TÉCNICAS ESTADÍSTICAS APLICADAS EN NUTRICIÓN Y SALUD

Contrastes de hipótesis paramétricos para una y varias muestras: contrastes sobre la media, varianza y una proporción. Contrastes sobre la diferencia de medias, razón de varianzas y diferencia de proporciones

Dra. Fátima Olea Serrano
Departamento de Nutrición y Bromatología. UGR

Test *t*-Student

Permite decidir si dos variables aleatorias normales (gausianas) y con la misma varianza tienen medias diferentes.

Puede aplicarse en numerosos contextos, para comprobar si la modificación en las condiciones de un proceso (humano o natural) esencialmente aleatorio producen una elevación o disminución de la media poblacional.

Opera decidiendo si una diferencia en la media muestral entre dos muestras es estadísticamente significativa,

y poder

> afirmar que las dos muestras corresponden a distribuciones de probabilidad de media poblacional distinta,
>
> o
>
> afirmar que la diferencia de medias puede deberse a oscilaciones estadísticas al azar

Condiciones de aplicación del test *t* para dos medias

Las condiciones de aplicación del test *t* para comparar dos medias son:

A) Normalidad o $n > 30$ en cada grupo.

B) Homogeneidad de varianzas.

A) Normalidad

La variable dependiente ha de ser cuantitativa y seguir una distribución normal. Para comprobarlo realizamos los siguientes pasos:

- Cuando tanto n_1 como n_2 son mayores o iguales que 30 se puede presumir que la aproximación a la normal será buena.
- Pero se debe comprobar la normalidad de la variable dependiente si la muestra no es muy grande (menores de 30).

…….Condiciones de aplicación del test *t* para dos medias

I) Comprobar que el máximo y el mínimo queden dentro del intervalo definido por tres desviaciones estándar por encima y por debajo de la media.

Media ± 3 Desv. Estándar

2) Que la asimetría (en valor absoluto) sea menor que dos veces error estándar.

Asimetría < 2 errores estándar de asimetría

3) Que la curtosis (en valor absoluto) sea menor a dos veces su error estándar.

Curtosis < 2 errores estándar de curtosis

Si se cumplen estos tres requisitos en cada grupo, podrá asumirse que su distribución es aproximadamente normal.

Hacerlo en SPSS con explorar o bien con un test de normalidad con SPSS (tests de Kolmogorov-Smirnov con la corrección de Lilliefors o de Shapiro-Wilks). Este test debe realizarse separadamente para cada uno de los dos grupos (llamados "factores", en el menú "explorar" dentro de "estadísticos descriptivos" de SPSS).

B) Homogeneidad de varianzas ("homoscedasticidad")

Comprobar que las varianzas de ambos grupos son iguales.
La prueba F para la homogeneidad de varianzas mostrara la existencia o no de diferencias significativas entre las varianzas.
Se calcula el cociente entre las varianzas de ambos grupos.

$F = \text{Varianza}_{\text{mayor}} / \text{Varianza}_{\text{menor}}$
Buscar en las tablas de la *F* de Snedecor el valor crítico (para $p = 0{,}05$).

Si $p > 0{,}10$, entonces podrá asumirse que las varianzas son homogéneas

Se puede usar el test convencional de la *t* de Student
Hay otros tests para comprobar que las varianzas son homogéneas: test de Barttlet, test de Levene etc.

Como hipótesis nula (H0) las varianzas son iguales.

Si el valor *p* correspondiente al test de Levene es inferior a 0,05, se asume que las varianzas son distintas.

Prueba de Levene

Prueba estadística inferencial utilizada para evaluar la igualdad de las varianzas para una variable calculada para dos o más grupos.

Algunos procedimientos estadísticos comunes asumen que las varianzas de las poblaciones de las que se extraen diferentes muestras son iguales.

H0 varianzas poblacionales son iguales
Si el P-valor resultante de la prueba de Levene es inferior a un cierto nivel de significación (0.05), las varianza no son iguales

La prueba de Levene se utiliza a menudo antes de que una comparación de medias.

Si la prueba de Levene muestra significación, se debe cambiar a pruebas no paramétricas.

Si no se pudiese asumir la normalidad, se intentará una transformación de los datos en sus logaritmos y repetir con la variable transformada todo el proceso.

Si hay asimetría positiva suele mejorar la aproximación a la normal al hacer la transformación logarítmica.

Pero si tampoco se aproxima a la normalidad, se deberá aplicar una prueba no paramétrica, en este caso la U de Mann-Whitney.

Ademas si alguno de los grupos tenga menos de 10 observaciones, es mejor usar directamente la U de Mann-Whitney

TEST DE LA *T* DE STUDENT

La distribución *t* de Student es parecida a la normal y la sustituye cuando no se conoce la desviación estándar poblacional *(*σ *)*

Como casi nunca se suele disponer de σ*,* el uso de la t de Student es muy frecuente.

Si la muestra es elevada («>100), es casi equivalente usar la *t* de Student o la normal. Esta diferencia tiene poca relevancia práctica.

La *t* de Student tiene en cuenta el tamaño de muestra. Hay una t distinta para cada tamaño de la muestra

Los *grados de libertad* son *n*-1 cuando hay una sola muestra, siendo *n* el tamaño de la muestra o *N-2* cuando se comparan dos muestras (siendo *N* la suma de los individuos de los dos grupos), es decir

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) = (n_i + n_2 - 2) = N-2$$

El problema más simple que se puede resolver con la t de Student es con una sola muestra, ésta tendría n-1 grados de libertad

Prueba t para muestra única

En esta prueba se evalúa la hipótesis nula de que la media de la población estudiada es igual a un valor especificado μ_0, se hace uso del estadístico t

donde es la media muestral, es la desviación estándar muestral y n es el tamaño de la muestra.

Los grados de libertad utilizados en esta prueba se corresponden al valor $n - 1$.

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}},$$

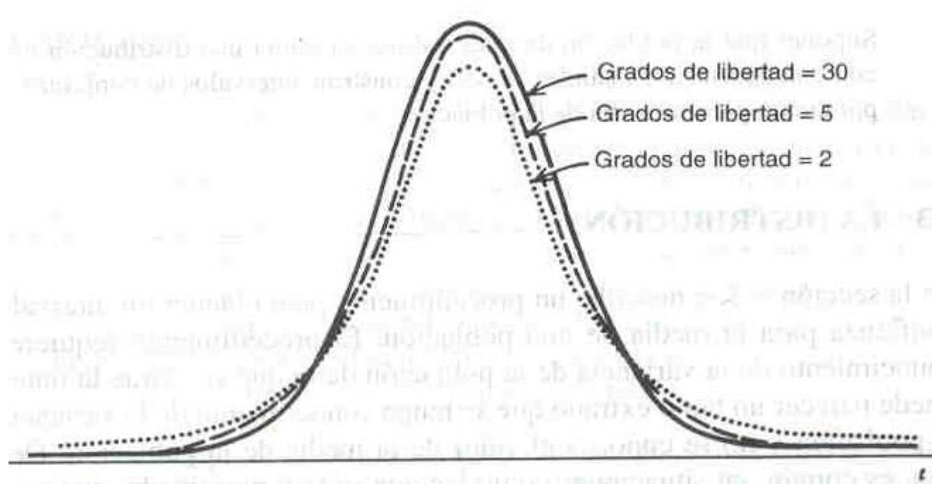


Figura 5.3.1 Distribución *t* para diferentes grados de libertad.

Analizar ➔ comparar medias ➔ prueba t para una muestra

La t de Student tiene en cuenta el tamaño de la muestra.

Hay una t distinta para cada tamaño de muestra

Los grados de libertad son n-1

El problema mas sencillo a aplicar la t de Student es referido a una sola muestra que tendría n-1 grados de libertad.

Hacer un ejemplo .

mg de Fe estimados en 24 horas para un grupo de población

Estadísticos para una muestra

	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Fe	241	11.0261	4.26505	.27474

Prueba para una muestra

	Valor de prueba = 0					
					95% Intervalo de confianza para la diferencia	
	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Inferior	Superior
Fe	40.134	240	.000	11.02614	10.4849	11.5673

COMPARAR UNA MEDIA CON UN VALOR DE REFERENCIA

La prueba t para una muestra efectúa un contraste de hipótesis para comprobar si la media de una variable difiere de forma significativa de un valor que nosotros mismos seleccionamos.

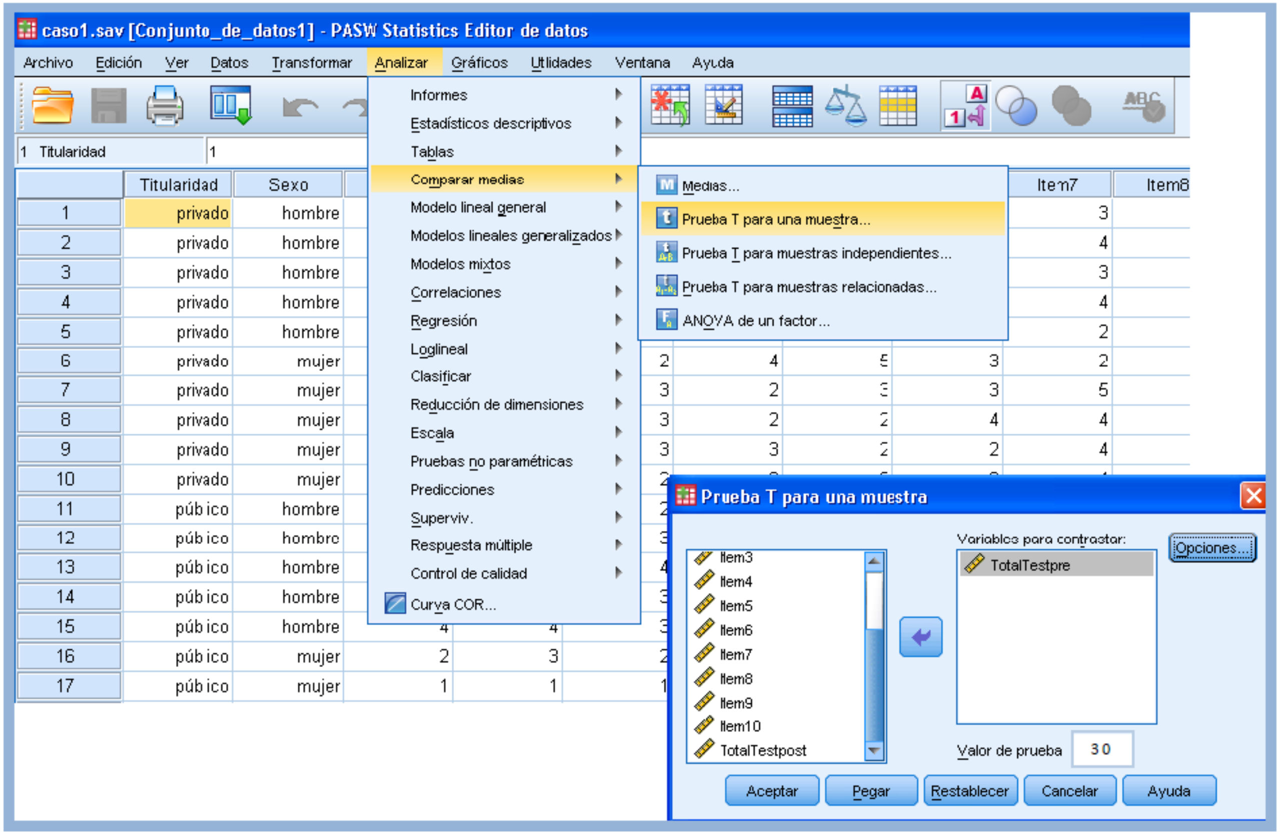
En este caso hay que seleccionar la variable elegida y el valor que queremos contrastar. Al pulsar Aceptar se efectuará el contraste de hipótesis.

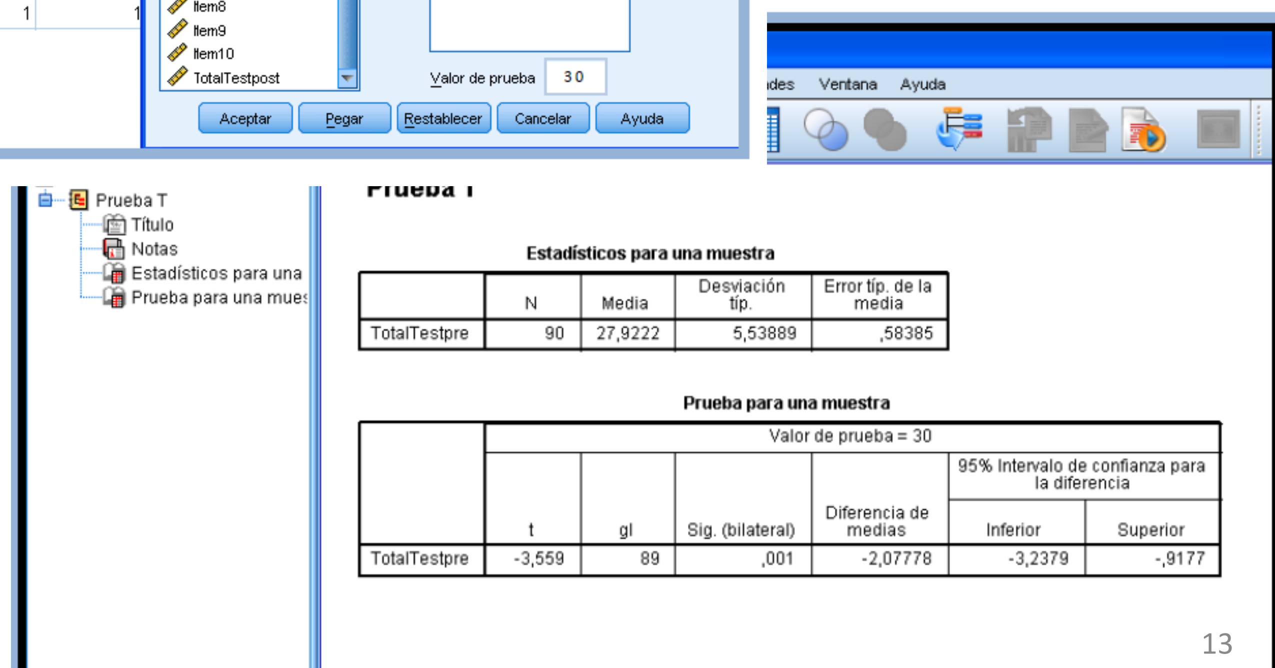
Estadísticos para una muestra

	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
IMC	240	27,1010	5,44395	,35141

Prueba para una muestra

	Valor de prueba = 25					
	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	95% Intervalo de confianza para la diferencia	
					Inferior	Superior
IMC	5,979	239	,000	2,10100	1,4088	2,7933





Estadísticos para una muestra

	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
TotalTestpre	90	27,9222	5,53889	,58385

Prueba para una muestra

	Valor de prueba = 30					
					95% Intervalo de confianza para la diferencia	
	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Inferior	Superior
TotalTestpre	-3,559	89	,001	-2,07778	-3,2379	-,9177

TEST DE LA *T* DE STUDENT PARA DOS MUESTRAS INDEPENDIENTES

Prueba t para dos muestras independientes **Iguales tamaños muestrales, iguales varianzas**

Esta prueba se utiliza solamente cuando:

- los dos tamaños muestrales (esto es, el número, n, de participantes en cada grupo) son iguales;
- se puede asumir que las dos distribuciones poseen la misma varianza.

El estadístico t a probar si las medias son diferentes se puede calcular como sigue:

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_{X_1X_2} \cdot \sqrt{\frac{2}{n}}}$$

$$S_{X_1X_2} = \sqrt{\frac{1}{2}(S_{X_1}^2 + S_{X_2}^2)}$$

$S_{X_1X_2}$ es la desviación estándar combinada, 1 = grupo uno, 2 = grupo 2.

El denominador de t es el error estándar de la diferencia entre las dos medias. Por prueba de significancia, los grados de libertad de esta prueba se obtienen como 2n − 2 donde n es el número de participantes en cada grupo.

Diferentes tamaños muestrales, iguales varianzas

Esta prueba se puede utilizar únicamente si se puede asumir que las dos distribuciones poseen la misma varianza.

El estadístico t si las medias son diferentes puede ser calculado como sigue:

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_{X_1X_2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \qquad S_{X_1X_2} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_{X_1}^2 + (n_2 - 1)S_{X_2}^2}{n_1 + n_2 - 2}}.$$

las fórmulas, son generalizaciones del caso que se da cuando ambas muestras poseen igual tamaño (sustituyendo n por n1 y n2).

En esta fórmula, n = número de participantes, 1 = grupo uno, 2 = grupo dos. n − 1 es el número de grados de libertad para cada grupo, y el tamaño muestral total menos dos (esto es, n1 + n2 − 2) es el número de grados de libertad utilizados para la prueba de significancia.

Si no se puede asumir la normalidad, se realizar la transformación logarítmica de los y se repite con la variable transformada todo el análisis.

Si hay asimetría positiva suele mejorar la aproximación a la normal al hacer la transformación logarítmica.

EJEMPLOS……………………

Pero si tampoco entonces se aproxima a la normalidad, se deberá aplicar una prueba no paramétrica, en este caso la U de Mann-Whitney.

De otra parte si alguno de los grupos tiene menos de 10 observaciones, es mejor usar directamente la U de Mann-Whitney

Diferentes tamaños muestrales, diferentes varianzas

Esta prueba es también conocida como prueba t de Welch y es utilizada únicamente cuando se puede asumir que las dos varianzas poblacionales son diferentes

Los tamaños muestrales pueden o no ser iguales, y por lo tanto deben ser estimadas por separado. El estadístico t a probar cuando las medias poblacionales son distintas puede ser calculado como sigue:

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{s_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}} \qquad s_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}.$$

Aquí s_2 es el estimador sin sesgo de la varianza de las dos muestras,
n = número de participantes,
1 = grupo uno, 2 = grupo dos.
En este caso no es la varianza combinada.

Test *t* para dos medias independientes con varianzas heterogéneas (test **de Welch)**

Este test es más robusto que el de varianzas homogéneas y es preferible por muchas propiedades, requiere hacer dos modificaciones a lo anteriormente visto.

1.- En el denominador de la *t* de Student, en vez de usar una única varianza ponderada, se deben usar las varianzas de cada grupo separadamente para calcular el error estándar.

2.- Los grados de libertad (g.l.*) ya no son *N-2,* sino que deben calcularse usando una fórmula más compleja

Prueba t dependiente para muestras apareadas

Esta prueba se utiliza cuando las muestras son dependientes

- cuando se trata de una única muestra que ha sido evaluada dos veces (muestras repetidas)

- cuando las dos muestras han sido emparejadas o apareadas

$$t = \frac{\overline{X}_D - \mu_0}{s_D / \sqrt{n}}.$$

La diferencia D entre todos los pares tiene que ser calculada.
Los pares se forman ya sea con resultados de una persona antes y después de la evaluación o entre pares de personas emparejadas en grupos de significancia

(por ejemplo, tomados de la misma familia o grupo de edad: véase la tabla).

Media (X_D) y la desviación estándar (s_D)

Constante μ_0 es diferente de cero
Los grados de libertad utilizados son n − 1.

Pasos a dar en un test t para dos medias (varianzas homogéneas)

A. Estimación de la varianza conjunta.

la muestra total está dividida en dos grupos. La estimación de la varianza conjunta de los dos grupos es la varianza ponderada s^2, dada por la siguiente fórmula:

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$$

B. Cálculo de la diferencia entre las dos medias. El cálculo de la diferencia de medias se realiza mediante una simple sustracción o resta:

$$x_1 - x_2$$

C. Cálculo del error estándar de la diferencia de medias (EEDM).

$$\text{EEDM} = \sqrt{s^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

D. Test de la t de Student En vez de utilizar la distribución normal, se usa una t de Student

A medida que el tamaño de muestra se hace mayor, la *t* de Student se parece más a la Normal

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

E. Comparar con las tablas de la t de Student.

Conocido el valor de t, compararlo con el que aparece en las tablas para *N-2* grados de libertad.

Si el valor de *t* obtenido es mayor que el que aparece en las tablas Se rechaza la hipótesis nula y sí hay diferencias significativas entre ambas medias.

Si el valor de *t* inferior al que aparece en las tablas no se rechazará la hipótesis nula y no hay diferencias significativas

Intervalo de confianza para la diferencia de medias

Solo hemos calculado: "existen diferencias significativas" o "no existen diferencias significativas".

Para estimar la magnitud de la diferencia entre ambos grupos, se soluciona calculando unos límites de confianza a la diferencia de medias

Vamos a asumir que las varianzas sean homogéneas.

La expresión es parecida al intervalo de confianza para una media, pero en vez de utilizar una media se utiliza una diferencia de medias y en vez del error estándar de la media, se usa el error estándar de la diferencia de medias (EEDM)

Test *t* para comparar las medias de dos grupos independientes con SPSS

1.- Comprobar la normalidad si alguno de los dos grupos tiene menos de 30 observaciones.

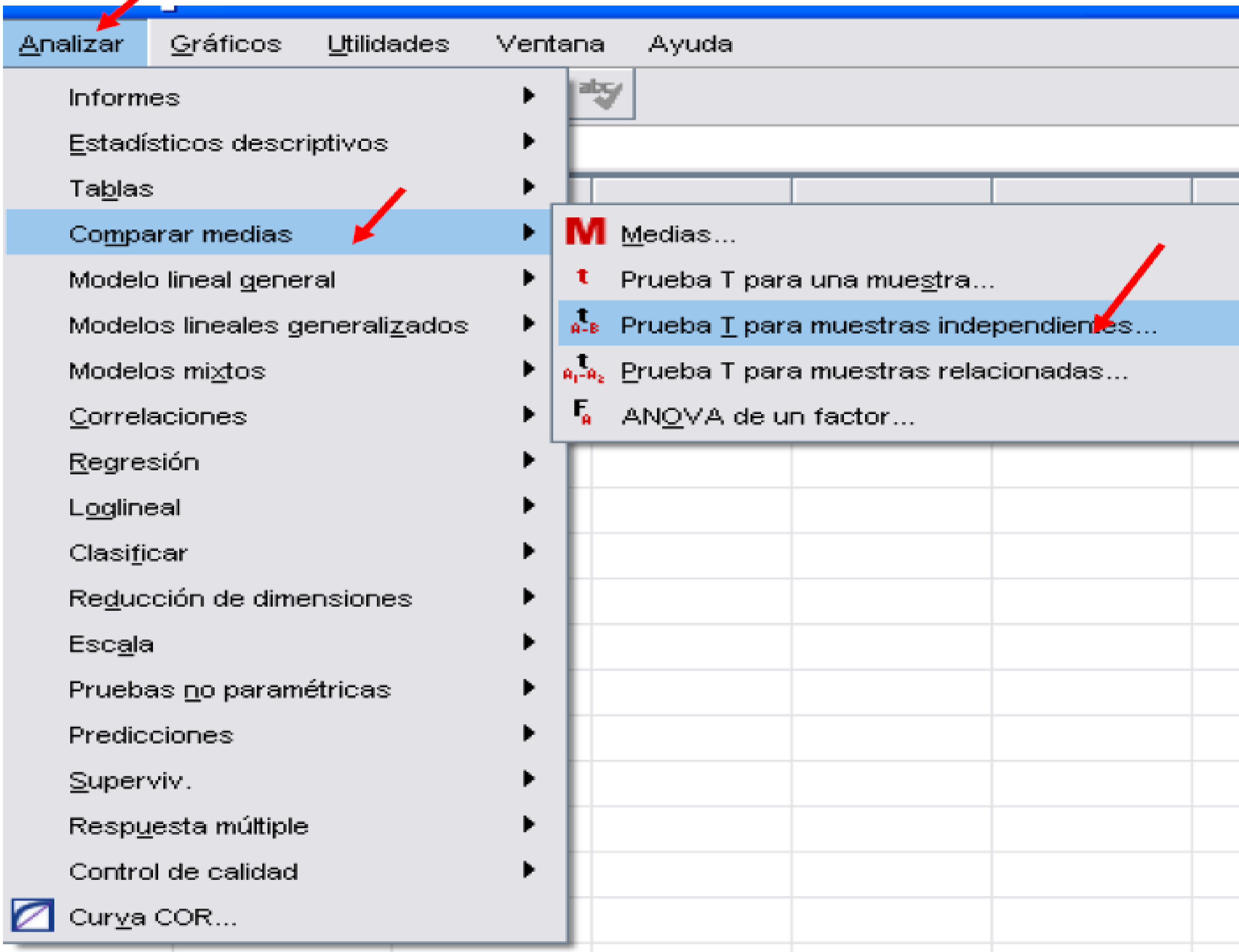
En el menú "Explorar" se debe estratificar por la variable que define los grupos, es decir, se pedirán "Gráficos con pruebas de normalidad" separadamente para cada grupo.

Examinar si la curtosis y la asimetría son inferiores (en valor absoluto) al doble de sus respectivos errores estándar, y si el máximo y el mínimo valor quedan dentro del rango comprendido por la media ± 3 desviaciones estándar.

Test *t* para dos medias (datos no emparejados), se seleccionará dentro del menú

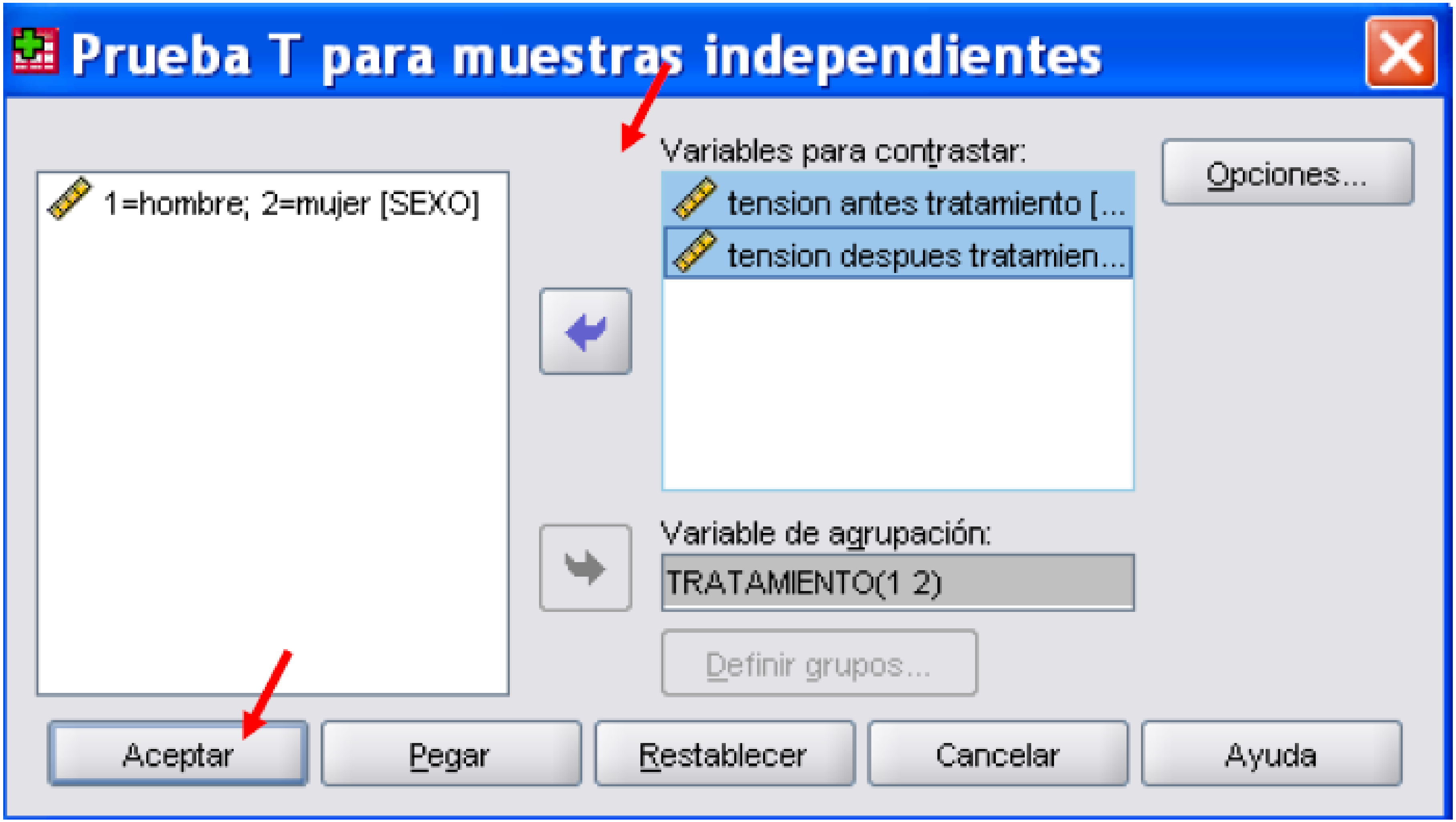
"Analizar", la opción "Comparar Medias" y —dentro de ella— la "Prueba T para muestras independientes".

- Prueba T para muestras independientes…



Seleccionamos la variable tratamiento y definimos los grupos:


Prueba T para muestras independientes
tension antes tr
tension despue
1=hombre; 2=m
Opciones...
Definir grupos
Usar valores especificados
Grupo 1:
1
Grupo 2:
2
Punto de corte:
Continuar
Cancelar
Ayuda
Aceptar
Pegar
Restablecer
Cancelar
Ayuda



Nuestros resultados

Comparación de medias entre grupos

Estadísticos de grupo

	Sexo	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
IMC	Masculino	87	26,7364	4,26134	,45686
	Femenino	153	27,3083	6,01716	,48646

La hipótesis nula del test de Levene es la homoscedasticidad (igualdad de varianzas).

la significación estadística (p = 0,003) informa de que las varianzas no son iguales (homogéneas).

Si éste valor p fuese superior a 0,05 se consideraría que las varianzas son iguales.

		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias						
									95% Intervalo de confianza para la diferencia	
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ. de la diferencia	Inferior	Superior
IMC	Se han asumido varianzas iguales	9,328	,003	-,782	238	,435	-,57191	,73159	-2,01313	,86931
	No se han asumido varianzas iguales			-,857	226,688	,392	-,57191	,66736	-1,88693	,74310

Sexo				Estadístico	Error típ.
IMC	Masculino	Media		26,7364	,45686
		Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	25,8282	
			Límite superior	27,6446	
		Media recortada al 5%		26,7794	
		Mediana		26,9598	
		Varianza		18,159	
		Desv. típ.		4,26134	
		Mínimo		15,94	
		[illegible]		35,64	
		Rango		19,70	
		Amplitud intercuartil		6,14	
		Asimetría		-,133	,258
		Curtosis		-,534	,511
	Femenino	Media		27,3083	,48646
		Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	26,3472	
			Límite superior	28,2694	
		Media recortada al 5%		26,9854	
		Mediana		26,6272	
		Varianza		36,206	
		Desv. típ.		6,01716	
		Mínimo		16,23	
		Máximo		45,16	
		Rango		28,93	
		Amplitud intercuartil		8,56	
		Asimetría		,737	,196
		Curtosis		,389	,390

Asimetría < 2 errores estándar de asimetría

explorar

Si p es menor de 0,05 no se sigue una distribución normal
Si p es mayor de 0,05 se sigue una distribución normal

Sexo		Kolmogorov-Smirnov[a] Estadístico	gl	Sig.	Shapiro-Wilk Estadístico	gl	Sig.
IMC	Masculino	,053	87	,200*	,990	87	,783
	Femenino	,071	153	,060	,959	153	,000

La prueba de Kolmogórov-Smirnov, es una prueba no paramétrica que se utiliza para determinar la bondad de ajuste de dos distribuciones de probabilidad entre sí.

<u>En el caso de que queramos verificar la normalidad de una distribución</u>, la prueba de Lilliefors conlleva algunas mejoras con respecto a la de Kolmogórov-Smirnov; y, en general, el test de Shapiro–Wilk o la prueba de Anderson-Darling son alternativas más potentes.

La prueba Kolmogórov-Smirnov es más sensible a los valores cercanos a la mediana que a los extremos de la distribución.

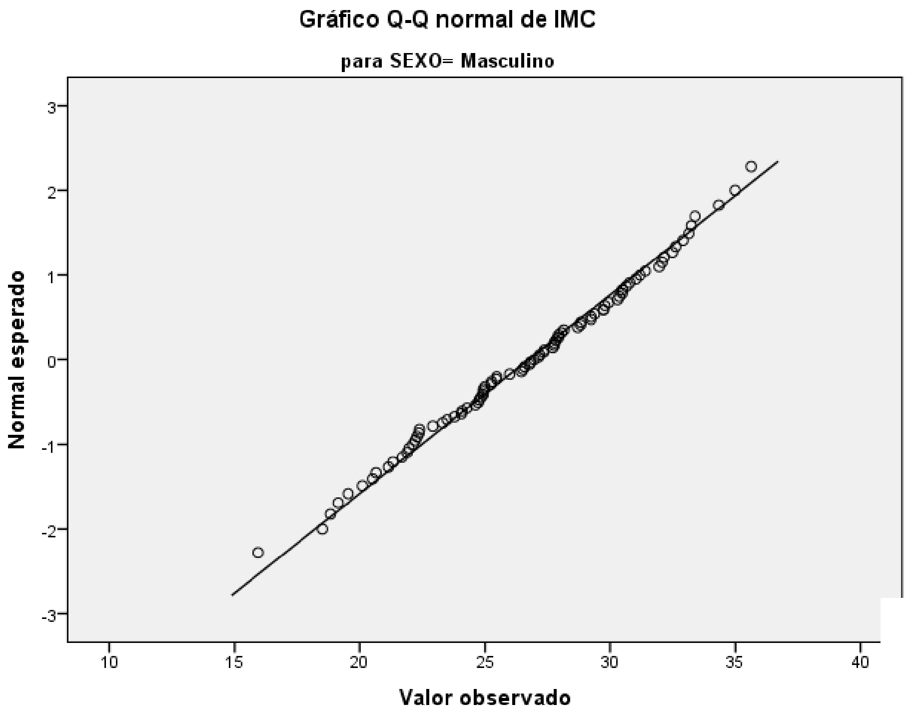


Gráfico Q-Q normal de IMC
para SEXO= Masculino
Normal esperado
Valor observado
3
2
1
0
-1
-2
-3
10
15
20
25
30
35
40

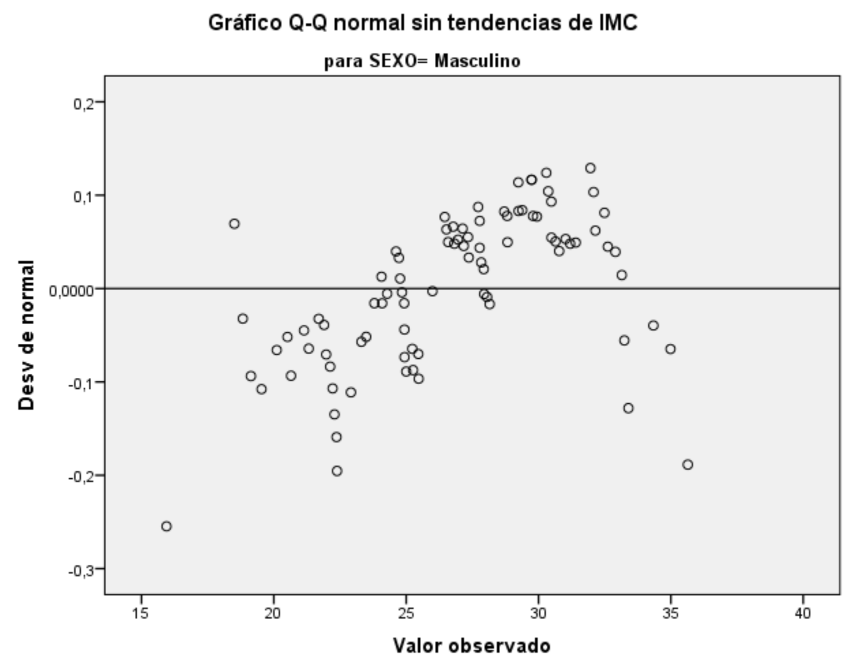


Gráfico Q-Q normal sin tendencias de IMC
para SEXO= Masculino
Desv de normal
Valor observado
0,2
0,1
0,0000
-0,1
-0,2
-0,3
15
20
25
30
35
40

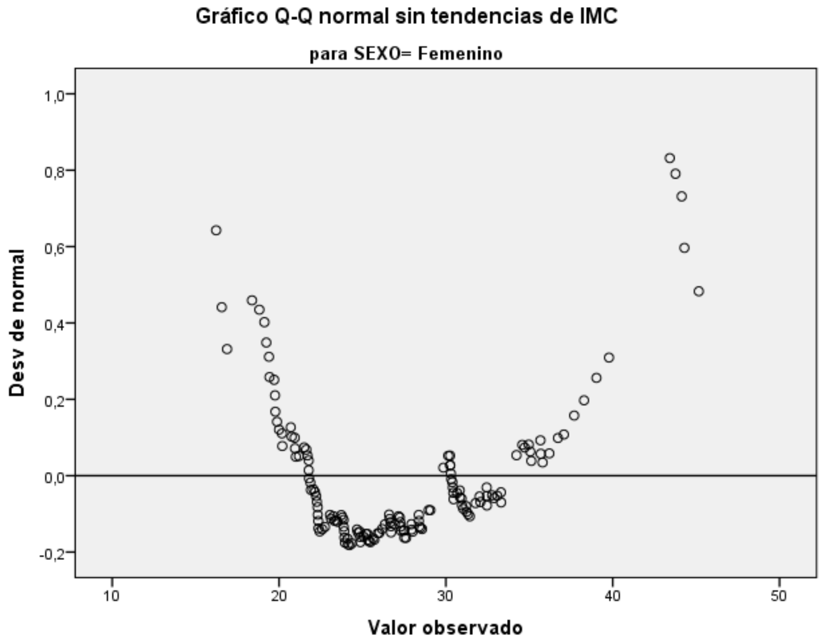
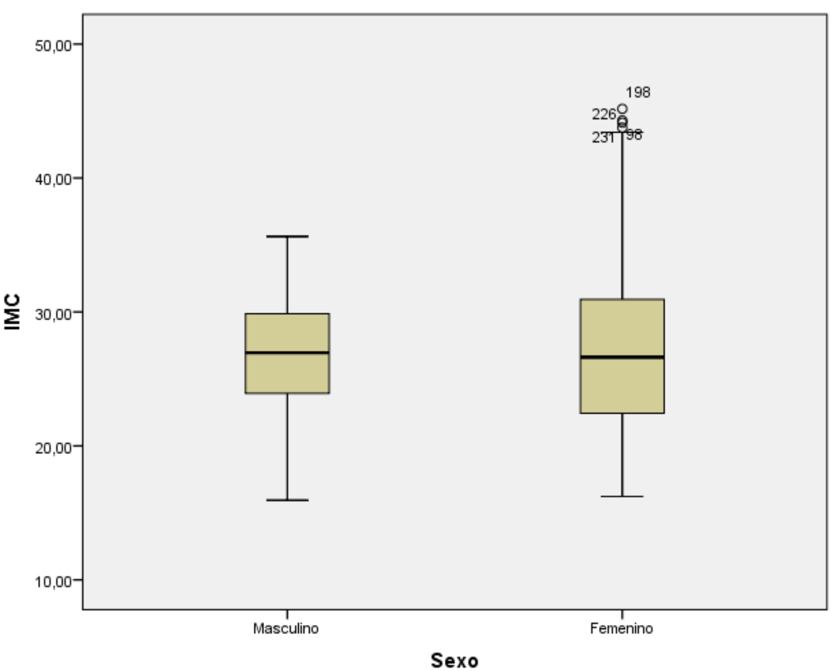


Gráfico Q-Q normal sin tendencias de IMC
para SEXO= Femenino
Desv de normal
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
-0,2
10
20
30
40
50
Valor observado


IMC
50,00
40,00
30,00
20,00
10,00
198
226
231
96
Masculino
Femenino
Sexo

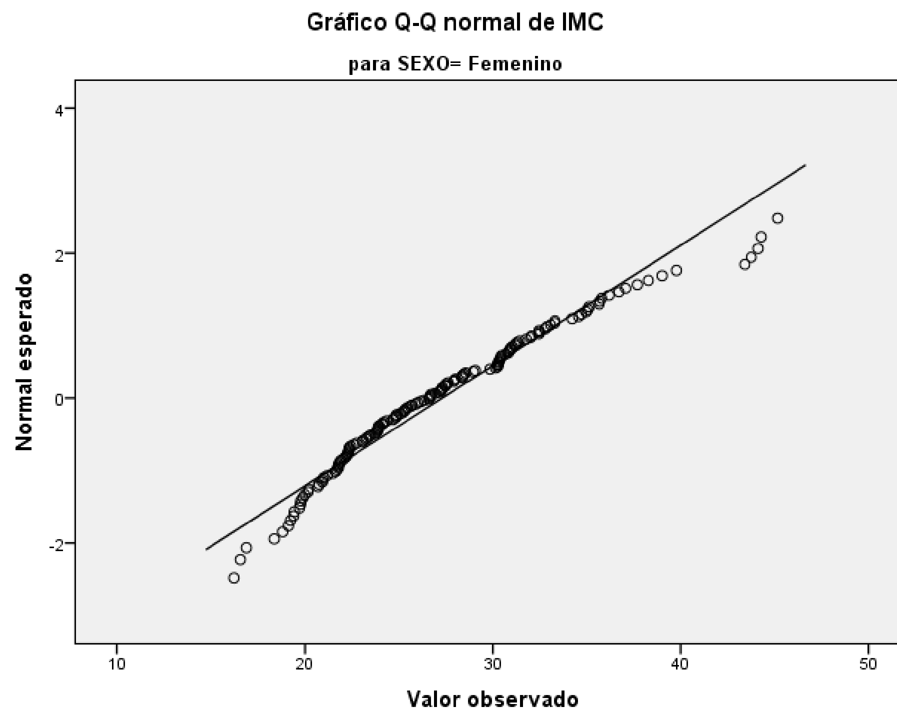
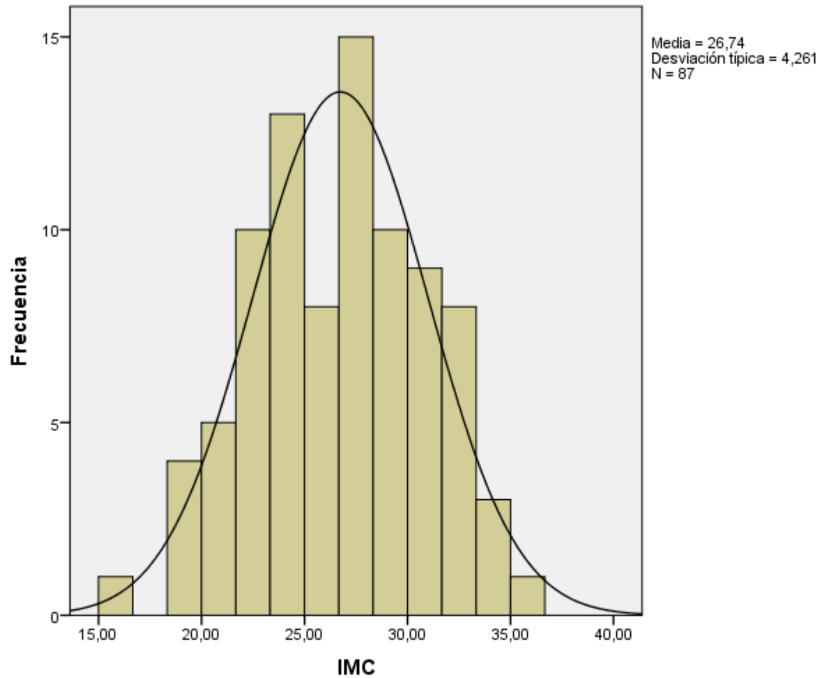
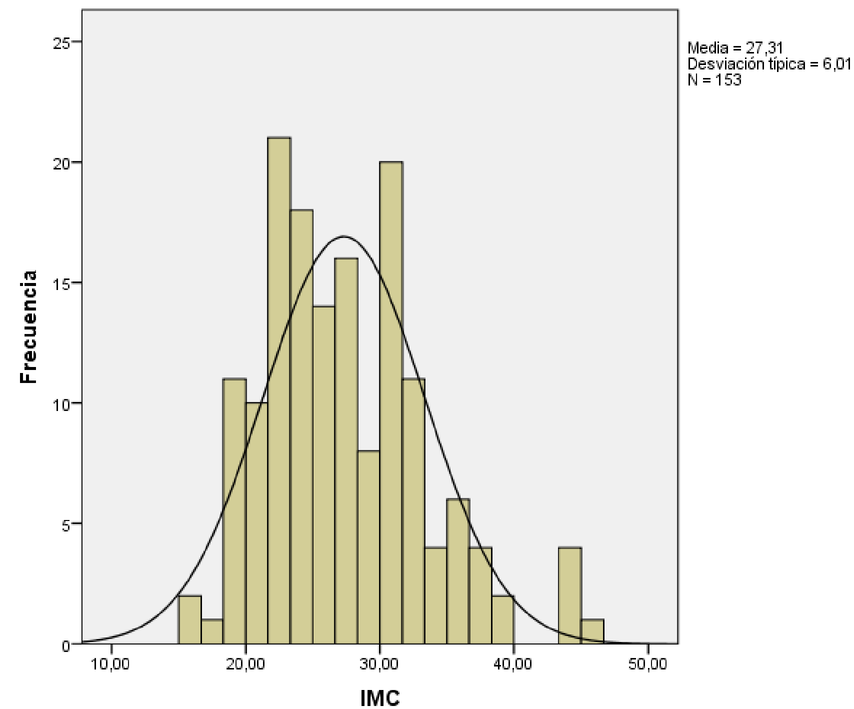


Gráfico Q-Q normal de IMC
para SEXO= Femenino
Normal esperado
4
2
0
-2
10
20
30
40
50
Valor observado



hombres



mujeres

Test de la t de Student para dos muestras independientes

Hay diferencias significativas entre el IMC según sexo?

Prueba t para dos muestras independientes

	Sexo	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
IMC	Hombre	160	20.6564	4.10296	.32437
	Mujer	118	20.1914	3.84860	.35429

		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias						
									95% Intervalo de confianza para la diferencia	
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ. de la diferencia	Inferior	Superior
IMC	Se han asumido varianzas iguales	.434	.511	.959	276	.339	.465	.485	-.489	1.419
	No se han asumido varianzas iguales			.968	260.609	.334	.465	.480	-.480	1.411