Skalarni proizvod dva vektora

Definicija Skalarni (unutrašnji) proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, koji označavamo sa $\vec{a}\cdot\vec{b}$, je broj, koji je jednak:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}).}$$

Skalarni proizvod je jednak nuli ako je bilo koji od ova dva vektora jednak $\vec{0}$ ili ako je $\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=0$, tj. ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ uzajamno normalni (ortogonalni).

Znači, geometrijska interpretacija skalarnog proizvoda je:

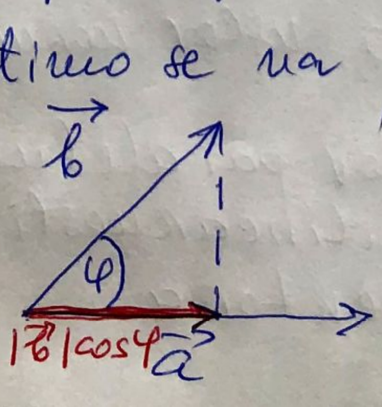
$$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad \text{(uslov normalnosti vektora)}$$

Svojstva skalarnog proizvoda

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (komutativnost)
2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (distributivnost)
3) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}),\ \lambda\in\mathbb{R}$
4) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$
5) $\vec{a}\cdot\vec{a}=0 \Leftrightarrow \vec{a}=\vec{0}$
6) $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leq|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ (Koši-Švarcova nejednakost)

Vratimo se na projekciju vektora na vektor

$$\varphi=\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$$



Pošto je $pr_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cos\varphi$ odavde slijedi da je
$pr_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\, pr_{\vec{a}}\vec{b}$ i $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|\, pr_{\vec{b}}\vec{a}$.

Dobijamo da je:

$$pr_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} \quad \text{i} \quad pr_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Neka su dati vektori $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ u koordinatnom obliku.

Pošto je $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ i $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$
i $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$.

Na osnovu svojstava skalarnog proizvoda je:

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})\cdot(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = \\
&= a_1 b_1 |\vec{i}|^2 + a_1 b_2\, \vec{i}\cdot\vec{j} + a_1 b_3\, \vec{i}\cdot\vec{k} + \\
&+ a_2 b_1\, \vec{i}\cdot\vec{j} + a_2 b_2 |\vec{j}|^2 + a_2 b_3\, \vec{j}\cdot\vec{k} + \\
&+ a_3 b_1\, \vec{i}\cdot\vec{k} + a_3 b_2\, \vec{j}\cdot\vec{k} + a_3 b_3 |\vec{k}|^2 = \\
&= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3
\end{aligned}$$

Znači, $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$

Odavde: $$\cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$\vec{a} \perp \vec{b} \iff a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$ uslov normalnosti

$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ uslov paralelnosti (kolinearnosti) vektora.

Primjer Naći ugao koji obrazuju jedinični vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$, ako su vektori $\vec{a}=\vec{p}+2\vec{q}$ i $\vec{b}=5\vec{p}-4\vec{q}$ uzajamno ortogonalni.

Rješenje Iz uslova zadatka imamo da je

$$|\vec{p}|=|\vec{q}|=1 \quad \text{i} \quad \vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{p}+2\vec{q})\cdot(5\vec{p}-4\vec{q})=0$$

$$5|\vec{p}|^2+6\,\vec{p}\cdot\vec{q}-8|\vec{q}|^2=0$$

$$6\,\vec{p}\cdot\vec{q}-3=0$$

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=\frac{1}{2}$$

Pošto je $\vec{p}\cdot\vec{q}=|\vec{p}||\vec{q}|\cos\measuredangle(\vec{p},\vec{q})=\cos\measuredangle(\vec{p},\vec{q})$

slijedi da je ~~cos ∡~~ $\cos\measuredangle(\vec{p},\vec{q})=\frac{1}{2}$, odnosno

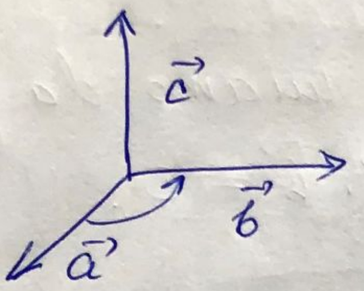
$$\measuredangle(\vec{p},\vec{q})=\frac{\pi}{3}$$

Vektorski proizvod dva vektora

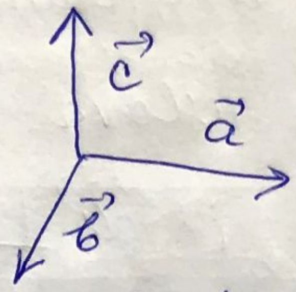
Definicija Vektorski (spoljašnji) proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je treći vektor $\vec{c}$, koji označavamo sa $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, kod koga je:

- intezitet brojno jednak površini paralelograma određenog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$,
- pravac normalan na ravan određenu datim vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$,
- smjer takav da vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ čine desnu trojku vektora.

Podsjetimo se šta je desna trojka vektora. To smo određivali pravilom desne ruke. Prema tome za vektore $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ imamo:

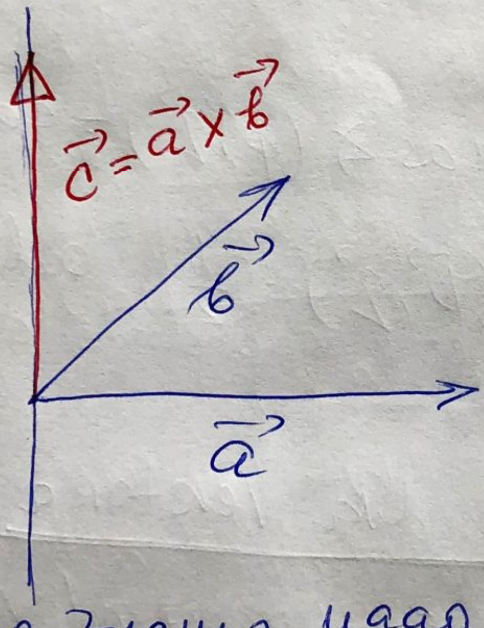


desna trojka vektora

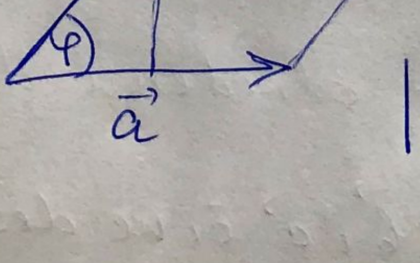


lijeva trojka vektora

Znači, geometrijski vektorski proizvod možemo predstaviti:



Ukoliko znamo ugao $\varphi = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$, onda je površina paralelograma nad ta dva vektora jednaka $P_{\square} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi$



Znači,

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$$

Svojstva (osobine) vektorskog proizvoda

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

3) $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}), \ \lambda \in \mathbb{R}$

Vektorski proizvod je jednak $\vec{0}$, ako je bar jedan od vektora $\vec{0}$ ili ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni vektori. Znači,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \text{ tj } \vec{a} \text{ i } \vec{b} \text{ kolinearni vektori}$$

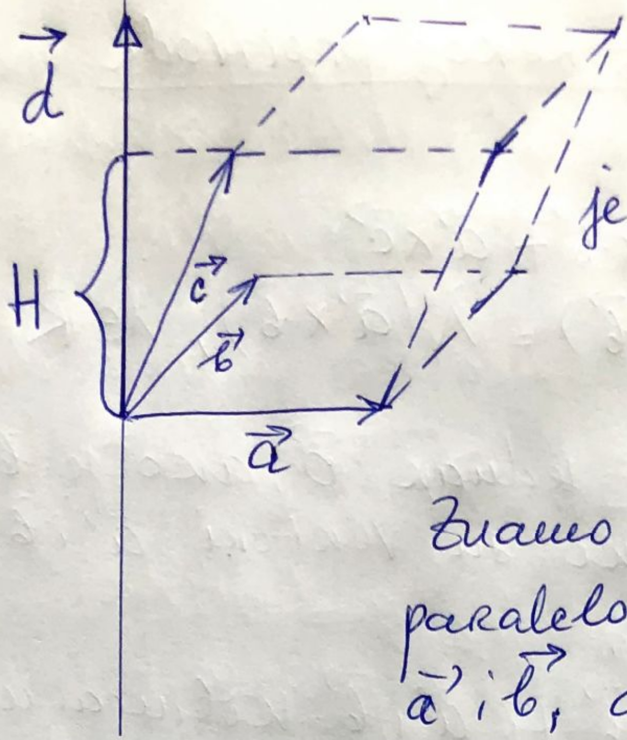
Ukoliko su vektori $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dati u koordinatnom obliku, onda je:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_3).$$

Mješoviti proizvod tri vektora

<u>Definicija</u> Mješoviti proizvod vektor $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ je broj $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, odnosno vektorsko-skalarni proizvod tri vektora.

Razjasnimo geometrijski smisao mješovitog proizvoda $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Konstruišimo paralelopiped čije su ivice vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ (nekomplanarni).



Pošto je $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$, onda je $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{c} =$

$= |\vec{d}| \, pr_{\vec{d}} \vec{c} =$

$= |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot pr_{\vec{d}} \vec{c}.$

Znamo da je $|\vec{a} \times \vec{b}|$ površina paralelograma nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a $pr_{\vec{d}} \vec{c} = H$, za desnu trojku vektora, odnosno $-H$ za lijevu trojku vektora. (Na slici je desna trojka vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$).

Odavde dobijamo da je

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot (\pm H) = \pm V$, gdje je

V zapremina paralelopipeda konstruisanog nad vektorima $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$.

Znači,

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \begin{cases} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}, & \text{za desnu trojku vektora} \\ -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}, & \text{za lijevu trojku vektora.} \end{cases}$$

Mješoviti proizvod je jednak nuli ako:

1) je jedan od vektora iz proizvoda jednak $\vec{0}$
2) su bilo koja dva vektora kolinearna
3) su vektori komplanarni (iz iste ravni)

Odavde, uslov komplanarnosti tri vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ je $\boxed{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0.}$

Svojstva mješovitog proizvoda

1) Cikličnom permutacijom vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ se ne mijenja vrijednost proizvoda:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

2) Permutacijom dva vektora se mijenja predznak proizvoda

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}$$

3) Mješoviti proizvod se ne mijenja ako „vektorsko" i „skalarno" množenje zamijene svoja mjesta:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

4) $\lambda((\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}) = (\lambda(\vec{a} \times \vec{b})) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\lambda \vec{c}), \quad \lambda \in R$

5) $((\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}) \cdot \vec{d} = ((\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})) \cdot \vec{d}$

Neka su vektori $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ i $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ dati u koordinatnom obliku.

Tada je $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$

$$= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3.$$

Uslov komplanarnosti tri vektora u koordinatnom obliku je

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$