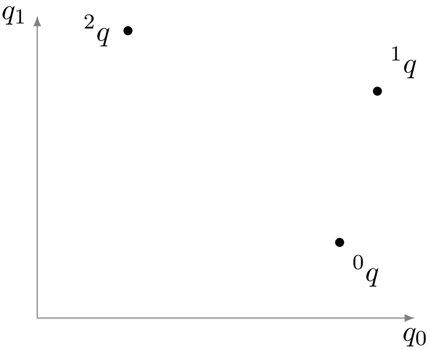
1. $\Delta^{i}P = {}^{K}P - {}^{i-1}P$
2. $\Delta^{i}\vec{q} = J\left({}^{i-1}\vec{q}\right)^{-1}\Delta^{i}\vec{P}$
3. ${}^{i}q = {}^{i-1}q + \Delta^{i}q$
4. ${}^{i}P = f({}^{i}q)$

Druhý cyklus

4. Nová hodnota P

Jak použít Jakobián ?



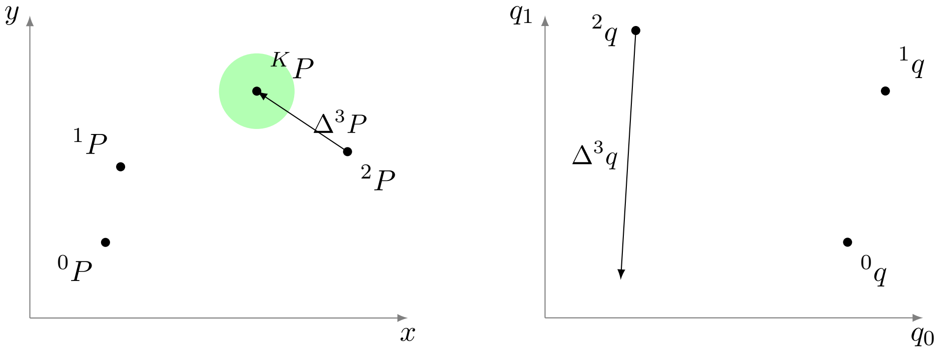


1. $\Delta^{i}P = {}^{K}P - {}^{i-1}P$
2. $\Delta^{i}\vec{q} = J\left({}^{i-1}\vec{q}\right)^{-1}\Delta^{i}\vec{P}$
3. ${}^{i}q = {}^{i-1}q + \Delta^{i}q$
4. ${}^{i}P = f({}^{i}q)$

Třetí cyklus

1. Odchylka

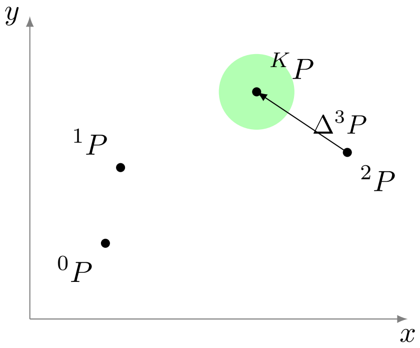
Jak použít Jakobián ?

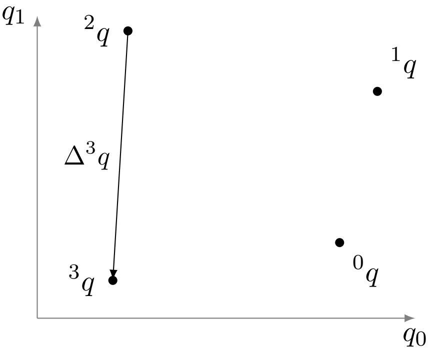


1. $\Delta^{i}P = {}^{K}P - {}^{i-1}P$
2. $\Delta^{i}\vec{q} = J\left({}^{i-1}\vec{q}\right)^{-1}\Delta^{i}\vec{P}$
3. ${}^{i}q = {}^{i-1}q + \Delta^{i}q$
4. ${}^{i}P = f({}^{i}q)$

Třetí cyklus
2. Korekce

Jak použít Jakobián ?



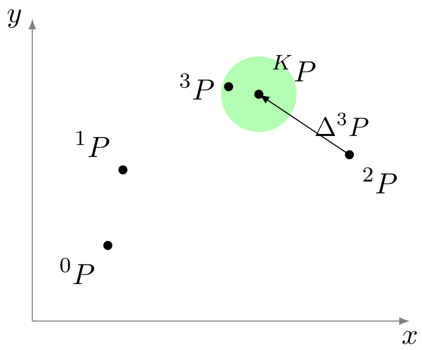


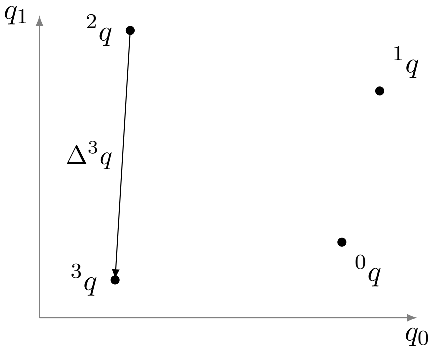
1. $\Delta^iP = {}^KP - {}^{i-1}P$
2. $\Delta^i\vec{q} = J\left({}^{i-1}\vec{q}\right)^{-1}\Delta^i\vec{P}$
3. ${}^iq = {}^{i-1}q + \Delta^iq$
4. ${}^iP = f({}^iq)$

Třetí cyklus

3. Nové q

Jak použít Jakobián ?





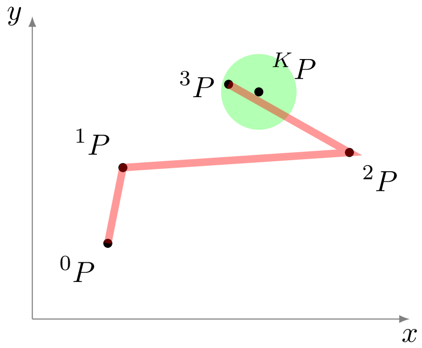
1. $\Delta^iP = {}^KP - {}^{i-1}P$
2. $\Delta^i\vec{q} = J\left({}^{i-1}\vec{q}\right)^{-1}\Delta^i\vec{P}$
3. ${}^iq = {}^{i-1}q + \Delta^iq$
4. ${}^iP = f({}^iq)$

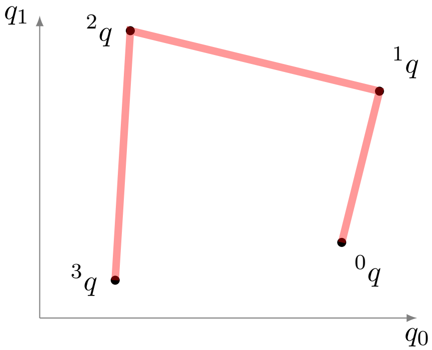
Třetí cyklus

4. Nová hodnota P

P je dostatečně blízko ${}^KP$. Konec.

Jak použít Jakobián ?





1. $\Delta^i P = {}^K P - {}^{i-1}P$
2. $\Delta^i \vec{q} = J\left({}^{i-1}\vec{q}\right)^{-1} \Delta^i \vec{P}$
3. ${}^i q = {}^{i-1}q + \Delta^i q$
4. ${}^i P = f({}^i q)$

Průběh výpočtu může být značně chaotický

Výpočet nemusí konvergovat

Záleží na počátečním ${}^0P$

Jak řešit inverzi - Čtvercový J

Gaussova eliminace

pro malé n,
pracné

Cramerovo pravidlo

možné analytické řešení
rychlé na použití, pomalé na analýzu (sestavení)
výsledky mezivýpočtů lze užít k další analýze

Inverzní matice

numerické řešení
výhodné pro stroje s podporou maticových výpočtů
když selže, nemáme informaci o tom proč.

Ve všech případech se pracuje s maticí J s dosazeným bodem q v jehož okolí řešení hledáme. (Matice J obsahuje jen čísla!)

BAŠTINEC, J.: Moderní numerické metody, Skripta, VUT. 2006

Jak řešit inverzi - Nečtvercový J

Nastává pokud je počet kloubů nerovný počtu stupňů volnosti. Je třeba vyjádřit pseudoinverzi J^+ a tuto použít k řešení:

$$\Delta\vec{q} = J^{-1}\Delta\vec{P} \qquad \rightarrow \qquad \Delta\vec{q} = J^{+}\Delta\vec{P}$$

Pseudoinverze (Moore-Penrose), vede na MNČ

$J^+ = (J^*J)^{-1}J^*$ nebo $J^+ = J^*(JJ^*)^{-1}$

pro reálné koeficienty je konjugovaná matice rovna transponované

MOORE,E.H.: On the reciprocal of the general algebraic matrix. 1920

Metoda nejmenších čtverců s tlumením (Levenberg-marquardt)

$$J^+ = J^T\left(JJ^T + \lambda^2 I\right)^{-1}$$

Konstanta λ, ovlivňuje rychlost konvergence.

BUSS, R.: Introduction to Inverse Kinematics with Jacobian Transpose, Pseudoinverse and Damped Least Squares methods, California, 2009

Singulární rozklad (SVD)

$J = UDV^T \rightarrow J^+ = VD^+U^T$ kde $d^+_{i,j} = 1/d_{i,j}$

Nejlepší výsledky

FADDĚJEV, K.: Numerické metody lineární algebry. SNTL Praha, 1964.

Nejprve vyjádříme všechny submatice ${}_kJ$ tak, že nahradíme k-tý sloupec matice J vektorem $\Delta\vec{P}$

Následně vyjádříme každý prvek Δq_i jako podíl determinantů submatic ${}_iJ$ a J

$$\Delta^i q_k = \frac{\det({}_kJ({}^iq))}{\det(J({}^iq))}$$

Pouze pro čtvercové matice (počet DOF = počet kloubů).

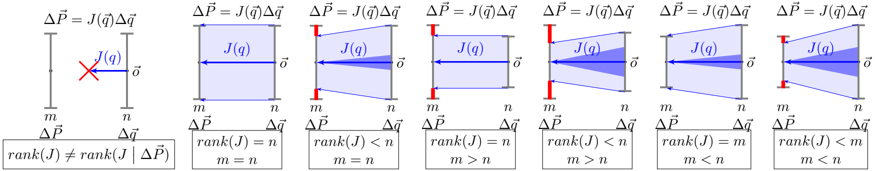
Determinanty, a tudíž celou $\Delta^i q_k$ lze předpočítat analyticky a pouze dosazovat $q \rightarrow$ rychlé !

Použitelné do velikosti matice J 3x3 (tj poloha ve 3D nebo poloha a orientace ve 2D)

Jakobián jako zobrazení

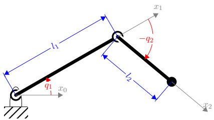
$$\begin{pmatrix} \Delta P_0 \\ \Delta P_1 \\ \dots \\ \Delta P_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{00} & J_{01} & \cdots & J_{0n} \\ J_{10} & J_{11} & \cdots & J_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{m0} & J_{m1} & \cdots & J_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta q_0 \\ \Delta q_1 \\ \dots \\ \Delta q_n \end{pmatrix}$$

Zobrazení prostoru $\Delta\vec{q}$ do prostoru $\Delta\vec{P}$ nemusí být jednoznačné:



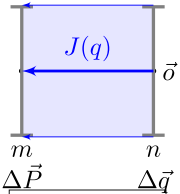
Jednoznačnost zajištěna pouze pro regulární J a $rank(J) = n$

Příklad - 2D manipulátor pro 2D operaci (pouze poloha)



i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	0	L_1	0	q_1
2	0	L_2	0	q_2

$$\Delta\vec{P} = J(\vec{q})\Delta\vec{q}$$



$$\boxed{\begin{matrix} rank(J) = n \\ m = n \end{matrix}}$$

$$J_v = \begin{pmatrix} -L_1 s_1 - L_2 s_{12} & -L_2 s_{12} \\ L_1 c_1 + L_2 c_{12} & L_2 c_{12} \end{pmatrix}$$

Počet prvků polohy P v ploše je $m = 2$

Počet kloubů manipulátoru q je $n = 2$

Hodnost $\mathrm{rank}(J) = 2$ (pro $q_i \neq 0$)

Výsledek analýzy:

$m = n$, $\mathrm{rank}\, J = n$

- matice J regulární $\det(J) \neq 0$
- nejsou žádné nedosažitelné body

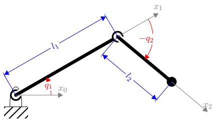
PKU:

- právě jedno řešení

IKU:

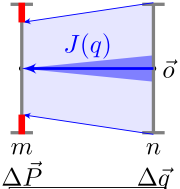
- právě jedno řešení

Příklad - 2D manipulátor pro 2D operaci (pouze poloha)



i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	0	L_1	0	q_1
2	0	L_2	0	q_2

$$\Delta\vec{P} = J(\vec{q})\Delta\vec{q}$$



$$\boxed{\begin{matrix} rank(J) < n \\ m = n \end{matrix}}$$

$$J_v = \begin{pmatrix} -L_1 s_1 - L_2 s_{12} & -L_2 s_{12} \\ L_1 c_1 + L_2 c_{12} & L_2 c_{12} \end{pmatrix}$$

Počet prvků polohy P v ploše je $m = 2$

Počet kloubů manipulátoru q je $n = 2$

Hodnost $\mathrm{rank}(J) = 1$ (pro $q_2 = 0$)

$$J_v(q_1, 0) = \begin{pmatrix} -(L_1 + L_2)s_1 & -L_2 s_1 \\ (L_1 + L_2)c_1 & L_2 c_1 \end{pmatrix}$$

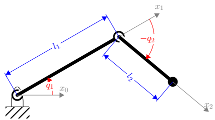
Výsledek analýzy:

$\mathrm{rank}(J) < n$ nebo $\det(J) = 0$

- matice J singulární $\det(J) = 0$
- existují nedosažitelné body

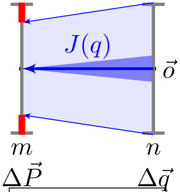
Singularita !

Příklad - 2D manipulátor pro 2D operaci (pouze poloha)



i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	0	L_1	0	q_1
2	0	L_2	0	q_2

$$\Delta\vec{P} = J(\vec{q})\Delta\vec{q}$$



$$\boxed{\begin{matrix} rank(J) < n \\ m = n \end{matrix}}$$

$$J_v = \begin{pmatrix} -L_1 s_1 - L_2 s_{12} & -L_2 s_{12} \\ L_1 c_1 + L_2 c_{12} & L_2 c_{12} \end{pmatrix}$$

Počet prvků polohy P v ploše je $m = 2$

Počet kloubů manipulátoru q je $n = 2$

Hodnost $\mathrm{rank}(J) = 1$ (pro $q = (0,0)^T$)

$$J_v(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (L_1 + L_2) & L_2 \end{pmatrix}$$

Výsledek analýzy:

$\mathrm{rank}(J) < n$ nebo $\det(J) = 0$

matice J singulární $\det(J) = 0$

existují nedosažitelné body - osa $\Delta P_x = 0$:

$$\begin{pmatrix} \Delta P_x \\ \Delta P_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (L_1 + L_2) & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \end{pmatrix}$$

Singularita !

Singularita

Nastává v konfiguracích kdy z určitého bodu:

- se **nelze pohybovat** některým směrem
- pohyb určitým směrem má **více řešení**
- obvykle je to pozice
  - ▷ **na hranici** manipulačního prostoru
  - ▷ dva klouby po sobě se **stejnou osou** rotace/translace

V singularitě pozorujeme průvodní jevy:

- konečná rychlost P vyžaduje **nekonečnou** kloubovou rychlost
- konečná síla na P vyžaduje **nekonečnou** sílu v kloubu
- konečný moment na P vyžaduje **nekonečný** moment v kloubu

V blízkosti singularity neexistuje jednoznačné řešení IKU

Žádné řešení nebo **nekonečně mnoho** řešení

Pro detekci singularit používáme Jakobián

Musíme je vždy detekovat, hrozí poškození stroje !

Shrnutí poznatků o Jakobiánu

Je to citlivostní reprezentace vícerozměrného systému

- **Sloupce** jsou parciální derivace podle jednotlivých q
- **Řádky** jsou jednotlivé složky funkce

Lze pomocí něj hledat singularity

$$
\begin{aligned}
n &< m \\
\mathrm{rank}(J) &< n \\
\mathrm{rank}(J) &< \mathrm{rank}(J \mid \Delta P)
\end{aligned}
$$

Používá se pro numerické řešení inverze vícerozměrné funkce

$$
\begin{aligned}
{}^{i}q &= {}^{i-1}q + J({}^{i-1}\vec{q})^{-1}\left({}^{K}P - {}^{i-1}P\right) \\
{}^{i}P &= f({}^{i}q)
\end{aligned}
$$

Děkuji za pozornost

21. října 2021

Ing. František Burian Ph.D.