

Tema 5:

MODULACIÓN LINEAL

Tema 5: MODULACIÓN LINEAL

- 5.1.- Comunicaciones en banda base y con portadora.
- 5.2.- Modulación de amplitud: Doble banda lateral (DSB).
- 5.3.- Modulación de amplitud (AM).
- 5.4.- Modulación de amplitud: Banda lateral única (SSB):
 - Modulación en cuadratura de fase (QAM).
- 5.5.- Errores de frecuencia y fase en demodulación síncrona.
- 5.6.- Modulación de amplitud: Banda lateral residual (VSB).
- 5.7.- Sistemas digitales con portadora.
- 5.8.- Interferencia y ruido en sistemas AM.
- 5.9.- Multiplexado por división de frecuencia.
- 5.10.- El receptor superheterodino.

5.1.- Comunicaciones en banda-base y con portadora

Banda-base: Sin modulación. El espectro no está desplazado.

Con portadora: Las señales modulan una portadora.

- Adecuación al rango de frecuencias del canal.
- Multiplexado en frecuencia.
- Intercambio SNR-B (ej. FM).

Portadora: Es una señal senoidal:

- Variación de amplitud: AM.
- Variación del ángulo: FM y PM.

Las modulaciones de pulsos (PAM, PWM, PPM, PCM, DM) no son estrictamente señales moduladas en el sentido anterior, ya que no se desplaza la banda de frecuencias de la señal.

5.2.- Modulación de amplitud: Doble banda lateral (DSB)

La amplitud A_c de una senoide $A_c \cos(\omega_c t + \theta_c)$ (**portadora**) se varía de forma proporcional a la señal que contiene la información a transmitir (**modulante**) manteniendo constantes la frecuencia ω_c y la fase θ_c .

(La fase se considerará nula en adelante)

Por la propiedad de modulación se tiene que:

$$m(t) \leftrightarrow M(\omega) \quad \Leftrightarrow \quad m(t) \cos(\omega_c t) \leftrightarrow \frac{1}{2}[M(\omega + \omega_c) + M(\omega - \omega_c)]$$

- El espectro resultante tiene ancho de banda doble de la señal modulante.
- Contiene dos réplicas del espectro: banda lateral superior (USB) y banda lateral inferior (LSB).
- Dado que la portadora no aparece en el espectro, esta variante se denomina *modulación en doble banda lateral con portadora suprimida* (DSB-SC).

Demodulación o detección

Es el proceso mediante el cual se recupera la señal en banda base a partir de la señal modulada.

Multiplicando la señal modulada de nuevo por la portadora se obtiene:

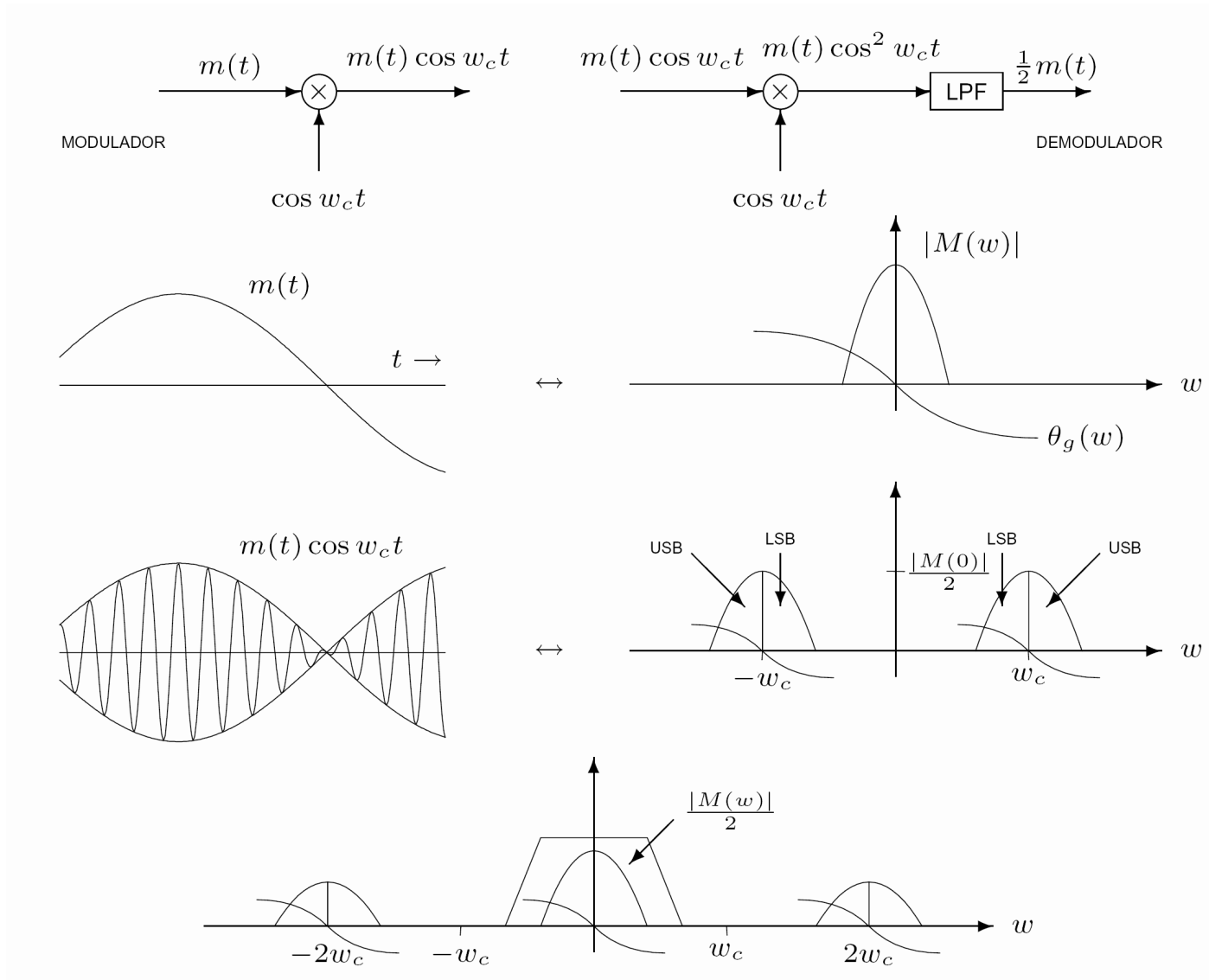
$$(m(t) \cos(\omega_c t)) \cos(\omega_c t) = m(t) \cos^2(\omega_c t) = \frac{1}{2}[m(t) + m(t) \cos(2\omega_c t)]$$

$$(m(t) \cos(\omega_c t)) \cos(\omega_c t) \leftrightarrow \frac{1}{2}M(\omega) + \frac{1}{4}[M(\omega + 2\omega_c) + M(\omega - 2\omega_c)]$$

Por tanto, con un filtro paso-baja de ancho de banda igual al de la señal modulante, se puede recuperar $m(t)/2$.

Esta técnica se denomina **demodulación síncrona** o **coherente** ya que utiliza una señal de **frecuencia** y **fase** iguales a las de la portadora.

La relación entre la frecuencia de la portadora ω_c y el ancho de banda B de la señal modulante $m(t)$ debe verificar que $\omega_c > 2\pi B$ para que no se solapen las bandas (para que no se distorsione la señal). En la práctica $\omega_c \gg 2\pi B$ para evitar distorsión en la transmisión.

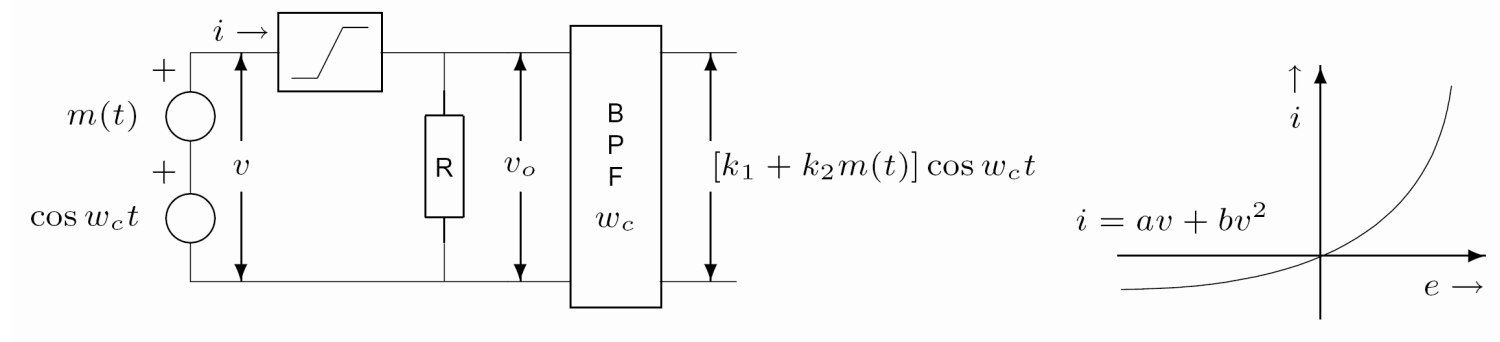


Moduladores multiplicativos

Se basan en multiplicar las señales modulante y portadora. Su comportamiento es como el descrito anteriormente.

Moduladores no-lineales

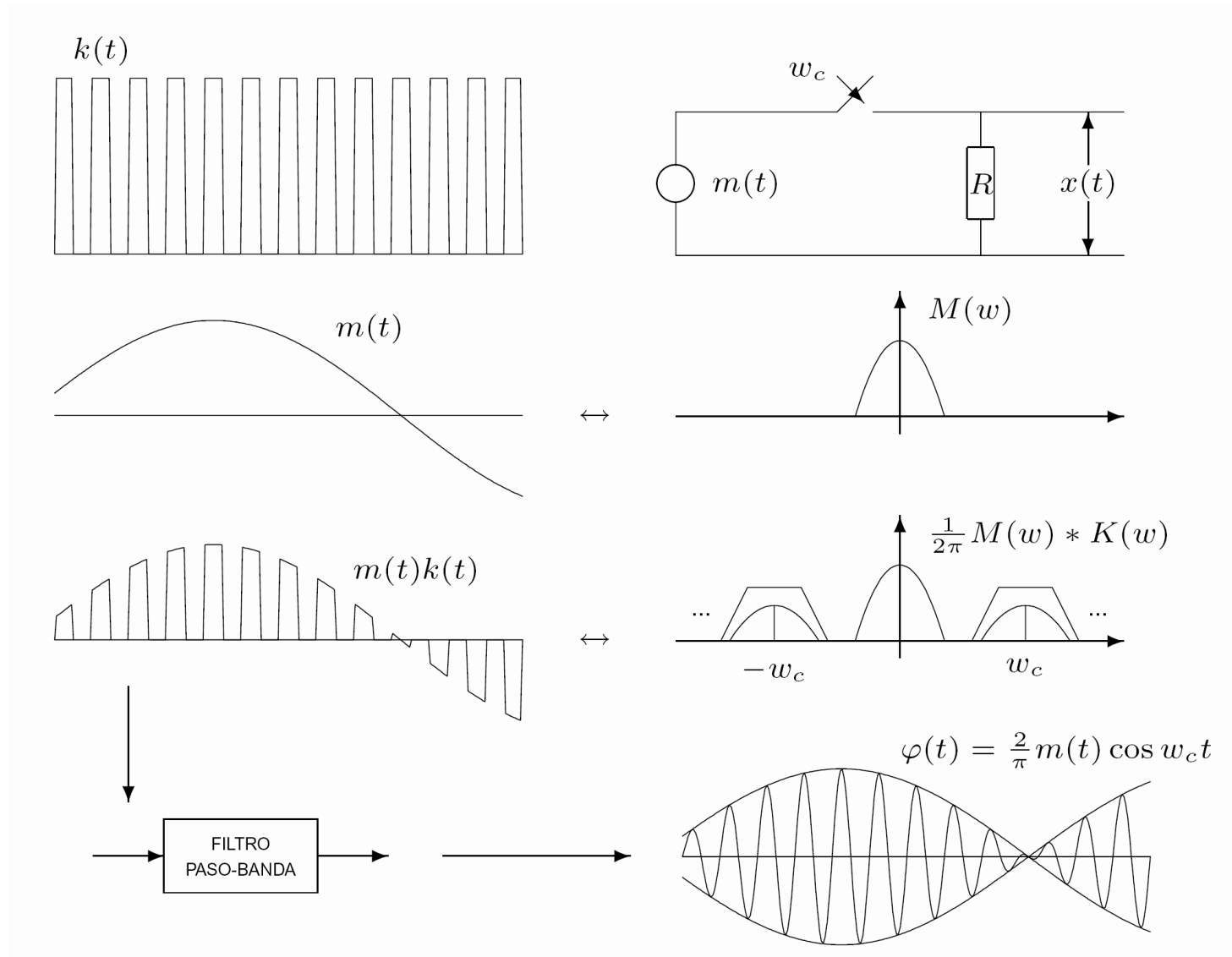
Se basan en utilizar un elemento no-lineal que contenga una componente cuadrática.



$$v(t) = m(t) + \cos(\omega_c t) \quad i = a[\cos(\omega_c t) + m(t)] + b[\cos(\omega_c t) + m(t)]^2$$

$$v_o(t) = i R = [aR + 2bRm(t)] \cos(\omega_c t) + \left[\frac{b}{2}R + aRm(t) + bRm^2(t) \right] + \frac{b}{2}R \cos(2\omega_c t)$$

Moduladores de conmutación



El principio es similar al del modulador multiplicativo, ya que el resultado de la conmutación es multiplicar la señal $m(t)$ por un tren de señales rectangulares $k(t)$ de ancho $\tau = T_0/2$ cuyo desarrollo en serie y transformada de Fourier son:

$$k(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n} \cos(n\omega_c t) \quad \omega_c = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$K(\omega) = \pi\delta(\omega) + 2 \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n} [\delta(\omega + n\omega_c) + \delta(\omega - n\omega_c)]$$

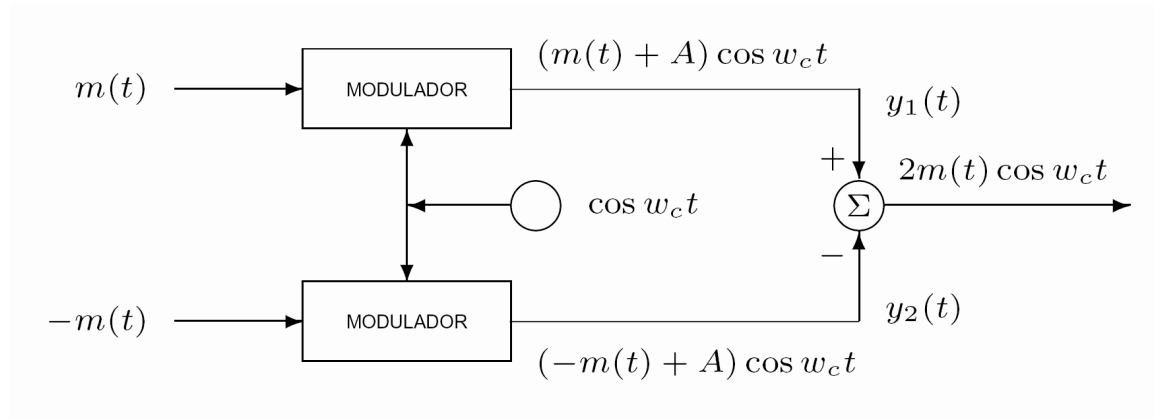
La señal a la salida del conmutador es $x(t) = m(t)k(t) \leftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{2\pi}M(\omega) * K(\omega)$:

$$X(\omega) = \frac{1}{2}M(\omega) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n} [M(\omega + n\omega_c) + M(\omega - n\omega_c)]$$

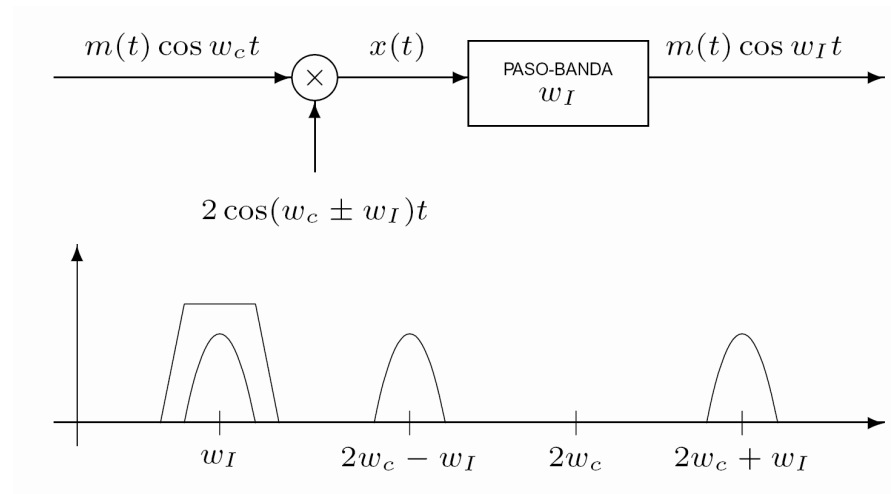
que filtrada paso-banda alrededor de ω_c es:

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\pi} [M(\omega + \omega_c) + M(\omega - \omega_c)] \leftrightarrow \varphi(t) = \frac{2}{\pi} m(t) \cos(\omega_c t)$$

Moduladores balanceados



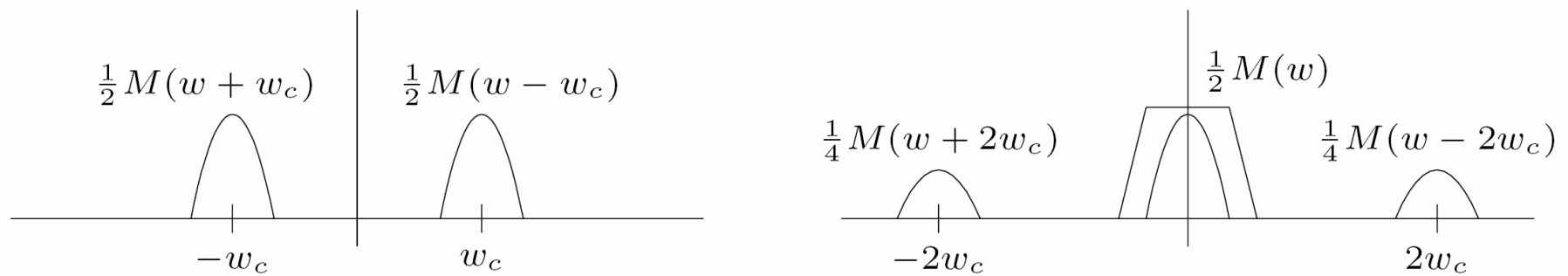
Conversores de frecuencia (mezcladores)



Demodulación de señales DSB-SC

El proceso de demodulación es, como el de modulación, una traslación del espectro de la señal, salvo que en este caso se traslada desde ω_c a $\omega = 0$. Se consigue multiplicando por una **portadora local**:

$$(m(t) \cos(\omega_c t)) \cos(\omega_c t) = m(t) \cos^2(\omega_c t) = \frac{1}{2}m(t) + \frac{1}{2}m(t) \cos(2\omega_c t)$$



En el caso del modulador de conmutación:

$$\begin{aligned} (m(t)k(t)) \cos(\omega_c t) &= m(t) \cos(\omega_c t) \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos(\omega_c t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega_c t) + \dots \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} m(t) + (\text{términos en } \omega_c, 2\omega_c, \dots) \end{aligned}$$

5.3.- Modulación de amplitud (AM)

- Portadora suprimida (SC)
 - Son sistemas que requieren circuitería compleja en el receptor para la sincronización de la portadora local.
 - A cambio son muy eficientes desde el punto de vista de la potencia requerida en el transmisor.
 - Se utilizan en enlaces punto-a-punto.
- Sistemas con portadora (AM)
 - En transmisión comercial, donde hay un único transmisor y múltiples receptores, conviene minimizar los costes del receptor a costa de un transmisor de alta potencia más caro.
 - En estos sistemas se transmite, junto con la señal modulada, una portadora de alta potencia.
 - El hecho de que la señal que llega al receptor contenga la portadora simplifica el proceso de demodulación, haciendo innecesaria la generación de una portadora local.

En sistemas AM, la señal modulada tiene la forma:

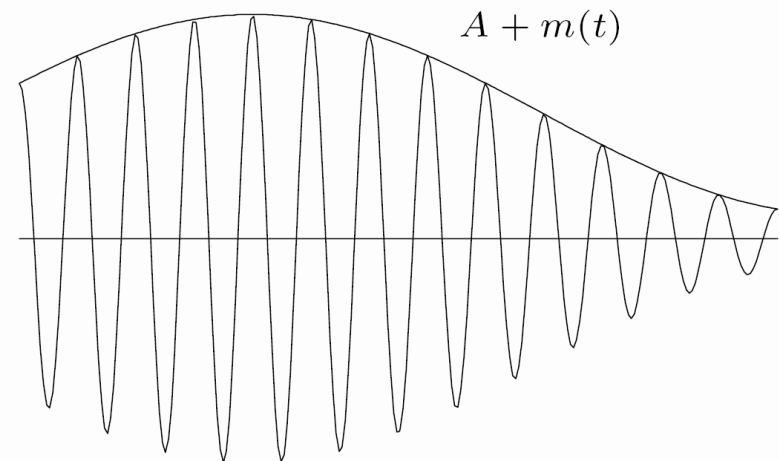
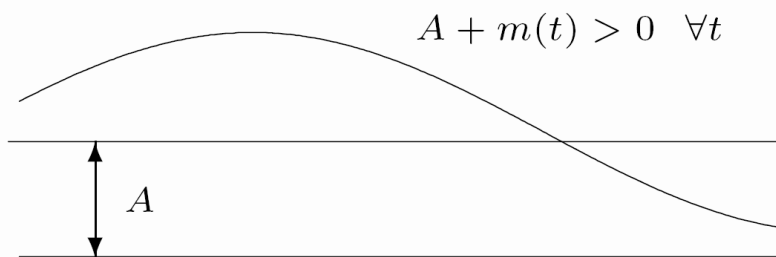
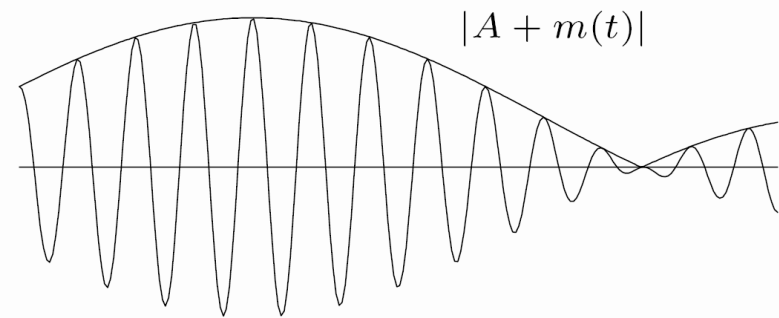
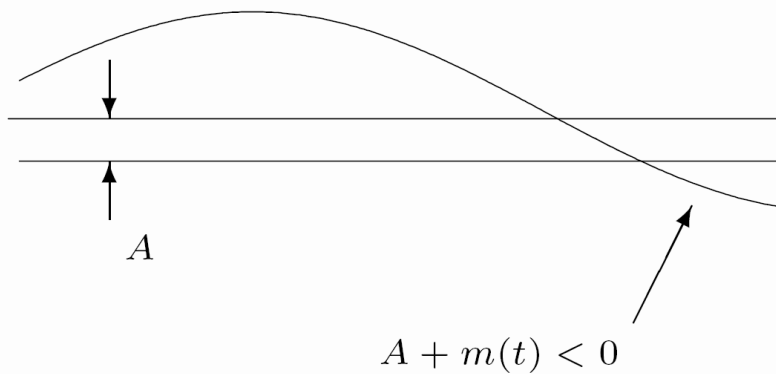
$$\varphi_{AM} = m(t) \cos(\omega_c t) + A \cos(\omega_c t) = [m(t) + A] \cos(\omega_c t)$$

y el espectro es:

$$\varphi_{AM} \leftrightarrow \frac{1}{2}[M(\omega + \omega_c) + M(\omega - \omega_c)] + \pi A[\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c)]$$

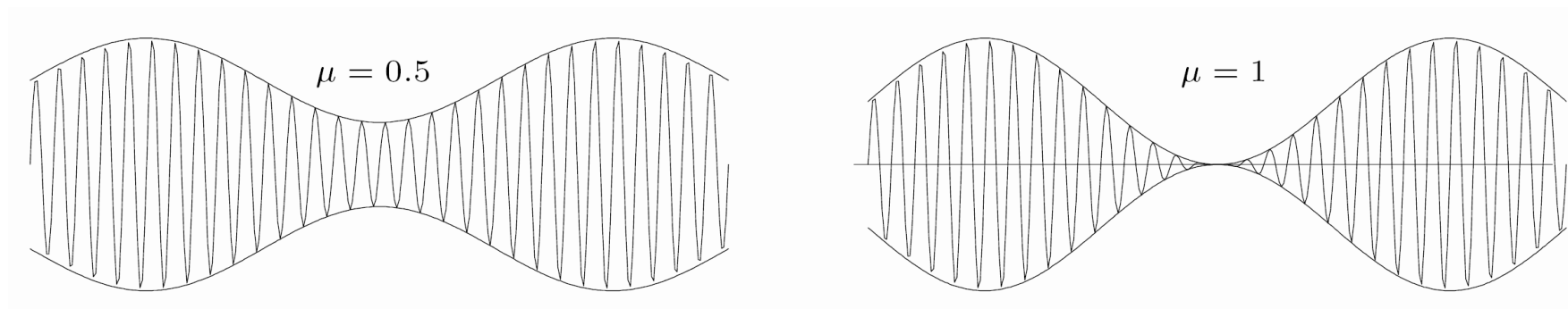
Si se verifica la condición $(A + m(t)) \geq 0 \quad \forall t$ entonces se puede comprobar que la envolvente de la señal es $E(t) = (A + m(t))$ y por tanto se puede recuperar la señal modulante $m(t)$ mediante un proceso de **detección de envolvente**.

Si no se verifica esta condición, la envolvente de la señal es de la forma $E(t) = |A + m(t)|$ y no se puede recuperar la señal modulante a partir de la envolvente de la señal modulada.



Índice de modulación

Se define como $\mu = -\text{mín}(m(t))/A$. La condición para poder recuperar la modulante mediante detección de envolvente es: $\mu \leq 1$.



Por ejemplo, si la modulante es un tono de amplitud α , $m(t) = \alpha \cos(\omega_m t)$ entonces $\text{mín}(m(t)) = -\alpha$ y el índice de modulación será $\mu = \alpha/A$. La señal modulada será de la forma:

$$\varphi_{\text{AM}} = [A + m(t)] \cos(\omega_c t) = A[1 + \mu \cos(\omega_m t)] \cos(\omega_c t)$$

Potencia de la portadora y las bandas laterales

Las ventajas de AM (frente a DSB-SC) es la facilidad en la detección. El inconveniente es el incremento en la potencia necesaria para la transmisión.

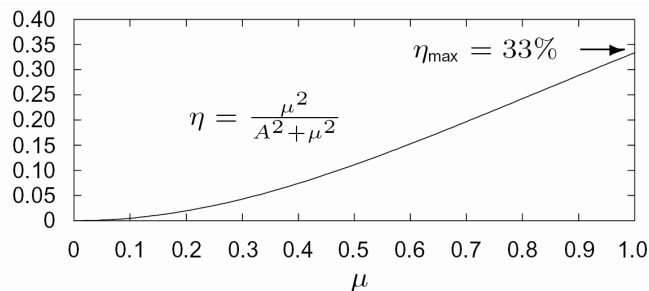
$$\varphi_{AM} = \underbrace{A \cos(\omega_c t)}_{\text{portadora}} + \underbrace{m(t) \cos(\omega_c t)}_{\text{bandas laterales}}$$

La potencia de la portadora es $P_c = \frac{A^2}{2}$ y la de la señal modulada $P_s = \frac{\overline{m^2(t)}}{2}$.

La potencia total es $P_t = P_c + P_s = \frac{(A^2 + \overline{m^2(t)})}{2}$.

La eficiencia se define como:

$$\eta = \frac{P_s}{P_t} = \frac{\overline{m^2(t)}}{A^2 + \overline{m^2(t)}}$$



Para el caso en que $m(t)$ es un tono puro:

$$m(t) = \mu A \cos(\omega_m t) \quad \overline{m^2(t)} = \frac{\mu^2 A^2}{2}$$

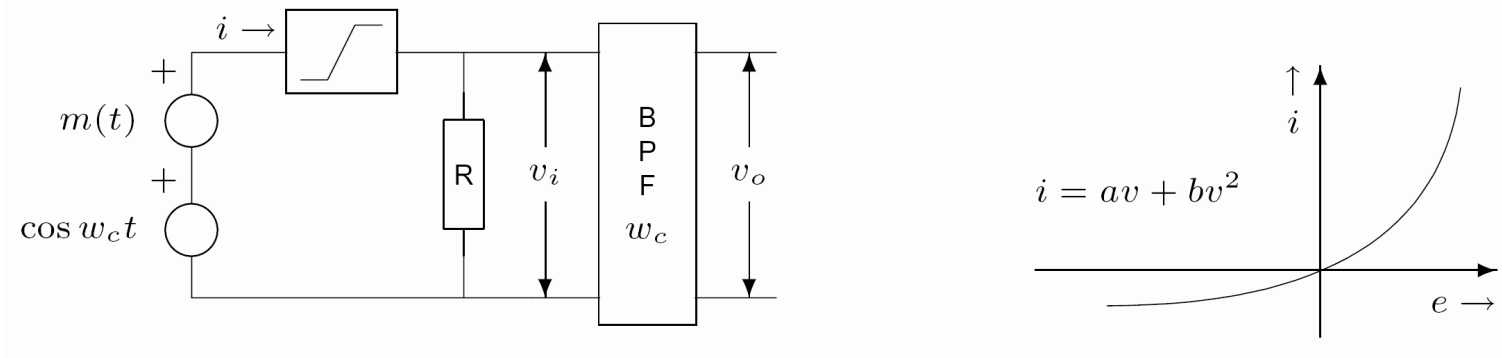
$$\eta = \frac{\mu^2}{2 + \mu^2} \quad \mu_{max} = 1 \Rightarrow \eta_{max} = 33\%$$

Para la voz, la eficiencia es de un 25 %

Generación de señales AM

Las señales AM se pueden generar con cualquier modulador DSB-SC utilizando $[A + m(t)]$ como señal modulante en lugar de $m(t)$:

También se pueden generar de forma más sencilla mediante un modulador no lineal como el que vimos anteriormente:



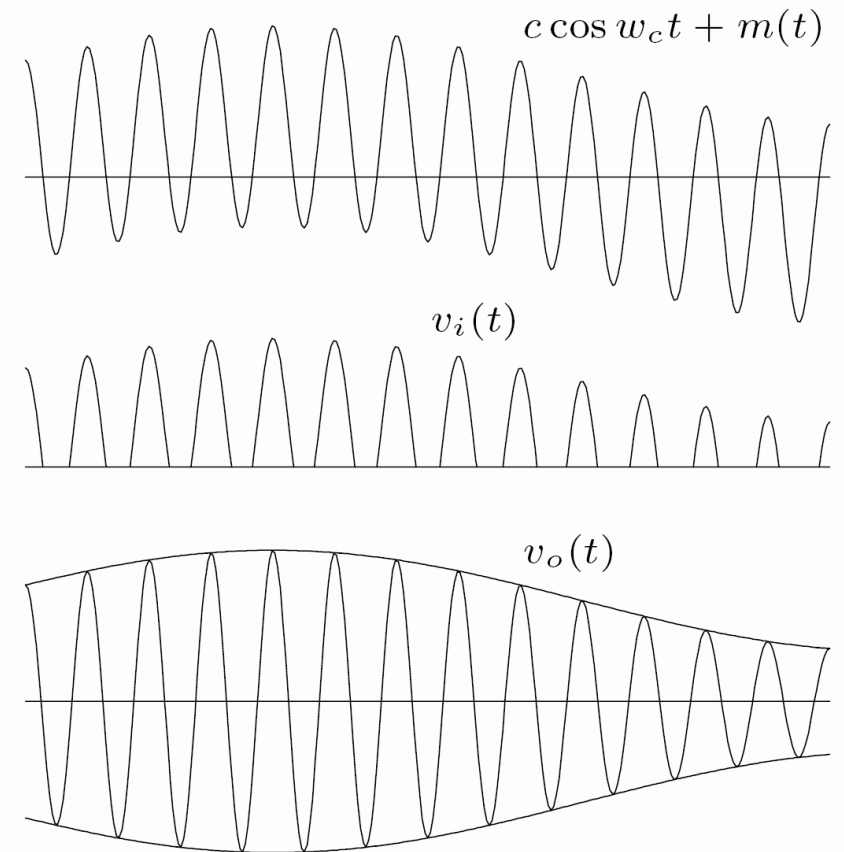
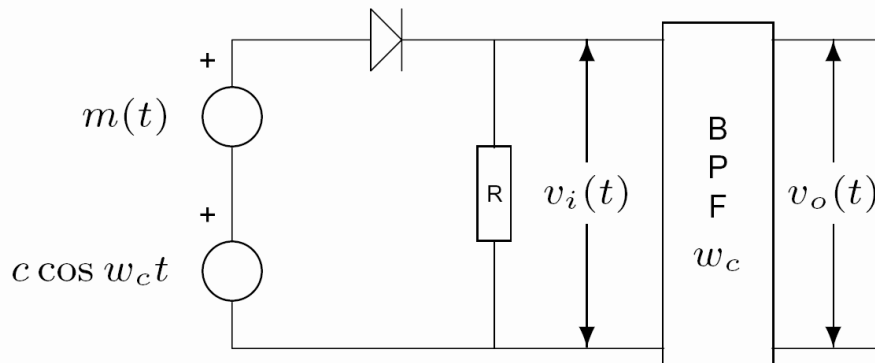
La señal de salida es de la forma:

$$v_i(t) = \underbrace{(aR + 2bRm(t)) \cos(\omega_c t)}_{\text{AM}} + \underbrace{aRm(t) + bRm^2(t) + bR \cos^2(\omega_c t)}_{\text{suprimidos por el filtro}}$$

$$v_o(t) = 2bR \left(\frac{a}{2b} + m(t) \right) \cos(\omega_c t) = 2bR(A + m(t)) \cos(\omega_c t)$$

Generador de conmutación

También se pueden generar señales AM utilizando un diodo funcionando como conmutador, como se aprecia en la figura:



En este caso, si la amplitud de la portadora c es mayor que la de la señal modulante ($c > |m(t)|$), el resultado es equivalente a multiplicar $(c \cos(\omega_c t) + m(t))$ por un tren de pulsos rectangular de periodo $T_0 = 2\pi/\omega_c$ y ancho (aproximadamente) $\tau = T_0/2$:

$$\begin{aligned}
 v_i(t) &= [c \cos(\omega_c t) + m(t)]k(t) \\
 &= [c \cos(\omega_c t) + m(t)] \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos(\omega_c t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega_c t) + \dots \right) \right] \\
 &= \underbrace{\frac{c}{2} \cos(\omega_c t) + \frac{2}{\pi} m(t) \cos(\omega_c t)}_{\text{AM}} + \underbrace{\text{otros términos en } \omega = 0, 2\omega_c, \dots}_{\text{suprimidos por el filtro}}
 \end{aligned}$$

$$v_o(t) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{c\pi}{4} + m(t) \right) \cos(\omega_c t) = \frac{2}{\pi} (A + m(t)) \cos(\omega_c t)$$

DetECCIÓN DE SEÑALES AM

Una señal AM puede ser detectada de forma coherente con un demodulador síncrono como el usado para señales DSB-SC:

$$[(A + m(t)) \cos(\omega_c t)] \cos(\omega_c t) = \frac{1}{2}(A + m(t)) + \frac{1}{2}(A + m(t)) \cos(2\omega_c t)$$

Filtrando paso-baja se obtiene la envolvente $(A + m(t))/2$, y mediante un filtrado paso-alta (desacoplo con condensador) se puede eliminar el término de continua obteniendo finalmente $m(t)/2$.

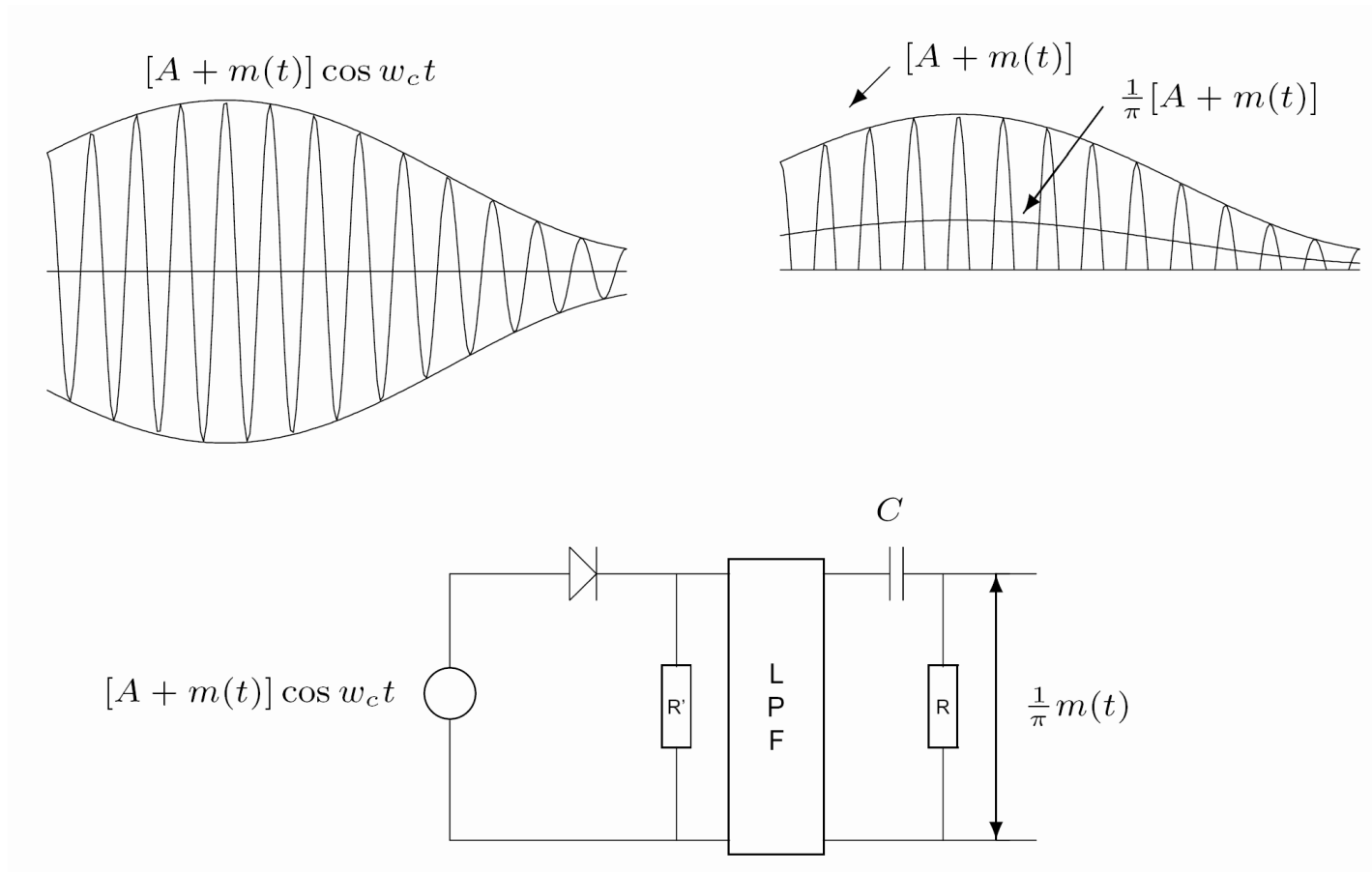
Sin embargo, el objeto de usar AM (de incluir la portadora) es no necesitar demoduladores síncronos. En la práctica se usan técnicas de detección no-coherente que no requieren generar una portadora local.

Vamos a ver tres tipos básicos de detectores no-coherentes de AM:

- Detector rectificador.
- Detector de envolvente.
- Detector de ley cuadrática.

Detector rectificador

Se basa en rectificar la señal AM y extraer la envolvente mediante filtrado paso-baja, como se muestra en la figura:



El proceso de rectificar la señal AM es equivalente a multiplicarla por un tren de pulsos rectangulares $k(t)$ de periodo $T_0 = 2\pi/\omega_c$ y ancho $\tau = T_0/2$.

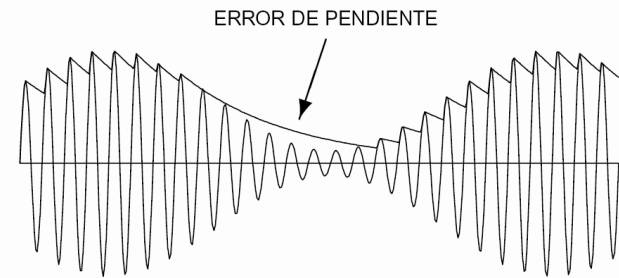
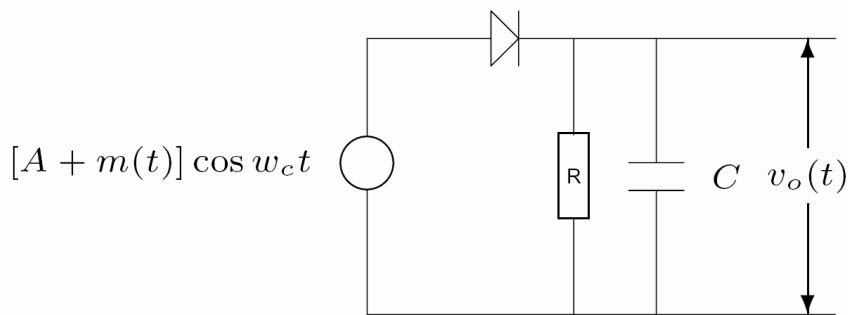
$$\begin{aligned}v_R(t) &= [A + m(t)] \cos(\omega_c t) k(t) \\ &= [A + m(t)] \cos(\omega_c t) \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos(\omega_c t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega_c t) + \dots \right) \right] \\ &= \frac{1}{\pi} [A + m(t)] + \text{términos de frecuencia } \geq \omega_c\end{aligned}$$

La componente A de continua se elimina con filtrado paso-alta con un condensador en serie.

La diferencia esencial con respecto a demodulación coherente es que en este caso, la *portadora local* se genera de forma automática y contiene un armónico exactamente de la misma frecuencia y fase que la portadora.

Si en lugar de un rectificador de media onda se usa un rectificador de onda completa se consigue el mismo resultado pero la amplitud de la señal recuperada es $\frac{2}{\pi}m(t)$.

Detector de envolvente



Su funcionamiento es relativamente sencillo:

- Durante los ciclos positivos, el condensador se carga a través del diodo de forma rápida hasta alcanzar el valor de pico.
- Durante los ciclos negativos, el condensador se descarga lentamente a través de la resistencia hasta el siguiente pico positivo.

Aparece un rizado de frecuencia ω_c debido a la descarga del condensador entre ciclos. Este rizado se puede eliminar con un filtro paso-baja. Para minimizar el rizado se puede aumentar la constante de tiempo RC , pero si se aumenta demasiado es posible que el detector no pueda seguir la envolvente.

Ejemplo: detección de un tono

En un instante de tiempo arbitrario $t = 0$ donde hay un pico de la señal, el condensador se descarga según la ecuación $v_C = Ee^{-t/RC}$. Si la constante de tiempo es mucho mayor que el periodo de la portadora ($RC \gg 1/\omega_c$) podemos aproximar $v_C \approx E(1 - t/RC)$, de modo que la pendiente de descarga es $-E/RC$.

Para que el detector sea capaz de seguir la envolvente $E(t)$, la pendiente de ésta debe ser menor que la pendiente de descarga del condensador:

$$\left| \frac{dv_C(t)}{dt} \right| = \frac{E(t)}{RC} \geq \left| \frac{dE(t)}{dt} \right|$$

Si la modulante de la señal AM es un tono, la envolvente es de la forma:

$$E(t) = A[1 + \mu \cos(\omega_m t)] \quad \frac{dE(t)}{dt} = -\mu A \omega_m \sin(\omega_m t)$$

y la condición es entonces:

$$\frac{A(1 + \mu \cos(\omega_m t))}{RC} \geq \mu A \omega_m \sin(\omega_m t) \quad \Rightarrow \quad RC \leq \frac{1 + \mu \cos(\omega_m t)}{\mu \omega_m \sin(\omega_m t)} \quad \forall t$$

La expresión de la derecha se minimiza cuando $\cos(\omega_m t) = -\mu$, de modo que queda:

$$RC \leq \frac{1}{\omega_m} \left(\frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{\mu} \right)$$

Detector de ley cuadrática

Una señal AM se puede detectar elevándola al cuadrado y filtrando paso-baja de ancho de banda igual al de la señal modulante:

$$\varphi_{AM}^2 = (A + m(t))^2 \cos^2(\omega_c t) = \frac{1}{2}(A^2 + 2Am(t) + m^2(t))(1 + \cos(2\omega_c t))$$

a la salida del filtro paso-baja se obtiene:

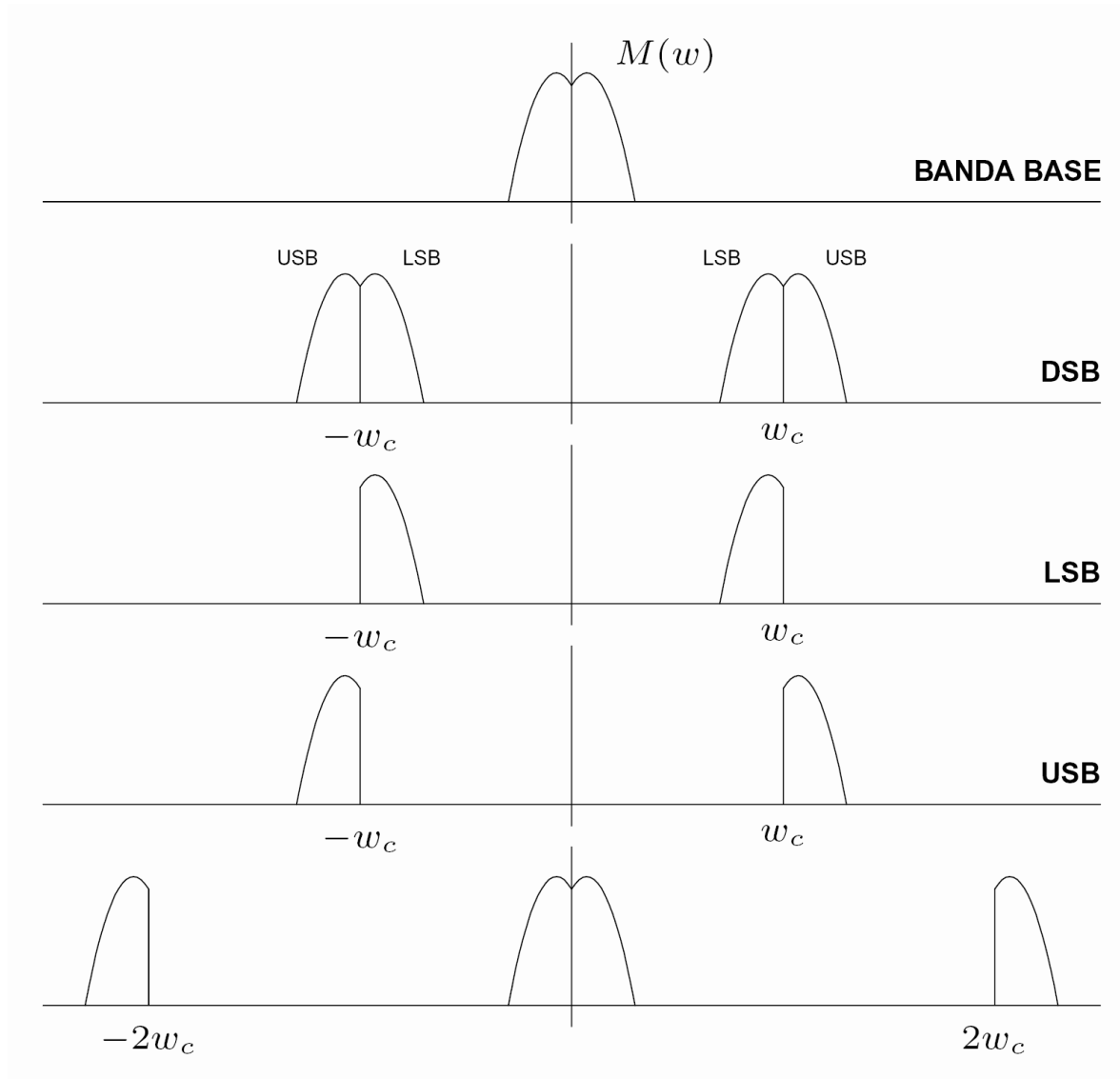
$$v_o(t) = \frac{A^2}{2} \left(1 + 2\frac{m(t)}{A} + \left(\frac{m(t)}{A}\right)^2 \right)$$

Si se verifica que $A \gg m(t)$ entonces el término cuadrático es despreciable. El nivel de continua se elimina desacoplando con un condensador.

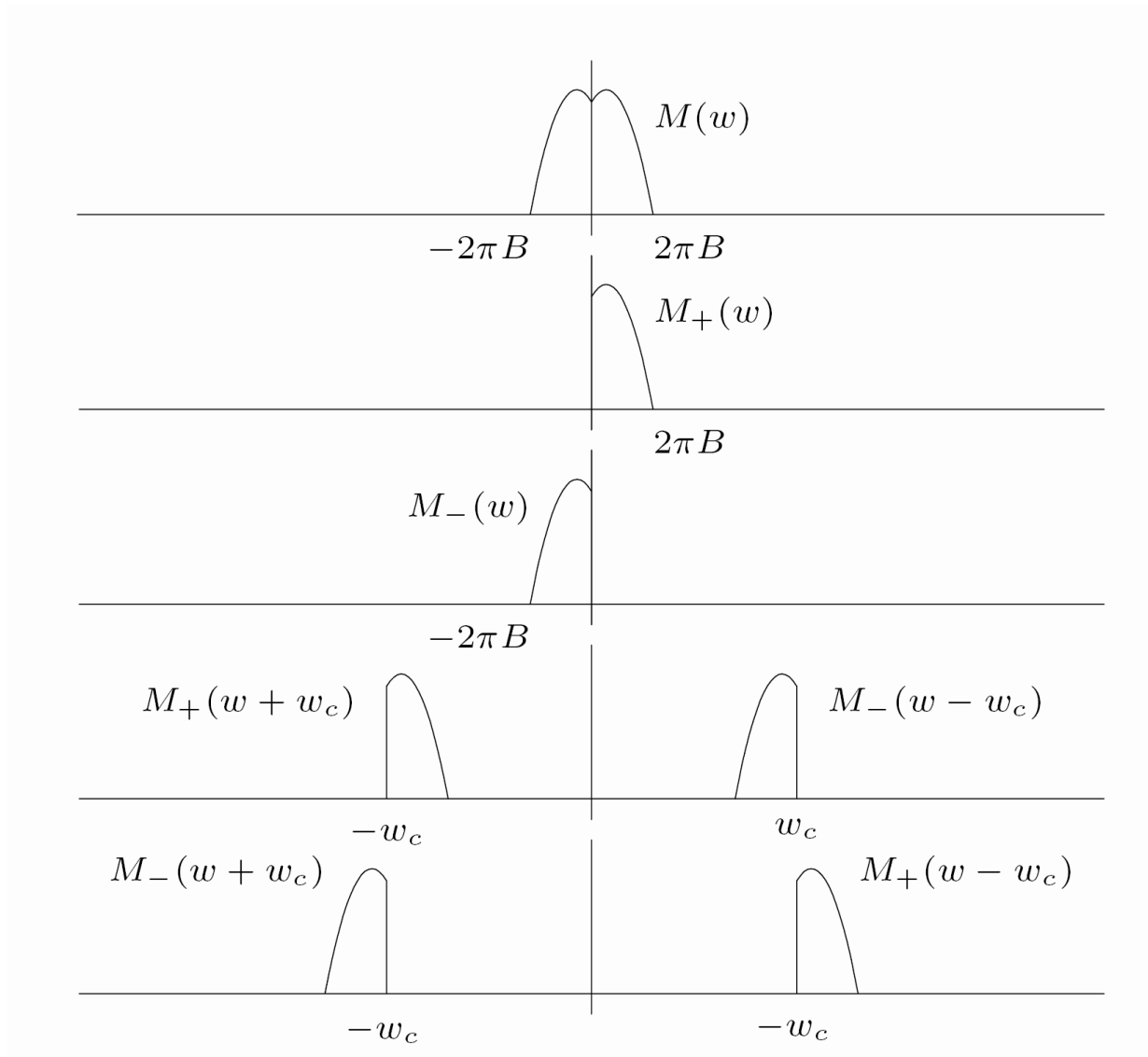
Nótese que la distorsión es proporcional a $m(t)/A$ pero que puede despreciarse si $A \gg m(t)$.

Para este tipo de detector se puede usar cualquier dispositivo no lineal cuyo desarrollo de MacLaurin contenga únicamente potencias pares.

5.4.- Modulación de amplitud: Banda lateral única (SSB)



Preenvolvente o señal analítica



Los espectros $M_+(\omega)$ y $M_-(\omega)$ verifican que $M_+(\omega) + M_-(\omega) = M(\omega)$

$$M_+(\omega) = M(\omega)u(\omega) \quad M_-(\omega) = M(\omega)u(-\omega) \quad M_+(\omega) = M_-^*(-\omega)$$

y las transformadas inversas, $m_+(t)$ y $m_-(t)$ verifican que:

$$m_+(t) \leftrightarrow M_+(\omega) \quad m_-(t) \leftrightarrow M_-(\omega) \quad m_-(t) = m_+^*(t) \quad m_+(t) + m_-(t) = m(t)$$

$$m_+(t) = \frac{1}{2}[m(t) + jm_h(t)] \quad m_-(t) = \frac{1}{2}[m(t) - jm_h(t)]$$

con $m(t)$ y $m_h(t)$ reales.

Para determinar $m_h(t)$ se puede hacer lo siguiente:

$$M_+(\omega) = M(\omega)u(\omega) = \frac{1}{2}M(\omega)[1 + \text{sgn}(\omega)] = \frac{1}{2}M(\omega) + \frac{1}{2}M(\omega)\text{sgn}(\omega)$$

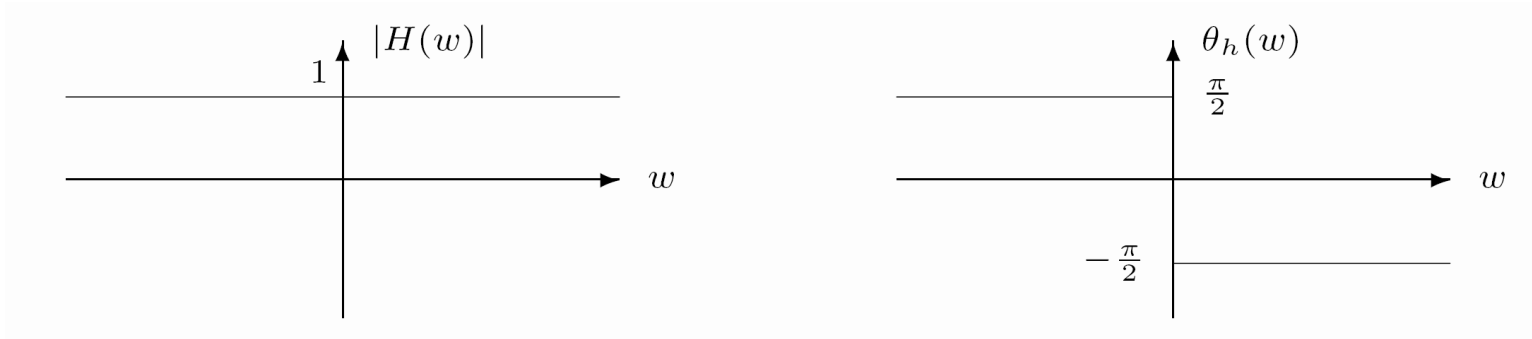
e identificando términos, por linealidad de la transformada de Fourier:

$$jm_h(t) \leftrightarrow M(\omega)\text{sgn}(\omega) \Rightarrow M_h(\omega) = -jM(\omega)\text{sgn}(\omega)$$

o bien:

$$M_h(\omega) = H(\omega)M(\omega) \quad \text{con} \quad H(\omega) = -j\text{sgn}(\omega) = \begin{cases} -j = e^{-j\pi/2} & \omega > 0 \\ j = e^{j\pi/2} & \omega < 0 \end{cases}$$

$$M_h(\omega) = H(\omega)M(\omega) \quad \text{con} \quad H(\omega) = -j\text{sgn}(\omega)$$



En el dominio del tiempo se tiene:

$$m_h(t) = -jm(t) * \mathcal{F}^{-1}[\text{sgn}(\omega)]$$

donde:

$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega} \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{j\pi t} \leftrightarrow \text{sgn}(\omega)$$

y $m_h(t)$ se obtiene como:

$$m_h(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

Finalmente, las señales SSB se pueden expresar en la forma:

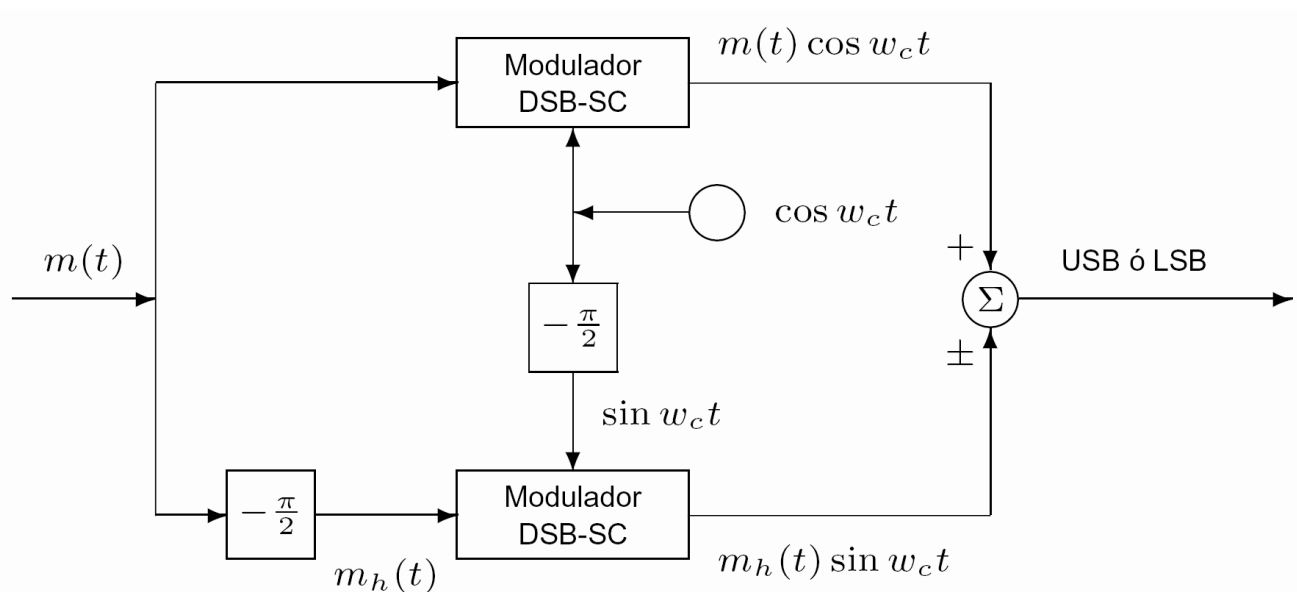
$$\Phi_{USB} = M_+(\omega - \omega_c) + M_-(\omega + \omega_c) \Rightarrow \varphi_{USB}(t) = m_+(t)e^{j\omega_c t} + m_-(t)e^{-j\omega_c t}$$

y sustituyendo las expresiones para $m_+(t)$ y $m_-(t)$ se obtiene:

$$\varphi_{USB}(t) = m(t) \cos(\omega_c t) - m_h(t) \sin(\omega_c t)$$

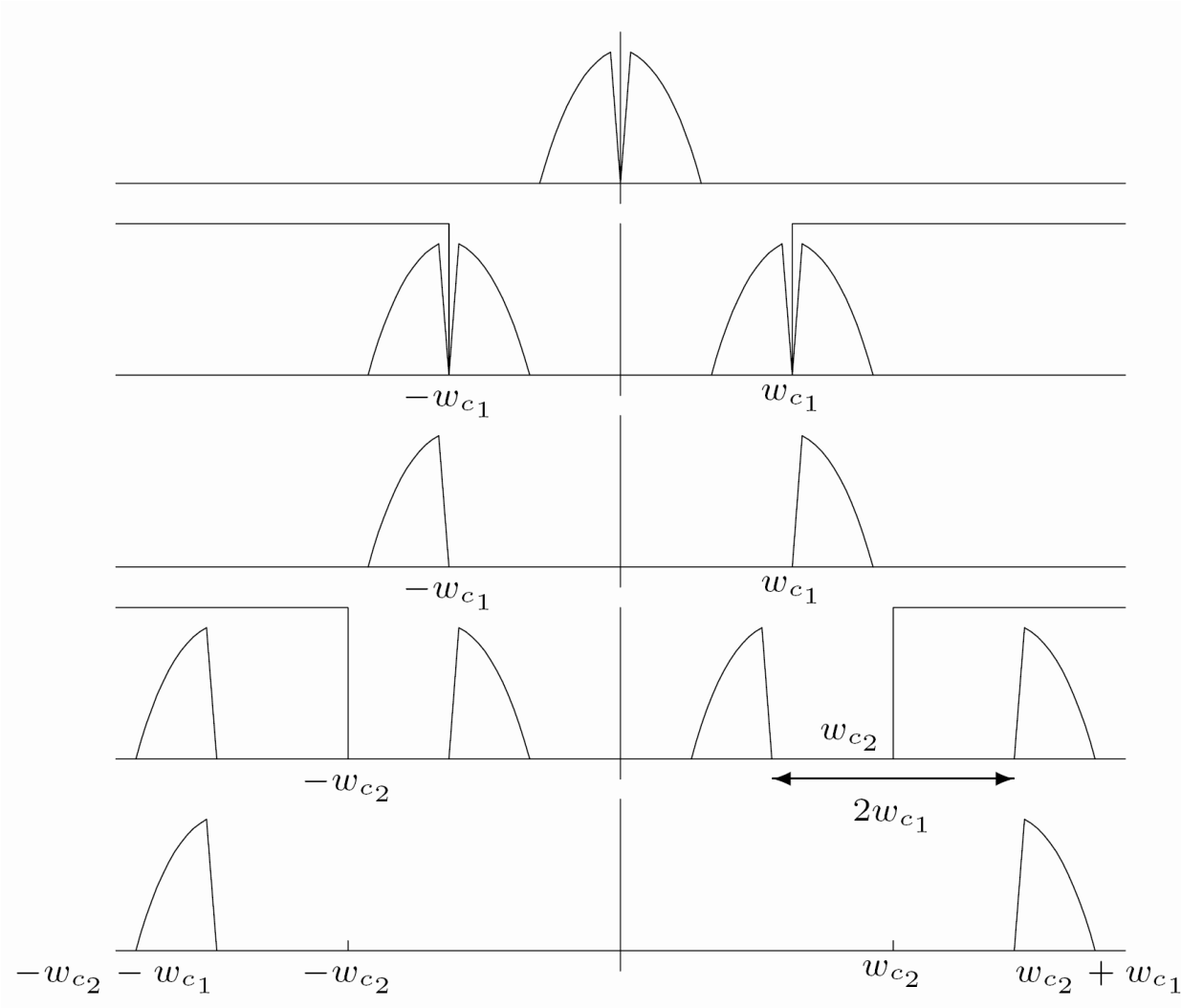
y de forma análoga para LSB:

$$\varphi_{LSB}(t) = m(t) \cos(\omega_c t) + m_h(t) \sin(\omega_c t)$$



Generación por filtrado

Se realiza mediante un proceso de modulación-filtrado-traslación. Es aplicable a señales con PSD nula en $\omega = 0$.



Detección de señales SSB

Dependiendo de que la señal SSB contenga o no la portadora, se emplean dos métodos diferentes de detección: coherente y no-coherente.

Para el caso de señales SSB-SC, es necesario utilizar detección síncrona:

$$\varphi_{SSB}(t) = m(t) \cos(\omega_c t) \mp m_h(t) \sin(\omega_c t)$$

$$\varphi_{SSB}(t) \cos(\omega_c t) = \frac{1}{2}m(t)[1 + \cos(2\omega_c t) \mp \frac{1}{2}m_h(t) \sin(2\omega_c t)]$$

$$\varphi_{SSB}(t) \cos(\omega_c t) = \underbrace{\frac{1}{2}m(t)}_{\text{banda-base}} + \underbrace{\frac{1}{2}[m(t) \cos(2\omega_c t) \mp m_h(t) \sin(2\omega_c t)]}_{\text{SSB a frecuencia } 2\omega_c}$$

donde el signo menos corresponde a USB y el más a LSB.

DetECCIÓN DE ENVOLVENTE PARA SEÑALES SSB+C

Si la señal SSB se transmite con una portadora añadida, se puede utilizar una técnica de detección de envolvente para demodularla.

Una señal SSB con portadora es de la forma:

$$\varphi_{SSB+C}(t) = [A + m(t)] \cos(\omega_c t) \mp m_h(t) \sin(\omega_c t) = E(t) \cos(\omega_c t + \theta(t))$$

donde la envolvente es de la forma:

$$E(t) = \sqrt{[A + m(t)]^2 + m_h^2(t)} = A \sqrt{1 + \frac{2m(t)}{A} + \left(\frac{m(t)}{A}\right)^2 + \left(\frac{m_h(t)}{A}\right)^2}$$

Si se verifica que $A \gg |m(t)|$ entonces podemos aproximar:

$$E(t) \approx A \sqrt{1 + \frac{2m(t)}{A}} \approx A + m(t)$$

En este caso, a diferencia de AM, es necesario un contenido mayor de portadora, y por tanto, la eficiencia es significativamente menor.

Modulación en cuadratura de fase (QAM)

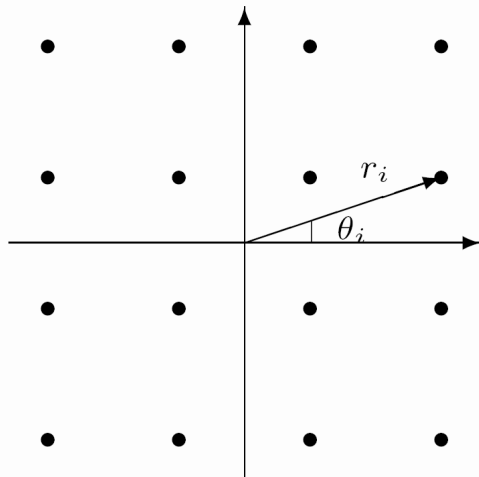
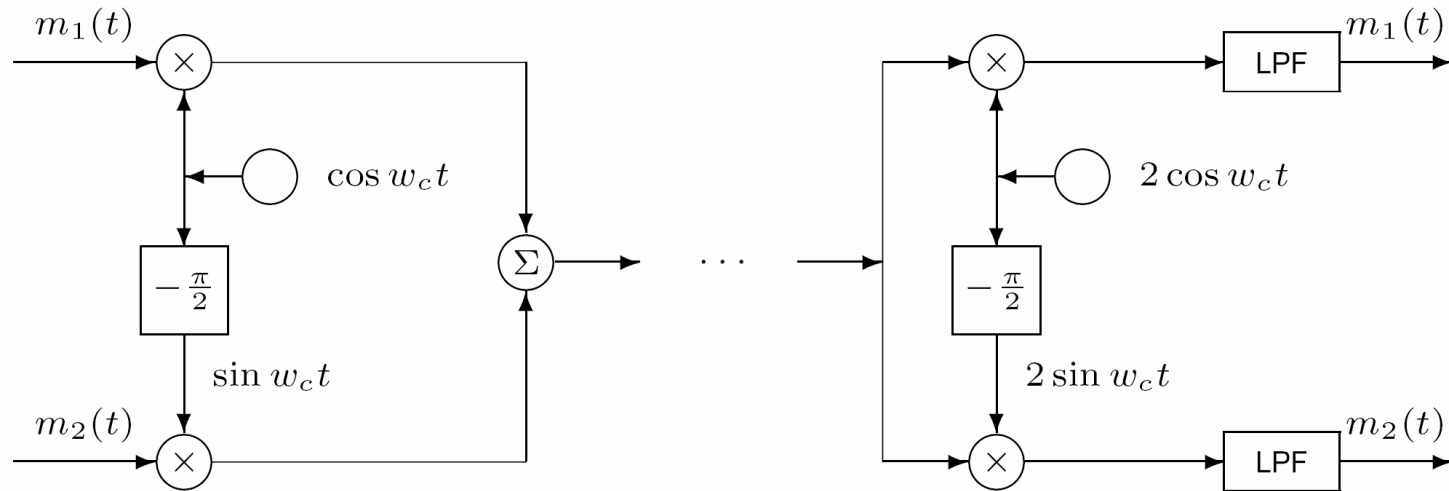
Dado que una señal SSB ocupa un ancho de banda igual al de la señal modulante (B), es posible multiplexar dos señales SSB para transmitir las ocupando un ancho de banda $2B$:

$$\begin{aligned}\varphi_{DSB}(t) &= \varphi_{1.USB}(t) + \varphi_{2.LSB}(t) \\ &= [m_1(t) \cos(\omega_c t) - m_{h1}(t) \sin(\omega_c t)] + [m_2(t) \cos(\omega_c t) + m_{h2}(t) \sin(\omega_c t)]\end{aligned}$$

Sin embargo, existe una técnica más sencilla para multiplexar dos señales de forma que ocupen un ancho de banda $2B$, utilizando modulación DSB sobre dos portadores de la misma frecuencia pero en cuadratura de fase:

$$\begin{aligned}\varphi_{QAM}(t) &= m_1(t) \cos(\omega_c t) + m_2(t) \sin(\omega_c t) \\ \varphi_{QAM}(t)(2 \cos(\omega_c t)) &= m_1(t) \underbrace{+ m_1(t) \cos(2\omega_c t) + m_2(t) \sin(2\omega_c t)}_{\text{suprimido por filtrado}} \\ \varphi_{QAM}(t)(2 \sin(\omega_c t)) &= m_2(t) \underbrace{- m_2(t) \cos(2\omega_c t) + m_1(t) \sin(2\omega_c t)}_{\text{suprimido por filtrado}}\end{aligned}$$

En este caso, es necesario realizar detección coherente.



16-QAM

$$p_i(t) = a_i p(t) \cos(\omega_c t) + b_i p(t) \sin(\omega_c t)$$

$$p_i(t) = r_i p(t) \cos(\omega_c t + \theta_i)$$

Ejemplo de transmisión QAM

La modulación QAM se usa especialmente en sistemas de comunicación digital.

Para transmitir 2400 bps se necesita un ancho de banda mínimo de 1200 Hz (codificación binaria). Sin embargo, se utilizan pulsos con un exceso de ancho de banda $r = 12,5\%$, por lo que el ancho de banda efectivo es 1350 Hz. La modulación dobla el ancho de banda a unos 2700 Hz. La modulación QAM dobla el bit-rate (4800 bps) sobre el mismo ancho de banda.

Si se necesita aumentar aun más el bit-rate, se puede utilizar modulación QAM junto con codificación M-aria:

$$p_i(t) = a_i p(t) \cos(\omega_c t) + b_i p(t) \sin(\omega_c t) = r_i p(t) \cos(\omega_c t + \theta_i)$$

usando 4 niveles para a_i y para b_i (2 bits para cada uno) tenemos 16 posibles valores (4 bits), de modo que conseguimos aumentar el bit-rate en un factor 4:

$$4 \text{ bits/pulso} \times 2400 \text{ pulsos/s} = 9600 \text{ bps}$$

Los MODEM utilizan esta técnica de transmisión digital sobre líneas telefónicas. Los MODEM implementan los procesos de modulación y demodulación usando QAM con codificación M-aria.

5.5.- Errores de frecuencia y fase en demodulación síncrona

- En demodulación síncrona, es necesario generar una portadora local síncrona en frecuencia y fase con la portadora original.
- El proceso de demodulación consiste en desplazar el espectro de la señal modulada multiplicándola por la portadora local.
- Cuando dos portadoras presentan diferencia en su frecuencia y/o fase, la señal demodulada se distorsiona.
- Usualmente se utilizan técnicas de sincronización entre las portadoras para evitar estos efectos.
- A continuación discutiremos los efectos producidos por este tipo de errores para los casos de DSB-SC y SSB-SC.

Señales DSB-SC: errores de frecuencia y fase

Supongamos que la señal recibida es $m(t) \cos(\omega_c t)$ y la portadora local es $\cos((\omega_c + \Delta\omega)t + \delta)$ donde $\Delta\omega$ y δ son los errores de frecuencia y de fase, respectivamente. La señal demodulada será:

$$\begin{aligned} e_d(t) &= m(t) \cos(\omega_c t) \cos((\omega_c + \Delta\omega)t + \delta) \\ &= \frac{1}{2} m(t) [\cos(\Delta\omega t + \delta) + \cos((\omega_c + \Delta\omega)t + \delta)] \end{aligned}$$

donde el segundo término es suprimido por el filtro, resultando:

$$e_o(t) = \frac{1}{2} m(t) \cos(\Delta\omega t + \delta)$$

En el caso en que $\Delta\omega = 0$ y $\delta = 0$, se obtiene la señal deseada: $m(t)/2$. Sin embargo, si hay un error de fase o de frecuencia, nos encontramos con una distorsión:

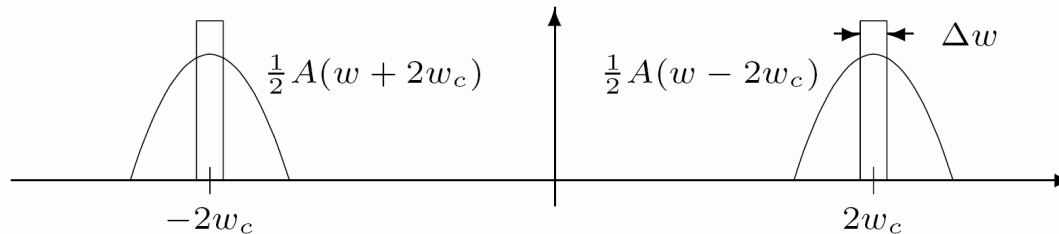
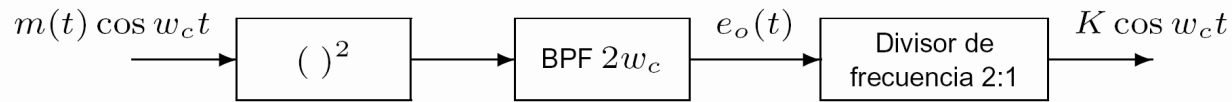
$$\begin{aligned} \delta \neq 0 &\Rightarrow e_o(t) = \frac{1}{2} m(t) \cos(\delta) \\ \Delta\omega \neq 0 &\Rightarrow e_o(t) = \frac{1}{2} m(t) \cos(\Delta\omega t) \end{aligned}$$

Si tenemos un error de fase, con un desfase δ constante, se obtiene una versión atenuada de $m(t)$, donde únicamente habría un problema si el desfase es de $\delta = \pm\pi/2$, en cuyo caso, la señal detectada se anularía. Si el error de fase no es constante, la señal detectada presentaría una atenuación variable en el tiempo.

En el segundo caso ($\Delta\omega \neq 0$) se obtiene una señal modulada de frecuencia $\Delta\omega$, cuyo valor es pequeño (en comparación con el rango de frecuencias de la señal modulante), provocando un efecto de batido.

Para solucionar este problema, se utilizan sistemas de sincronización de portadora:

- Se puede transmitir una *portadora piloto* de baja potencia (generalmente 20 dB por debajo de la potencia de la señal para no deteriorar la eficiencia del sistema). En el receptor se filtra paso-banda para extraer la portadora piloto que se utiliza para sincronizar el oscilador local.
- También se puede utilizar un sincronizador de ley cuadrática, que extrae la portadora filtrando paso-banda el cuadrado de la señal recibida.



$$[m(t) \cos(\omega_c t)]^2 = \frac{1}{2}m^2(t) + \frac{1}{2}m^2(t) \cos(2\omega_c t)$$

$$m^2(t) \leftrightarrow A(\omega) \quad \Rightarrow \quad m^2(t) \cos(2\omega_c t) \leftrightarrow \frac{1}{2}[A(\omega + 2\omega_c) + A(\omega - 2\omega_c)]$$

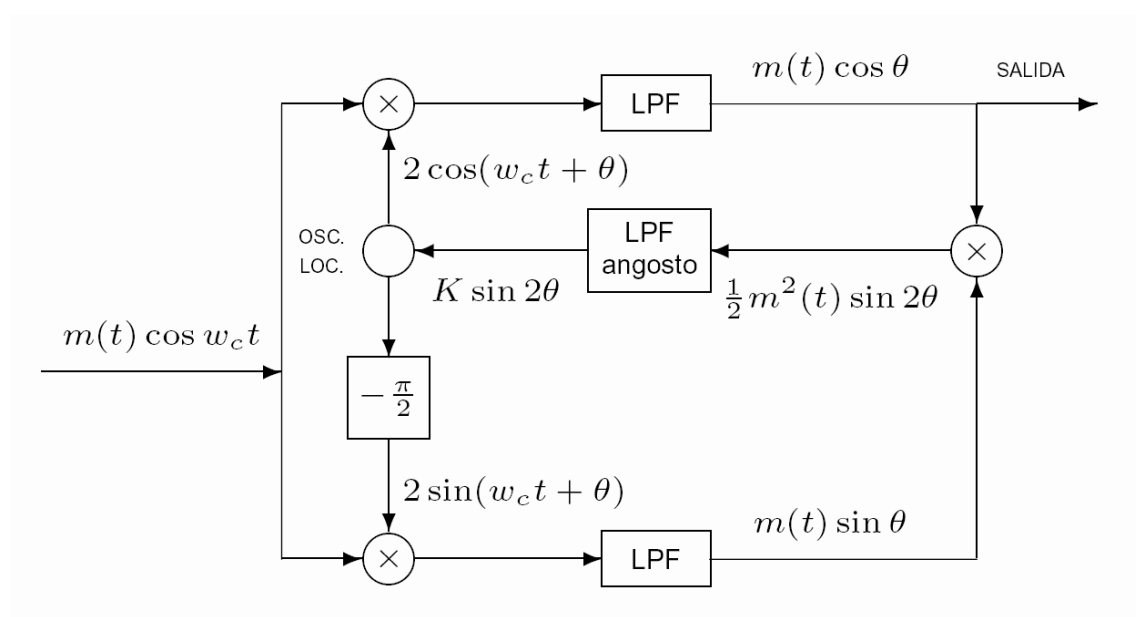
Filtrando paso-banda (filtro estrecho) en torno a $2\omega_c$:

$$E_o(\omega) \approx \frac{A(0)\Delta\omega}{2}[\delta(\omega + 2\omega_c) + \delta(\omega - 2\omega_c)] \quad \Rightarrow \quad e_o(t) = A(0)\Delta f \cos(2\omega_c t)$$

Finalmente, con un divisor de frecuencia se obtiene una señal senoidal de la frecuencia deseada (ω_c) y síncrona en fase (salvo una fase de $\pm\pi$).

Un problema del sistema anterior es que al elevar al cuadrado la señal recibida, se pierde la información del signo, de modo que el sincronismo de fase tiene una ambigüedad de $\pm\pi$. En sistemas analógicos no es problema, pero sí lo es en sistemas digitales PSK, donde la fase es lo que permite diferenciar entre los bits **0** y **1**.

Otra alternativa es utilizar el bucle de Costas (véase figura). Este sistema también presenta una ambigüedad de $\pm\pi$ en la fase.



Señales SSB-SC

En este caso, la señal demodulada es de la forma:

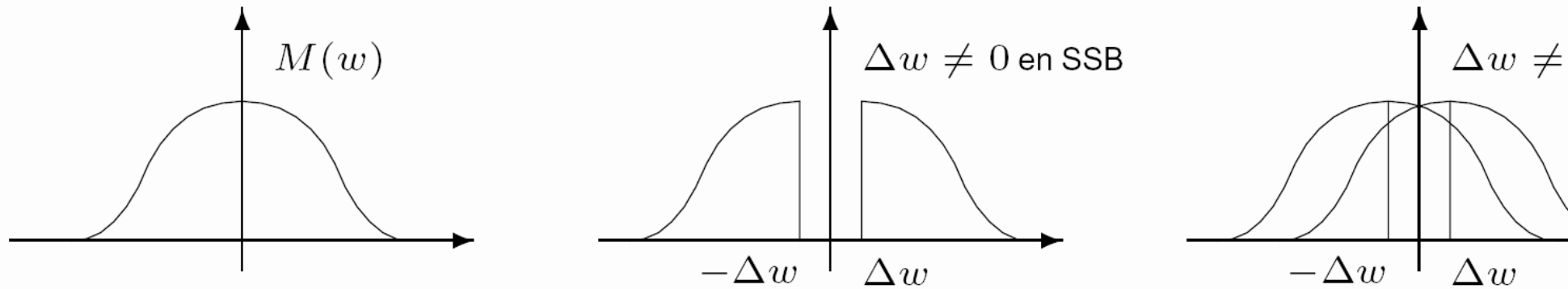
$$\begin{aligned} e_d(t) &= [m(t) \cos(\omega_c t) + m_h(t) \sin(\omega_c t)] \cos((\omega_c + \Delta\omega)t + \delta) \\ &= \frac{1}{2}[m(t) \cos(\Delta\omega t + \delta) - m_h(t) \sin(\Delta\omega t + \delta)] \end{aligned}$$

donde se han ignorado los términos de frecuencias superiores eliminados por el filtro paso-baja. Para $\Delta\omega = 0$ se tiene una distorsión lineal de fase:

$$e_o(t) = \frac{1}{2}[m(t) \cos(\delta) + m_h(t) \sin(\delta)] \quad \Rightarrow \quad E_o(\omega) = \frac{1}{2}[M(\omega) \cos(\delta) + M_h(\omega) \sin(\delta)]$$

$$M_h(\omega) = \begin{cases} -jM(\omega) & \omega > 0 \\ jM(\omega) & \omega < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E_o(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}M(\omega)e^{+j\delta} & \omega > 0 \\ \frac{1}{2}M(\omega)e^{-j\delta} & \omega < 0 \end{cases}$$

En cuanto a los errores de frecuencia $\Delta\omega \neq 0$, para DSB-SC y SSB-SC, se tiene:



A diferencia del caso DSB-SC, el efecto es la generación de una señal SSB-SC pero a frecuencia $\Delta\omega$. Este efecto eleva las frecuencias del espectro, pero no produce batido.

Para la sincronización en SSB-SC, la única posibilidad es utilizar métodos de portadora piloto, dado que esta señal presenta una fase variable (y no es posible aplicar los otros métodos):

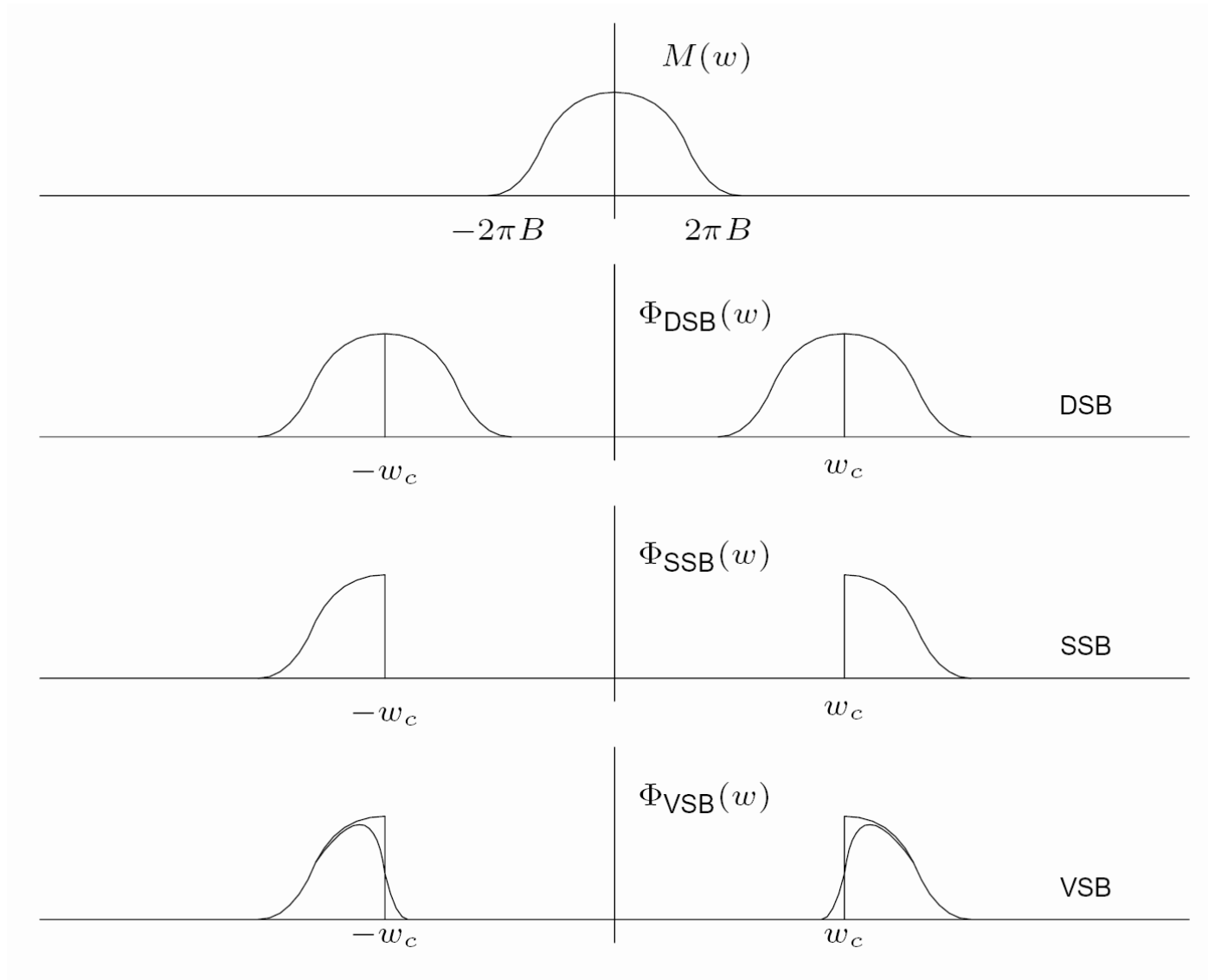
$$\varphi_{SSB}(t) = E(t) \cos(\omega_c t + \theta(t)) \quad \begin{aligned} E(t) &= \sqrt{m^2(t) + m_h^2(t)} \\ \theta(t) &= -\tan^{-1} \left(\frac{m_h(t)}{m(t)} \right) \end{aligned}$$

$$\varphi_{SSB}^2(t) = \frac{E^2(t)}{2} [1 + \cos(2\omega_c t + 2\theta(t))]$$

Comparación entre AM, DSB-SC y SSB-SC

- AM tiene el problema de que alrededor de un 75 % de la potencia se concentra en la portadora y únicamente un 25 % es potencia de señal. El receptor de AM es muy simple.
- SSB-SC utiliza únicamente la mitad de ancho de banda que DSB-SC. Usando modulación en cuadratura de fase se pueden modular 2 señales ocupando el mismo ancho de banda que DSB-SC, si bien este tipo de modulación presenta mayor efecto de cross-talk (interferencia entre la señales en cuadratura).
- Los errores de frecuencia y fase de la portadora local son más graves en DSB-SC que en SSB-SC.
- La atenuación selectiva (fading) causa mayores problemas en DSB-SC que en SSB-SC.
- Es más difícil generar señales SSB-SC de alta potencia que DSN-SC. Esto se puede resolver con banda lateral residual (VSB-SC).

5.6.- Modulación en amplitud: Banda lateral residual (VSB)



La modulación VSB es un compromiso intermedio entre DSB y SSB. Comparte las ventajas de DSB y SSB y evita sus desventajas: una señal VSB es relativamente fácil de generar y únicamente tiene un ancho de banda algo superior (entre un 12 % o un 25 %) superior al de SSB.

La señal VSB se obtiene filtrando la señal DSB, y su espectro se puede escribir como:

$$\Phi_{VSB}(\omega) = [M(\omega + \omega_c) + M(\omega - \omega_c)]H(\omega)$$

Debe poder recuperarse la señal mediante demodulación síncrona:

$$e_d(t) = \varphi_{VSB}(t)2 \cos(\omega_c t) \leftrightarrow [\Phi_{VSB}(\omega + \omega_c) + \Phi_{VSB}(\omega - \omega_c)]$$

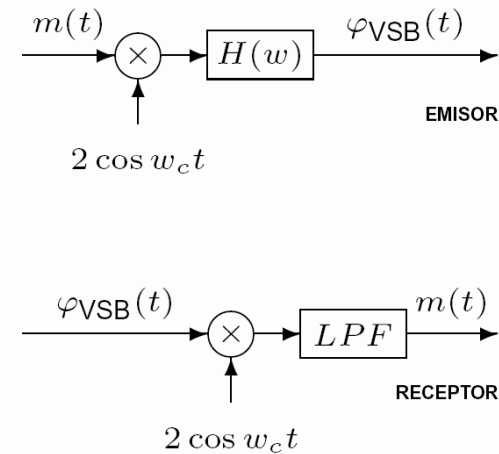
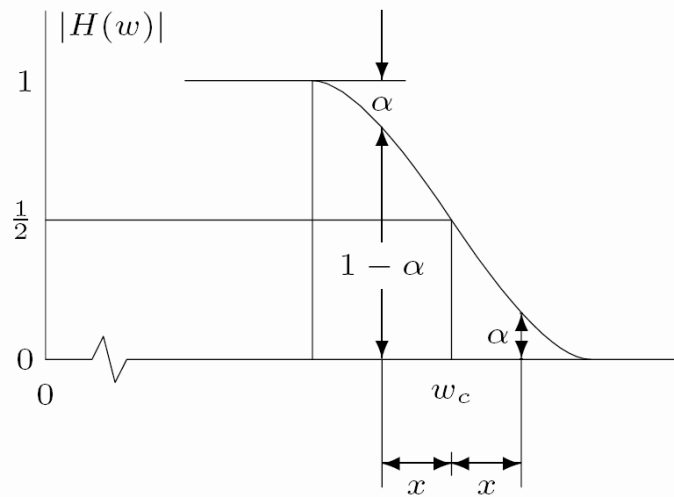
$$e_o(t) \leftrightarrow M(\omega)[H(\omega + \omega_c) + H(\omega - \omega_c)]$$

La condición para no distorsión es:

$$e_o(t) \leftrightarrow M(\omega) \Rightarrow [H(\omega + \omega_c) + H(\omega - \omega_c)] = 1 \quad \forall |\omega| \leq 2\pi B$$

o bien (análogamente a lo visto en transmisión digital para el primer criterio de Nyquist):

$$[H(\omega_c - x) + H(\omega_c + x)] = 1 \quad \forall |x| \leq 2\pi B$$



Como una señal paso-banda general puede expresarse como:

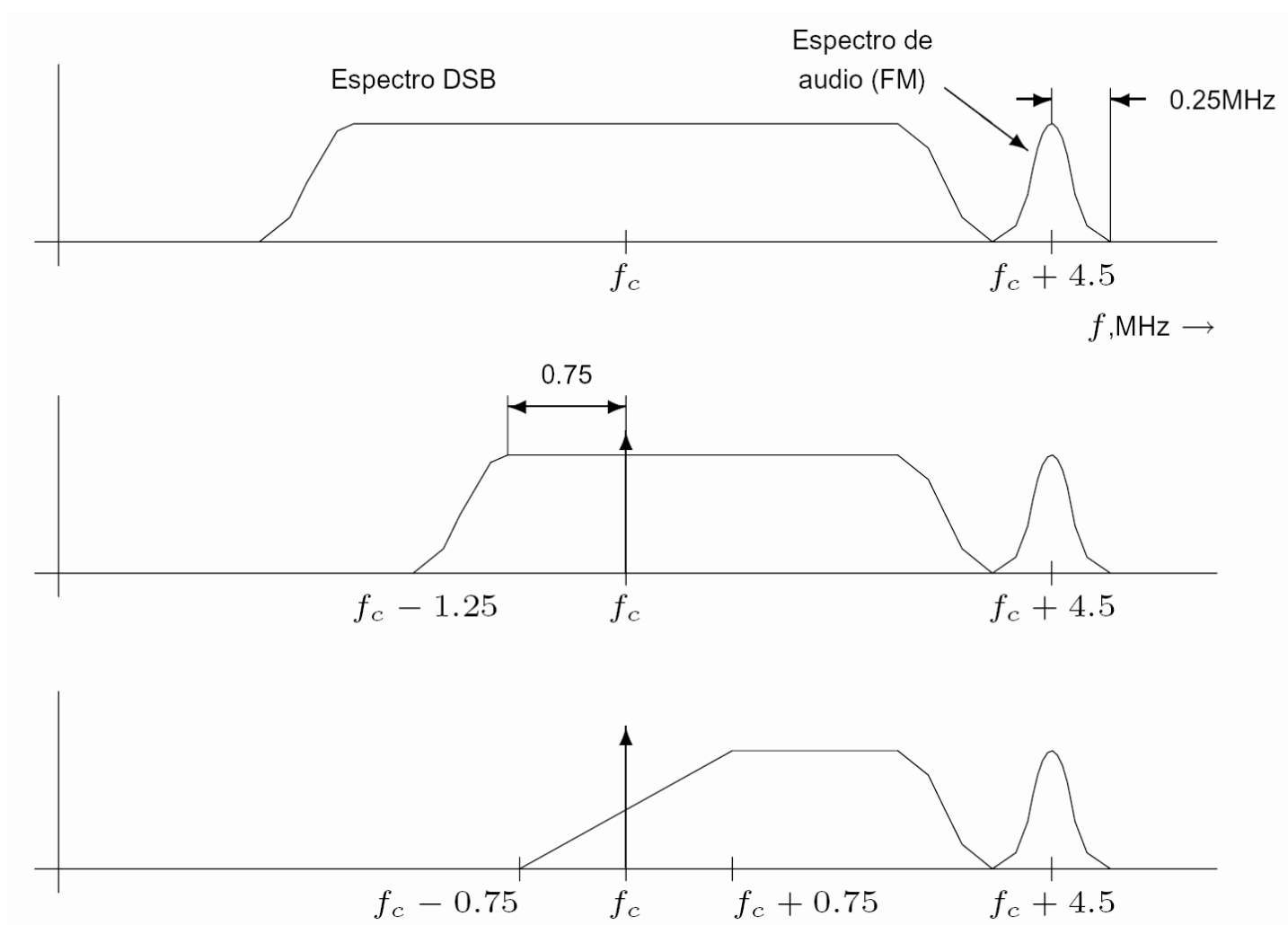
$$\varphi_{VSB}(t) = m_c(t) \cos(\omega_c t) + m_s(t) \sin(\omega_c t)$$

tomando $m_c(t) = m(t)$ y $m_s(t) \leftrightarrow jM(\omega)[1 - 2H(\omega - \omega_c)]$

$$\varphi_{VSB}(t) = m(t) \cos(\omega_c t) + m_s(t) \sin(\omega_c t)$$

donde un cambio de signo en $m_s(t)$ equivale a invertir el filtro $H(\omega)$ respecto de ω_c y genera VSB de banda lateral superior o inferior.

Ejemplo: Modulación VSB en TV



La demodulación se realiza mediante detección de envolvente ya que la señal de TV contiene una portadora de alta potencia.

5.7.- Sistemas digitales con portadora

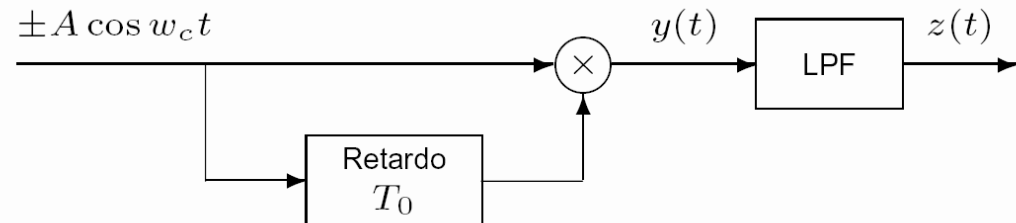
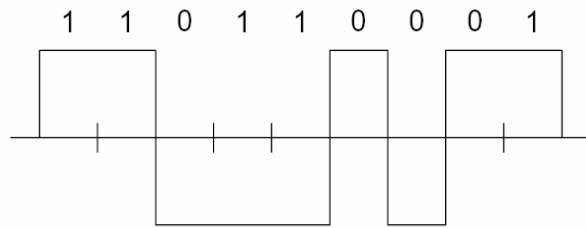
Los esquemas binarios de modulación digital son: ASK, PSK y FSK. Los procedimientos de modulación y demodulación son similares a los utilizados para señales analógicas.

ASK: Es una modulación en amplitud con portadora, por lo que puede ser demodulada con un detector de envolvente o bien de forma síncrona.

PSK: Ésta es una modulación de fase, ya que la diferencia entre un **0** y un **1** es únicamente el signo de la portadora ($\pm A \cos(\omega_c t)$). No se puede utilizar un detector de envolvente porque ésta es la misma para los dos bits.

Si no existe portadora piloto, se debe utilizar un sistema de autosincronización, como el detector cuadrático o el bucle de Costas. Sin embargo, estos métodos tienen una ambigüedad de π en la fase y pueden producir errores al detectar los bits.

DPSK: Para solucionar este problema, se utiliza la codificación PSK diferencial o DPSK. En este esquema, un bit **1** se codifica como el pulso anterior y un **0** como un pulso de signo opuesto. Entonces, ya no es necesario detectar los valores, sino los cambios de signo.



La codificación DPSK además permite la detección no coherente. La señal es la portadora con un signo (positivo o negativo). Si multiplicamos la señal por una versión retardada un periodo T_0 igual a la separación entre bits, obtenemos $\pm A^2 \cos^2(\omega_c t)$ con signo positivo si los pulsos eran iguales y negativo si eran de signo opuesto. Después de filtrar paso bajo queda $z(t) = \pm A^2/2$ de modo que si $z(t)$ es positivo el bit es **1** y si es negativo el bit es **0**.

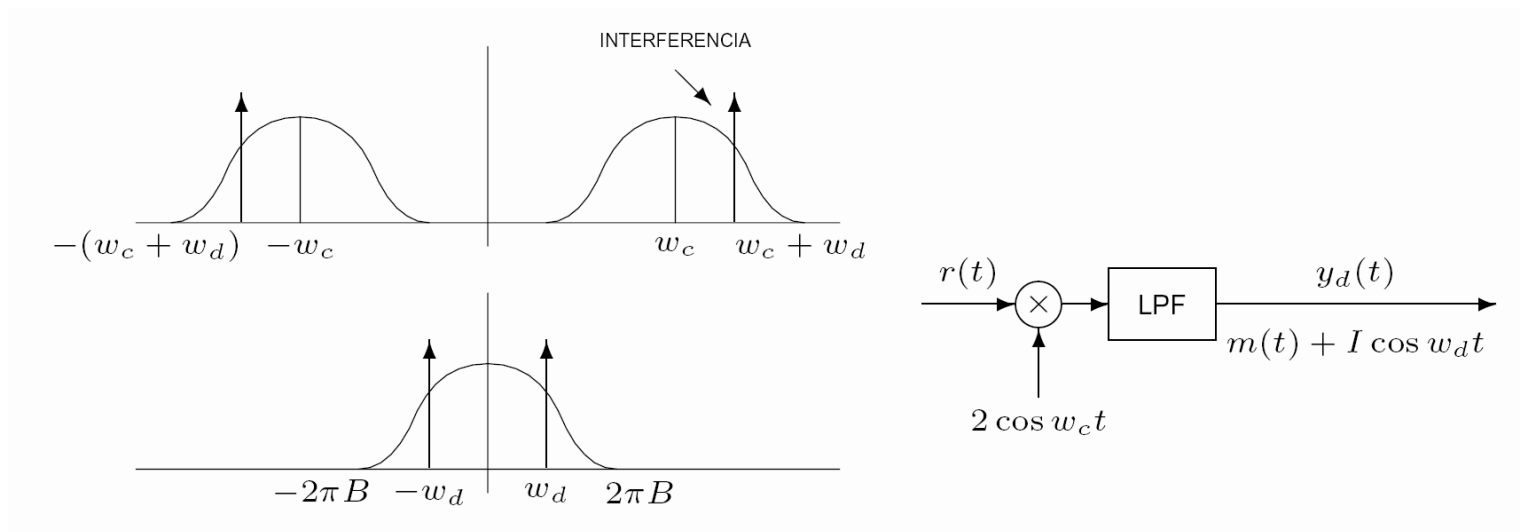
FSK: La señal FSK se puede interpretar como dos señales ASK multiplexadas en frecuencia con frecuencias ω_{c1} y ω_{c2} . En la práctica se pueden utilizar un par de filtros paso-banda sintonizados a estas frecuencias seguidos de un detector de envolvente. Se comparan los valores de las salidas de los detectores de envolvente y se decide el bit correspondiente al de mayor amplitud.

5.8.- Interferencia y ruido en sistemas AM

Las señales transmitidas con multiplexado en frecuencia, idealmente deben ocupar bandas separadas. En la práctica es imposible que estén totalmente separadas, lo que da lugar a interferencias.

Supongamos que tenemos las portadoras separadas 10 kHz. Si en la modulante no podemos suprimir (totalmente) las componentes de frecuencia por encima de 5 kHz, las componentes de frecuencia mayor interferirán con la emisora adyacente.

Supongamos el caso sencillo en el que la señal de interferencia es un tono de amplitud I : la interferencia es $I \cos((\omega_c + \omega_d)t + \theta)$:



Demodulación síncrona

Si el receptor demodula la señal multiplicando por $2 \cos(\omega_c t)$ y la filtra paso-baja, generando $y_d(t)$, el efecto es:

$$r(t) = m(t) \cos(\omega_c t) + I \cos((\omega_c + \omega_d)t + \theta) \quad y_d(t) = m(t) + I \cos(\omega_d t + \theta)$$

y la relación entre las amplitudes de la modulante y la interferencia es $m(t)/I$ tanto a la entrada como a la salida del demodulador.

Si se tienen múltiples señales de interferencia, sus efectos se superponen aditivamente:

$$r(t) = m(t) \cos(\omega_c t) + I_1 \cos((\omega_c + \omega_{d1})t + \theta_1) + I_2 \cos((\omega_c + \omega_{d2})t + \theta_2)$$

$$y_d(t) = m(t) + I_1 \cos(\omega_{d1}t + \theta_1) + I_2 \cos(\omega_{d2}t + \theta_2)$$

Detección de envolvente

La señal recibida con interferencia es:

$$\begin{aligned} r(t) &= (A + m(t)) \cos(\omega_c t) + I \cos((\omega_c + \omega_d)t) \\ &= (A + m(t) + I \cos(\omega_d t)) \cos(\omega_c t) - I \sin(\omega_d t) \sin(\omega_c t) \end{aligned}$$

La envolvente es:

$$E(t) = \sqrt{(A + m(t) + I \cos(\omega_d t))^2 + (I \sin(\omega_d t))^2}$$

y si la interferencia es pequeña se puede aproximar por:

$$E(t) \approx A + m(t) + I \cos(\omega_d t)$$

Como el término A es eliminado por el filtro paso-alta, la señal resultante es similar a la obtenida con detección síncrona.

Efecto umbral

Si la interferencia es de gran amplitud ($I \gg A$), se tiene:

$$\begin{aligned} E(t) &= \sqrt{(A + m(t))^2 + I^2 + 2I(A + m(t)) \cos(\omega_d t)} \\ &\approx \sqrt{I^2 + 2I(A + m(t)) \cos(\omega_d t)} \\ &= I \sqrt{1 + 2 \frac{A + m(t)}{I} \cos(\omega_d t)} \approx I \left[1 + \frac{A + m(t)}{I} \cos(\omega_d t) \right] \\ &= (A + m(t)) \cos(\omega_d t) + I \end{aligned}$$

Si bloqueamos el término constante I obtenemos una señal modulada con una frecuencia ω_d dentro de su ancho de banda. Este efecto se denomina “efecto umbral” y deteriora rápidamente la calidad de la señal recibida.

Este efecto es debido a la característica no lineal de los detectores de envolvente. No aparece en los demoduladores coherentes, que son lineales.

Ruido en sistemas de modulación lineal

- Se va a estudiar la influencia del ruido en los sistema de modulación de amplitud DSB, SSB y AM.
- Asumiremos un modelo de ruido blanco con densidad de potencia espectral uniforme $\mathcal{N}/2$.
- Consideraremos el rendimiento de los detectores síncronos (DSB, SSB) y de los detectores de envolvente (AM) desde el punto de vista de la relación entre la SNR de entrada y salida del receptor.

DSB-SC

En este caso, únicamente se puede utilizar un detector síncrono. La señal modulada recibida es:

$$y_i(t) = m(t) \cos(\omega_c t) + n_i(t)$$

y por lo tanto, la potencia de entrada es $S_i = \frac{1}{2} \overline{m^2(t)}$ y la del ruido $N_i = 2\mathcal{N}B$ dado que su PSD es uniforme dentro de una banda de ancho $2B$.

Si multiplicamos por $2 \cos(\omega_c t)$ para demodular, la señal de salida, tras el filtrado, será $y_o(t) = m(t) + n(t)$.

La potencia de la señal de salida es $S_o = \overline{m^2(t)}$ y la del ruido, $N_o = 2\mathcal{N}B$, dado que el proceso de demodulación únicamente traslada el espectro del ruido.

La SNR de salida será, por tanto:

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{\overline{m^2(t)}}{2\mathcal{N}B} = \frac{S_i}{\mathcal{N}B} = \gamma$$

SSB-SC

En este caso, se utilizará un detector síncrono. La señal modulada recibida es:

$$y_i(t) = m(t) \cos(\omega_c t) + m_h(t) \sin(\omega_c t) + n_i(t)$$

Esta señal se puede generar a partir de $2m(t) \cos(\omega_c t)$ suprimiendo la banda no deseada.

La potencia de esta señal es $\overline{2m^2(t)}$, y suprimiendo una de las bandas, resulta una potencia de entrada $S_i = \overline{m^2(t)}$.

Multiplicando la señal recibida por $2 \cos(\omega_c t)$ en el receptor, la señal demodulada (tras el filtrado) será $m(t)$ y la potencia de salida, $S_o = \overline{m^2(t)}$

El ruido de salida es únicamente $N_o = \mathcal{N}B$ dado que ahora el ancho de banda es B en lugar de $2B$.

Por tanto, la SNR de salida es:

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{\overline{m^2(t)}}{\mathcal{N}B} = \frac{S_i}{\mathcal{N}B} = \gamma$$

En el caso de VSB, el incremento del ancho de banda hace que aumenten las potencias de la señal y el ruido de entrada, que se compensan parcialmente generando una SNR similar al caso SSB.

AM

En este caso, consideramos la detección de envolvente como técnica de demodulación. La señal modulada es $y_i(t) = (A + m(t)) \cos(\omega_c t) + n_i(t)$

Si suponemos que el ruido es pequeño y no afecta sustancialmente a la envolvente, tenemos una potencia de entrada,

$$S_i = \frac{\overline{(A + m(t))^2}}{2} = \frac{A^2 + \overline{m^2(t)}}{2} \quad (\text{supuesto que } \overline{m(t)} = 0)$$

El detector de envolvente extrae la señal $m(t)$ una vez bloqueada la constante A , por lo que la potencia de salida es $S_o = \overline{m^2(t)}$.

El ruido de salida es como en el caso de DSB, $N_o = 2\mathcal{N}B$. La SNR de salida es:

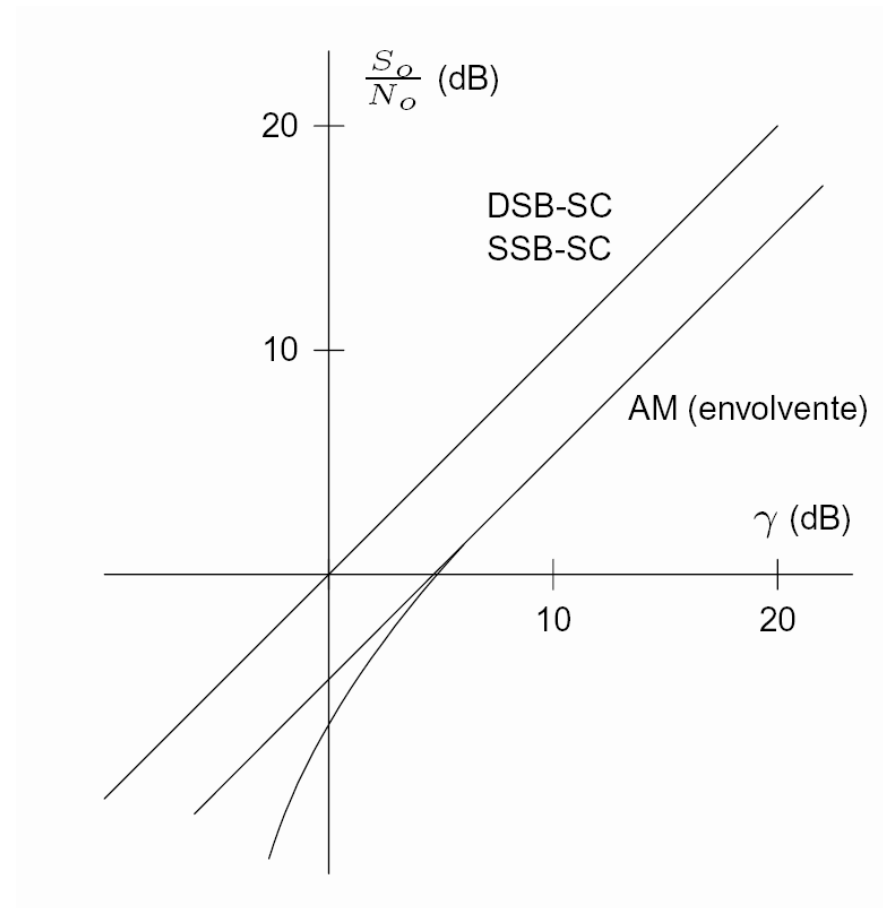
$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{\overline{m^2(t)}}{2\mathcal{N}B} = \frac{\overline{m^2(t)}}{A^2 + \overline{m^2(t)}} \left(\frac{S_i}{\mathcal{N}B} \right) = \frac{\overline{m^2(t)}}{A^2 + \overline{m^2(t)}} \gamma$$

Considerando que $|m(t)| \leq A$ tenemos que $\overline{m^2(t)} \leq A^2$ y por lo tanto,

$$\frac{S_o}{N_o} \leq \frac{\gamma}{2}$$

Caso de gran ruido. Efecto umbral

La aproximación realizada deja de ser válida para el caso de un ruido de potencia elevada. En esta situación, el detector de envolvente genera un ruido multiplicativo que deteriora rápidamente la SNR. Este efecto umbral es similar al visto para la interferencia y se presenta para valores de $\gamma < 10dB$



$$y_i(t) = (A + m(t)) \cos(\omega_c t) + n_i(t) = (A + m(t) + n_c(t)) \cos(\omega_c t) + n_s(t) \sin(\omega_c t)$$

$$= E(t) \cos(\omega_c t + \theta(t))$$

$$E(t) = \sqrt{(A + m(t) + n_c(t))^2 + n_s^2(t)}$$

$$= \sqrt{(A + m(t))^2 + 2n_c(t)(A + m(t)) + n_c^2(t) + n_s^2(t)}$$

$$= \sqrt{A + m(t))^2 + 2n_c(t)(A + m(t)) + E_n^2(t)}$$

$$\approx \sqrt{E_n^2(t) + 2n_c(t)(A + m(t))}$$

$$= \sqrt{E_n^2(t) + 2(A + m(t))E_n(t) \cos(\theta_n(t))} = E_n(t) \sqrt{1 + 2 \frac{A + m(t)}{E_n(t)} \cos(\theta_n(t))}$$

$$\approx E_n(t) + (A + m(t)) \cos(\theta_n(t))$$

donde $E_n(t)$ y $\theta_n(t)$ son la envolvente y la fase del ruido:

$$E_n(t) = \sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t)} \quad \theta_n(t) = -\tan^{-1} \left(\frac{n_s(t)}{n_c(t)} \right)$$

5.9.- Multiplexado por división de frecuencia

