Tema 6
Algunos modelos de distribuciones continuas

1. Distribución uniforme continua

Esta es la más sencilla de las distribuciones continuas, y surge al considerar una variable aleatoria que toma valores equiprobables en un intervalo finito, y su nombre se debe al hecho de que la densidad de probabilidad de esta variable aleatoria es uniforme sobre todo su intervalo de definición.

En el caso discreto, la distribución uniforme era aquella que asignaba la misma probabilidad a un conjunto finito de puntos. Esta idea puede ser extendida al caso continuo, en el que el rango de la variable debe ser un subconjunto de $\mathbb{R}$ de longitud no nula.

Una extensión natural del caso discreto será asignar a cada subconjunto con medida no nula una probabilidad proporcional a la medida de ese conjunto (es decir, asignar igual probabilidad a intervalos de igual longitud).

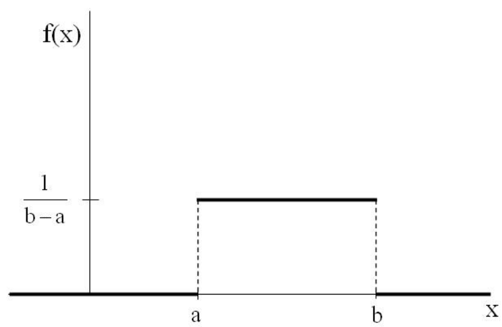
A continuación pasamos a definir la distribución uniforme para un intervalo cerrado $[a, b]$, aunque podríamos considerar igualmente $[a, b)$, $(a, b]$ o (a, b), pues, como sabemos, para variables aleatorias continuas, el valor de la función de densidad en un número finito de puntos es irrelevante.

Definición

Diremos que una variable aleatoria X, de tipo continuo, tiene una **distribución uniforme** en el intervalo $[a, b]$, con $-\infty < a < b < +\infty$, si su función de densidad es constante en dicho intervalo o, equivalentemente:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , \quad a \leq x \leq b \\ \\ 0 & , \quad \text{en el resto} \end{cases}$$

Lo denotaremos por $X \backsim U(a, b)$, en donde a y b son los parámetros de la distribución.



Es evidente que $f(x)$ es función de densidad, pues es no negativa y verifica que

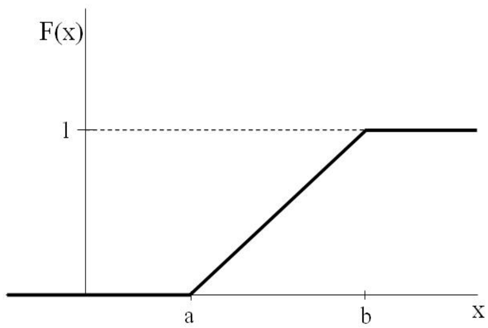
$$\int_a^b \frac{1}{b-a}dx = \left[\frac{x}{b-a}\right]_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

Si hubieramos impuesto $f(x) = k,\ a \leq x \leq b$, evidentemente se hubiera deducido que $k = \frac{1}{b-a}$.

Función de distribución:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 0 & , \quad x < a \\ \\ \dfrac{x-a}{b-a} & , \quad a \leq x < b \\ \\ 1 & , \quad x \geq b \end{cases}$$

cuya representación gráfica es



Definición alternativa

Diremos que una variable aleatoria X sigue una **distribución uniforme** en el intervalo $[a, b]$ si la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor en cualquier subintervalo es proporcional a la longitud del subintervalo.

Momentos no centrados:

$$m_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \ f(x) \ dx = \int_a^b x^k \ \frac{1}{b-a} \ dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_a^b = \frac{1}{b-a} \ \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$$

de donde se deduce

Media: $E[X] = \dfrac{a+b}{2}$ (punto medio del intervalo)

Varianza: $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$, que se obtiene a partir de los momentos centrados de orden dos y uno.

Función generatriz de momentos:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{e^{tx}}{t}\right]_a^b = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}, \quad t \neq 0.$$

Si $t = 0$, entonces se tiene

$$\text{lím}_{t\to 0} \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)} = \lim_{t\to 0} \frac{be^{tb}-ae^{ta}}{(b-a)} = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

Luego existe $\forall t \in \mathbb{R}$.

La distribución uniforme proporciona una representación adecuada para redondear las diferencias que surgen al medir cantidades físicas entre los valores observados y los reales. Por ejemplo, si el peso de una persona se redondea al kg. más cercano, entonces, la diferencia entre éste y el peso verdadero será algún valor entre $-0{,}5$ y $0{,}5$ kg. Es común que el error de redondeo se encuentre distribuido uniformemente en el intervalo $(-0{,}5, 0{,}5)$.

Como caso particular, cuando $a = 0$ y $b = 1$ tenemos la distribución U(0,1), de gran utilidad en la práctica, como se puede comprobar con la transformada integral de probabilidad, y que juega un papel muy importante en la generación de números aleatorios de ciertas distribuciones.

Transformada integral de probabilidad

Si X es una variable aleatoria continua con función de distribución F, entonces la variable aleatoria $Y = F(X)$ tiene distribución $U(0,1)$.

Aplicando este resultado, es posible simular valores aleatorios de cualquier variable aleatoria continua a partir de valores aleatorios de una distribución uniforme en el intervalo (0,1); basta aplicar a dichos valores la inversa de la función de distribución de la variable que queremos simular.

Ejemplo:

El tiempo en minutos que tarda un señor para ir de su casa al trabajo oscila de forma uniforme entre 20 y 30. Si debe llegar al trabajo a las 8 de la mañana, ¿a qué hora debe salir de su casa para tener una probabilidad de 0.9 de no llegar tarde?

Si X denota el tiempo en ir de casa al trabajo (en minutos), su distribución es U(20,30). Buscamos el valor de a tal que $P\{X \leq a\} = 0{,}9$. Pero

$$P\{X \leq a\} = F_X(a) = \frac{a-20}{30-20} = \frac{a-20}{10} = 0{,}9 \Longrightarrow a = 29.$$

Por tanto, debe salir de casa a las 7h 31m.

El tiempo medio que tarda en ir de casa al trabajo es de 25 minutos, y la desviación típica de 2.88 minutos.

2. Distribución Normal

La distribución normal es la más importante y la de mayor uso en la Teoría de la Probabilidad y la Estadística Matemática. Fue obtenida inicialmente por De Moivre en 1733 como límite de la distribución binomial, siendo luego relegada al olvido hasta que Gauss en 1809 y Laplace en 1812 la obtuvieron empíricamente al estudiar la distribución de errores accidentales en Astronomía y Geodesia (de ahí que se conozca también como distribución de Gauss-Laplace).

Esta distribución es la piedra angular en la aplicación de la Inferencia Estadística en el análisis de datos, puesto que las distribuciones de muchos estadísticos muestrales tienden a la distribución normal cuando el tamaño de la muestra crece. Además, la distribución normal proporciona una adecuada representación de las distribuciones de una gran cantidad de variables físicas (de hecho, el nombre de *normal* tiene carácter histórico, ya que, en un principio se creyó que la mayoría de las distribuciones eran de este tipo). Algunos ejemplos son:

- Datos meteorológicos como la temperatura, lluvias, etc.
- Mediciones efectuadas en organismos vivos: altura, peso, etc.
- Calificaciones en pruebas de aptitud.
- Medidas físicas de productos manufacturados, etc.

Definición

Una variable aleatoria X, de tipo continuo, se dice que sigue una distribución normal si su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\ \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < \infty$$

Se notará $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Los parámetros de la distribución, μ y σ^2 verifican $\mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma^2 > 0$ y determinan completamente dicha función de densidad. Posteriormente se probará que estos parámetros son la media y desviación típica, respectivamente, de la variable aleatoria X.

Algunas de las propiedades de dicha función, útiles para obtener su representación gráfica, son

1. $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

2. Es simétrica respecto de $x = \mu$, es decir $f(\mu - x) = f(\mu + x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

3. Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ dado que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

4. $f(x)$ es creciente para $x < \mu$ y decreciente para $x > \mu$, dado que $f'(x) = -\frac{x-\mu}{\sigma^2} f(x)$, que es positiva si $x < \mu$ y negativa si $x > \mu$.

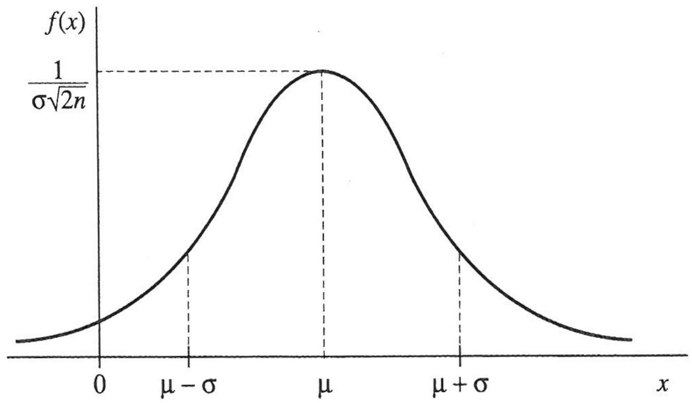
5. $f(x)$ tiene un máximo en $x = \mu$ y vale $f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

6. Es convexa ($f''(x) > 0$) para $x < \mu - \sigma$ y $x > \mu + \sigma$, cóncava ($f''(x) < 0$) para $\mu - \sigma < x < \mu + \sigma$ y en los puntos $x = \mu - \sigma$ y $x = \mu + \sigma$ tiene puntos de inflexión. Esto se deduce

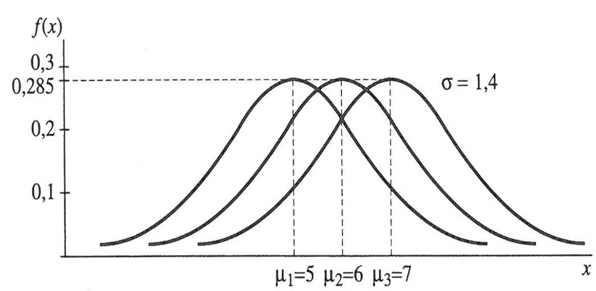
de que $f(x) > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ y

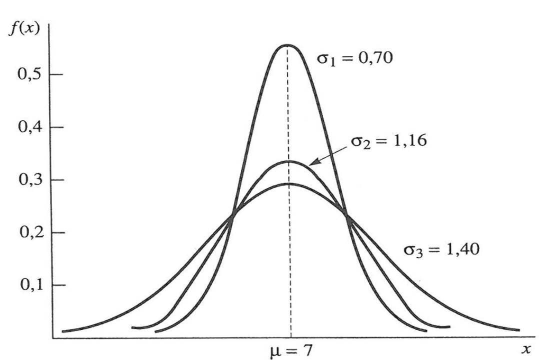
$$f''(x) = -\frac{1}{\sigma^2} f(x) + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4} f(x).$$

Visto todo lo anterior, su representación gráfica queda como sigue:



Los siguientes gráficos muestran la función de densidad normal para diferentes valores de μ y σ





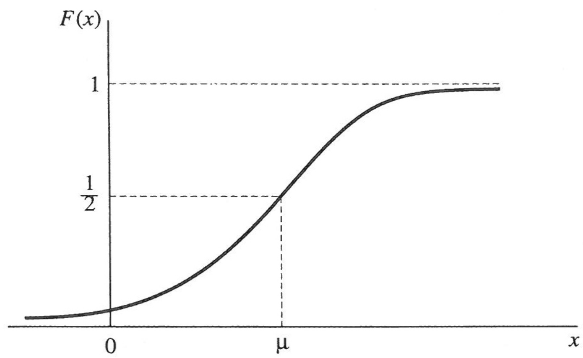
La forma es de campana y de ahí que usualmente se la conozca como *campana de Gauss*. Además se observa que el parámetro μ corresponde al máximo y al centro de la distribución y el parámetro σ influye en la apertura y aplastamiento o apuntamiento de la curva. Además μ es la moda y, al ser simétrica, coincide con la media y la mediana.

La **función de distribución** de la variable aleatoria X es

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

y coincide con el área entre la curva $y = f(x)$ y el eje de abscisas entre $-\infty$ y x

La representación gráfica de la función de distribución es



Función generatriz de momentos:

$$\mathrm{M}_X(t) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{tX}] = \mathrm{e}^{t\mu}\mathrm{E}[\mathrm{e}^{t(X-\mu)}] = \frac{\mathrm{e}^{t\mu}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{t(x-\mu)-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx$$

$$= \frac{e^{t\mu}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(x-\mu)^2-2\sigma^2 t(x-\mu)]} dx = \frac{\mathrm{e}^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}[x-(\mu+t\sigma^2)]^2} dx = \frac{\mathrm{e}^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}\sigma$$

con lo que

$$\mathrm{M}_X(t) = \mathrm{e}^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Media y varianza:

Teniendo en cuenta la expresión que nos permite obtener los momentos no centrados a partir de la función generatriz de momentos

$$m_r = \mathrm{E}[X^r] = \mathrm{M}_X^{r)}(t)\Big|_{t=0}$$

se obtienen, en particular, la media

$$\mathrm{E}[X] = \mu$$

que, para esta distribución, coincide con la **moda** y la **mediana**; el momento no centrado de orden dos,

$$\mathrm{E}[X^2] = \sigma^2 + \mu^2,$$

de donde, la varianza es

$$\mathrm{Var}[X] = \sigma^2.$$

Relación entre la $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ y la $\mathcal{N}(0, 1)$. Tipificación

Para el caso particular $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ se obtiene la $\mathcal{N}(0, 1)$, denominada distribución **normal tipificada o estándar** cuya función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \qquad -\infty < x < \infty$$

y su función de distribución

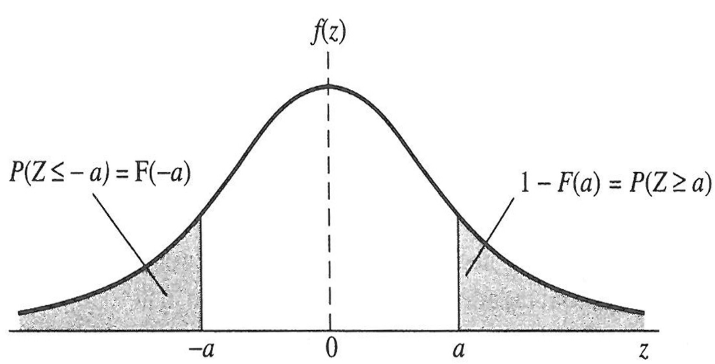
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

que verifica la siguiente propiedad

$$F(-x) = 1 - F(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En efecto, puesto que la función de densidad de la $\mathcal{N}(0, 1)$ verifica $f(-x) = f(x)$ (simétrica con respecto a $x = 0$) se tiene

$$F(-x) = \int_{-\infty}^{-x} f(u)du = \int_{x}^{+\infty} f(u)du = 1 - F(x).$$



Propiedad. Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ y sea $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ otra variable aleatoria obtenida a partir de X. Entonces $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ y se cumple

$$F_X(x) = F_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

$$F(z) = \mathrm{P}[Z \leq z] = \mathrm{P}\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \leq z\right] = \mathrm{P}[X \leq \mu + \sigma z] \qquad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$F_Z(z) = F_X(\mu + \sigma z)$$

y derivando

$$f_Z(z) = \sigma f_X(\mu + \sigma z) = \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(\mu+\sigma z-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}$$

que es la función de densidad de la $\mathcal{N}(0,1)$. Además

$$F_X(x) = \mathrm{P}[X \leq x] = \mathrm{P}\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right] = \mathrm{P}\left[Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right] = F_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

De forma totalmente análoga se prueba que si Z es una variable aleatoria $\mathcal{N}(0,1)$, entonces la variable aleatoria $X = \mu + \sigma Z$ tiene una distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\forall \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$.

A la transformación de la variable aleatoria X

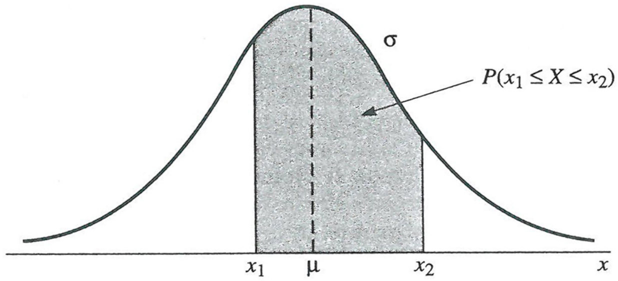
$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

se le denomina **tipificación** de la variable y a la nueva variable Z **variable tipificada**. La importancia de esta transformación es que la variable Z así obtenida tiene distribución $\mathcal{N}(0,1)$, lo cual va a facilitar el cálculo de probabilidades para una distribución normal cualquiera ya que sólo está tabulada la $\mathcal{N}(0,1)$.

Cálculo de probabilidades asociado a una distribución normal. Manejo de tablas
La probabilidad de que una variable aleatoria $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ esté comprendida entre dos valores x_1 y x_2 se calcula como

$$\mathrm{P}[x_1 \leq X \leq x_2] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

y corresponde al área bajo la curva función de densidad entre los valores x_1 y x_2.



La dificultad de resolver integrales de funciones de densidad normales nos lleva a la utilización de tablas de áreas bajo la curva normal, pero sería imposible disponer de tablas para todos los posibles valores de μ y σ. Teniendo en cuenta el proceso de tipificación de una variable aleatoria

$$\mathrm{P}[x_1 \leq X \leq x_2] = \mathrm{P}\left[\frac{x_1 - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right]$$

con $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Por ello para el cálculo de probabilidades asociadas a una variable con distribución normal nos basta con disponer de tablas de la distribución $\mathcal{N}(0,1)$.

En nuestro caso, vamos a manejar una tabla de la distribución normal estándar que contiene los valores de su función de distribución para valores positivos, es decir, $P[Z \leq a]$ con $a \geq 0$. A partir de dicha tabla también se podrán calcular directamente aquellos valores $a \geq 0$ para los cuales aparezcan la $P[Z \leq a]$. Notemos que todas las probabilidades que aparecen en la tabla son mayores o iguales a 0.5, al no aparecer valores de la función de distribución para valores negativos.

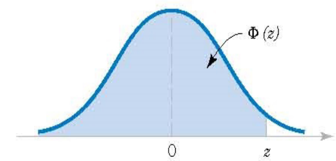
A partir de dicha tabla también se puede obtener, para valores $a \geq 0$:

- $P[Z \geq a] = 1 - P[Z \leq a]$
- $P[Z \leq -a] = P[Z \geq a] = 1 - P[Z \leq a]$
- $P[Z \geq -a] = P[Z \leq a]$
- $P[|Z| \leq a] = P[-a \leq Z \leq a] = P[Z \leq a] - P[Z \leq -a] = 2P[Z \leq a] - 1$

Como hemos comentado con anterioridad, se puede obtener de forma directa el valor de a tal que $P[Z \leq a]$ sea uno de los valores de probabilidad que aparecen en la tabla (entre 0.5 y 1). Para otras opciones, se usará la propiedad de simetría ya comentada.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE UNA N(0,1) PARA VALORES POSITIVOS

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500000	0.503989	0.507978	0.511967	0.515953	0.519939	0.532922	0.527903	0.531881	0.535856
0.1	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.555760	0.559618	0.563559	0.567495	0.571424	0.575345
0.2	0.579260	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706	0.602568	0.606420	0.610261	0.614092
0.3	0.617911	0.621719	0.625516	0.629300	0.633072	0.636831	0.640576	0.644309	0.648027	0.651732
0.4	0.655422	0.659097	0.662757	0.666402	0.670031	0.673645	0.677242	0.680822	0.684386	0.687933
0.5	0.691462	0.694974	0.698468	0.701944	0.705401	0.708840	0.712260	0.715661	0.719043	0.722405
0.6	0.725747	0.729069	0.732371	0.735653	0.738914	0.742154	0.745373	0.748571	0.751748	0.754903
0.7	0.758036	0.761148	0.764238	0.767305	0.770350	0.773373	0.776373	0.779350	0.782305	0.785236
0.8	0.788145	0.791030	0.793892	0.796731	0.799546	0.802338	0.805106	0.807850	0.810570	0.813267
0.9	0.815940	0.818589	0.821214	0.823815	0.826391	0.828944	0.831472	0.833977	0.836457	0.838913
1.0	0.841345	0.843752	0.846136	0.848495	0.850830	0.853141	0.855428	0.857690	0.859929	0.862143
1.1	0.864334	0.866500	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976	0.878999	0.881000	0.882977
1.2	0.884930	0.886860	0.888767	0.890651	0.892512	0.894350	0.896165	0.897958	0.899727	0.901475
1.3	0.903199	0.904902	0.906582	0.908241	0.909877	0.911492	0.913085	0.914657	0.916207	0.917736
1.4	0.919243	0.920730	0.922196	0.923641	0.925066	0.926471	0.927855	0.929219	0.930563	0.931888
1.5	0.933193	0.934478	0.935744	0.936992	0.938220	0.939429	0.940620	0.941792	0.942947	0.944083
1.6	0.945201	0.946301	0.947384	0.948449	0.949497	0.950529	0.951543	0.952540	0.953521	0.954486
1.7	0.955435	0.956367	0.957284	0.958185	0.959071	0.959941	0.960796	0.961636	0.962462	0.963273
1.8	0.964070	0.964852	0.965621	0.966375	0.967116	0.967843	0.968557	0.969258	0.969946	0.970621
1.9	0.971283	0.971933	0.972571	0.973197	0.973810	0.974412	0.975002	0.975581	0.976148	0.976705
2.0	0.977250	0.977784	0.978308	0.978822	0.979325	0.979818	0.980301	0.980774	0.981237	0.981691
2.1	0.982136	0.982571	0.982997	0.983414	0.983823	0.984222	0.984614	0.984997	0.985371	0.985738
2.2	0.986097	0.986447	0.986791	0.987126	0.987455	0.987776	0.988089	0.988396	0.988696	0.988989
2.3	0.989276	0.989556	0.989830	0.990097	0.990358	0.990613	0.990863	0.991106	0.991344	0.991576
2.4	0.991802	0.992024	0.992240	0.992451	0.992656	0.992857	0.993053	0.993244	0.993431	0.993613
2.5	0.993790	0.993963	0.994132	0.994297	0.994457	0.994614	0.994766	0.994915	0.995060	0.995201
2.6	0.995339	0.995473	0.995604	0.995731	0.995855	0.995975	0.996093	0.996207	0.996319	0.996427
2.7	0.996533	0.996636	0.996736	0.996833	0.996928	0.997020	0.997110	0.997197	0.997282	0.997365
2.8	0.997445	0.997523	0.997599	0.997673	0.997744	0.997814	0.997882	0.997948	0.998012	0.998074
2.9	0.998134	0.998193	0.998250	0.998305	0.998359	0.998411	0.998462	0.998511	0.998559	0.998605
3.0	0.998650	0.998694	0.998736	0.998777	0.998817	0.998856	0.998893	0.998930	0.998965	0.998999
3.1	0.999032	0.999065	0.999096	0.999126	0.999155	0.999184	0.999211	0.999238	0.999264	0.999289
3.2	0.999313	0.999336	0.999359	0.999381	0.999402	0.999423	0.999443	0.999462	0.999481	0.999499
3.3	0.999517	0.999533	0.999550	0.999566	0.999581	0.999596	0.999610	0.999624	0.999638	0.999650
3.4	0.999663	0.999675	0.999687	0.999698	0.999709	0.999720	0.999730	0.999740	0.999749	0.999758
3.5	0.999767	0.999776	0.999784	0.999792	0.999800	0.999807	0.999815	0.999821	0.999828	0.999835
3.6	0.999841	0.999847	0.999853	0.999858	0.999864	0.999869	0.999874	0.999879	0.999883	0.999888
3.7	0.999892	0.999896	0.999900	0.999904	0.999908	0.999912	0.999915	0.999918	0.999922	0.999925
3.8	0.999928	0.999931	0.999933	0.999936	0.999938	0.999941	0.999943	0.999946	0.999948	0.999950
3.9	0.999952	0.999954	0.999956	0.999958	0.999959	0.999961	0.999963	0.999964	0.999966	0.999967

Áreas notables:

Las áreas más importantes, por su aplicación, para una distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ son

1) Área comprendida en el intervalo de extremos $\mu \pm \sigma$

$$\mathrm{P}[\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma] = \mathrm{P}\left[\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right] = \mathrm{P}[-1 \leq Z \leq 1]$$

$$= \mathrm{P}[Z \leq 1] - \mathrm{P}[Z \leq -1] = 2\mathrm{P}[Z \leq 1] - 1 = 2 \times 0{,}8413 - 1 = 0{,}6826.$$

2) Área comprendida en el intervalo de extremos $\mu \pm 2\sigma$

$$\mathrm{P}[\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma] = \mathrm{P}\left[\frac{\mu - 2\sigma - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{\mu + 2\sigma - \mu}{\sigma}\right] = \mathrm{P}[-2 \leq Z \leq 2]$$

$$= \mathrm{P}[Z \leq 2] - \mathrm{P}[Z \leq -2] = 2\mathrm{P}[Z \leq 2] - 1 = 2 \times 0{,}97723 - 1 = 0{,}9544.$$

3) Área comprendida en el intervalo de extremos $\mu \pm 3\sigma$

$$\mathrm{P}[\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma] = \mathrm{P}\left[\frac{\mu - 3\sigma - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{\mu + 3\sigma - \mu}{\sigma}\right] = \mathrm{P}[-3 \leq Z \leq 3]$$

$$= \mathrm{P}[Z \leq 3] - \mathrm{P}[Z \leq -3] = 2\mathrm{P}[Z \leq 3] - 1 = 2 \times 0{,}9987 - 1 = 0{,}9974.$$

También es interesante la obtención de intervalos simétricos respecto de la media que contienen una determinada masa de probabilidad (es decir, la variable pertenece a ellos con una determinada probabilidad). Por ejemplo, para el 50 %, se tiene

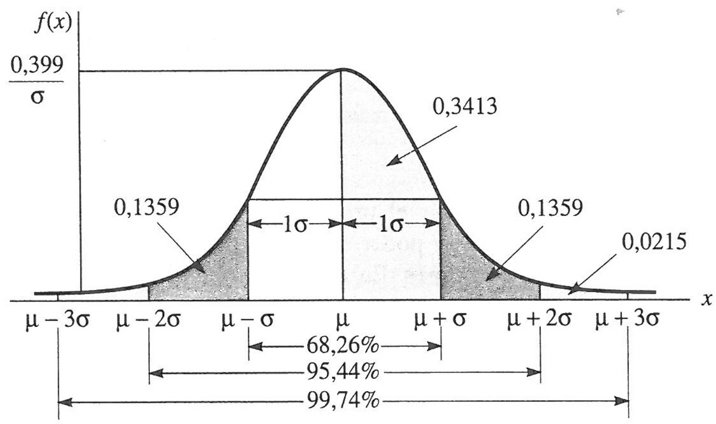
$$\mathrm{P}[-a \leq Z \leq a] = 0{,}5 \Rightarrow 2\mathrm{P}[Z \leq a] - 1 = 0{,}5$$

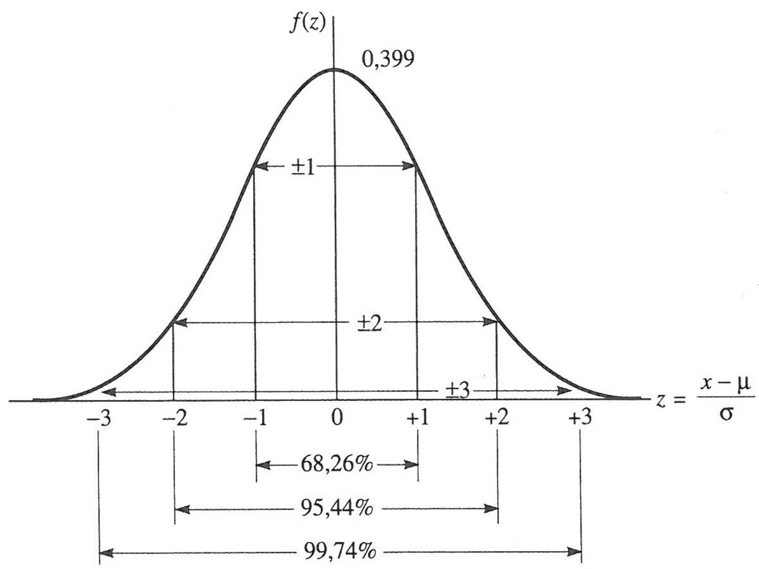
$$\Rightarrow \mathrm{P}[Z \leq a] = 0{,}75 \Rightarrow a = 0{,}6744898.$$

Así, para una distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mathrm{P}[\mu - 0{,}6744898\sigma \leq X \leq \mu + 0{,}6744898\sigma] = 0{,}5$.

Para el 95 %, intervalo es $(\mu - 1{,}96\sigma, \mu + 1{,}96\sigma)$ (realmente, el valor es 1.959964, pero se aproxima por 1.96) y para el 99 %, $(\mu - 2{,}58\sigma, \mu + 2{,}58\sigma)$ (realmente, el valor es 2.575829, pero se aproxima por 2.58).

Los resultados anteriores quedan de manifiesto en los gráficos de la siguiente página.


f(x)
0,399/σ
0,3413
0,1359
1σ
1σ
0,1359
0,0215
x
μ − 3σ
μ − 2σ
μ − σ
μ
μ + σ
μ + 2σ
μ + 3σ
68,26%
95,44%
99,74%


f(z)
0,399
±1
±2
±3
z = (x − μ)/σ
−3
−2
−1
0
+1
+2
+3
68,26%
95,44%
99,74%

Aproximaciones

Aproximación normal a la binomial

Teorema de De Moivre-Laplace

Sea X una variable aleatoria con distribución $B(n,p)$ y Z la variable aleatoria definida por

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

Entonces se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[Z \leq z] = \Phi(z) \qquad \forall z \in \mathbb{R},$$

siendo Φ la función de distribución de una $\mathcal{N}(0,1)$, es decir, para n suficientemente grande podemos aproximar la función de distribución de una distribución $B(n,p)$ por la de una $\mathcal{N}(np, np(1-p))$.

Dado que la normal es una distribución de tipo continuo, el uso directo de la aproximación anterior puede conducir a graves errores ya que asignaría probabilidad cero a puntos aislados y a los extremos de intervalos cerrados. Se usa la siguiente corrección (*corrección por continuidad*)

$$\mathrm{P}[X = k] = \mathrm{P}\left[k - \frac{1}{2} \leq X \leq k + \frac{1}{2}\right] = \mathrm{P}\left[\frac{k - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z \leq \frac{k + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right] \quad \forall k = 0, 1, \cdots, n$$

En el caso de un intervalo cerrado por la derecha se sumará 0,5 en el extremo superior y si es cerrado por la izquierda se restará 0,5 antes de tipificar y aproximar por la normal.

Nota: Mediante el uso del ordenador es posible calcular probabilidades asociadas a la binomial sin tener que recurrir a la aproximación comentada. En caso de usarse, se recomienda que se cumplan las siguientes condiciones $np > 5, p \leq 0{,}5$ o $n(1-p) > 5, p > 0{,}5$.

Aproximación normal a la Poisson

Sea X una variable aleatoria con distribución de Poisson $P(\lambda)$ y la variable aleatoria Z definida por

$$Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}.$$

Entonces se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[Z \leq z] = \Phi(z) \qquad \forall z \in \mathbb{R},$$

siendo Φ la función de distribución de una $\mathcal{N}(0,1)$, es decir, para n suficientemente grande podemos aproximar la distribución de una distribución $P(\lambda)$ por la de una $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$.

De nuevo el error cometido al aproximar una variable aleatoria discreta por una continua se corrige de la forma

$$\mathrm{P}[X=k]=\mathrm{P}\left[k-\frac{1}{2}\leq X\leq k+\frac{1}{2}\right]=\mathrm{P}\left[\frac{k-\frac{1}{2}-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\leq Z\leq\frac{k+\frac{1}{2}-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right]\quad\forall k=0,1,\cdots$$

La corrección para intervalos cerrados es análoga al caso de la binomial.

Nota: Mediante el uso del ordenador es posible calcular probabilidades asociadas a la Poisson sin tener que recurrir a la aproximación comentada. En caso de usarse, se recomienda que se cumpla la condición $\lambda\geq 10$.

ANEXO 1

Cálculo directo de la media en una distribución normal:

$$E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}x\ f(x)\ dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\ \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ dx=\left|\begin{array}{l}\frac{x-\mu}{\sigma}=y\\ x-\mu=\sigma y\rightarrow x=\sigma y+\mu\\ dx=\sigma\ dy\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma y)\frac{1}{\sigma}\ \mathrm{e}^{-y^2/2}\sigma\ dy=\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2/2}dy+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}y\ \mathrm{e}^{-y^2/2}dy=$$

$$=\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left[-\mathrm{e}^{-y^2/2}\right]_{-\infty}^{+\infty}=\mu+0=\mu.$$

Cálculo directo de la varianza en una distribución normal:

$$Var(X)=E[X-E(X)]^2=E[X-\mu]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\ f(x)\ dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\ \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ dx=\left|\begin{array}{l}\frac{x-\mu}{\sigma}=y\\ x-\mu=\sigma y\rightarrow x=\sigma y+\mu\\ dx=\sigma\ dy\end{array}\right|=$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\ \mathrm{e}^{-y^2/2}dy=\left|\begin{array}{ll}y=u & dy=du\\ y\ \mathrm{e}^{-y^2/2}=dv & v=-\mathrm{e}^{-y^2/2}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left\{\left[-y\ \mathrm{e}^{-y^2/2}\right]_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2/2}dy\right\}=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}(0+\sqrt{2\pi})=\sigma^2.$$

3. Distribución gamma

Es una distribución con numerosos usos, entre los que se encuentra el siguiente: supongamos que una pieza metálica se encuentra sometida a cierta fuerza, de manera que se romperá después de aplicar un número específico de ciclos de fuerza. Si los ciclos ocurren de manera independiente y a una frecuencia promedio, entonces el tiempo que transcurre antes de que el material se rompa es una variable aleatoria con distribución gamma.

Previamente al estudio de distribución, vamos a definir la **función gamma** que será de utilidad posteriormente:
Se define la *función gamma* y la representaremos por $\Gamma(p)$ como

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx, \qquad p > 0$$

la cual, se puede demostrar que es continua y converge para $p > 0$.

Algunas propiedades son

a) $\Gamma(1) = 1$

b) $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1), \quad p > 1.$

c) Si $p \in \mathbb{Z}^+$, $\Gamma(p) = (p-1)!.$

d) Si $a > 0$,

$$\int_0^\infty x^{p-1} \mathrm{e}^{-ax} dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p}$$

e) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$

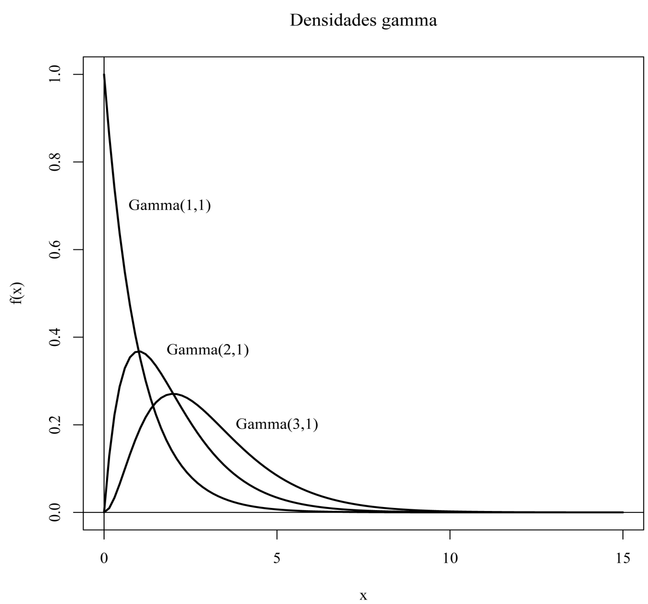
Definición

Se dice que una variable aleatoria de tipo continuo, sigue una distribución gamma de parámetros $p > 0$ y $a > 0$ si su función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} \mathrm{e}^{-ax} & x > 0 \\ \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

y se indicará como $X \sim \Gamma(p, a)$.

Gráficas



La distribución gamma tiene muchas aplicaciones a experimentos o fenómenos aleatorios que tienen asociadas variables aleatorias que siempre son no negativas y cuyas distribuciones son sesgadas a la derecha, es decir, el área bajo la función de densidad disminuye a medida que nos alejamos del origen.
La forma de la función de densidad difiere claramente si $p \leq 1$ y para $p > 1$; además, en este último caso presenta máximos en los puntos $x = \frac{p-1}{a}$.
Al parámetro p se le suele llamar **parámetro forma** y al parámetro a, **parámetro escala**.

Ejemplos y/o aplicaciones

- Intervalos de tiempo entre dos fallos de un motor.
- Intervalos de tiempo entre dos llegadas de automóviles a una gasolinera.
- Tiempos de vida de sistemas electrónicos.

Algunas de sus características son:

- **Función de distribución**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \dfrac{a^p}{\Gamma(p)} \displaystyle\int_0^x t^{p-1} \mathrm{e}^{-at} dt & x > 0 \end{cases}$$

- **Momentos no centrados**

$$\mathrm{E}[X^r] = \frac{\Gamma(p+r)}{a^r\Gamma(p)}$$

en particular, la **media**

$$\mathrm{E}[X] = \frac{p}{a}$$

- **Varianza**. A partir del momento no centrado de orden dos $\mathrm{E}[X^2] = p(p+1)/a^2$,

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{p}{a^2}$$

- **Función generatriz de momentos**

$$M(t) = \left(1 - \frac{t}{a}\right)^{-p} = \left(\frac{1}{1-t/a}\right)^{p} \qquad t < a$$

- **Otra propiedades de interés**:
  - Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, entonces $X^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2)$ (la demostración es un simple cambio de variable).

Casos particulares

- **Distribución chi-cuadrado**.

$$X \sim \chi^2(n) \equiv \Gamma(n/2, 1/2), \quad n \in \mathbb{N} \text{ (grados de libertad).}$$

Hay que remarcar, principalmente, sus propiedades en relación con la distribución normal (si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, entonces $X^2 \sim \Gamma(1/2,1/2) \equiv \chi^2(1)$)).

- **Distribución exponencial**.

$$X \sim \mathrm{Exp}(a) \equiv \Gamma(1, a), \quad a > 0$$

Su función de densidad es

$$f(x) = a\mathrm{e}^{-ax}, \quad x > 0$$

y su función de distribución

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-ax}, \quad x > 0$$

Todas sus características se obtienen, por tanto, a partir de la gamma. En particular,

$$E[X] = \frac{1}{a}, \qquad Var[X] = \frac{1}{a^2}$$

Remarcamos dos importantes propiedades de esta distribución:

1) Relación con la Poisson: Sirve para representar el tiempo de espera entre dos ocurrencias consecutivas de un suceso cuando las ocurrencias se dan de forma independiente a lo largo del tiempo. Más concretamente, si el número de ocurrencias en un intervalo de longitud t sigue una distribución $\mathcal{P}(\lambda t)$, el tiempo de espera entre dos ocurrencias consecutivas (o hasta la primera ocurrencia) tiene una distribución $Exp(\lambda)$.

Sean

$$X_t \sim \mathcal{P}(\lambda t), \qquad T : \text{tiempo de espera entre dos ocurrencias}$$

entonces,

$$P[T \leq t] = P[X_t \geq 1] = 1 - P[X_t = 0] = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

Ejemplos.- Intervalo de tiempo entre dos fallos de un motor, entre llegadas de autómóviles a una gasolinera.

Ejercicio: En un párking público se ha observado que los coches llegan aleatoria e independientemente a razón de 360 coches por hora.

a) Utilizando la distribución exponencial calcular la probabilidad de que el próximo coche no llegue dentro de medio minuto.

b) Calcular la misma probabilidad anterior usando la distribución de Poisson.

a) Sea X el tiempo (en minutos) que transcurren entre dos llegadas consecutivas. Dado que el parámetro a y la variable deben estar expresadas en las mismas unidades

$$a = \frac{360}{60} = 6 \text{ coches por minuto.}$$

Así, $X \sim Exp(6)$ y la probabilidad pedida $P[X \geq 0{,}5]$ se calcula como

$$P[X \geq 0{,}5] = e^{-ax} = e^{-6 \cdot 0{,}5} = e^{-3} = 0{,}049$$

b) Si definimos la variable Y como el número de coches que llegan en el próximo medio minuto. Entonces $Y \sim P(3)$, y la probabilidad pedida será

$$P[Y=0] = e^{-3}\frac{3^0}{0} = 0{,}049.$$

2) Propiedad de olvido o falta de memoria (similar a la de la distribución geométrica)

$$\mathrm{P}[X > t + x | X > t] = \mathrm{P}[X > x], \qquad x, t > 0.$$

En efecto,

$$\mathrm{P}[X > t + x | X > t] = \frac{\mathrm{P}[X > t + x]}{\mathrm{P}[X > t]} = \frac{e^{-a(x+t)}}{e^{-at}} = e^{-ax} = \mathrm{P}[X > x], \qquad x, t > 0.$$

Ejemplos.- La duración de un fusible de un equipo electrónico no depende del tiempo que lleve colocado el fusible. La probabilidad de que una cabina de teléfono ocupada se desocupe en un intervalo de tiempo es independiente del tiempo que lleve ocupada.

- **Distribución de Erlang**. Corresponde a una variable aleatoria con distribución gamma cuyo parámetro p sea un entero positivo.

$$Erlang(n, a) \equiv \Gamma(n, a), \quad n \in \mathbb{N}, a > 0$$

Es una generalización de la exponencial ($Exp(a) \equiv Erlang(1, a)$) y de forma análoga, existe una relación entre los modelos de la distribución de Poisson y de Erlang. Si el número de sucesos aleatorios independientes que ocurren en un intervalo de tiempo es una variable de Poisson de parámetro λ, entonces el tiempo que transcurre hasta la k-ésima ocurrencia (o entre una determinada ocurrencia hasta la k-ésima siguiente) tiene distribución de Erlang de parámetros k y λ.

ANEXO 2

Demostración de las propiedades de la función gamma:

a) $\Gamma(1) = 1$. Evidente.
b) $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1), \quad p > 1$. En efecto, integrando por partes, tomando

$$u = x^{p-1}, \qquad du = (p-1)x^{p-2}dx$$

$$dv = \mathrm{e}^{-x}dx, \qquad v = -\mathrm{e}^{-x}$$

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}dx = \left[-x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty (p-1)x^{p-2}\mathrm{e}^{-x}dx$$

$$= (p-1)\int_0^\infty x^{p-2}\mathrm{e}^{-x}dx = (p-1)\Gamma(p-1), \qquad p > 1$$

c) Uniendo a) y b) si $p \in \mathbb{Z}^+$, $\Gamma(p) = (p-1)!$.
d) Si $a > 0$,

$$\int_0^\infty x^{p-1}\mathrm{e}^{-ax}dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p}$$

En efecto, haciendo el cambio de variable

$$ax = u, \qquad dx = \frac{du}{a}$$

se obtiene

$$\int_0^\infty x^{p-1}\mathrm{e}^{-ax} = \int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{a^{p-1}}\mathrm{e}^{-u}\frac{du}{a} = \frac{1}{a^p}\int_0^\infty u^{p-1}\mathrm{e}^{-u}du = \frac{1}{a^p}\Gamma(p)$$

e) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
En efecto

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-1/2}\mathrm{e}^{-x}dx$$

y haciendo el cambio de variable

$$x = \frac{u^2}{2}, \qquad dx = udu$$

se obtiene

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}du = \sqrt{2}\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\sqrt{\pi}$$

4. Distribución beta

Es una distribución que permite generar una gran variedad de perfiles y se utiliza principalmente para representar variables físicas cuyos valores se encuentran restringidos a un intervalo de longitud finita y para obtener ciertas cantidades que se conocen como límites de tolerancia (en Inferencia no paramétrica) sin necesidad de la hipótesis de normalidad. Además, la distribución beta juega un papel importante en la Inferencia Bayesiana.

Previamente al estudio de distribución, vamos a definir la función beta que será de utilidad posteriormente:
Para $p, q > 0$ se define la *función beta* y la representaremos por $\beta(p, q)$ como

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \qquad p,q>0$$

la cual, se puede demostrar que es convergente para valores de $x \in (0,1)$ para $p, q > 0$.

Algunas propiedades son

a) $\beta(p, q) = \beta(q, p)$ (la demostración se basa en un simple cambio de variable $y = 1 - x$)

b) $\beta(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

La distribución beta tiene muchas aplicaciones a experimentos o fenómenos aleatorios que tienen asociadas variables aleatorias que representen proporciones (valores entre cero y uno).

Definición

Se dice que una variable aleatoria de tipo continuo, sigue una distribución beta de parámetros $p > 0$ y $q > 0$ si su **función de densidad** es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta(p,q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1} & 0 < x < 1 \\ \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

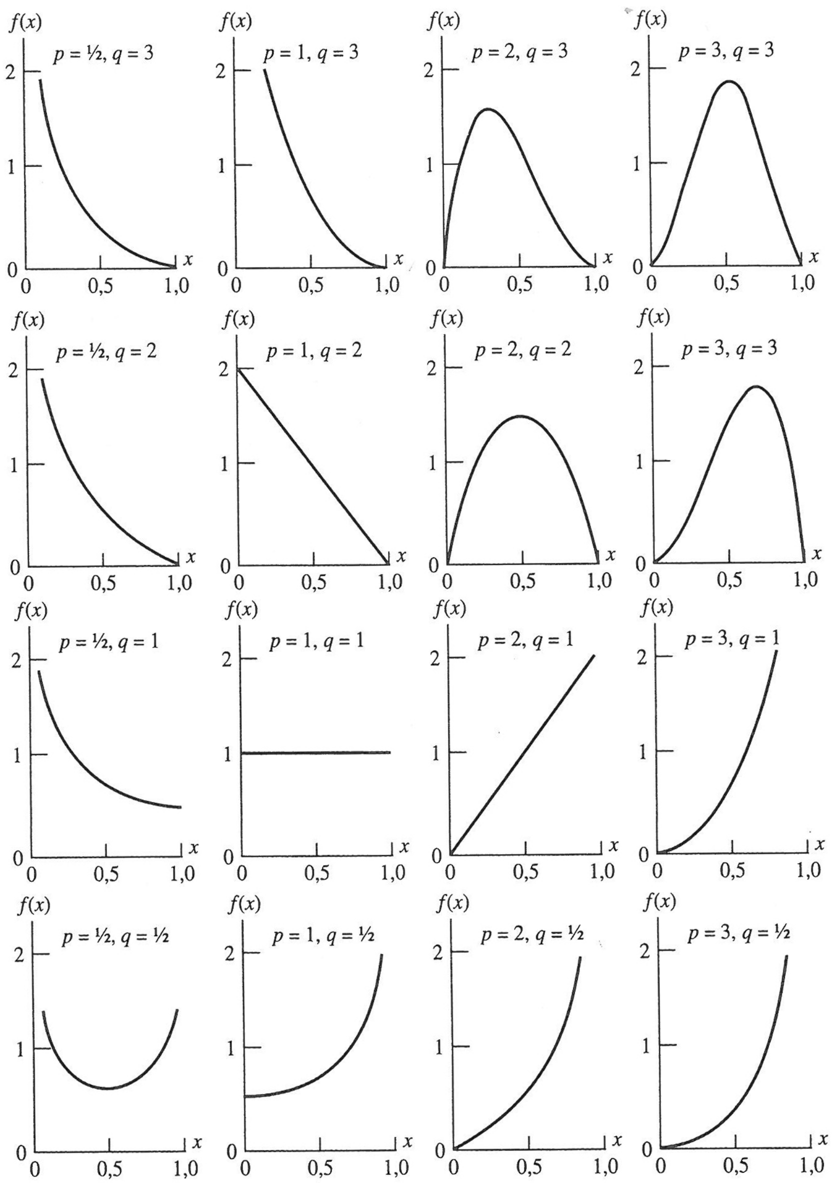
o bien,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1} & 0 < x < 1 \\ \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

y se indicará como $X \sim \beta(p, q)$.

La forma de la función de densidad toma formas muy diferentes para los distintos valores de p y q, lo que nos permite, eligiendo adecuadamente los parámetros, seleccionar la forma de la función de densidad que más interese.

Gráficos


f(x)
p = ½, q = 3
p = 1, q = 3
p = 2, q = 3
p = 3, q = 3
p = ½, q = 2
p = 1, q = 2
p = 2, q = 2
p = 3, q = 3
p = ½, q = 1
p = 1, q = 1
p = 2, q = 1
p = 3, q = 1
p = ½, q = ½
p = 1, q = ½
p = 2, q = ½
p = 3, q = ½
x
0
0,5
1,0
1
2

- Si $p = q$ la función de densidad es simétrica, siendo el eje de simetría la recta $x = 1/2$.
- Si $p = q = 1$, $\beta(p, q) \equiv U(0, 1)$.
- Si $p < q$ es asimétrica a la derecha.
- Si $p > q$ es asimétrica a la izquierda.
- Si $p < 1$ y $q \geq 1$ es decreciente y cóncava.
- Si $q < 1$ y $p \geq 1$ es creciente y cóncava.
- Si $p > 1$ y $q > 1$ tiene un sólo máximo.
- Si $p < 1$ y $q < 1$ tiene un sólo mínimo.

Ejemplos y/o aplicaciones

- Fracción de tiempo que un equipo está en reparación.
- Proporción de piezas defectuosas en un lote.
- Proporción del gasto de una familia en alimentación con respecto a los gastos totales.
- La participación de la producción de una empresa con respecto al total de lo producido en ese sector.

Algunas de sus características son:

- **Función de distribución**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \dfrac{1}{\beta(p,q)} \displaystyle\int_0^x x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

- **Momentos no centrados**

$$\mathrm{E}[X^k] = \frac{\beta(p+k, q)}{\beta(p,q)} = \frac{p(p+1)\cdots(p+k-1)}{(p+q)(p+q+1)\cdots(p+q+k-1)}$$

  en particular, la **media**

$$\mathrm{E}[X] = \frac{p}{p+q}$$

- **Varianza**. A partir del momento no centrado de orden dos $\mathrm{E}[X^2] = [p(p+1)]/[(p+q)(p+q+1)]$,

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$$

- Si $X \sim \beta(p, q)$ entonces $Y = 1 - X \sim \beta(q, p)$

5. Otras distribuciones

Distribución de Weibull

La distribución de Weibull fue establecida por el físico suizo del mismo nombre, quien demostró, con base en una evidencia empírica, que el esfuerzo al que se someten los materiales puede modelizarse de manera adecuada mediante el empleo de esta distribución. Posteriormente esta distribución se ha usado como modelo para tiempo de fallo para una amplia variedad de componentes mecánicos y eléctricos.

Se dice que una variable aleatoria X de tipo continuo tiene distribución Weibull de parámetros α y θ, $\alpha, \theta > 0$ si su función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\theta^\alpha} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

y se denota $X \sim W(\alpha, \theta)$. Su función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

y sus principales características son

- $\mathrm{E}[X^n] = \theta^n \Gamma\left(1 + \frac{n}{\alpha}\right)$
- $\mathrm{E}[X] = \theta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$
- $\mathrm{Var}[X] = \theta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right]$

Como casos particulares de esta distribución se tienen

1) Distribución exponencial: $\mathrm{Exp}(\theta) \equiv W(1, \theta)$

2) Distribución de Rayleigh de parámetro $\sigma > 0$: $\mathrm{R}(\sigma) \equiv W(2, \sqrt{2}\sigma)$

Distribución de Pareto

Esta distribución surgió a finales del siglo XIX (Pareto, 1897) ante la preocupación de los economistas matemáticos de proporcionar modelos probabilísticos que ajusten correctamente la distribución de frecuencias de la renta personal.
Se dice que una variable aleatoria X de tipo continuo tiene distribución Pareto de parámetros α y x_0, $\alpha, x_0 > 0$ si su función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} & x \geq x_0 \\ \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

y se denota $X \sim P(\alpha, x_0)$. Su función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^\alpha & x \geq x_0 \\ \\ 0 & x < x_0 \end{cases}$$

y sus principales características son

- Si $r < \alpha$ existe $\mathrm{E}[X^r]$ y

$$\mathrm{E}[X^r] = \frac{\alpha x_0^r}{\alpha - r}$$

- $\mathrm{E}[X] = \dfrac{\alpha x_0}{\alpha - 1} \qquad$ si $\alpha > 1$

- $\mathrm{Var}[X] = \dfrac{\alpha x_0^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} \qquad$ si $\alpha > 2$

Distribución de Cauchy

Se dice que una variable aleatoria X de tipo continuo tiene distribución de Cauchy de parámetros $\mu > 0$ y θ si su función de densidad es

$$f(x) = \frac{\mu}{\pi} \frac{1}{\mu^2 + (x-\theta)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

y se denota $X \sim \mathcal{C}(\mu, \theta)$.

La función característica es

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{it\theta - \mu|t|}$$

pero sin embargo no existe la función generatriz de momentos, ni los momentos de orden $r \geq 1$.

Distribución de Laplace

Se dice que una variable aleatoria X de tipo continuo tiene distribución de Laplace de parámetros α y λ ($\lambda > 0$) si su función de densidad es

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} \mathrm{e}^{-\lambda|x-\alpha|} \qquad -\infty < x < \infty$$

y se denota $X \sim \mathcal{L}(\alpha, \lambda)$.

La función característica es

$$\varphi(t) = \frac{\lambda^2 e^{it\alpha}}{t^2 + \lambda^2}$$

y su media y varianza.

$$E[X] = \alpha \qquad \operatorname{Var}[X] = 2/\lambda^2$$