

Lars Hinrichsen

Zustandsübergänge selbstbremsender Getriebe
im Ratterbetrieb

Die vorliegende Arbeit wurde vom Fachbereich Maschinenbau der Universität Kassel als Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) angenommen.

Erster Gutachter: Prof. Dr.-Ing. B. Klein

Zweiter Gutachter: Prof. Dr.-Ing. B. Schweizer

Tag der mündlichen Prüfung

16. Mai 2007

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar

Zugl.: Kassel, Univ., Diss. 2007

ISBN 978-3-89958-324-3

URN: urn:nbn:de:0002-3249

© 2007, kassel university press GmbH, Kassel

www.upress.uni-kassel.de

Druck und Verarbeitung: Unidruckerei der Universität Kassel

Printed in Germany

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachgebiet Leichtbau-Konstruktion des Fachbereichs Maschinenbau der Universität Kassel.

Mein besonderer Dank gebührt Herrn Prof. Dr.-Ing. Bernd Klein für die Betreuung dieser Arbeit und die fortwährende großzügige Unterstützung.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Bernhard Schweizer, dem Leiter des Fachgebiets Mehrkörpersysteme des Fachbereichs Maschinenbau, danke ich für sein Interesse an meiner Arbeit und die bereitwillige Übernahme des Korreferates.

Wissenschaftliche Arbeit kann nur in einem angenehmen, kollegialen Arbeitsklima gedeihen. Meinen Kolleginnen und Kollegen danke ich daher herzlich für die konstruktive Zusammenarbeit und die stete Hilfsbereitschaft.

Insbesondere danke ich für die vielfältige Unterstützung Herrn Dipl.-Ing. Nico Diedrich, Herrn Dipl.-Ing. Joachim Flecke, Herrn Dipl.-Ing. Alexander Freier, Herrn Dipl.-Ing. Michael Schurr, Herrn cand. mach. Kasim Sen, Herrn Dipl.-Ing. Karl-Ludwig Tondera und Herrn Dipl.-Ing. Rainer Wiegner.

Lars Hinrichsen

im Dezember 2006

Abstract

In selbstbremsenden Bewegungsgetrieben wie Keilschubgetrieben, Schneckengetrieben, Planetengetrieben und Schraubengetrieben können im Senkbetrieb sogenannte Ratterschwingungen auftreten, wenn gewisse Bedingungen erfüllt werden. Wie beim Rasseln und Hämmern ist auch für das Phänomen Rattern das Spiel in Getrieben eine wesentliche Voraussetzung. Im Zahnspiel von belasteten Getriebestufen hat man durch das Hin- und Herschlagen der Zähne eine wechselseitig anliegende Verzahnung. Es ist weiterhin bekannt, dass Selbsthemmungs- bzw. Selbstbremsungseffekte zu Stoßprozessen führen können. Die Fragen, warum in spielbehafteten, selbstbremsenden Getrieben die Ratterschwingungen auftreten können, welcher Mechanismus die Ratterschwingungen antreibt und wie Ratterschwingungen berechnet werden können, sind bisher nicht geklärt und werden hier am Grundelement des Keilschubgetriebes beantwortet. Im Gegensatz zur bisher üblichen mathematischen Beschreibung von Ratterschwingungen werden lineare Komplementaritätsprobleme (LCP) formuliert und analytisch gelöst. Die analytische Lösung der linearen Komplementaritätsprobleme erfolgt mit dem auf dem Simplexverfahren aufbauenden komplementären Lemke-Algorithmus und liefert eindeutig die zulässigen Zustandsübergänge zwischen den verschiedenen Bewegungsphasen der Ratterschwingungen. Die Lösungen der linearen Komplementaritätsprobleme sind gleichzeitig die Anfangsbedingungen für die Bewegungsphasen nach den Zustandsübergängen.

Es zeigt sich, dass im Senkbetrieb die Entstehung von Ratterschwingungen aus der Gleitphase heraus nicht möglich ist, da der Zustand Gleiten von den beiden Zuständen Haften und Separation aus nicht erreichbar ist. Der Zustand Haften kann nur durch den Zustandsübergang nach Separation verlassen werden. Stoßen die beiden Kontaktpartner zusammen, so ist allein der Haftreibstoß mit den Zustandsübergängen von Separation nach Haften in der Kompressionsphase und von Haften nach Separation in der Expansionsphase zulässig. Demnach bestehen Ratterschwingungen aus den Bewegungsphasen Haften, Separation (Flugphase) und Haftreibstoß.

Das Experiment bestätigt die analytisch berechneten Zustandsübergänge am Beispiel des ratternden Schneckengetriebes.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Problemstellung	1
1.2	Stand des Wissens	1
1.3	Ziele und Aufbau der Arbeit	5
2	Ratterbedingung selbstbremsender Getriebe	7
2.1	Selbsthemmung und Selbstbremsung	7
2.2	Der Ratterbetrieb	10
2.3	Die Ratterbedingung nach Füsgen	11
2.3.1	Keilschubgetriebe	11
2.3.2	Schneckengetriebe	16
2.4	FEM-Simulation	17
2.4.1	FE-Modell	17
2.4.2	Simulationsergebnisse	18
3	Kontaktmechanik	21
3.1	Kontaktkinematik	21
3.2	Kontaktkinetik	23
3.3	Das Kontaktproblem als Komplementaritätsproblem	28
4	Zustandsübergänge am selbstbremsenden Keilgetriebe	33
4.1	Kontaktkinematik am Keilgetriebe	33
4.2	Kontaktkinetik am Keilgetriebe	34
4.3	Zustandsübergänge für den Anfangszustand <i>Haften</i>	36
4.3.1	Lineares Komplementaritätsproblem (LCP)	36
4.3.2	Analytische Berechnung des LCP	37
4.3.3	Lösungen des LCP für den Anfangszustand <i>Haften</i>	45
4.4	Zustandsübergänge für den Anfangszustand <i>Gleiten</i>	48
4.4.1	Lineares Komplementaritätsproblem (LCP)	48
4.4.2	Analytische Berechnung des LCP	49
4.4.3	Lösungen des LCP für den Anfangszustand <i>Gleiten</i>	50
5	Stoßmechanik	53
5.1	Impulsbilanzgleichungen	54
5.2	Das Stoßgesetz der Kompressionsphase	56
5.3	Das Stoßgesetz der Expansionsphase	57
5.4	Das Stoßproblem als lineares Komplementaritätsproblem (LCP)	58
5.4.1	LCP der Kompressionsphase	58
5.4.2	LCP der Expansionsphase	60

6 Stoßzustandsübergänge am selbstbremsenden Keilgetriebe	63
6.1 Stoßzustände am Ende der Kompressionsphase	64
6.1.1 Lineares Komplementaritätsproblem	64
6.1.2 Analytische Berechnung des LCP	64
6.1.3 Lösungen des LCP am Ende der Kompressionsphase	68
6.2 Stoßzustände am Ende der Expansionsphase	68
6.2.1 LCP, wenn <i>Separation</i> am Ende der Kompressionsphase	69
6.2.2 LCP, wenn <i>Haften</i> am Ende der Kompressionsphase	70
6.2.3 Lösungen des LCP am Ende der Expansionsphase	73
7 Experimentelle Untersuchungen	75
7.1 Prüfstands Aufbau und Meßtechnik	75
7.2 Reibkennlinie und Ratterbedingung	77
7.3 Ratterschwingungen	78
8 Zusammenfassung	83
A Satz von Farkas	85
B Verfahren von Lemke	87
C Analytische Berechnung <i>Kontakt</i>	91
C.1 Analytische Berechnung <i>Haften</i> Fall 2	91
C.2 Analytische Berechnung <i>Haften</i> Fall 3	99
D Analytische Berechnung <i>Stoß</i>	119
D.1 Analytische Berechnung <i>Stoß</i> Fall 2	119

1 Einleitung

1.1 Problemstellung

Häufig verwendete Konstruktionselemente in Antriebssträngen sind selbsthemmende Bewegungsgetriebe, wie Keilschubgetriebe, Schneckengetriebe, Planetengetriebe und Schraubenge triebe. Man spricht beim dynamischen Einsatzfall auch von selbstbremsenden Getrieben. Als Vorteile gelten die sehr großen Übersetzungen auf kleinsten Raum in einer Stufe und durch die mögliche Selbsthemmungseigenschaft die zusätzlichen Sicherheitsfunktionen der Bremsung und Sperrung einer Bewegungsrichtung unter Last mit sehr geringem Aufwand. Ein Antrieb kann über ein selbsthemmendes Getriebe eine Last bewegen, während die Last, gleichgültig wie groß sie ist, von der Abtriebsseite her nicht in der Lage ist, den abgeschalteten Antrieb zu bewegen. Die Einsatzgebiete dieser Getriebe sind aufgrund ihrer besonderen Eigenschaften vielfältig: Als Leistungsgetriebe findet man sie in Förderbändern, Rührwerken, Textilmaschinen, Zentrifugen, Schiffspropellerantrieben, Pumpenantrieben u.ä.; als Hubwerksgetriebe sind Aufzüge, Torantriebe, Kräne usw. zu nennen; als Verstellgetriebe kommen sie in feinwerktechnischen Genauigkeitsgetrieben, Antennenpositioniereinrichtungen, Werkzeugmaschinen, Ruderanlagen, Kfz-Stellgetriebe (Sitzverstellungen, Lenkungen, Fensterheber) o.ä. zum Einsatz.

Bei selbsthemmenden bzw. selbstbremsenden Getrieben ist der sogenannte Hubbetrieb in den meisten Fällen unproblematisch, eine Last wird gehoben und wirkt der Bewegungsrichtung entgegen. Dagegen können beim Senkbetrieb, die Last wirkt in Richtung der Bewegung, die sogenannten Ratterschwingungen auftreten. Rattern ist ein grundsätzlich nichtlineares Schwingungsproblem von allen selbstbremsenden Getrieben. Die Ratterschwingungen sind wegen des Festkörperkontaktes in der Stoßphase mit erhöhter Geräuschemission und mit erhöhtem Verschleiß verbunden. Der erhöhte Verschleiß reduziert letztendlich die Lebensdauer des Getriebes.

Man findet die Ratterschwingungen auf Grund der Getriebeparameter und Betriebsbedingungen insbesondere in Verstell- und Hubwerksgetrieben. Leistungsgetriebe nutzen zwar die Sicherheitsfunktion der Bremsung bei abgeschaltetem Antrieb, laufen i.d.R. aber nur im Hubbetrieb, so daß Ratterschwingungen dort nicht relevant sind. Die Verwendung von selbsthemmenden Getrieben ermöglicht es, kompakte und robuste Getriebe zu bauen, wobei das Ausgangsglied oder die Ausgangswelle ohne zusätzliche Bremsvorrichtung in der vorgegebenen Lage fixiert werden kann.

1.2 Stand des Wissens

Über den Mechanismus der Ratterschwingungen in selbsthemmenden bzw. selbstbremsenden Getrieben besteht auch bis heute noch Unklarheit. Die Unklarheit herrscht darüber,

1 Einleitung

ob der sogenannte Stick-Slip-Effekt hauptverantwortlich für die Ratterschwingungen ist [63, 71], ob ein labiles Gleichgewicht der Schnecke das Rattern verursacht [11, 67, 71, 70] oder ob es andere ursächliche Mechanismen der Schwingungsanfänger gibt [2, 23, 52, 53]. Es existieren erste theoretische Ansätze [11, 21, 30, 31, 49, 52, 53, 63, 67, 70, 22] zur Erklärung der Entstehung von Ratterschwingungen in solchen Getrieben.

Die VDI-Richtlinie 2158 [70] beschreibt das Rattern als "das fortgesetzte Wechseln der Anlageflanken bei den kraftübertragenden Elementpaarungen". "Beim Wechsel der Anlageflanken geht die Beschleunigung von einem definierten in einen undefinierten Zustand mit Blockieren des Getriebes über. Dabei vergrößert sich das Momentenverhältnis, was zum erneuten Wechsel der Anlageflächen und zur Beschleunigung des Antriebsstrangs führt." Laut VDI-Richtlinie handelt es sich um ein labiles Gleichgewicht aufgrund der äußeren Drehmomente und den daraus gegebenen Beschleunigungen der beiden Massen, die die Anlageflächen im Getriebe auseinander bewegen möchten und durch *Gleitreibungskräfte*, die jedoch die Massen abbremsen. Die Folge der Instabilität sind Ratterschwingungen. Wichtig ist, daß die VDI-Richtlinie im Ratterbetrieb *Gleiten* zwischen den Elementpaarungen voraussetzt. Bis auf diese kurze Erläuterung und der Angabe der Ratterbedingung nach Füsgen [11] fehlt eine genauere Abhandlung über Ratterschwingungen. Die VDI-Richtlinie 2158 schließt den speziellen Fall des Ratterns wegen Unbestimmtheit (nicht definierte Betriebszustände) und Doppeldeutigkeit aus.

Oestreich [53] erwähnt das Phänomen des Ratterns und liefert einen kurzen, aber wichtigen Ansatz zur Erklärung der Ratterschwingungen. Er ist der Meinung, daß Rattern entsteht, wenn eine Masse mit geringer Geschwindigkeit bei negativer Beschleunigung auf eine Wand trifft und zu unendlich vielen Stößen mit abnehmender Geschwindigkeit in einer endlichen Zeit mit anschließendem Eintritt in die Haftphase kommen, bis die Masse aufgrund positiver Beschleunigung die Wand wieder verlässt. "Trajektorien, bei denen sich Rattern wiederholt, müssen notwendigerweise periodisch sein, da diese immer wieder in die Haftphase einlaufen und die Wand zu dem eindeutigen Zeitpunkt verlassen."

Einige Autoren [21, 63] ordnen diese Schwingungen entsprechend ihrem Entstehungsmechanismus den selbsterregten Schwingungen zu. Das setzt voraus, daß bei fallender Reibkennlinie der selbsterregte Schwinger von einer Energiequelle gespeist wird und mit Hilfe einer Schalterfunktion im Takt seiner Schwingfrequenz dort Energie entnimmt. Die einer Energiequelle periodisch entnommene Energie wird im Schwingungssystem vorübergehend gespeichert. Nichtlinearitäten bilden eine wesentliche Voraussetzung für das Auftreten von selbsterregten Schwingungen. Somit sind auch die mathematischen Modelle grundsätzlich nichtlinear.

Erste theoretische Untersuchungen über Ratterschwingungen wurden von Füsgen [11] durchgeführt. Das mechanische Modell bestand aus über Gleitreibung gekoppelten Drehträgheiten und setzt durchweg Kontakt zwischen der Schnecke und dem Schneckenrad voraus. Es wurde untersucht, unter welchen Bedingungen die Schneckenaxialkraft eines Schneckengetriebes Nulldeutigkeiten und Doppeldeutigkeiten aufweist. Rattern tritt seiner Meinung nach auf, wenn diese Nulldeutigkeiten und Doppeldeutigkeiten vorliegen. Das Ergebnis seiner Betrachtungen ist die sogenannte Füsgen-Formel. Die Füsgen-Formel ermöglicht eine erste Abschätzung der Rattergrenze im Sinne einer Stabilitätsgrenze.

Steinhilper und Jiang [67] greifen die Stabilitätsbetrachtungen von Füsgen auf. Sie systematisieren die von Füsgen angewandte Vorgehensweise und stellen fest, daß die Gleichungen ihres verwendeten Modells Unbestimmtheiten und Doppeldeutigkeiten aufweisen.

Jiang [21] verfeinert das mathematische Modell der Schneckengetriebestufe von Füsgen durch Einbeziehung der Parameter Zahnflankensteifigkeit und -dämpfung und erzeugt auf diese Weise ein schwingungsfähiges System. Diesem Modell liegt die Vorstellung zugrunde, daß die Ratterschwingungen ein Stabilitätsproblem darstellen. Forschungsschwerpunkt seiner Arbeit bleibt die genauere Bestimmung der Stabilitätsgrenze. Jiang sieht die Zahnflankensteifigkeit in Verbindung mit der Gleitreibung zwischen den Zähnen als Ursache für die Ratterschwingungen an. Die Haftreibung wird bei seinen Betrachtungen überhaupt nicht berücksichtigt, obwohl Ratterschwingungen sofort nach Überschreitung der Haftgrenze einsetzen und nicht erst, wie Jiang in seiner Arbeit behauptet, im Laufe der Gleitphase angeregt werden. Die von Jiang verwendeten Bewegungsgleichungen weisen in der Tat Instabilität auf, sie erklären aber nicht das Ratterphänomen, da sie in diesem Fall ungültig sind. Zur Stabilitätsanalyse sind die Bewegungsgleichungen dennoch geeignet, da sie so lange gültig bleiben, bis die Gleichungsparameter den Grenzfall des Ratterns erreichen.

Jiang führte experimentelle Untersuchungen bezüglich der Stabilitätsgrenze an einem selbsthemmenden Schneckengetriebe durch. Wegen der noch nicht vorhandenen erforderlichen Messmittel beschränkte er sich auf die Messung des Antriebsmoments und des Beschleunigungsverlaufs des abtriebsseitig gehobenen oder abgesenkten Gewichts. Durch Variation der Abtriebsdrehträgeit und einer zwischengeschalteten elastischen Welle fuhr Jiang Versuche im stabilen ratterfreien und im instabilen ratternden Gebiet. Das Beschleunigungsverhalten des Abtriebsgewichts benutzte Jiang zum Erkennen von Rattern. Auf diese Weise konnte Jiang die Rattergrenze eingrenzen.

Unabhängig von Füsgen [11] befaßte sich Oledzki [49] bereits seit 1963 theoretisch mit der Dynamik von selbsthemmenden Getrieben. Mit dem Fortschreiten der Computertechnik war es Oledzki [52] 1995 möglich, seine damals angestellten Überlegungen mit Hilfe von numerischen Simulationen fortzusetzen. Er behandelt in seinen Arbeiten die Dynamik von Keilgetriebe mit beliebigen Öffnungswinkeln und beliebiger Ausrichtung. Oledzki verwendet für die Simulation der Dynamik aber nur ein Modell mit zweiseitiger Bindung der Keile, also mit einem reibungsbehafteten Schubgelenk zwischen den Keilen. Die Effekte des Abhebens und des stoßhaften Aufsetzens können mit diesem Modell nicht erfaßt werden. Eine genauere Untersuchung der Ursachen, die zum Abheben der Keile führen, fehlt deshalb bei Oledzki. Eine experimentelle Validierung der numerischen Ergebnisse erfolgte nicht.

Wahlert simuliert in der aktuellen Arbeit [71] die Ratterschwingungen eines Keilschubgetriebes, kurz Keilgetriebe, mit dem Simulationspaket Matlab/Simulink. Bei der Formulierung der Bewegungsgleichungen geht er wie Füsgen [11] davon aus, daß eine Gleitphase existiert. Demzufolge koppelt er die beiden Differentialgleichungen der Einzelkörper über das Coulombsche Gesetz und erhält eine Differentialgleichung für das Gesamtsystem, welche er mit dem Mathematikprogramm löst. Der Zustand *Gleiten* wird verwendet, ohne

1 Einleitung

zu hinterfragen, ob die Annahme des Gleitens überhaupt zulässig ist.

Jürging [22] spricht beim Rattern vom instationären Bremsbetrieb und ist der Ansicht, daß die kinetische Energie der ungehemmten Schnecke das Schneckenrad überholen läßt. Dabei kommt es zum Abheben der Zahnflanken. Der Antriebsstrang blockiert, wenn die kinetische Energie der Schneckenwelle nicht ausreicht, um beim Überholen die Ratterbedingung zu überschreiten. Bis auf diese wenigen, aber sehr wichtigen Aussagen findet man dort keine weiteren Untersuchungen zum Thema Rattern. Jürging beschäftigt sich in seiner rein experimentellen Arbeit hauptsächlich mit dem Auslaufverhalten bzw. Bremsverhalten von selbstbremsenden Schneckengetrieben unter dem Einfluß verschiedener Schmierstoffe im ratterfreien Betrieb. Die empirischen Ergebnisse sollen helfen, sichere Aussagen über den Auslaufweg, die Auslaufzeit und den Drehmomentenverlauf eines selbstbremsenden Schneckengetriebes machen zu können.

Die Arbeiten, die den Einfluß von Schmierstoffen in Schneckengetriebe untersuchen, beschränken sich auf Leistungsgetriebe mit laufender Schmierung [14, 15, 70, 22]. Das entspricht i.d.R. den realen Einsatzbedingungen solcher Getriebe. Dort wird die Ratterbedingung nicht erfüllt, weil entweder kein Senkbetrieb betrachtet wird, die gewählten Trägheitsverhältnisse zwischen An- und Abtrieb kein Rattern zulassen oder die auftretenden Reibwerte durch die stetige Schmierung zu klein sind. Bei Leistungsgetrieben dient eine eventuell vorhandene Selbstbremsungsfähigkeit als Sicherheitsfunktion. Sollte der Antrieb ausfallen, so wird das Getriebe bis zum Stand abgebremst und die Abtriebslast gehalten [22]. Leistungsgetriebe arbeiten üblicherweise mit hohen Drehzahlen, die zwischen den Zahnflanken einen Schmierfilm aufbauen können. Die dabei auftretende Flüssigkeitsreibung ist wesentlich geringer als die Misch- und Festkörperreibung, die bei vergleichsweise langsam laufenden Verstellgetrieben und Hubgetrieben maßgeblich ist. In [5] stellt Bouché ein auf physikalischen Grundlagen basierendes mathematisches Modell zur Berechnung der Reibungszahlen von Schneckengetriebeverzahnungen im Mischreibungsgebiet vor.

Während die Selbstbremsungsfähigkeit eines Getriebes vom dynamischen Reibwert (Gleitreibwert) abhängt, bestimmt der statische Reibwert (Haftreibwert) die Selbsthemmungsfähigkeit von ruhenden Schneckengetrieben. Die Selbsthemmungsfähigkeit wird folglich von der Anlaufreibungszahl bestimmt. Haag untersuchte deshalb in [14, 15] die Anlaufreibungszahlen sowie Anlaufreibmomente von ruhenden Schneckengetrieben in Abhängigkeit von verschiedenen Schmierstoffen.

Ratterschwingungen sind von ähnlicher Qualität wie Reibschwingungen (Quietschen von Kreide an der Tafel, Kurvenfahrt eines Zuges). Sie treten nur unter bestimmten Bedingungen unangenehm in Erscheinung und es gilt sie zu verhindern. Im Gegensatz zu den Reibschwingungen sind Ratterschwingungen zusätzlich durch die Effekte Separation und stoßhaftes Aufsetzen gekennzeichnet. Reibschwingungen wurden sowohl theoretisch als auch experimentell ausgiebig untersucht [18, 68, 43]. Dabei wurde hauptsächlich mit trockener Reibung gearbeitet.

Mehrkörpersysteme, bei denen Verbindungen zwischen einzelnen Körpern spielbehaftet sind, bewegen sich frei, bis eine Grenze des Spiels erreicht wird. Dann kommt es zu Stoßprozessen oder zwei Konturen haften oder gleiten aufeinander ab. Spiel in Getrieben ist

im wesentlichen für die Phänomene Rattern, Rasseln und Hämmern verantwortlich. Sowohl beim Rattern und Hämmern als auch beim Rasseln findet ein Hin- und Herschlagen von Zähnen im Zahnspiel statt, wobei die Abläufe grundsätzlich ähnlich sind. Während Rasseln bei lastfreien Getriebestufen auftritt, findet man Rattern und Hämmern in belasteten Stufen. Man hat wechselseitig anliegende Verzahnung [20, 62]. Nach Beitelschmidt [2] stellen Klemm- und Selbsthemmungsprozesse eine Ursache für Stöße dar. Klemm- und Selbsthemmungsprozesse erzeugen in einem Kontakt unendliche Kontaktkräfte, was seiner Meinung nach zum einseitigen Abheben der Kontaktpartner führt. Müller [46] merkt dazu an, daß im Falle eines kritischen Verhältnisses der Massen bzw. Trägheitsmomente ein selbsthemmendes Getriebe bei Abschaltung des Antriebs mit einem harten Ruck stehen bleibt. Auf den Fall des angekoppelten Antriebs geht Müller nicht ein. Die meisten auf dem Gebiet der Reibung und Stöße erschienenen Arbeiten beschränken sich entweder auf reine Stoß- oder auf reine Reibmodelle mit bekannter Normalkraft und nur einem Kontaktpunkt [7, 12, 20, 23]. Kombinierte Mehrfachkontaktprobleme wurden bisher kaum behandelt [12].

Der Mathematiker Lötstedt stellt in seiner Arbeit [39] erstmals eine Methode vor, mit der es möglich ist, die Zustandsübergänge in ebenen, reibungsbehafteten mechanischen Zweikörpersystemen zu berechnen. Von einem Anfangszustand ausgehend kann vorhergesagt werden, welcher neue Zustand sich unter der Einwirkung der Systemdynamik einstellen wird. Aufbauend auf der Arbeit von Lötstedt erweitern Pfeiffer, Seyfferth und Glocker [12, 58, 61, 66] die Methode von Lötstedt zu einer vollständigen Theorie für die Behandlung nichtlinearer und dabei unstetiger Schwingungssysteme. Als Grundlage dient eine Mehrkörperformulierung, die auf die meisten in der Antriebstechnik relevanten Fälle, dabei besonders auf unstetige Kontaktgesetze spezialisiert werden kann. Die dort und auch bei Beitelschmidt [2] vorgestellten Verfahren können Stöße und Haft-Gleit-Übergänge bei Vorliegen von nicht mehr unabhängigen Mehrfachkontakten darstellen und bieten eine in sich konsistente Lösung für Reibstöße und für abhängige Mehrfachkontakte. Zur Lösung des dabei immer auftretenden Eindeutigkeitsproblems bezüglich der gerade aktuellen Bindungskonfiguration schlagen auch Pfeiffer und Glocker das von Lötstedt [39] verwendete Komplementaritätsverfahren vor. Dynamische Kontaktprobleme besitzen nämlich komplementäre Eigenschaft, d.h. entweder ist Bewegung möglich und die Kontaktkräfte sind Null oder es wirken Kontaktkräfte und die Relativbewegung ist unterdrückt. Das Produkt aus den die Relativbewegung und die Kontaktkräfte beschreibenden mathematischen Größen ist immer Null.

Es bleibt festzustellen, daß die bisherige Fachliteratur keine befriedigende Theorie und Berechnungsmethoden für Ratterschwingungen bereithält. Allerdings zeigt die aktuelle Fachliteratur der theoretischen Mechanik neue Methoden auf, mit deren Anwendung man sicher auch die Ratterschwingungen erfassen kann.

1.3 Ziele und Aufbau der Arbeit

Das Ziel der Arbeit ist es, zu zeigen, daß im Senkbetrieb eines selbstbremsenden Getriebes bei Erfüllung der Ratterbedingungen kein makroskopisches Gleiten auftreten kann. Da Ratterschwingungen beim Anfahren des Getriebes immer aus dem Haftgebiet heraus oder vom Zustand Separation aus entstehen, muß ein gültiger Mechanismus zur Erklä-

1 Einleitung

rung der Ratterschwingungen auch das Haften und die Separation berücksichtigen. Im Gegensatz zu den bisherigen Annahmen über die Entstehung von Ratterschwingungen wird hier davon ausgegangen, daß die Ratterschwingungen beim Anfahrvorgang durch Ablösung (Separation) der Kontaktflächen sofort, d.h. unmittelbar nach Überschreitung der Haftgrenze einsetzen bzw. beim stoßhaften Aufsetzen entstehen. Es wird die Behauptung von Jiang [10] widerlegt, daß das Rattern während der Gleitphase durch Anregung von Schwingungen an den elastischen Zahnflanken entsteht. Bei Erfüllung der Ratterbedingung grenzt der Separationsbereich direkt an den Haftbereich, ein Gleitbereich existiert im Senkbetrieb nicht. Jiang bemängelt zu Recht die Aussage, daß Stick-Slip-Schwingungen die Ursache von Ratterschwingungen sind [38]. Stick-Slip-Schwingungen setzen stetigen Kontakt voraus, der bei Ratterschwingungen nicht gegeben ist.

Das zweite Kapitel klärt die Begriffe Selbsthemmung und Selbstbremsung, erläutert den Ratterbetrieb und leitet die Bedingungen her, die zum Ratterbetrieb führen. Eine geeignete numerische Simulation zur Beschreibung von Kontaktmechanismen, hier die FE-Methode, gibt einen ersten Hinweis, daß im Ratterbetrieb die Gleitphase fehlt. Da die Simulation nicht die Allgemeingültigkeit dieser Aussage beweisen kann, wird in den nächsten vier Kapiteln ein analytischer Beweis dazu gegeben. Die vier Kapitel werden beweisen, daß im Senkbetrieb bei Erfüllung der Ratterbedingungen keine Zustandsübergänge in den Gleitzustand möglich sind. Sowohl vom Zustand *Haften* als auch vom Zustand *Separation* aus kann ein Zustand *Gleiten* nicht erreicht werden. Der Zustand *Separation* meint den Zustand, in dem kein Kontakt zwischen den beiden Getriebeelementen besteht. Nimmt man vorsätzlich den Ausgangszustand *Gleiten* an, so führt die Annahme zu widersprüchlichen, weil falschen Aussagen.

Im dritten Kapitel wird die Theorie für die Zustandsübergänge hergeleitet, die vom Ausgangszustand *Kontakt* erreicht werden können. Das sind die Übergänge *Haften nach Haften*, *Haften nach Gleiten*, *Gleiten nach Gleiten*, *Gleiten nach Haften*, *Haften nach Separation*, *Gleiten nach Separation*. Das vierte Kapitel wird mit Hilfe der Theorie aus Kapitel 3 zeigen, das ein Keilgetriebe bei Erfüllung der Ratterbedingungen aus Kapitel 2 im Senkbetrieb keine Gleitphase besitzt, da Zustandsübergänge in den Gleitzustand nicht möglich sind.

Es fehlen noch die Zustandsübergänge, die vom Zustand *Separation* aus erreicht werden können. Das sind die Übergänge *Separation nach Haften* und *Separation nach Gleiten*. Dazu wird im fünften Kapitel die Theorie hergeleitet und diese im sechsten Kapitel auf das Keilgetriebe angewendet.

Im siebten Kapitel wird an einem Experiment die Richtigkeit der Behauptung gezeigt. Ein Prüfstandgetriebe wurde so ausgelegt, daß durch Variation der Getriebeparameter die Ratterbedingung erfüllt werden kann. Es wird dann meßtechnisch gezeigt, daß bei Nichterfüllung der Ratterbedingung ein stetiger Kontakt vorherrscht und sowohl stetiges Gleiten als auch Stick-Slip-Schwingungen auftreten können, und bei Erfüllung der Ratterbedingung die Ratterschwingungen in der erwarteten Form in Erscheinung treten. Das achte und letzte Kapitel gibt eine Zusammenfassung der Arbeit und erörtert offene gebliebene Fragen.

2 Ratterbedingung selbstbremsender Getriebe

Treten in einem Bewegungsgetriebe die sogenannten *Ratterschwingungen* auf, so befindet sich das Getriebe im *Ratterbetrieb*. Der Ratterbetrieb ist ein sehr spezieller Betriebszustand, der nur unter bestimmten Voraussetzungen möglich ist. Als erste, unbedingte Voraussetzung gilt die Selbsthemmung bzw. die Selbstbremsung. Die zweite Voraussetzung fordert einen bestimmten Bewegungszustand im Getriebe, der zur Initiierung der Ratterschwingungen führt, und die dritte Voraussetzung stellt mit der sogenannten „Füßenformel“ gewisse Bedingungen an die Massen bzw. Trägheiten im System.

2.1 Selbsthemmung und Selbstbremsung

Zwischen den Begriffen *Selbsthemmung* und *Selbstbremsung* wird i.d.R. nicht differenziert. Man verwendet für beide *Erscheinungsformen* den Begriff der *Selbsthemmung*. Mit dem Effekt der *Selbsthemmung* beschreibt man üblicherweise das Blockieren eines zwangläufigen Mechanismus durch Reibkräfte, welche von einer äußeren Antriebskraft hervorgerufen werden und dieser proportional sind. Die treibenden Kräfte sind so gerichtet, daß sie die hemmenden Kräfte steigern, wenn sie selbst anwachsen. Beiden Erscheinungsformen ist aber ein bestimmter Bewegungszustand zugeordnet, so daß es Sinn macht, auch begrifflich zwischen beiden Formen zu unterscheiden. Der Effekt der *Selbsthemmung* tritt im Zustand der Ruhe auf. Dagegen findet man die *Selbstbremsung* im Zustand der Bewegung. Die VDI-Norm 2158 [70] definiert die beiden Begriffe wie folgt:

- *Selbsthemmung*: „Ein Getriebe ist *selbsthemmend*, wenn im Ruhezustand beliebig große Kräfte bzw. Momente, die am gehemmten Anschlußglied H wirken, im Getriebe Reibungskräfte erzeugen, die wenigstens ein in der Kraftübertragungskette liegendes Getriebeglied hemmen, so daß keine Bewegung möglich ist.“
- *Selbstbremsung*: „Ein Getriebe ist *selbstbremsend*, wenn im Laufzustand beliebig große äußere Kräfte bzw. Momente, die am gehemmten Anschlußglied H treibend wirken, an den in der Kraftübertragungskette liegenden Getriebegliedern Verlustleistungen erzeugen, die im zeitlichen Mittel größer sind als die über H zugeführte Leistung. Es kommt zum Stillstand, falls im zeitlichen Mittel über A keine Leistung zugeführt wird.“

Die Selbstbremsung ist von allgemeinerer Natur und kann, muß aber nicht, die Selbsthemmung beinhalten. Der Zusammenhang von Selbsthemmung und Selbstbremsung erklärt sich bei Betrachtung der geschwindigkeitsabhängigen Reibkennwerte in Abbildung 2.1. *Selbsthemmung* liegt vor, wenn bei der tangentialen Relativgeschwindigkeit $\dot{g}_T = 0$ zwischen dem Reibwinkel $\rho(\dot{g}_T = 0) = \rho_0 = \arctan \mu(\dot{g}_T = 0) = \arctan \mu_0$ und dem Steigungswinkel γ die Beziehung $\rho_0 > \gamma$ gilt. Es tritt zusätzlich *Selbstbremsung* auf, wenn

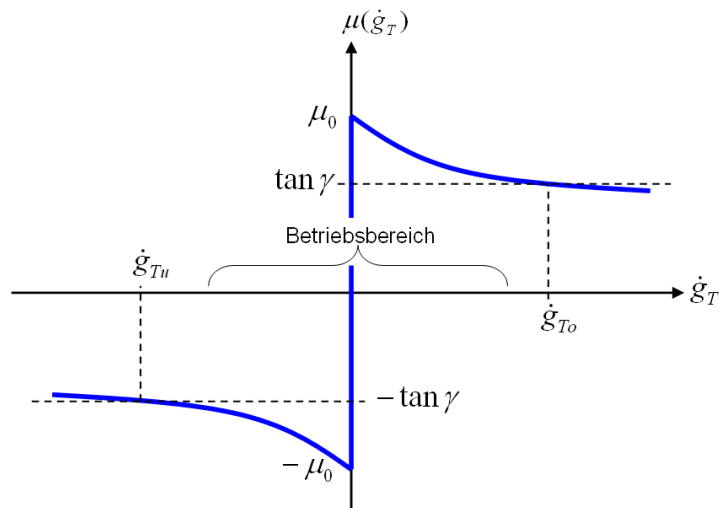


Abbildung 2.1: Geschwindigkeitsabhängige Reibwerte mit $\mu > \tan \gamma$ im Betriebsbereich

im gesamten Betriebsgeschwindigkeitsbereich die strengere Beziehung $\rho(\dot{g}_T) > \gamma$ erfüllt wird, wobei für den Reibwinkel der Zusammenhang $\rho(\dot{g}_T) = \rho = \arctan \mu(\dot{g}_T) = \arctan \mu$ gilt. Der Betriebsbereich muß innerhalb der Grenzen $[\dot{g}_{Tu}, \dot{g}_{To}]$ liegen, so daß für alle Betriebsgeschwindigkeiten \dot{g}_T der Reibwinkel $\rho(\dot{g}_T)$ größer als der Steigungswinkel γ ist. Die Definition der Selbstbremsung nach der VDI 2158 ist weniger streng als die Bedingung $\mu(\dot{g}_T) > \tan \gamma, \forall \dot{g}_T \in [\dot{g}_{Tu}, \dot{g}_{To}]$, da sie nur im zeitliche Mittel erfüllt werden muß. Es wäre nach VDI 2158 möglich, das stellenweise $\mu(\dot{g}_T) < \tan \gamma$ auftritt. Abbildung 2.2 zeigt das Beispiel einer geschwindigkeitsabhängigen Reibkennlinie, die für den gegebenen Steigungswinkel nicht selbsthemmend, aber im Bereich $[\dot{g}_{T1}, \dot{g}_{T2}]$ selbstbremsend ist. Kennlinien dieser Art werden hier nicht betrachtet. Das Keilschubgetriebe in Bild 2.3 ist

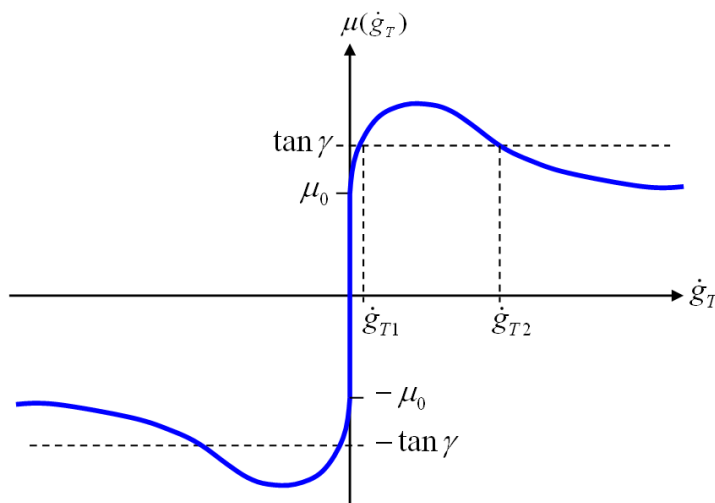


Abbildung 2.2: Nicht-selbsthemmende, aber selbstbremsende Reibkennlinie

das einfachste Getriebe, in dem Selbsthemmung bzw. Selbstbremsung bei entsprechenden Verhältnissen auftreten können. Das Keilschubgetriebe besteht aus zwei zueinander senkrecht und translatorisch geführten Keilen mit den Massen m_1 und m_2 , welches in den

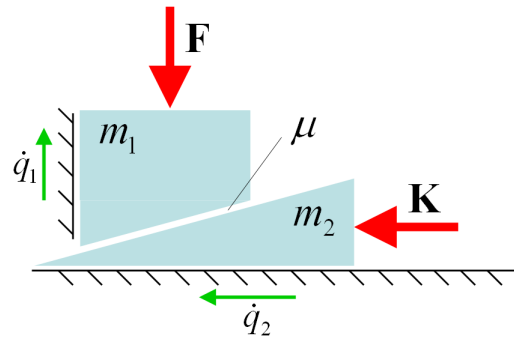


Abbildung 2.3: Keilschubgetriebe

Führungen reibungsfrei und in der Kontaktfläche zwischen den Keilen reibungsbehaftet ist. Angetrieben sei das Getriebe durch die Kräfte \mathbf{F} oder \mathbf{K} . Mit der Annahme von konstanter Bewegung gleiten die beiden Keile mit den Geschwindigkeiten \dot{q}_2 und $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 \cdot \tan \gamma_2$ aufeinander ab. Abbildung 2.4 zeigt die für die Bewegung entscheidenden Kräfte des Getriebes bei angenommener Gleitbewegung. Das Verhältnis von Öffnungswinkel γ_i der Keile

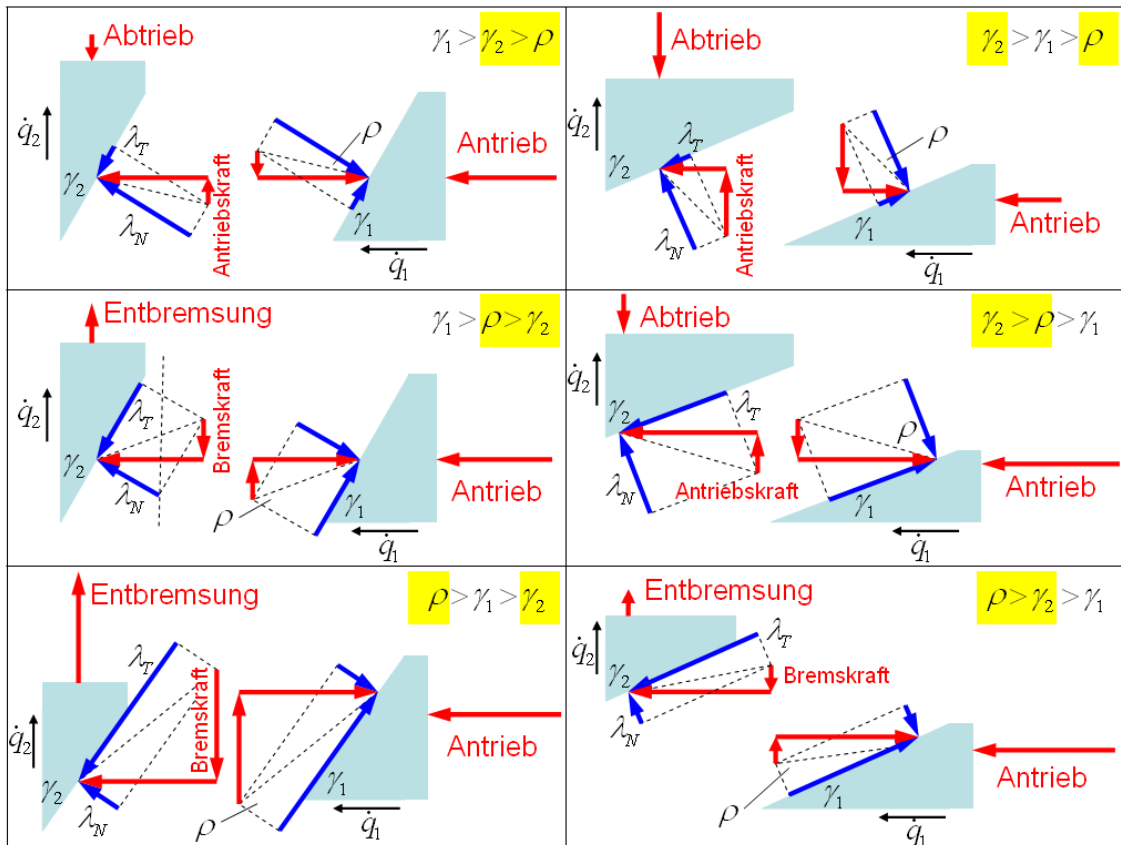


Abbildung 2.4: Kräftegleichgewichte am Keilgetriebe in Abhängigkeit vom Reibwinkel bei normalen, ratterfreien Betriebsbedingungen.

und dem Reibwinkel ρ bestimmt, welcher Zustand sich einstellt. Die möglichen Fälle sind in der Abbildung 2.4 dargestellt. In der linken Spalte stehen die Fälle $\gamma_1 > \gamma_2$ und rechts findet man die Fälle $\gamma_2 > \gamma_1$. Wegen $\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\pi}{2}$ genügt die Angabe eines Winkels, beispielsweise von $\gamma_2 = \gamma$. Der Antrieb erfolgt immer am Körper 1 mit der gleich großen

2 Ratterbedingung selbstbremsender Getriebe

Antriebskraft „Antrieb“. Abhängig von den Winkeln γ_1 bzw. γ_2 und ρ ergeben sich bei konstanter Antriebskraft aus den Kontaktkräften und der Abtriebs- bzw. Entbremsungskraft verschiedene Kraftvektorbilder im Freikörperbild (FKB).

Entbremsung bedeutet, daß zur Aufrechterhaltung der konstanten Bewegung eine zweite Antriebskraft auch auf der Abtriebsseite erforderlich ist. Ohne diese zweite Antriebskraft oder bei nicht ausreichender zweiter Antriebskraft würde aufgrund der Bremskraft in der Kontaktfläche die Gleitbewegung bis zum Stillstand abgebremst und das Getriebe in den Haftzustand übergehen, daher der Begriff Selbstbremsung. Der Antriebskraftvektor und der Geschwindigkeitsvektor \dot{q}_1 am Körper 1 zeigen ebenso in die gleiche Richtung wie der Entbremsungskraftvektor und der Geschwindigkeitsvektor \dot{q}_2 am Körper 2, d.h. es wird dem Getriebe sowohl über die Antriebsseite als auch über die Abtriebsseite Leistung zugeführt. Weil am Körper 1 angetrieben wird, entscheiden die markierten Winkel γ_2 und ρ darüber, ob Selbstbremsung vorliegt. In den Fällen $\rho > \gamma_2$ ist das Keilschubgetriebe in Abbildung 2.4 selbstbremsend.

Im nicht-selbstbremsenden Betriebsfall wird nur auf der Antriebsseite Leistung zugeführt. Auf der Abtriebsseite zeigen der Geschwindigkeitsvektor und der Vektor der Abtriebskraft „Abtrieb“ in entgegengesetzte Richtung, so daß Leistung abgeführt wird. Die eingeprägte Reibkraft λ_T im Kontakt genügt nicht, um den Körper 2 abzubremsen. Daher wirkt die Resultierende aus den Kontaktkräften am Körper 2 als Antriebskraft.

2.2 Der Ratterbetrieb

Neben der Selbsthemmung/-bremsung und den Bedingungen an die Trägheiten spielt die Bewegungsrichtung eine Rolle, um Ratterschwingungen zu provozieren. Man weiß, daß beispielsweise bei einem Hubwerksgetriebe im „Hubbetrieb“ kein Rattern auftritt. Senkt man dagegen im „Senkbetrieb“ eine Last ab, so tritt, bei Erfüllung der anderen Voraussetzungen, das Rattern auf. Die Darstellung 2.5 verdeutlicht den Zahneingriff an einem Schneckengetriebe im Hubbetrieb. Die kraftübertragenden Zähne sind dort durch das

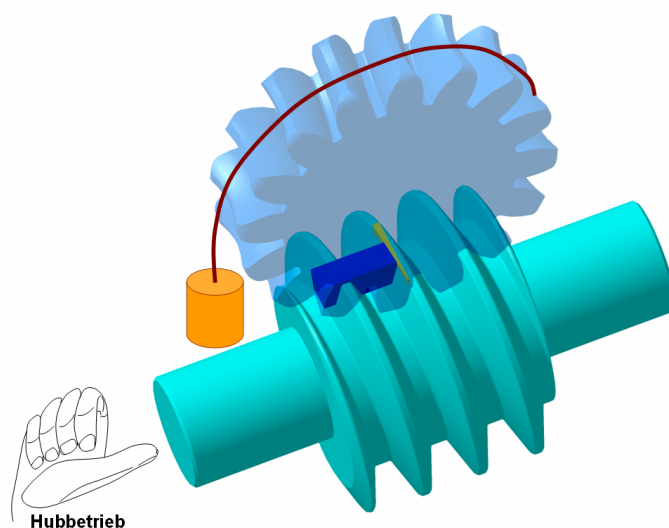


Abbildung 2.5: Schneckengetriebe im Hubbetrieb

auch beim Schneckengetriebe enthaltene Grundelement des Keilschubgetriebes hervorgehoben. Für die eingezeichnete Drehrichtung der Schnecke im Rechtshandsystem befindet sich das Getriebe im unkritischen Hubbetrieb. An der treibenden Flanke der Schnecke gleiten die Zähne des Schneckenrades ab bzw. entlang. Durch Umkehr der Drehrichtung geht das Getriebe in den Senkbetrieb über und die ange deutete Last wird abgesenkt. Bei Nichterfüllung der Rattervoraussetzungen verbleiben die im Bild 2.5 hervorgehobenen Zähne im stetigen Gleitkontakt, ohne das beim Absenken der Last ein Flankenwechsel auftritt. Werden aber alle Voraussetzungen zum Rattern erfüllt, treten im Senkbetrieb die Ratterschwingungen auf. In Abbildung 2.6 sind die beiden Betriebszustände am hervorgehobenen Keilschubgetriebe aus Abbildung 2.5 noch einmal gegenübergestellt. Die

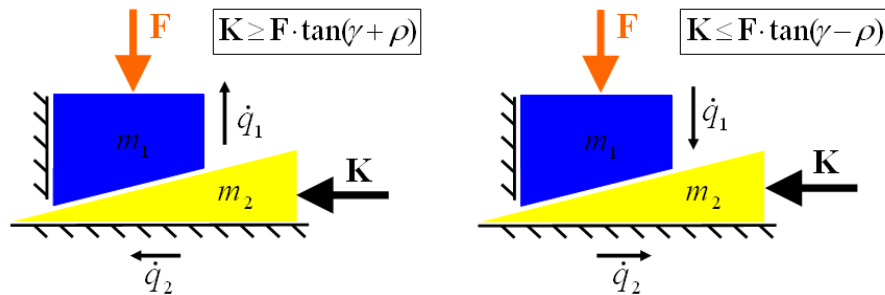


Abbildung 2.6: Links: Keilgetriebe im unkritischen Hubbetrieb; rechts: Keilgetriebe im ratterkritischen Senkbetrieb

Schnecke entspricht dem unteren Keil, das Schneckenrad entspricht dem oberen Keil und die positive Kraft $F > 0$ resultiert aus der abtriebsseitigen Last. Während bei einer Verschiebung des unteren Keils mit der Geschwindigkeit \dot{q}_2 nach links der obere Keil ohne Rattern angehoben wird (Hubbetrieb), ist bei der Verschiebung nach rechts (Senkbetrieb) der ratternde Betrieb möglich.

2.3 Die Ratterbedingung nach Fügen

Als dritte Voraussetzung für das Auftreten des Rattereffektes gilt die Erfüllung der Ratterbedingung nach Fügen [11, 21, 70, 71]. Es wird bei der Herleitung der Ratterbedingung davon ausgegangen, daß sich das Getriebe im Zustand *Gleiten* befindet. Sowohl für die Antriebsseite als auch für die Abtriebsseite werden die Bewegungsgleichungen aufgestellt und durch das Coulombsche Gleitreibgesetz und die kinematische Bindungsgleichung miteinander gekoppelt. Eine Analyse der resultierenden Differentialgleichung liefert die gesuchte Ratterbedingung. Von Interesse sind hier die Differentialgleichungen des Keilschubgetriebes und des Schneckengetriebes. Am Keilschubgetriebe erfolgen die grundsätzlichen Betrachtungen des Ratterphänomens und am Schneckengetriebe werden die Aussagen experimentell verifiziert. Die Ratterbedingungen beider Getriebearten lassen sich ineinander überführen, wie Abbildung 2.5 bereits vermuten läßt.

2.3.1 Keilschubgetriebe

Die Bewegungen der beiden Keilelemente des Keilschubgetriebes in Abbildung 2.5 werden durch die Minimalkoordinaten \dot{q}_1 und \dot{q}_2 beschrieben. Zuerst sei der Hubbetrieb betrach-

tet, wo der Geschwindigkeitsvektor \dot{q}_1 nach oben und der Vektor \dot{q}_2 nach links zeigt. Im teilweise freigeschnittenen Freikörperbild in Abbildung 2.7 sind die Kontaktkräfte für den Gleitzustand im Hub- und Senkbetrieb dargestellt.

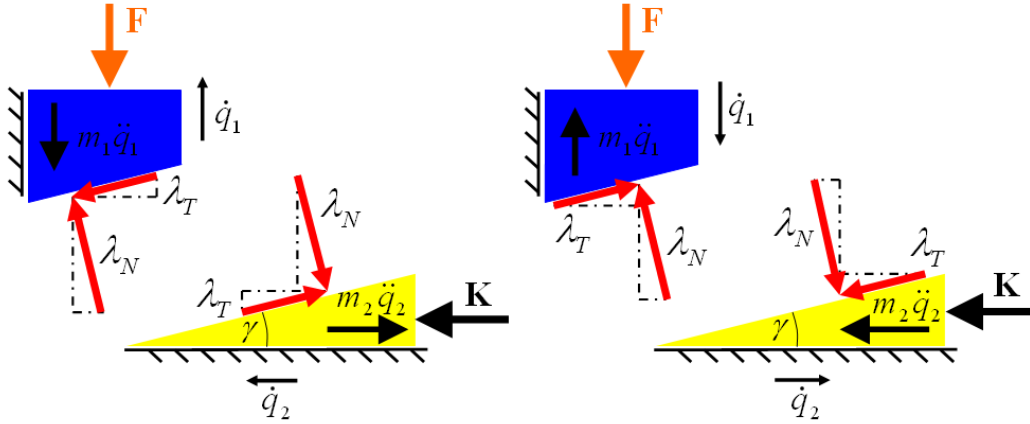


Abbildung 2.7: FKB des Keilgetriebes in Minimalkoordinaten; links: Hubbetrieb; rechts: Senkbetrieb

Hubbetrieb

Das Kräftegleichgewicht in Richtung der Minimalkoordinaten liefert die Bewegungsgleichungen für den Hubbetrieb.

$$\begin{aligned} F + m_1 \ddot{q}_1 + \lambda_T \sin \gamma - \lambda_N \cos \gamma &= 0, \\ K - m_2 \ddot{q}_2 - \lambda_T \cos \gamma - \lambda_N \sin \gamma &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Mit dem Gleitreibgesetz $\lambda_T = \tan \rho \cdot \lambda_N$, dem Reibwinkel $\rho = \arctan \mu$ und der Bindungsgleichung $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 \tan \gamma$ folgt für die Bewegungsgleichungen

$$F + m_1 \tan \gamma \ddot{q}_2 - \lambda_N \frac{\cos(\gamma + \rho)}{\cos \rho} = 0, \quad (2.2)$$

$$K - m_2 \ddot{q}_2 - \lambda_N \frac{\sin(\gamma + \rho)}{\cos \rho} = 0. \quad (2.3)$$

Elimination von λ_N führt auf die einfache Differentialgleichung für den Hubbetrieb

$$[m_2 + m_1 \tan \gamma \tan(\gamma + \rho)] \ddot{q}_2 = K - F \tan(\gamma + \rho), \quad (2.4)$$

woraus man die Beschleunigung \ddot{q}_2 und damit die Kontaktnormalkraft λ_N erhält

$$\ddot{q}_2 = \frac{K - F \tan(\gamma + \rho)}{[m_2 + m_1 \tan \gamma \tan(\gamma + \rho)]}, \quad \lambda_N = \frac{\cos \rho}{\cos(\gamma + \rho)} \cdot \frac{F m_2 + K m_1 \tan \gamma}{[m_2 + m_1 \tan \gamma \tan(\gamma + \rho)]}. \quad (2.5)$$

Damit die Bewegung nicht abgebremst wird, muß $\ddot{q}_2 \geq 0$ sein, was auf die Ungleichung

$$K \geq F \tan(\gamma + \rho) \quad (2.6)$$

führt (Abbildung 2.6, links). Für $F \geq 0$ und $K \geq F \tan(\gamma + \rho) \geq 0 \geq -F \frac{m_2}{m_1 \tan \gamma}$ ist auch die notwendige Bedingung $\lambda_N \geq 0$ erfüllt. Die Normalkraft ist für $K < -F \frac{m_2}{m_1 \tan \gamma}$ negativ, d.h. dreht man die Kraft K um und zieht stark genug am unteren Keil, so kommt es zur Separation der beiden Keile. Damit zeigt sich der Hubbetrieb bei der üblichen mathematischen Betrachtungsweise erwartungsgemäß problemlos.

Senkbetrieb

Für den Senkbetrieb ergibt das Kräftegleichgewicht im rechten Bild 2.7 in Richtung der Minimalkoordinaten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} F - m_1 \ddot{q}_1 - \lambda_T \sin \gamma - \lambda_N \cos \gamma &= 0, \\ K + m_2 \ddot{q}_2 + \lambda_T \cos \gamma - \lambda_N \sin \gamma &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Einsetzen des Gleitreibgesetzes und der Bindungsgleichung in die Bewegungsgleichungen 2.7 liefert das Gleichungssystem

$$F - m_1 \tan \gamma \ddot{q}_2 - \lambda_N \frac{\cos(\gamma - \rho)}{\cos \rho} = 0, \quad (2.8)$$

$$K + m_2 \ddot{q}_2 - \lambda_N \frac{\sin(\gamma - \rho)}{\cos \rho} = 0. \quad (2.9)$$

Anders als beim Hubbetrieb sind jetzt zwei Fälle zu unterscheiden. Der erste Fall ist ebenso wie der Hubbetrieb unkritisch. Er setzt voraus, daß das Getriebe nicht selbstbremsend ist, also $\gamma > \rho$ gilt. Elimination von λ_N führt auf die einfach Differentialgleichung für den Senkbetrieb

$$[m_2 + m_1 \tan \gamma \tan(\gamma - \rho)] \ddot{q}_2 = -K + F \tan(\gamma - \rho), \quad (2.10)$$

woraus man die Beschleunigung \ddot{q}_2 und damit die Kontaktnormalkraft λ_N berechnet

$$\ddot{q}_2 = \frac{-K + F \tan(\gamma - \rho)}{[m_2 + m_1 \tan \gamma \tan(\gamma - \rho)]}, \quad \lambda_N = \frac{\cos \rho}{\cos(\gamma - \rho)} \cdot \frac{F m_2 + K m_1 \tan \gamma}{[m_2 + m_1 \tan \gamma \tan(\gamma - \rho)]}. \quad (2.11)$$

Wenn $\ddot{q}_2 \geq 0$ ist, wird die Bewegung nicht abgebremst, es gilt

$$K \leq F \tan(\gamma - \rho) \quad (2.12)$$

(Abbildung 2.6, rechts). Die Separationsgrenze $K = -F \frac{m_2}{m_1 \tan \gamma}$ stimmt mit der des Hubbetriebes überein. Mit der Voraussetzung $F \geq 0$ und der Bedingung $\ddot{q}_2 > 0$ wird für $F \tan(\gamma - \rho) \geq K \geq -F \frac{m_2}{m_1 \tan \gamma}$ die notwendige Bedingung $\lambda_N \geq 0$ erfüllt.

Im zweiten Fall des Senkbetriebes liegt mit $\rho > \gamma$ Selbstbremsung vor. Die Differentialgleichung für den Senkbetrieb mit Selbstbremsung lautet

$$[m_2 - m_1 \tan \gamma \tan(\rho - \gamma)] \ddot{q}_2 = -K - F \tan(\rho - \gamma). \quad (2.13)$$

Hier hat man zwei Unterfälle zu betrachten. Die Bedingung 2.13 zur Unterscheidung der Unterfälle ist die Ratterbedingung nach Füssen!

$$\textbf{Unterfall 1:} \quad m_2 - m_1 \tan \gamma \tan(\rho - \gamma) > 0. \quad (2.14)$$

Die Beschleunigung \ddot{q}_2 und damit die Kontaktnormalkraft λ_N berechnet sich im Senkbetrieb mit Selbstbremsung bei Gültigkeit der Bedingung 2.14 zu

$$\ddot{q}_2 = \frac{-K - F \tan(\rho - \gamma)}{[m_2 - m_1 \tan \gamma \tan(\rho - \gamma)]}, \quad \lambda_N = \frac{\cos \rho}{\cos(\rho - \gamma)} \cdot \frac{F m_2 + K m_1 \tan \gamma}{[m_2 - m_1 \tan \gamma \tan(\rho - \gamma)]}. \quad (2.15)$$

2 Ratterbedingung selbstbremsender Getriebe

Mit der vorausgesetzten positiven Last $F > 0$ ist die Beschleunigung \ddot{q}_2 für $K > 0$ immer negativ. Die Selbstbremsung $\rho > \gamma$ bremst demnach das Getriebe bis zum Stillstand ab. Eine Bewegung in die gewünschten Richtung $\dot{q}_2 > 0$ mit der positiven Beschleunigung $\ddot{q}_2 \geq 0$ ist nur für die umgedrehte „entbremsende“ Kraft

$$K < -F \tan(\rho - \gamma) \quad (2.16)$$

möglich. Die Normalkraft λ_N ist positiv, wenn gilt

$$K > -F \frac{m_2}{m_1 \tan \gamma}. \quad (2.17)$$

Aus den Ungleichungen 2.16 und 2.17 folgt wieder die Bedingung 2.14

$$-F \tan(\rho - \gamma) > -F \frac{m_2}{m_1 \tan \gamma} \quad \Leftrightarrow \quad m_2 - m_1 \tan \gamma \tan(\rho - \gamma) > 0, \quad (2.18)$$

so daß für $-F \tan(\rho - \gamma) > K > -F \frac{m_2}{m_1 \tan \gamma}$ die Kontaktbedingung $\lambda_N > 0$ erfüllt ist. Für $K < -F \frac{m_2}{m_1 \tan \gamma}$ wird $\lambda_N < 0$ und die Keile trennen sich voneinander. Damit ist auch der erste Unterfall 2.14 unkritisch. Das ändert sich mit dem zweiten Unterfall. Wird die *Ratterbedingung*

$$\textbf{Unterfall 2:} \quad m_2 - m_1 \tan \gamma \tan(\rho - \gamma) < 0. \quad (2.19)$$

von den Trägheiten m_1 und m_2 erfüllt, so tritt der Rattereffekt auf. Die Beschleunigung \ddot{q}_2 und folglich die Kontaktnormalkraft λ_N berechnet sich im Senkbetrieb bei Selbstbremsung und der Bedingung 2.19 zu

$$\ddot{q}_2 = \frac{K + F \tan(\rho - \gamma)}{[-m_2 + m_1 \tan \gamma \tan(\rho - \gamma)]}, \quad \lambda_N = \frac{\cos \rho}{\cos(\rho - \gamma)} \cdot \frac{-F m_2 - K m_1 \tan \gamma}{[-m_2 + m_1 \tan \gamma \tan(\rho - \gamma)]}. \quad (2.20)$$

Die Analyse der beiden Gleichungen zeigt widersprüchliche Zustände, die mit der Anschauung nicht vereinbar sind. Die eigentlich „entbremsend“ wirkende Kraft

$$K < -F \tan(\rho - \gamma) \quad (2.21)$$

führt hier mit $\ddot{q}_2 < 0$ zur Abbremsung, und für die Kraft

$$K > -F \frac{m_2}{m_1 \tan \gamma} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_N < 0 \quad (2.22)$$

lösen sich die beiden Keile voneinander ab, wo hingegen der Anschauung nach die Separation für die umgedrehte Kraft $K < -F \frac{m_2}{m_1 \tan \gamma}$ auftreten sollte, wie es im Hubbetrieb und in den unkritischen Fällen des Senkbetriebes der Fall ist.

Es stellt sich jetzt die Frage, wie es zu diesem Widerspruch kommt und warum in diesem Kontext der Rattereffekt bzw. die Ratterschwingungen auftreten. Die Beantwortung dieser Frage wird in den nächsten Kapiteln behandelt. Es wird anhand eines analytischen Beweises gezeigt, daß die in diesem Kapitel getroffene anfängliche Annahme des Gleitens im Kontakt für den zweiten Unterfall falsch ist. Stattdessen wird, wenn die Ratterbedingung nach Fügen gilt, ein direkter Übergang *Haften* \rightarrow *Ablösen* (Separation) erfolgen. Die Ratterbedingung des Keilschubgetriebes lautet zusammengefaßt

$$\text{„Senkbetrieb“} \quad \wedge \quad \rho > \gamma \quad \wedge \quad m_2 - m_1 \tan \gamma \tan(\rho - \gamma) < 0. \quad (2.23)$$

Ratter- und reibschwingungsfähiges Keilgetriebe

Das einfache Keilschubgetriebe in Abbildung 2.3 kann zu einem reibschwingungsfähigen Keilgetriebe erweitert werden, indem die Kraft K durch eine lineare Feder mit der Federsteifigkeit k ersetzt wird. Es gilt der Zusammenhang

$$K = -k \cdot w. \quad (2.24)$$

In der Darstellung 2.8 ist das ratter- und reibschwingungsfähige Keilgetriebe abgebildet. Einsetzen der Federkraft 2.24 und der Beziehung $w = v_0 t - q_2$ in die Gleichung 2.10 und Berücksichtigung der Richtungsabhängigkeit der Reibkraft ergibt die nichtlineare Differentialgleichung des Reibschwingers

$$\{m_2 + m_1 \tan \gamma \tan [\gamma - \text{sign}(v_0 - \dot{w}) \rho]\} \ddot{w} + kw = -F \tan [\gamma - \text{sign}(v_0 - \dot{w}) \rho]. \quad (2.25)$$

Man betrachte dazu auch den bekannten Reibschwinger auf einem bewegten Laufband [68]. Anders als beim Reibschwinger auf einem bewegten Laufband wird hier nicht das

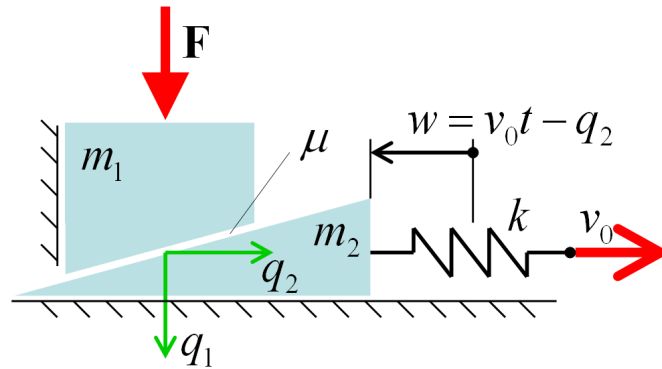


Abbildung 2.8: Das Keilgetriebe als Reibschwinger

Laufband mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 bewegt, sondern es wird der untere Keil m_2 am bezüglich der Zugrichtung feststehenden oberen Keil m_1 vorbeigezogen. Und im Gegensatz zum Reibschwinger auf dem bewegten Laufband kann der obere Keil m_1 auch Bewegungen senkrecht zur Zugrichtung v_0 ausführen. Ist die Reibkennlinie $\mu(\dot{\gamma}_T)$ fallend, so sind selbsterregte Stick-Slip-Schwingungen möglich.

Es fällt auf, daß in der Differentialgleichung 2.25 der Massenterm vor \ddot{w} im Ratterbetrieb negativ wird. Daraus würde eine „negative Eigenfrequenz“ des Systems resultieren. Die stückweise lineare Differentialgleichung 2.25 setzt den stetigen Gleitkontakt voraus. Diese Voraussetzung gilt nicht im Gültigkeitsbereich der Ratterbedingung 2.23! Das werden die zulässigen Zustandsübergänge in den nächsten Kapiteln zeigen. Schwingt demnach der Keil m_2 im Ratterbetrieb in die positive Richtung von q_2 , so gilt die Ratterbedingung. Dann löst sich der Kontakt und die beiden Einzelkörper bewegen sich solange unabhängig voneinander, bis sie wieder aufeinander treffen.

Der Haftbereich für das reibschwingungsfähige Keilgetriebe läßt sich mit $\ddot{q}_2 = 0$ und $|\lambda_T| \leq \tan \rho \lambda_N$ aus den Gleichungen 2.4, 2.10 und 2.13 ermitteln. Der Hubbetrieb liefert

2 Ratterbedingung selbstbremsender Getriebe

dafür die linke und der Senkbetrieb die rechte Haftgrenze, man erhält

$$\begin{aligned} \gamma > \rho: & \quad F \tan(\gamma + \rho) > K > F \tan(\gamma - \rho), \\ \rho > \gamma: & \quad F \tan(\gamma + \rho) > K > -F \tan(\rho - \gamma). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Einsetzen der Gleichung 2.24 in 2.26 liefert den Haftbereich des Reibschwingers im ratterfreien Betrieb

$$\begin{aligned} \gamma > \rho: & \quad -\frac{F}{k} \tan(\gamma + \rho) < w < -\frac{F}{k} \tan(\gamma - \rho), \\ \rho > \gamma: & \quad -\frac{F}{k} \tan(\gamma + \rho) < w < \frac{F}{k} \tan(\rho - \gamma). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Man erkennt, daß beim selbsthemmenden Getriebe der Haftbereich breiter ist als beim nicht-selbsthemmenden Getriebe. Im Ratterbetrieb ändert sich die linke Haftgrenze nicht, aber über die rechte Haftgrenze kann mit der konventionellen Betrachtungsweise keine Aussage gemacht werden. Die in Kapitel 4 verwendete Methode ermöglicht die Bestimmung der rechten Haftgrenze im Ratterbetrieb.

2.3.2 Schneckengetriebe

Das Schneckengetriebe mit seinen rotatorischen Freiheitsgraden eignet sich im Vergleich zum Keilgetriebe besser für experimentelle Untersuchungen. Zur Herleitung der Ratterbedingung für das Schneckengetriebe seien die Zahnkräfte in Abbildung 2.9 betrachtet. Mit dem Antriebsmoment M_2 an der Schnecke und der Abtriebslast $M_1 = F \cdot r_1$ am

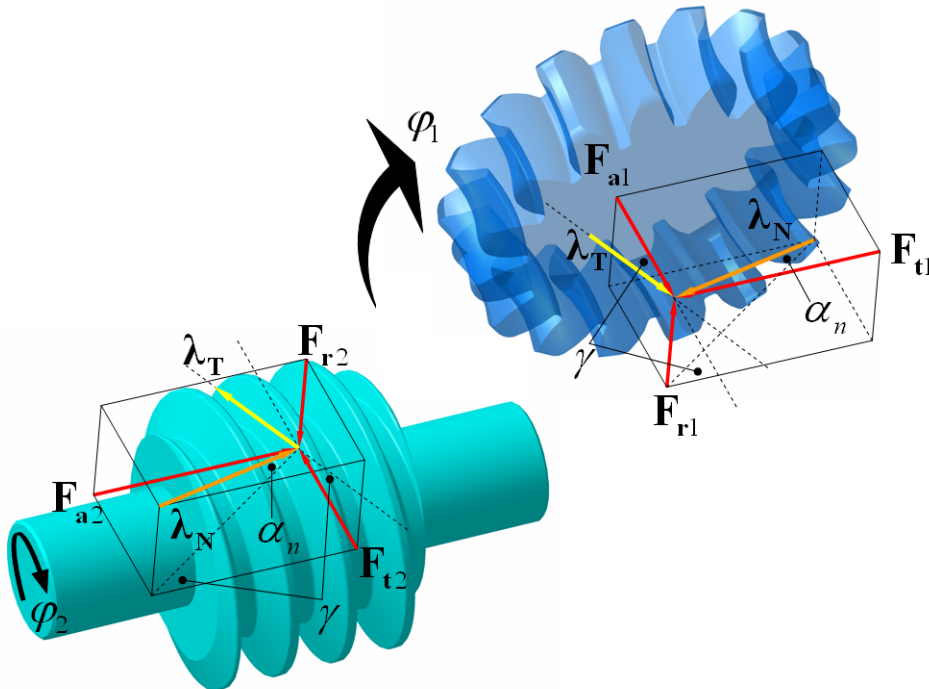


Abbildung 2.9: Kräfte am Schneckengetriebe mit Zahnreibung

Schneckenrad lauten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} M_1 + \Theta_1 \ddot{\varphi}_1 - F_{t1} r_1 + \lambda_T r_1 \sin \gamma &= 0, \\ M_2 - \Theta_2 \ddot{\varphi}_2 - F_{t2} r_2 - \lambda_T r_2 \cos \gamma &= 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Der Abbildung 2.9 entnimmt man die Beziehungen

$$F_{t1} = \lambda_N \cos \alpha_n \cos \gamma, \quad F_{t2} = \lambda_N \cos \alpha_n \sin \gamma, \quad (2.29)$$

mit dem Normal-Eingriffswinkel α_n . Für die Reibkraft im Schneckengetriebe [73] gilt

$$\lambda_T = \lambda_N \text{sign}(\dot{\varphi}_2) \mu \quad \text{mit} \quad \mu = \tan \rho \cos \alpha_n. \quad (2.30)$$

Die Gleichungen 2.29 und 2.30 in die Bewegungsgleichungen 2.28 eingefügt, ergibt

$$\begin{aligned} M_1 + \Theta_1 \ddot{\varphi}_1 - \lambda_N r_1 \frac{\cos \alpha_n}{\cos \rho} \cos [\gamma + \text{sign}(\dot{\varphi}_2) \rho] &= 0, \\ M_2 - \Theta_2 \ddot{\varphi}_2 - \lambda_N r_2 \frac{\cos \alpha_n}{\cos \rho} \sin [\gamma + \text{sign}(\dot{\varphi}_2) \rho] &= 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Durch die Elimination der Normalkraft λ_N und das Einsetzen der Bindungsgleichung $\ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_2 \frac{r_2}{r_1} \tan \gamma$ findet man dann die Differentialgleichung des Schneckengetriebes

$$\left\{ \Theta_2 + \Theta_1 \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \tan \gamma \tan [\gamma + \text{sign}(\dot{\varphi}_2) \rho] \right\} \ddot{\varphi}_2 = M_2 - M_1 \frac{r_2}{r_1} \tan [\gamma + \text{sign}(\dot{\varphi}_2) \rho]. \quad (2.32)$$

Der Ausdruck in den geschweiften Klammern führt schließlich auf die Ratterbedingung des Schneckengetriebes. Ist $\dot{\varphi}_2 > 0$, so beschreibt die Gleichung 2.32 den unkritischen Hubbetrieb. Für $\dot{\varphi}_2 < 0$ und $\rho > \gamma$ befindet sich das Getriebe im ratterkritischen Senkbetrieb. Die Ratterbedingung des Schneckengetriebes lautet somit

$$\text{„Senkbetrieb“} \quad \wedge \quad \rho > \gamma \quad \wedge \quad \Theta_2 - \Theta_1 \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \tan \gamma \tan (\rho - \gamma) < 0. \quad (2.33)$$

2.4 FEM-Simulation

Zur ersten Abschätzung der auftretenden Schwingungen im Keilschubgetriebe bietet sich die numerische Methode der Finiten Elemente mit ihrer integrierten Kontaktmechanik an. Ohne aufwendige Experimente läßt sich die Dynamik des Getriebes näherungsweise berechnen. Die Simulation soll zeigen, daß entsprechend den Getriebeparametern die Reibschwingungen oder, bei Erfüllung der Ratterbedingungen, die Ratterschwingungen ohne Gleitbereiche auftreten. Als Simulationssoftware kommt das Analysepaket ANSYS zum Einsatz, daß besonders für dynamische Kontaktprobleme geeignet ist.

2.4.1 FE-Modell

Das Finite-Element-Modell des Keilgetriebes in Abbildung 2.10 besteht aus den beiden horizontal und vertikal gelagerten Keilelementen des Getriebes, deren unterer Keil über lineare Federelemente an Zugknoten gekoppelt und mit einer konstanten Geschwindigkeit horizontal bewegt wird. Der untere Keil erhält eine Länge, die der zu berechnenden maximalen Zeitdauer entspricht. Der obere Keil wird in zwei Lastschritten mit einer vertikalen Last beaufschlagt. Im ersten, sehr kurzen initialen Lastschritt wird die Last in Form einer

2 Ratterbedingung selbstbremsender Getriebe

Rampe aufgebracht und im zweiten, eigentlichen Lastschritt wirkt der Endwert des ersten Lastschrittes als konstante Last $F = 100N$. Es wird eine Materialpaarung Stahl-Stahl mit trockener Reibung, Reibwert $\mu = 0.25$ und E-Modul $E = 210000 \frac{N}{mm^2}$, angenommen. Der Steigungswinkel des unteren Keil beträgt 12° , so daß Selbsthemmung und -bremsung die Folge ist. Über die Materialdichte der beiden Keile wird die Masse und damit die Ratter-

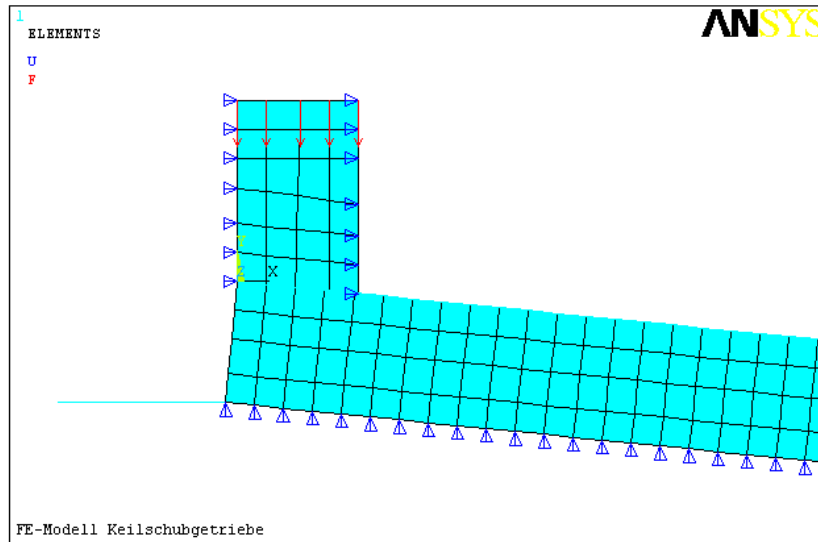


Abbildung 2.10: Finite Elemente Modell des Keilschubgetriebes

bedingung eingestellt. Die Eigenfrequenz des unteren freien Einmassenschwingers ergibt sich dann aus seiner Masse und der Federsteifigkeit der Feder. Die Geschwindigkeit v_0 des Zugknotens wird am Ende der 4 Federn eingeleitet.

Zur transienten Analyse kommt das implizite Newmark-Integrationsverfahren mit automatischer Schrittweitensteuerung zum Einsatz, das zur Lösung des Kontaktproblems die Penalty-Methode mit elastischer Coulombreibung verwendet (Empfehlung der ANSYS-Dokumentation). Die Penalty-Methode erfordert die Angabe von normaler und tangentialer Kontaktsteifigkeiten. Diese Berechnungsparameter beeinflussen maßgeblich das Lösungsverhalten, und es bedarf Fingerspitzengefühl bei der Einstellung dieser Parameter, insbesondere des tangentialen Parameters. Die Berechnung ist in zwei Stufen untergliedert. In der ersten Stufe werden die Berechnungsparameter so eingestellt, daß die Simulation die bekannten Reibschwingungen korrekt wiedergibt. Anschließend wird in der zweiten Stufe durch Variation der Materialdichten der beiden Getriebeelemente die Ratterbedingung erfüllt und die Ratterschwingungen erzeugt.

2.4.2 Simulationsergebnisse

Die einfachen Reib- bzw. Stick-Slip-Schwingungen erhält man für die Getriebeparameter

- $m_1 = 2.42kg$,
- $m_2 = 108.78kg$,
- $k = 2 \frac{N}{mm}$ und
- $v_0 = 2 \frac{mm}{s}$.

Im Diagrammen 2.11 ist das Ergebnis der FE-Simulation dargestellt. Das linke Diagramm zeigt die Bewegungen der beiden Keile und des Zugknotens. Man erkennt einen stetigen Kontakt zwischen den beiden Keilen, es wird die Bindungsgleichung $q_1 = q_2 \tan \gamma$ erfüllt.

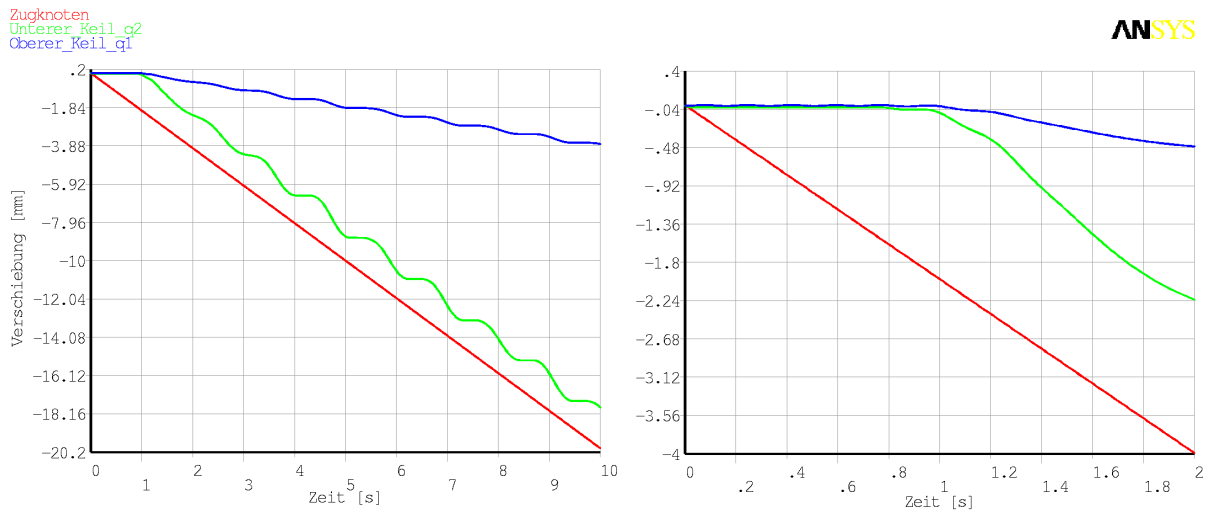


Abbildung 2.11: Links: erst Reib-, dann Stick-Slip-Schwingungen; rechts: Haftbereich

Nach Überschreitung der Haftgrenze führt das Getriebe erst einmal drei Gleitreibschwingungen ohne Haften aus. Anschließend wird, nach dem Einlaufen der Schwingungen in die zweite Haftgerade, der Grenzykel erreicht und die Stick-Slip-Schwingungen beginnen. Im rechten Diagramm ist der anfängliche erste Haftbereich vergrößert dargestellt. Der Haftbereich endet dort bei $t \approx 0.9s$. Einsetzen der Beziehung $w = v_0 t - q_2$ in die Gleichung 2.27 liefert mit der Anfangsbedingung $q_2 = 0$ die Haftgrenze bei Selbsthemmung

$$t = \frac{F \tan(\rho - \gamma)}{v_0 k}. \quad (2.34)$$

Daraus ergibt sich eine rechnerische Haftgrenze von $t = 0.873s$. Das FE-Modell ist geeignet, die Stick-Slip-Schwingungen abzubilden. Daher wird nun im zweiten Schritt die Ratterbedingung eingestellt. Die Getriebeparameter für den Ratterbetrieb lauten

- $m_1 = 1000 \cdot 2.42kg = 2420kg$,
- $m_2 = 0.1 \cdot 108.78kg = 10.878kg$,
- $k = 4 \frac{N}{mm}$ und
- $v_0 = 10 \frac{mm}{s}$.

Einsetzen der Daten in die Ratterbedingung 2.23 liefert die Aussage

$$10.878kg < 17.963kg.$$

Damit sollte der sichere Ratterbetrieb möglich sein. Das Diagramm in Abbildung 2.12 stellt das Ergebnis der Berechnung dar. Nach dem Überschreiten der Haftgrenze bei $t \approx 0.09s$ (rechnerischer Wert: $t = 0.0873s$) trennen sich die beiden Keile voneinander

2 Ratterbedingung selbstbremsender Getriebe

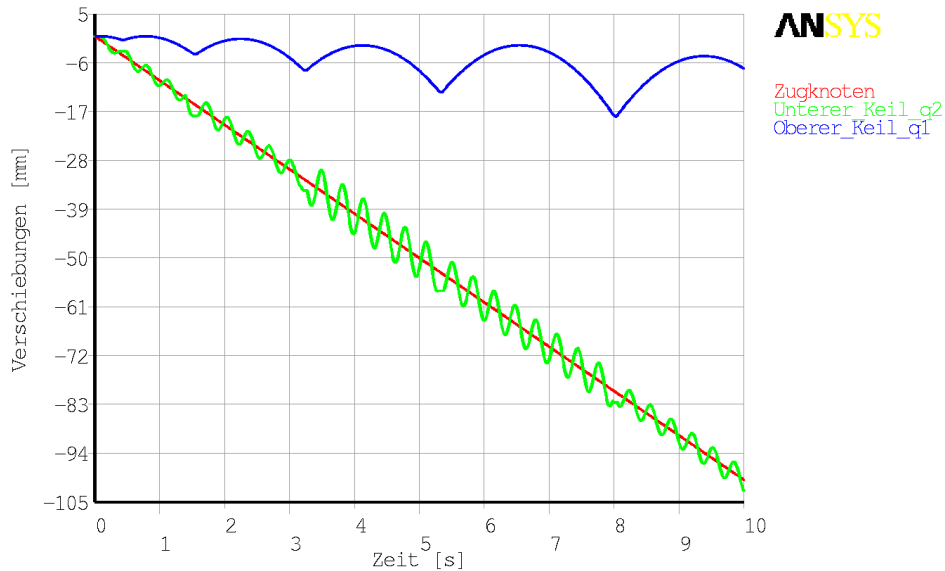


Abbildung 2.12: Ratterschwingungen des Keilschubgetriebes

und führen unabhängige Bewegungen aus, bis sie bei $t \approx 0.43s$ wieder aufeinander stoßen. Es kommt zu einem Hafttreibstoß. Eine vergrößerte Darstellung des Haftbereichs und zweier beispielhaft ausgewählter Stöße findet man in der Abbildung 2.13. Beim Stoß wird der untere Keil für einen Zeitraum von $\Delta t \approx 0.1s$ blockiert. Am oberen Keil erkennt man für diesen Zeitraum die elastische Deformation während des Stoßes, der demnach in eine Kompressions- und Expansionsphase zerlegt werden kann. Nach dem Haftreib-

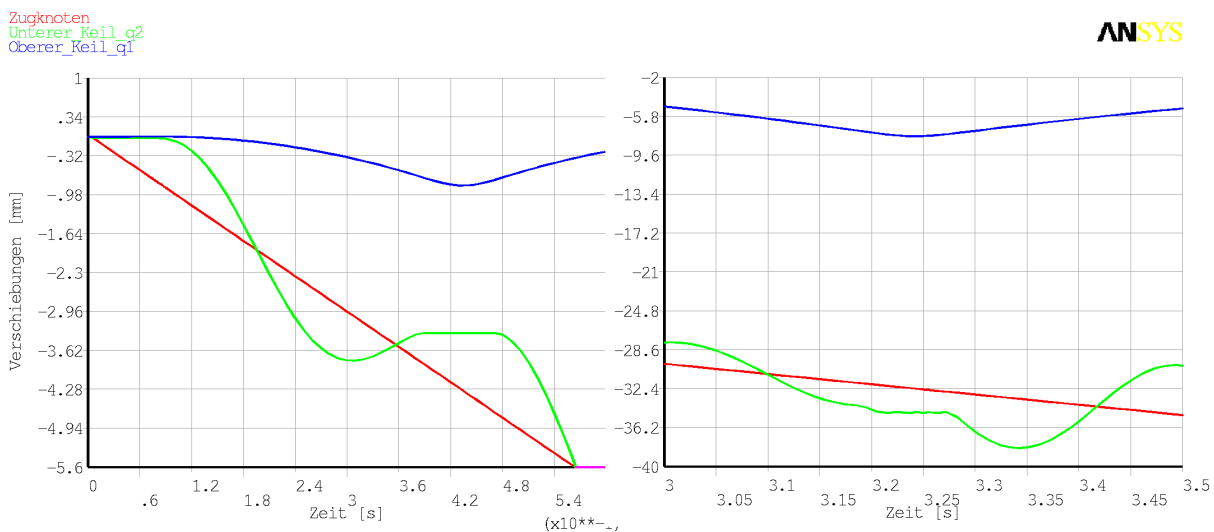


Abbildung 2.13: Ratterschwingungen, links: Initialer Haftbereich und erster Haftstoßkontakt; rechts: weiterer Haftstoß

stoß schwingt der untere Keil mit einer Periodendauer von $T \approx 0.32s$. Die rechnerische Eigenfrequenz ergibt eine Periodendauer von $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}} = 0.328s$. Bei Erfüllung der Ratterbedingungen liefert auch die Simulation mit FEM sicher die Ratterschwingungen. Alle Simulationen haben gezeigt, daß im Ratterbetrieb keine makroskopischen Gleitphasen auftreten. Eine Verallgemeinerung dieser Aussagen mit der FEM ist aber so nicht möglich. Dieses kann nur auf analytischem Weg geleistet werden und ist Gegenstand der nächsten Kapitel.

3 Kontaktmechanik

Um Vorhersagen darüber treffen zu können, ob und welche Zustandsübergänge von einem Ausgangszustand aus überhaupt möglich sind, dienen als Ausgangspunkt die kinetischen und kinematischen Gleichungen der Kontaktmechanik. In [39, 40] und insbesondere in [12] findet man ausführliche Herleitungen zur Kontaktmechanik. Hier seien die bestimmenden Gleichungen und Ungleichungen in knapper Form angegeben bzw. hergeleitet.

3.1 Kontaktkinematik

Betrachtet werden zwei starre Körper, die sich im Laufe der zeitlichen Entwicklung des Systems berühren können. Vorausgesetzt sei, daß in einem Kontakt die Relativbewegungen zwischen zwei Kontaktpartnern nur in einer Ebene erfolgen. Gesucht werden die Gleichungen, die die Relativbewegungen zwischen den beiden Kontaktpartnern beschreiben. Abbildung 3.1 zeigt die kinematischen Verhältnisse zwischen zwei Körpern, die in Kontakt treten können. Zur Beschreibung der kinematischen Verhältnisse eignen sich die beiden

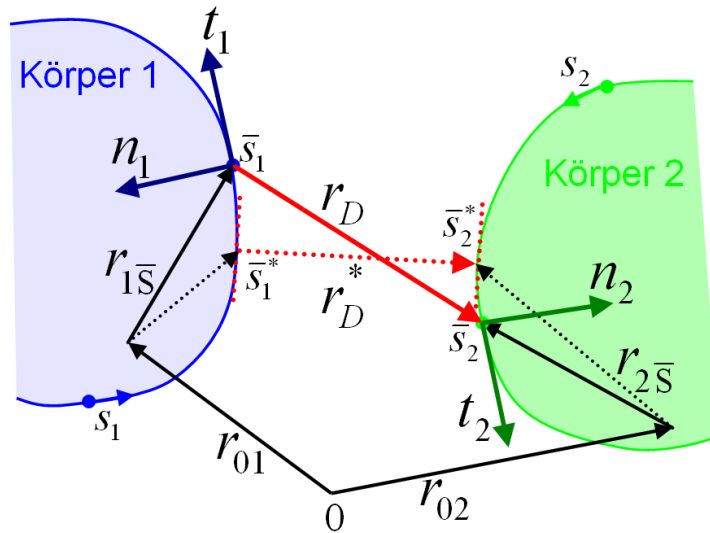


Abbildung 3.1: Kontaktkinematik

Größen g_N und \bar{g}_T . Die Größe g_N ist der Abstand (das ist die minimale Entfernung) der beiden Körperkonturen, und \bar{g}_T entspricht einer verallgemeinerten Abrollbedingung [12] der Körperkonturen. Nach Abbildung 3.1 gilt für den Abstand und die „tangentiale Verschiebung“

$$g_N = |\mathbf{r}_D^*| = -\mathbf{r}_D^{*T} \cdot \mathbf{n}_1^* = \mathbf{r}_D^{*T} \cdot \mathbf{n}_2^*, \quad \bar{g}_T = -\bar{s}_1^* - \bar{s}_2^*. \quad (3.1)$$

3 Kontaktmechanik

Die Bogenlängen s_1 und s_2 sind die Kurvenparameter der Kontaktkonturen. Sie beschreiben die Bewegung der Bezugspunkte \bar{s}_1 und \bar{s}_2 auf den Kontaktkonturen der beiden Starrkörper. Die zeitliche Ableitung von $(-\mathbf{r}_D^T \cdot \mathbf{n}_1)$ ist:

$$\begin{aligned} (-\mathbf{r}_D^T \mathbf{n}_1)' &= -\dot{\mathbf{r}}_D^T \mathbf{n}_1 - \mathbf{r}_D^T \dot{\mathbf{n}}_1 \\ \Leftrightarrow (-\mathbf{r}_D^T \mathbf{n}_1)' &= -(\dot{\mathbf{r}}_{02} + \dot{\mathbf{r}}_{2\bar{s}} - \dot{\mathbf{r}}_{01} - \dot{\mathbf{r}}_{1\bar{s}})^T \mathbf{n}_1 - \mathbf{r}_D^T \dot{\mathbf{n}}_1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Sind $\boldsymbol{\Omega}_1$ und $\boldsymbol{\Omega}_2$ die Winkelgeschwindigkeiten der beiden Starrkörper, so ergeben sich mit Hilfe der Eulerschen Differentiationsregel die absoluten Geschwindigkeiten der Kontaktpunkte \bar{s}_1 und \bar{s}_2 zu

$$\dot{\mathbf{r}}_{1,2\bar{s}} = \boldsymbol{\Omega}_{1,2} \times \mathbf{r}_{1,2\bar{s}} + \dot{s}_{1,2} \mathbf{t}_{1,2}. \quad (3.3)$$

Der zweite Term $\dot{s}_{1,2} \mathbf{t}_{1,2}$ stellt die relative Bahngeschwindigkeit eines auf der Kontur von Körper 1 bzw. 2 bewegten Punktes dar. Mit der relativen Zeitableitung des Normalenvektors $\frac{\partial \mathbf{n}(s(t))}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial t}$ und der Ableitung des Normalenvektors nach der Bogenlänge $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} = -\kappa \cdot \mathbf{t}$ im körperfesten System erhält man die absolute Zeitableitung der die Kontaktkonturen begleitenden Normalenvektoren in den Kontaktpunkten $s_{1,2}$

$$\dot{\mathbf{n}}_{1,2} = \boldsymbol{\Omega}_{1,2} \times \mathbf{n}_{1,2} - \kappa_{1,2} \dot{s}_{1,2} \mathbf{t}_{1,2}. \quad (3.4)$$

Darin ist $\mathbf{t}_{1,2}$ der Tangentialvektor des zur Kontaktkurve zugehörigen begleitenden Dreibeins $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})_{1,2}$ und $\kappa_{1,2}$ die Kurvenkrümmung der Kontaktkontur. Einsetzen der beiden Beziehungen 3.3 und 3.4 in die Gleichung 3.2 liefert

$$(-\mathbf{r}_D^T \mathbf{n}_1)' = -\mathbf{n}_1^T (\dot{\mathbf{r}}_{02} + \boldsymbol{\Omega}_2 \times \mathbf{r}_{2\bar{s}} + \dot{s}_2 \mathbf{t}_2 - \dot{\mathbf{r}}_{01} - \boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{r}_{1\bar{s}} - \dot{s}_1 \mathbf{t}_1) - \mathbf{r}_D^T (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{n}_1 - \kappa_1 \dot{s}_1 \mathbf{t}_1) \quad (3.5)$$

Man erkennt die absoluten Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_{C1} = \boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{r}_{1\bar{s}} + \dot{\mathbf{r}}_{01}$ und $\mathbf{v}_{C2} = \boldsymbol{\Omega}_2 \times \mathbf{r}_{2\bar{s}} + \dot{\mathbf{r}}_{02}$ der körperfesten Punkte bei $s_{1,2}$, so daß folgt

$$(-\mathbf{r}_D^T \mathbf{n}_1)' = -\mathbf{n}_1^T (\mathbf{v}_{C2} - \mathbf{v}_{C1}) - \mathbf{r}_D^T (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{n}_1) + \kappa_1 \dot{s}_1 \mathbf{r}_D^T \mathbf{t}_1 + \dot{s}_1 \mathbf{n}_1^T \mathbf{t}_1 - \dot{s}_2 \mathbf{n}_1^T \mathbf{t}_2. \quad (3.6)$$

Ganz analog erhält man mit $\dot{\mathbf{t}}_{1,2} = \boldsymbol{\Omega}_{1,2} \times \mathbf{t}_{1,2} + \kappa_{1,2} \dot{s}_{1,2} \mathbf{n}_{1,2}$ die Beziehung

$$(-\mathbf{r}_D^T \mathbf{t}_1)' = -\mathbf{t}_1^T (\mathbf{v}_{C2} - \mathbf{v}_{C1}) - \mathbf{r}_D^T (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{t}_1) - \kappa_1 \dot{s}_1 \mathbf{r}_D^T \mathbf{n}_1 + \dot{s}_1 \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_1 - \dot{s}_2 \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_2. \quad (3.7)$$

Eine weitere nützliche Beziehung ist

$$(\mathbf{n}_1^T \mathbf{t}_2)' = (\mathbf{t}_2 \times \mathbf{n}_1)^T (\boldsymbol{\Omega}_2 - \boldsymbol{\Omega}_1) - \kappa_1 \dot{s}_1 \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_1 + \kappa_2 \dot{s}_2 \mathbf{n}_1^T \mathbf{n}_2. \quad (3.8)$$

Im Fall „*“ der minimalen Entfernung g_N nehmen die Kontaktpunkte \bar{s}_1 und \bar{s}_2 die Lagen der Kontaktpunkte \bar{s}_1^* und \bar{s}_2^* ein. Dann stehen die Vektoren $\mathbf{t}_{1,2}$ und \mathbf{r}_D senkrecht aufeinander und die Gleichungen 3.6, 3.7 und 3.8 ergeben wegen

$$(\mathbf{r}_D^{*T} \mathbf{t}_1^*)' = 0 \quad \wedge \quad (\mathbf{n}_1^{*T} \mathbf{t}_2^*)' = 0 \quad (3.9)$$

$$\mathbf{t}^{*T} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}^*) = -\mathbf{b}^{*T} \boldsymbol{\Omega} \quad \wedge \quad \mathbf{n}^{*T} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}^*) = 0 \quad (3.10)$$

und wegen der Relativbewegung in Normalenrichtung $g_N = (-\mathbf{r}_D^{*T} \mathbf{n}_1^*)' \Rightarrow \dot{g}_N = (-\mathbf{r}_D^{*T} \mathbf{n}_1^*)'$ nach Gleichung 3.1 das Gleichungssystem

$$\dot{g}_N = -\mathbf{n}_1^T (\mathbf{v}_{C2} - \mathbf{v}_{C1}), \quad (3.11)$$

$$0 = -\mathbf{t}_1^T (\mathbf{v}_{C2} - \mathbf{v}_{C1}) + g_N \mathbf{b}_1^T \boldsymbol{\Omega}_1 + \kappa_1 \dot{s}_1^* g_N + \dot{s}_1^* + \dot{s}_2^*, \quad (3.12)$$

$$0 = -\mathbf{b}_1^T (\boldsymbol{\Omega}_2 - \boldsymbol{\Omega}_1) + \kappa_1 \dot{s}_1^* - \kappa_2 \dot{s}_2^*. \quad (3.13)$$

Es handelt sich um ein lineares Differentialgleichungssystem bezüglich g_N . Die Gleichungen 3.12 und 3.13 stellen aber auch ein lineares Gleichungssystem für die Größen \dot{s}_1^* und \dot{s}_2^* dar. Die Auflösung des Gleichungssystems nach \dot{s}_1^* und \dot{s}_2^* und das Einsetzen in $\dot{g}_T = -\dot{s}_1^* - \dot{s}_2^*$ (aus Gleichung 3.1) ergibt die tangentielle Relativgeschwindigkeit (siehe auch Glocker [11])

$$\dot{g}_T = \frac{\mathbf{t}_1^T (\mathbf{v}_{C1} - \mathbf{v}_{C2}) (\kappa_1 + \kappa_2) + g_N \mathbf{b}_1^T (\kappa_2 \boldsymbol{\Omega}_1 - \kappa_1 \boldsymbol{\Omega}_2)}{\kappa_1 + \kappa_2 + g_N \kappa_1 \kappa_2}. \quad (3.14)$$

Für den Fall, daß es sich bei den Kontaktkonturen um Geraden mit $\kappa_1 = 0$ und $\kappa_2 = 0$ handelt, man die Abkürzung $\dot{g}_T = \dot{\hat{g}}_T$ berücksichtigt, liefern die Gleichungen 3.12-3.13 für die tangentielle Relativgeschwindigkeit die vereinfachte Beziehung

$$\dot{g}_T = \mathbf{t}_1^T (\mathbf{v}_{C1} - \mathbf{v}_{C2}). \quad (3.15)$$

Es fällt auf, daß hier im Gegensatz zum allgemeinen, ebenen Fall nach Gleichung 3.14 keine Abhängigkeit von der normalen Relativgeschwindigkeit g_N besteht. Außerdem folgt aus dem Gleichungssatz die Forderung nach $\boldsymbol{\Omega}_1 = \boldsymbol{\Omega}_2$, die Körper drehen sich also parallel zueinander. Berühren sich im allgemeinen Fall die Körper, so ist $g_N = 0$ und es gilt ebenfalls die Gleichung 3.15. Mit den Gleichungen 3.11 und 3.14 kann nun der Kontaktzustand zwischen zwei potentiellen Kontaktpartnern beschrieben werden.

3.2 Kontaktkinetik

Die allgemeine Form der Bewegungsgleichung eines Mehrkörpersystems mit bilateralen (geführten Bewegungen) und unilateralen Bindungen (halbseitig gesperrten Bewegungen) wird beschrieben durch die variationelle Ungleichung des Prinzips von Gauß [13]

$$\delta'' Z = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} (\ddot{\mathbf{r}}_i dm_i - d\mathbf{f}_i^e)^T \cdot \delta'' \ddot{\mathbf{r}}_i \geq 0. \quad (3.16)$$

Z ist der zu minimierende Zwang nach Gauß, $\ddot{\mathbf{r}}_i$ die Beschleunigung, dm_i die infinitesimale Masse und $d\mathbf{f}_i^e$ die infinitesimale eingeprägte Kraft des Körper i . Abzüglich der infolge der bilateralen Bindungen entfallenden Freiheitsgrade hat das Mehrkörpersystem f verbleibende Freiheitsgrade. Das System hat die maximale Anzahl von f Freiheitsgraden, wenn alle Kontakte geöffnet sind. Es seien bilaterale Bindungen also bereits durch die Minimalkoordinaten berücksichtigt, unilaterale Bindungen müssen dagegen noch als Nebenbedingungen in die bestimmenden Bewegungsgleichungen integriert werden. Der Beschleunigungsvektor $\ddot{\mathbf{r}}_i$ sei in diesen Minimalkoordinaten $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^f$ ausgedrückt

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \ddot{\mathbf{r}}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) \quad \Leftrightarrow \quad \delta'' \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_i}{\partial \mathbf{q}} \delta'' \mathbf{q} + \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta'' \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_i}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \delta'' \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_i}{\partial t} \delta'' t. \quad (3.17)$$

Für den Differentialoperator δ'' gilt

$$\delta'' \mathbf{q} = 0, \quad \delta'' \dot{\mathbf{q}} = 0, \quad \delta'' t = 0. \quad (3.18)$$

3 Kontaktmechanik

Die Variation erfolgt also nur über die virtuelle Beschleunigung bei festgehaltener Lage, Geschwindigkeit und Zeit. Mit den Beziehungen 3.18 folgt

$$\delta'' \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_i}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \delta'' \ddot{\mathbf{q}}. \quad (3.19)$$

Einsetzen von 3.19 in die variationelle Ungleichung 3.17 liefert

$$\sum_{i=1}^n \int_{V_i} (\ddot{\mathbf{r}}_i dm_i - d\mathbf{f}_i^e)^T \cdot \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_i}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \delta'' \ddot{\mathbf{q}} \geq 0. \quad (3.20)$$

Zur Beschreibung der Kontaktzustände dienen die Indexmengen

$$\begin{aligned} I_G &= \{1, 2, \dots, n_G\} && \Rightarrow \text{Menge aller möglichen Kontakte} \\ I_N &= \{j \in I_G \mid \dot{g}_j = 0\} && \Rightarrow \text{Menge aller aktiven, d.h. geschlossenen Kontakte.} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Es sei jetzt vorausgesetzt, daß nachfolgend nur die bezüglich der Geschwindigkeit stetigen Zustandsübergänge *Haften* \rightarrow *Separation*, *Gleiten* \rightarrow *Separation*, *Haften* \rightarrow *Gleiten*, *Haften* \rightarrow *Haften*, *Gleiten* \rightarrow *Gleiten* und *Gleiten* \rightarrow *Haften* und die andauernden Zuständen *Gleiten*, *Haften* und *Separation* auftreten dürfen. Stöße sind verbunden mit Sprüngen in den Geschwindigkeiten und können mit der in diesem Kapitel beschriebenen Methode nicht abgebildet werden, sie werden hier deshalb ausgeschlossen. Dann können die unilateralen Bindungen beschrieben werden durch die impliziten Bindungsungleichungen auf Beschleunigungsebene

$$\ddot{g}_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) \geq 0 \quad j \in I_G. \quad (3.22)$$

Die Formulierung auf Beschleunigungsebene ist zulässig, weil beispielsweise bei Separation der positive Relativabstand zwischen den Kontaktpartnern nur über positive Abstandsgeschwindigkeit und diese auch nur über positive Abstandsbeschleunigung erreicht werden kann. Die virtuelle Änderung der Beschleunigungen $\delta'' \ddot{g}_j$ ergeben sich unter Berücksichtigung von Gleichung 3.18 zu

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \delta'' \ddot{g}_j &= \frac{\partial \ddot{g}_j}{\partial \mathbf{q}} \delta'' \mathbf{q} + \frac{\partial \ddot{g}_j}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta'' \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \ddot{g}_j}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \delta'' \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \ddot{g}_j}{\partial t} \delta'' t \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad \delta'' \ddot{g}_j &= \frac{\partial \ddot{g}_j}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \delta'' \ddot{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Es gelten die Helmholtzschen Hilfsformeln

$$\frac{\partial g_j}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \dot{g}_j}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \ddot{g}_j}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} = \nabla \mathbf{g}_j. \quad (3.24)$$

so daß folgt

$$-\nabla \mathbf{g}_j^T \cdot \delta'' \ddot{\mathbf{q}} \leq 0. \quad (3.25)$$

¹Bei bilateralen Bindungen gilt nur das Gleichheitszeichen. Da die Variation $\delta'' \ddot{\mathbf{q}}$ willkürlich ist, kann die variationelle Gleichung 3.20 für bilaterale Bindungen nur erfüllt werden, wenn $\sum_{i=1}^n \int_{V_i} (\ddot{\mathbf{r}}_i dm_i - d\mathbf{f}_i^e)^T \cdot \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_i}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} = 0$ gilt. Dies ist die Projektionsgleichung nach Bremer [6]. Die Projektionsgleichung projiziert über die Jacobi-Matrix $\mathbf{J} = \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_i}{\partial \ddot{\mathbf{q}}}$ die Impulssätze in die freien Bewegungsrichtungen. Reaktionskräfte tragen keinen Anteil zur Bewegung bei, stehen folglich senkrecht auf der Bewegungsrichtung.

Die Kinetik von einseitig gebundenen Mehrkörpersystemen kann zusammenfassend beschrieben werden durch die beiden variationellen Ungleichungen 3.20 und 3.25

$$\sum_{i=1}^n \int_{V_i} (\dot{\mathbf{r}}_i dm_i - d\mathbf{f}_i^e)^T \cdot \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_i}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \delta'' \ddot{\mathbf{q}} \geq 0 \quad \wedge \quad -\nabla \mathbf{g}_j^T \cdot \delta'' \ddot{\mathbf{q}} \leq 0. \quad (3.26)$$

Satz von Farkas²

$$\{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{x} \geq 0 \quad \wedge \quad \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{0}\} \quad \Leftrightarrow \quad \{\mathbf{a} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \wedge \quad \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\} \quad (3.27)$$

Laut dem Satz von Farkas [19] sind die beiden variationellen Ungleichungen äquivalent zu

$$\sum_{i=1}^n \int_{V_i} (\dot{\mathbf{r}}_i dm_i - d\mathbf{f}_i^e)^T \cdot \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_i}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} - \lambda_j \cdot \nabla \mathbf{g}_j = \mathbf{0} \quad \wedge \quad \lambda_j \geq 0. \quad (3.28)$$

Die totalen Differentiale für $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t)$ und $\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ lauten

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}_i &= \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt & \Rightarrow & \quad \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \\ d\dot{\mathbf{r}}_i &= \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} d\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial t} dt & \Rightarrow & \quad \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Einsetzen der Helmholtzschen Hilfsformel $\mathbf{J}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_i}{\partial \ddot{\mathbf{q}}}$ in die Gleichung 3.29 liefert für den Beschleunigungsvektor

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \ddot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial t} \right). \quad (3.30)$$

Vertauscht man in Gleichung 3.28 die Terme des ersten Skalarprodukts und setzt für $\ddot{\mathbf{r}}_i$ die Gleichung 3.30 ein, so erhält man

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i^T \int_{V_i} \mathbf{J}_i dm_i \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i^T \int_{V_i} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial t} \right) dm_i - \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i^T \int_{V_i} d\mathbf{f}_i^e - \lambda_j \nabla \mathbf{g}_j = \mathbf{0}. \quad (3.31)$$

Mit der symmetrischen, positiv definiten Massenmatrix

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i^T \int_{V_i} \mathbf{J}_i dm_i, \quad (3.32)$$

dem Vektor der verallgemeinerten Zentrifugal-, Coriolis- und eingepprägten Kräfte

$$\mathbf{h} = \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i^T \int_{V_i} d\mathbf{f}_i^e - \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i^T \int_{V_i} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial t} \right) dm_i \quad (3.33)$$

und den impliziten Bindungsgleichungen 3.22 folgt für die Beziehungen 3.28

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h} - \lambda_j \cdot \nabla \mathbf{g}_j = \mathbf{0} \quad \wedge \quad \lambda_j \geq 0 \quad \wedge \quad \ddot{g}_j \geq 0 \quad . \quad (3.34)$$

²siehe Anhang A

3 Kontaktmechanik

Die Kontakte j können zwei Zustände einnehmen. Es gibt den aktiven und den passiven Zustand. Ein Kontakt ist aktiv, wenn der Kontakt zwischen den beiden Kontaktpartnern geschlossen ist und keine Relativbewegung möglich ist. Es gilt: $g_j = 0 \Rightarrow \ddot{g}_j = 0$. In Normalenrichtung eines Kontaktpunktes entspricht das dem Zustand *Kontakt* und in Tangentialrichtung entspricht das dem Zustand *Haften*.

Dagegen ist ein Kontakt j passiv, wenn der Kontakt zwischen den beiden Kontaktpartnern offen ist und eine Relativbewegung möglich ist. Dann gilt: $g_j > 0 \Rightarrow \ddot{g}_j > 0$. In Normalenrichtung entspricht das dem Zustand *Separation* und in Tangentialrichtung entspricht das dem Zustand *Gleiten*.

Der Lagrangesche Multiplikator λ_j des Kontaktes j hat nur für den Fall einer aktiven Bindung einen von Null verschiedenen Wert. Ist ein Kontakt passiv, so ist auch der zugehörige Lagrangesche Multiplikator gleich Null, wobei angemerkt sei, daß in Tangentialrichtung der Lagrangesche Multiplikator deshalb Null wird, weil beim Gleiten die Gleitkraft (sie entspricht einem Lagrangesche Multiplikator) zu den eingepprägten Kräften überwechselt. Man erkennt:

Ist $\ddot{g}_j = 0$, der Kontakt also aktiv, so gilt: $\lambda_j \geq 0$
 Ist $\ddot{g}_j > 0$, der Kontakt also passiv, so gilt: $\lambda_j = 0$

\ddot{g}_j und λ_j schließen sich gegenseitig aus. Beide verhalten sich zueinander komplementär, was durch die Gleichung $\lambda_j \cdot \ddot{g}_j = 0$ ausgedrückt werden kann. Erweitert man das Ungleichungssystem 3.34 um diese Beziehung, so ist es für alle n_g aktiven und passiven Kontakte gleichzeitig gültig. Mit $\ddot{\mathbf{g}}^T = [\ddot{g}_1 \ \ddot{g}_2 \ \dots \ \ddot{g}_{n_G}]$, $\mathbf{G} = [\nabla \mathbf{g}_1 \ \nabla \mathbf{g}_1 \ \dots \ \nabla \mathbf{g}_{n_G}]$ und $\boldsymbol{\lambda}^T = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_{n_G}]$ folgt schließlich das Ungleichungssystem für das Kontaktproblem mit unilateralen Bindungen

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h} - \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad \wedge \quad \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \ddot{\mathbf{g}} \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \ddot{\mathbf{g}} = 0. \quad (3.35)$$

Die Gleichung beschreibt sowohl *Kontakt* und *Separation* in Normalenrichtung, als auch *Haften* und *Gleiten* in Tangentialrichtung. Für die Zustände *Haften* und *Gleiten* ist natürlich der Zustand *Kontakt* am selben Kontaktpunkt j Voraussetzung. Während die Gleichungen in Hinblick auf Zustandsänderungen in Normalenrichtung offensichtlich sind, es gelten die Kuhn-Tucker-Bedingungen $\ddot{\mathbf{g}}_N \geq \mathbf{0} \wedge \boldsymbol{\lambda}_N \geq \mathbf{0} \wedge \ddot{\mathbf{g}}_N^T \boldsymbol{\lambda}_N = 0$, muß bezüglich der Tangentialrichtung verstanden werden, daß der Haftzustand einem Lager entspricht und somit in Tangentialrichtung eine starre Verbindung der Körper im Kontaktpunkt darstellt. Während die Gleitreibungskräfte zu den eingepprägten Kräften zählen, gehören die Haftreibungskräfte zu den Reaktionskräften. Damit entspricht das Haften einer in Tangentialrichtung wirkenden bilateralen Bindung, die auch durch zwei entgegengesetzt, gleichzeitig wirkende unilaterale Bindungen abgebildet werden kann!

Seien $\lambda_{Tj}^{(+)} \geq 0$ und $\lambda_{Tj}^{(-)} \geq 0$ die beiden immer positiven Lagrangesche Multiplikatoren, so ergibt sich die vom Vorzeichen her beliebige Reibkraft zu $\lambda_{Tj} = \lambda_{Tj}^{(+)} - \lambda_{Tj}^{(-)}$. Seien analog $\ddot{g}_{Tj}^+ \geq 0$ und $\ddot{g}_{Tj}^- \geq 0$ die immer positiven Teilbeschleunigungen, so berechnet sich die Relativbeschleunigung mit $\ddot{g}_{Tj} = \ddot{g}_{Tj}^+ - \ddot{g}_{Tj}^-$. Es gelten die komplementären Gleichungen $\ddot{g}_{Tj}^+ \cdot \lambda_{Tj}^{(+)} = 0$ und $\ddot{g}_{Tj}^- \cdot \lambda_{Tj}^{(-)} = 0$. Auf diese Weise wird das Reibgesetz später in komplementäre Teilbeziehungen zerlegt.

Die Abbildung 3.2 verdeutlicht den Gleichungssatz 3.35 für zwei unilaterale Bindungen. Sie zeigt in grafischer Form den Zusammenhang von komplementären Gleichungen, Lagrangeschen Multiplikatoren und unilateralen Bindungen. Betrachtet sei die Bewegungs-

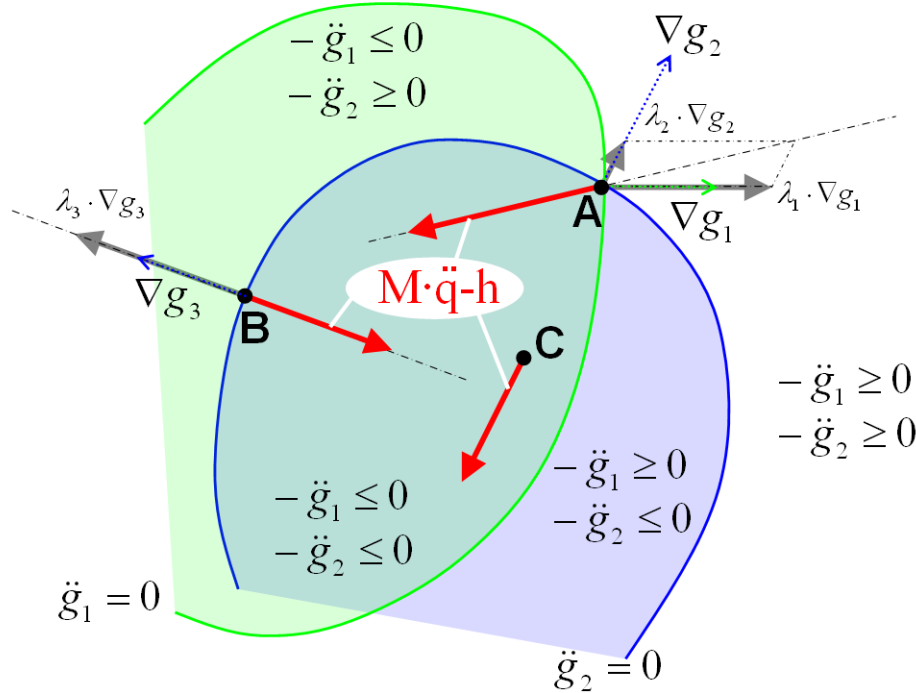


Abbildung 3.2: Unilaterale Bindungen und Lagrangesche Multiplikatoren

gleichung eines bezüglich der Minimalkoordinaten freien Systems $\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h}$, das nun durch zwei unilaterale Bindungen $\ddot{\mathbf{g}} \geq 0$ eingeschränkt wird. Das zulässige „dunkle“ Gebiet ist durch die beiden Restriktionen $-\ddot{g}_1 \leq 0$ und $-\ddot{g}_2 \leq 0$ festgelegt. Beispielhaft seien die drei ausgezeichneten Punkte **A**, **B** und **C** besprochen. Die drei innerhalb des zulässigen Gebietes liegenden Vektoren stellen die Bewegungsgleichung für drei verschiedene Zustände dar. Die Gradienten $\nabla \mathbf{g}_1$, $\nabla \mathbf{g}_2$ und $\nabla \mathbf{g}_3$ zeigen in Richtung des steilsten Anstiegs und stehen somit senkrecht auf den Kurventangenten von $\ddot{g}_1 = 0$ und $\ddot{g}_2 = 0$. Im Inneren des zulässigen Gebietes, z.B. bei **C**, sind die Lagrangeschen Multiplikatoren gleich Null und es gilt nur die Bewegungsgleichung $\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h} = \mathbf{0}$. Bewegt sich das System an den Rand des zulässigen Gebietes, so daß z.B. die einzelne Restriktion $\ddot{g}_2 = 0$ im Punkt **B** aktiv wird, so schränkt die Reaktionskraft $\lambda_3 \cdot \nabla \mathbf{g}_3$ die Bewegung in diese Richtung ein. Der Vektor der Bewegungsgleichung $\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h}$ und der mit $\lambda_3 \geq 0$ skalierte Vektor $\nabla \mathbf{g}_3$ stehen im Gleichgewicht

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h} = \lambda_3 \cdot \nabla \mathbf{g}_3. \quad (3.36)$$

Im Zustand **A** werden gleichzeitig zwei Restriktionen aktiv, d.h. $\ddot{g}_1 = 0$ und $\ddot{g}_2 = 0$. Es stehen dann zwei skalierte Gradienten als Reaktionskräfte mit dem Vektor $\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h}$ im Gleichgewicht

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h} = \lambda_1 \cdot \nabla \mathbf{g}_1 + \lambda_2 \cdot \nabla \mathbf{g}_2. \quad (3.37)$$

Der aus den beiden skalierten Gradienten $\nabla \mathbf{g}_1$ und $\nabla \mathbf{g}_2$ resultierende Vektor liegt immer innerhalb des von den beiden Gradienten aufgespannten Kegel, dem sogenannten *Normalenkegel*, daher die Bedingung $\lambda_{1,2} \geq 0$.

3.3 Das Kontaktproblem als Komplementaritätsproblem

Ein mechanisches System kann zu einem Zeitpunkt verschiedene Kontaktzustände an den möglichen Kontakten haben. Einige Kontakte können geschlossen sein und sich im Haftzustand befinden, andere geschlossene Kontakte sind im Gleitzustand und wieder andere Kontakte sind voneinander separiert. Um die verschiedenen Kontaktzustände in der Gleichung 3.35 abzubilden, kann die Matrix G der Restriktionen in einzelne, dem Kontaktzustand entsprechende Teilmatrizen zerlegt werden. Dazu seien die Indexmengen aus 3.21 noch weiter differenziert.

$$\begin{aligned} I_G &= \{1, 2, \dots, n_G\} && \Rightarrow \text{Menge aller möglichen Kontakte} \\ I_N &= \{j \in I_G \mid \dot{g}_{Nj} = 0\} && \Rightarrow \text{Menge aller aktiven, d.h. geschlossenen Kontakte} \\ I_H &= \{j \in I_N \mid \dot{g}_{Tj} = 0\} && \Rightarrow \text{Menge aller haftenden Kontakte} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Die Menge der gleitenden Kontakte ist hier nicht explizit ausgezeichnet, weil sie aus den beiden Mengen I_H und I_N folgt. I_N beinhaltet alle aktiven Kontakte, also alle gleitenden und haftenden Kontakte. Somit müssen alle Kontakte, die zwar in I_N , nicht aber in I_H enthalten sind, gleitende Kontakte sein. Dann ist I_N/I_H die Menge der gleitenden Kontakte. Entsprechend den Indexmengen sei nun die Matrix \mathbf{G} und der Vektor der Lagrangeschen Multiplikationen $\boldsymbol{\lambda}$ aus 3.35 umgeordnet:

$$\mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{G}_N \ \mathbf{G}_G \ \mathbf{G}_H) \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_N \\ \boldsymbol{\lambda}_G \\ \boldsymbol{\lambda}_H \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} \boldsymbol{\lambda}_N \in \mathbb{R}^{n_N} & \rightarrow \text{Normalkräfte} \\ \boldsymbol{\lambda}_G = \boldsymbol{\mu}_G \boldsymbol{\lambda}_N \in \mathbb{R}^{n_N - n_H} & \rightarrow \text{Gleitkräfte} \\ \boldsymbol{\lambda}_H \in \mathbb{R}^{n_H} & \rightarrow \text{Haftkräfte} \end{array} \quad (3.39)$$

Die Matrix $\boldsymbol{\mu}_G$ ist eine rechteckige Matrix der Dimension $(n_N - n_H) \times n_N$, die auf den entsprechend zugeordneten Positionen mit den geschwindigkeitsabhängigen Gleitreibungswerten $-\mu_j \cdot \text{sign}(\dot{g}_{Tj})$ mit $j \in I_N/I_H$ besetzt ist. Für tangentielle Relativgeschwindigkeiten \dot{g}_{Tj} ungleich Null wirkt die Gleitreibungskraft entsprechend der Signum-Funktion entgegen der Bewegungsrichtung von \dot{g}_{Tj} . Ist die tangentielle Relativgeschwindigkeit gleich Null, so ist auch die Signum-Funktion gleich Null, so daß keine Gleitreibungskraft wirkt. Gleichung 3.39 in die Bewegungsgleichung 3.35 eingesetzt liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h} - \mathbf{G}_N \cdot \boldsymbol{\lambda}_N - \mathbf{G}_G \cdot \boldsymbol{\lambda}_G - \mathbf{G}_H \cdot \boldsymbol{\lambda}_H &= \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h} - (\mathbf{G}_N + \mathbf{G}_G \boldsymbol{\mu}_G \ \mathbf{G}_H) \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_N \\ \boldsymbol{\lambda}_H \end{pmatrix} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Drückt man die Relativgeschwindigkeiten 3.11 und 3.15 in Minimalkoordinaten aus,

$$\dot{g}_{Nj} = \dot{g}_{Nj}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad \dot{g}_{Tj} = \dot{g}_{Tj}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (3.41)$$

so ergeben sich die totalen Differentiale zu

$$d\dot{g}_{Nj} = \frac{\partial \dot{g}_{Nj}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} d\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{g}_{Nj}}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial \dot{g}_{Nj}}{\partial t} dt \Leftrightarrow \ddot{g}_{Nj} = \frac{\partial \dot{g}_{Nj}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{g}_{Nj}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{g}_{Nj}}{\partial t}, \quad (3.42)$$

$$d\dot{g}_{Tj} = \frac{\partial \dot{g}_{Tj}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} d\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{g}_{Tj}}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial \dot{g}_{Tj}}{\partial t} dt \Leftrightarrow \ddot{g}_{Tj} = \frac{\partial \dot{g}_{Tj}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{g}_{Tj}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{g}_{Tj}}{\partial t}. \quad (3.43)$$

Unter Verwendung der Helmholtzschen Hilfsformeln 3.24 und den Abkürzungen

$$\hat{g}_{Nj} = \frac{\partial \dot{g}_{Nj}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{g}_{Nj}}{\partial t} \quad \text{und} \quad \hat{g}_{Tj} = \frac{\partial \dot{g}_{Tj}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{g}_{Tj}}{\partial t} \quad (3.44)$$

lassen sich die Relativbeschleunigungen durch

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{g}_{Nj} = \nabla \mathbf{g}_{Nj}^T \ddot{\mathbf{q}} + \hat{g}_{Nj}, \quad \ddot{g}_{Tj} = \nabla \mathbf{g}_{Tj}^T \ddot{\mathbf{q}} + \hat{g}_{Tj} \quad (3.45)$$

ausdrücken. Gleichung 3.40 hat die f Unbekannten $\ddot{\mathbf{q}}$, die n_N Unbekannten λ_N und die n_H Unbekannten λ_H . Durch Gleichung 3.45 kommen noch einmal die n_N Unbekannten \ddot{g}_N und die n_H Unbekannten \ddot{g}_T hinzu, so daß insgesamt $f + 2n_N + 2n_H$ Unbekannte zu bestimmen sind. Gleichung 3.40 trägt dazu mit f Gleichungen bei. Außerdem hat man noch die $n_N + n_H$ Gleichungen 3.45. Zur Berechnung der $f + 2n_N + 2n_H$ Unbekannten liegen bisher nur $f + n_N + n_H$ Gleichungen vor. Es fehlen also noch $n_N + n_H$ Gleichungen.

Die fehlenden Gleichungen erhält man durch ein Reibgesetz. Kennzeichnend für Ratterschwingungen ist ein Festkörperkontakt, der beim Aufeinanderstoßen der Getriebeteile auftritt, so daß trockene Reibung angenommen werden darf. Reale Reibkennlinien hängen zwar auch in gewissem Maße von der Werkstoffpaarung, Temperatur und Oberflächenbeschaffenheit ab, hauptsächliche Einflussgrößen sind aber die relative Gleitgeschwindigkeit g_{Tj} und die Normalkraft λ_N [8, 18, 22, 47, 48]. Abbildung 3.3 zeigt den Verlauf einer realen Reibkennlinie (gestrichelte Linie). Demnach gibt es bei der Geschwindigkeit $g_{Tj} = 0$ einen

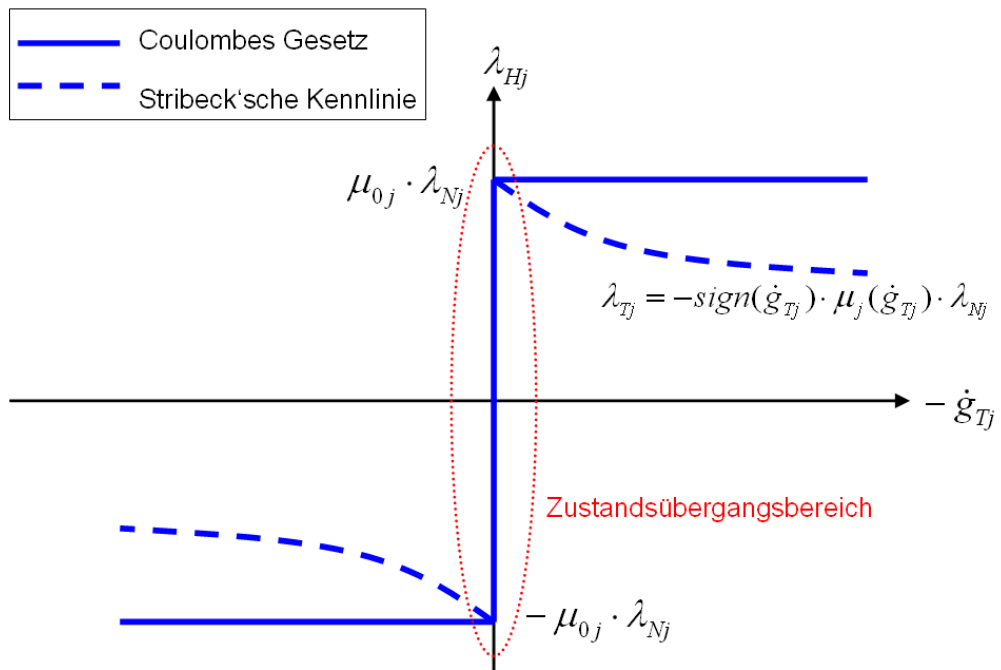


Abbildung 3.3: Coulombsches Reibgesetz für trockene Reibung und reale Stribeck'sche Reibkennlinie [68, 18]

Haftbereich von $-\mu_j \lambda_{Nj}$ bis $\mu_j \lambda_{Nj}$. Mit zunehmender Gleitgeschwindigkeit g_{Tj} in beide Richtungen nimmt die Reibkraft ab (Stribeck'sche Reibkennlinie). Der Übergang vom

3 Kontaktmechanik

Haftbereich zum Gleiten wird als stetig vorausgesetzt. Die Stribeck'sche Reibkennlinie wird beschrieben durch die Gleichung

$$\mu_j(\dot{g}_{Tj}) = \mu_{gj} + (\mu_{0j} - \mu_{gj}) e^{-\frac{|\dot{g}_{Tj}|}{a_j}}. \quad (3.46)$$

μ_{0j} ist der Haftreibungskoeffizient, μ_{gj} ist der Gleitreibungskoeffizient und a beinhaltet die Länge des Übergangsbereichs von Haften nach Gleiten. Da hier insbesondere die Zustandsübergänge interessieren, genügt die Betrachtung des Coulombschen Reibgesetzes [40]. Der Gleitzustand ist bereits in der Gleichung 3.40 berücksichtigt. Vorausgesetzt es gilt $g_{Nj} = 0$, dann lautet das Coulombsche Reibgesetz

$$\begin{aligned} \dot{g}_{Tj} > 0 &\Rightarrow \lambda_{Hj} = -\mu_j \lambda_{Nj} \\ \dot{g}_{Tj} = 0 &\Rightarrow |\lambda_{Hj}| \leq \mu_{0j} \lambda_{Nj} \\ \dot{g}_{Tj} < 0 &\Rightarrow \lambda_{Hj} = \mu_j \lambda_{Nj}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Wegen der Betrachtung der Zustandsübergänge ist es notwendig, das Coulombsche Reibgesetz auf Beschleunigungsebene zu überführen. Da beim Zustandsübergang von *Haften* nach *Gleiten* die Geschwindigkeit und die Beschleunigung im Moment des Ablösens das gleiche Vorzeichen haben müssen, kann für das Coulombsche Reibgesetz auch geschrieben werden

$$\begin{aligned} \lambda_{Hj} = -\mu_{0j} \lambda_{Nj} &\Rightarrow \ddot{g}_{Tj} > 0 \\ |\lambda_{Hj}| \leq \mu_{0j} \lambda_{Nj} &\Rightarrow \ddot{g}_{Tj} = 0 \\ \lambda_{Hj} = \mu_{0j} \lambda_{Nj} &\Rightarrow \ddot{g}_{Tj} < 0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Wie im vorigen Abschnitt bereits angedeutet, ist es notwendig, die tangentialen Haftreibungskräfte und Beschleunigungen in komplementäre Teilgrößen zu zerlegen. In Abbildung 3.4 ist die verwendete Reibkennlinie und dessen Zerlegung dargestellt [12, 44].

Die Reibkraft λ_{Hj} besteht aus den beiden positive Teilkräften $\lambda_{Hj}^{(+)}$ und $\lambda_{Hj}^{(-)}$

$$\lambda_{Hj} = \lambda_{Hj}^{(+)} - \lambda_{Hj}^{(-)} \quad \text{mit} \quad \lambda_{Hj}^{(+)} \geq 0, \quad \lambda_{Hj}^{(-)} \geq 0. \quad (3.49)$$

Genauso gilt für die Teilbeschleunigungen $\ddot{g}_{Tj}^+ \geq 0$, $\ddot{g}_{Tj}^- \geq 0$ und die Tangentialbeschleunigung \ddot{g}_{Tj}

$$\ddot{g}_{Tj} = \ddot{g}_{Tj}^+ - \ddot{g}_{Tj}^- \quad \text{mit} \quad \ddot{g}_{Tj}^+ \geq 0, \quad \ddot{g}_{Tj}^- \geq 0. \quad (3.50)$$

Mit den Abkürzungen

$$z_j^+ = \ddot{g}_{Tj}^+, \quad (3.51)$$

$$z_j^- = \ddot{g}_{Tj}^-, \quad (3.52)$$

$$\lambda_{H0j}^{(+)} = \mu_{0j} \lambda_{Nj} - \lambda_{Hj}^{(-)}, \quad (3.53)$$

$$\lambda_{H0j}^{(-)} = \mu_{0j} \lambda_{Nj} - \lambda_{Hj}^{(+)}, \quad (3.54)$$

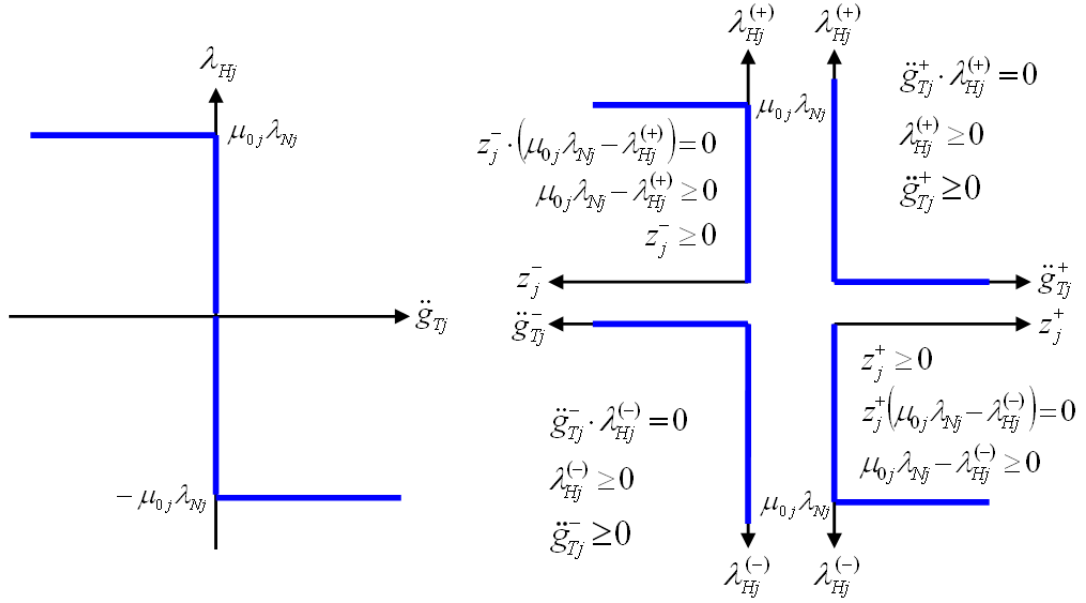


Abbildung 3.4: Zerlegung des Coulombschen Reibgesetzes 3.48 in komplementäre Gleichungen; links: Coulombsches Reibgesetz; rechts: komplementäre Teilkennlinien des Coulombschen Reibgesetzes

in Abbildung 3.4 lauten die komplementären Gleichungen der Coulombschen Reibkennlinie gemäß der Abbildung 3.4 (siehe [60])

$$\begin{aligned}
 -\ddot{\mathbf{g}}_{Tj} &= -\ddot{\mathbf{g}}_{Tj}^+ + \mathbf{z}_j^-, & \ddot{\mathbf{g}}_{Tj}^+ &\geq 0, & \lambda_{Hj}^{(+)} &\geq 0, & \ddot{\mathbf{g}}_{Tj}^{+T} \lambda_{Hj}^{(+)} &= 0, \\
 \lambda_{H0j}^{(-)} &= \mu_j \lambda_{Nj} - \lambda_{Hj}^{(+)}, & \mathbf{z}_j^- &\geq 0, & \lambda_{H0j}^{(-)} &\geq 0, & \mathbf{z}_j^{-T} \lambda_{H0j}^{(-)} &= 0, \\
 +\ddot{\mathbf{g}}_{Tj} &= -\ddot{\mathbf{g}}_{Tj}^- + \mathbf{z}_j^+, & \ddot{\mathbf{g}}_{Tj}^- &\geq 0, & \lambda_{Hj}^{(-)} &\geq 0, & \ddot{\mathbf{g}}_{Tj}^{-T} \lambda_{Hj}^{(-)} &= 0, \\
 \lambda_{H0j}^{(+)} &= \mu_j \lambda_{Nj} - \lambda_{Hj}^{(-)}, & \mathbf{z}_j^+ &\geq 0, & \lambda_{H0j}^{(+)} &\geq 0, & \mathbf{z}_j^{+T} \lambda_{H0j}^{(+)} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Mit den Gleichungen 3.35 bzw. 3.40, 3.45 und 3.55 sind alle Gleichungen vorhanden, die zur Berechnung von mechanischen Systemen mit Mehrfachkontakten und Coulombscher Reibung benötigt werden. Mit $\mathbf{G}_N = [\nabla \mathbf{g}_{N1} \nabla \mathbf{g}_{N2} \dots \nabla \mathbf{g}_{Nn_N}]$, $\mathbf{G}_H = [\nabla \mathbf{g}_{T1} \nabla \mathbf{g}_{T2} \dots \nabla \mathbf{g}_{Tn_H}]$, $\mathbf{G}_G = [\nabla \mathbf{g}_{G1} \nabla \mathbf{g}_{G2} \dots \nabla \mathbf{g}_{G(n_N - n_H)}]$, $\hat{\mathbf{g}}_N^T = [\hat{g}_{N1} \hat{g}_{N2} \dots \hat{g}_{Nn_N}]$ und $\hat{\mathbf{g}}_H^T = [\hat{g}_{T1} \hat{g}_{T2} \dots \hat{g}_{Tn_H}]$ kann dann zusammenfassend geschrieben werden

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h} - [(\mathbf{G}_N + \mathbf{G}_G \boldsymbol{\mu}_G) \quad \mathbf{G}_H] \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_N \\ \boldsymbol{\lambda}_H \end{pmatrix} &= \mathbf{0} \\
 \ddot{\mathbf{g}}_N &= \mathbf{G}_N^T \ddot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{g}}_N \\
 \ddot{\mathbf{g}}_H &= \mathbf{G}_H^T \ddot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{g}}_H \\
 \ddot{\mathbf{g}}_N &\geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \boldsymbol{\lambda}_N \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \ddot{\mathbf{g}}_N^T \boldsymbol{\lambda}_N = 0 \\
 -\ddot{\mathbf{g}}_H &= -\ddot{\mathbf{g}}_H^+ + \mathbf{z}^- \quad \wedge \quad \ddot{\mathbf{g}}_H^+ \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \boldsymbol{\lambda}_H^{(+)} \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \ddot{\mathbf{g}}_H^{+T} \boldsymbol{\lambda}_H^{(+)} = 0 \\
 \lambda_{H0}^{(-)} &= \boldsymbol{\mu}_G \boldsymbol{\lambda}_N - \boldsymbol{\lambda}_H^{(+)} \quad \wedge \quad \mathbf{z}^- \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \boldsymbol{\lambda}_{H0}^{(-)} \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \mathbf{z}^{-T} \boldsymbol{\lambda}_{H0}^{(-)} = 0 \\
 +\ddot{\mathbf{g}}_H &= -\ddot{\mathbf{g}}_H^- + \mathbf{z}^+ \quad \wedge \quad \ddot{\mathbf{g}}_H^- \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \boldsymbol{\lambda}_H^{(-)} \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \ddot{\mathbf{g}}_H^{-T} \boldsymbol{\lambda}_H^{(-)} = 0 \\
 \lambda_{H0}^{(+)} &= \boldsymbol{\mu}_G \boldsymbol{\lambda}_N - \boldsymbol{\lambda}_H^{(-)} \quad \wedge \quad \mathbf{z}^+ \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \boldsymbol{\lambda}_{H0}^{(+)} \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \mathbf{z}^{+T} \boldsymbol{\lambda}_{H0}^{(+)} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

Durch entsprechende Umgruppierung der Gleichungen in 3.56

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h} - [(\mathbf{G}_N + \mathbf{G}_G\boldsymbol{\mu}_G) \quad \mathbf{G}_H \quad -\mathbf{G}_H] \begin{pmatrix} \lambda_N \\ \lambda_H^{(+)} \\ \lambda_H^{(-)} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{g}}_N \\ +\ddot{\mathbf{g}}_H \\ -\ddot{\mathbf{g}}_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_N^T \\ +\mathbf{G}_H^T \\ -\mathbf{G}_H^T \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{g}}_N \\ +\hat{\mathbf{g}}_H \\ -\hat{\mathbf{g}}_H \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_{H0}^{(-)} \\ \lambda_{H0}^{(+)} \\ \lambda_H^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_G & -\mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\mu}_G & \mathbf{0} & -\mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_N \\ \lambda_H^{(+)} \\ \lambda_H^{(-)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{g}}_N \\ \ddot{\mathbf{g}}_H^+ \\ \ddot{\mathbf{g}}_H^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{g}}_N \\ +\ddot{\mathbf{g}}_H \\ -\ddot{\mathbf{g}}_H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}^- \\ \mathbf{z}^+ \end{pmatrix}, \quad (3.57)$$

und Elimination von $\ddot{\mathbf{q}}$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{h} + [\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{G}_N + \mathbf{G}_G\boldsymbol{\mu}_G) \quad \mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}_H \quad -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}_H] \begin{pmatrix} \lambda_N \\ \lambda_H^{(+)} \\ \lambda_H^{(-)} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{H0}^{(-)} \\ \lambda_{H0}^{(+)} \\ \lambda_H^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_G & -\mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\mu}_G & \mathbf{0} & -\mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_N \\ \lambda_H^{(+)} \\ \lambda_H^{(-)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{g}}_N \\ \ddot{\mathbf{g}}_H^+ \\ \ddot{\mathbf{g}}_H^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_N^T \\ +\mathbf{G}_H^T \\ -\mathbf{G}_H^T \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{g}}_N \\ +\hat{\mathbf{g}}_H \\ -\hat{\mathbf{g}}_H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}^- \\ \mathbf{z}^+ \end{pmatrix}, \quad (3.58)$$

erhält man letztendlich das gesuchte *Lineare Komplementaritätsproblem*

$$\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{g}}_N \\ \ddot{\mathbf{g}}_H^+ \\ \ddot{\mathbf{g}}_H^- \\ \lambda_{H0}^{(-)} \\ \lambda_{H0}^{(+)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{G}_N^T\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{G}_N + \mathbf{G}_G\boldsymbol{\mu}_G) & \mathbf{G}_N^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}_H & -\mathbf{G}_N^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}_H & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_H^T\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{G}_N + \mathbf{G}_G\boldsymbol{\mu}_G) & \mathbf{G}_H^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}_H & -\mathbf{G}_H^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}_H & \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{G}_H^T\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{G}_N + \mathbf{G}_G\boldsymbol{\mu}_G) & -\mathbf{G}_H^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}_H & \mathbf{G}_H^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}_H & \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \boldsymbol{\mu}_G & -\mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\mu}_G & \mathbf{0} & -\mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_N \\ \lambda_H^{(+)} \\ \lambda_H^{(-)} \\ \mathbf{z}^- \\ \mathbf{z}^+ \end{pmatrix} = \dots$$

$$\dots = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_N^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{h} + \hat{\mathbf{g}}_N \\ \mathbf{G}_H^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{h} + \hat{\mathbf{g}}_H \\ -\mathbf{G}_H^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{h} - \hat{\mathbf{g}}_H \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{g}}_N \\ \ddot{\mathbf{g}}_H^+ \\ \ddot{\mathbf{g}}_H^- \\ \lambda_{H0}^{(-)} \\ \lambda_{H0}^{(+)} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_N \\ \lambda_H^{(+)} \\ \lambda_H^{(-)} \\ \mathbf{z}^- \\ \mathbf{z}^+ \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{g}}_N \\ \ddot{\mathbf{g}}_H^+ \\ \ddot{\mathbf{g}}_H^- \\ \lambda_{H0}^{(-)} \\ \lambda_{H0}^{(+)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \lambda_N \\ \lambda_H^{(+)} \\ \lambda_H^{(-)} \\ \mathbf{z}^- \\ \mathbf{z}^+ \end{pmatrix} = 0. \quad (3.59)$$

Das lineare Komplementaritätsproblem 3.59 liegt hier in der Standardform

$$\mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{q} \quad \wedge \quad \mathbf{v}^T\mathbf{z} = 0 \quad \wedge \quad \mathbf{v} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} \geq \mathbf{0} \quad (3.60)$$

vor [9, 24, 41, 45]. Im Vergleich zu einer Aufgabe der linearen Optimierung hat das Komplementaritätsproblem keine Zielfunktion. Stattdessen liegt die nichtlineare Bedingung $\mathbf{v}^T\mathbf{z} = 0$ vor, die bei linearen Programmen nicht vorkommt. Gesucht wird eine zulässige Lösung (\mathbf{v}, \mathbf{z}) , wobei in jedem Zwillingenspaar (v_j, z_j) ein Partner Null sein muß. Bei nichtnegativer Seite \mathbf{q} ist die Lösung trivial, sie lautet dann $(\mathbf{v} = \mathbf{q}, \mathbf{z} = \mathbf{0})$. Andernfalls kann zur Lösung des linearen Komplementaritätsproblems das Verfahren von Lemke [1] eingesetzt werden (siehe Anhang B).

4 Zustandsübergänge am selbstbremsenden Keilgetriebe

Nachdem in Kapitel 3 alle erforderlichen Gleichungen zur Kontaktmechanik bereitgestellt wurden, können jetzt die Zustandsübergänge im Keilgetriebe analytisch berechnet werden. Dazu müssen im ersten Schritt die kinematischen Gleichungen und im zweiten Schritt die kinetischen Gleichungen des Keilgetriebes aufgestellt werden. Anschließend ist man in der Lage, neben den andauernden Zuständen alle Zustandsübergänge ohne Stoß, d.h. stetige Geschwindigkeitsübergänge zu berechnen. Von besonderem Interesse sind in diesem Kapitel die für die Ratterschwingungen entscheidenden Übergänge *Haften*→*Haften/Gleiten/Separation* und *Gleiten*→*Gleiten/Haften/Separation*. Da hier speziell der Ratterbetrieb des Keilgetriebes untersucht werden soll, müssen laut Kapitel 2 von den Getriebeparametern spezielle Voraussetzungen erfüllt werden. Mit den Abkürzungen

$$s := \sin \gamma, \quad c := \cos \gamma \quad (4.1)$$

lauten die Bedingungen 2.23 für *ratternden* Betrieb des Keilgetriebes

$$\left\{ \mu > \frac{s}{c} \quad \wedge \quad 1 > \frac{s}{c} \cdot \frac{\mu c - s}{\mu s + c} > \frac{m_2}{m_1} \right\} \Leftrightarrow \mu > \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2)} > \frac{s}{c} \quad (4.2)$$

4.1 Kontaktkinematik am Keilgetriebe

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen des Keilgetriebes werden die Gradienten der Abstandsbewegung ∇g_N^T und der tangentialen Relativbewegung ∇g_T^T benötigt. Beide gesuchten Größen ergeben sich aus der Kinematik am Keilgetriebe nach Abbildung 4.1. Für die Vektoren in Abbildung 4.1 gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{01} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{02} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}_1 = -\mathbf{t}_2 = \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2 &= \begin{pmatrix} -\sin \gamma \\ \cos \gamma \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Omega}_1 = \boldsymbol{\Omega}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Wegen $\boldsymbol{\Omega}_1 = \boldsymbol{\Omega}_2 = \mathbf{0}$ sind die absoluten Konturgeschwindigkeiten \mathbf{v}_{C1} und \mathbf{v}_{C2} unabhängig von den Kontaktkonturen $\mathbf{r}_{1S} = s_1 \mathbf{t}_1$ und $\mathbf{r}_{2S} = s_2 \mathbf{t}_2$. Körper 1 wird vertikal und Körper 2 wird horizontal geführt. Deshalb ist $\dot{x}_1 = 0$ und $\dot{y}_2 = 0$. Die Konturgeschwindigkeiten sind

$$\mathbf{v}_{C1} = \dot{\mathbf{r}}_{01} + \boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{r}_{1S} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{y}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{C2} = \dot{\mathbf{r}}_{02} + \boldsymbol{\Omega}_2 \times \mathbf{r}_{2S} = \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 = 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

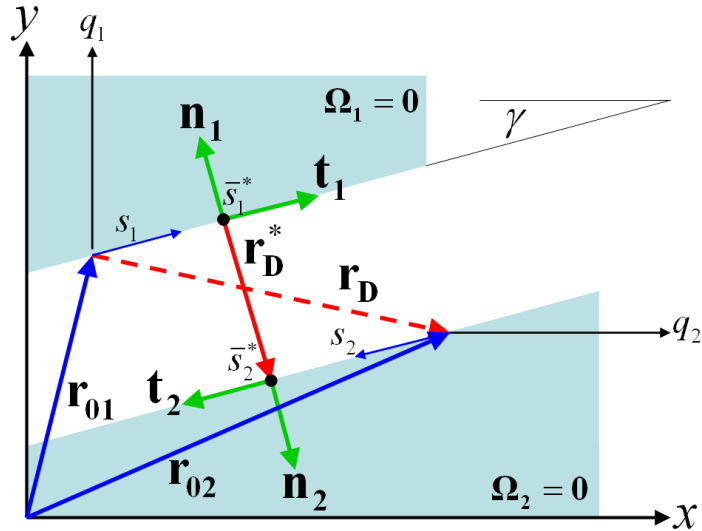


Abbildung 4.1: Kinematik am Keilgetriebe

so daß für die normale Relativgeschwindigkeit nach Gleichung 3.11 und für die tangentielle Relativgeschwindigkeit nach 3.15 folgt

$$\dot{g}_N = \mathbf{n}_1^T (\mathbf{v}_{C1} - \mathbf{v}_{C2}) = \dot{y}_1 \cos \gamma + \dot{x}_2 \sin \gamma, \quad \dot{g}_T = \mathbf{t}_1^T (\mathbf{v}_{C1} - \mathbf{v}_{C2}) = \dot{y}_1 \sin \gamma - \dot{x}_2 \cos \gamma. \quad (4.5)$$

Als Minimalkoordinaten des Keilgetriebes eignen sich die Koordinaten $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Die zeitliche Ableitung der Relativgeschwindigkeiten 4.5 führt auf die Relativbeschleunigungen im Keilgetriebe

$$\ddot{g}_N = \ddot{y}_1 \cos \gamma + \ddot{x}_2 \sin \gamma = \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \nabla g_N^T \ddot{\mathbf{q}}, \quad (4.6)$$

$$\ddot{g}_T = \ddot{y}_1 \sin \gamma - \ddot{x}_2 \cos \gamma = \begin{pmatrix} \sin \gamma \\ -\cos \gamma \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \nabla g_T^T \ddot{\mathbf{q}}. \quad (4.7)$$

Daraus lassen sich die gesuchten Gradienten ablesen

$$\nabla g_N = \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \nabla g_T = \begin{pmatrix} \sin \gamma \\ -\cos \gamma \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

4.2 Kontaktkinetik am Keilgetriebe

Die Bewegungsgleichung für ein mechanisches System mit unilateralen Bindungen lautet nach Gleichung 3.40

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h} - (\mathbf{G}_N + \mathbf{G}_G \boldsymbol{\mu}_G \quad \mathbf{G}_H) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_N \\ \lambda_H \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (4.9)$$

Abbildung 4.2 zeigt die Größen der Bewegungsgleichung 4.9 am Keilgetriebe.

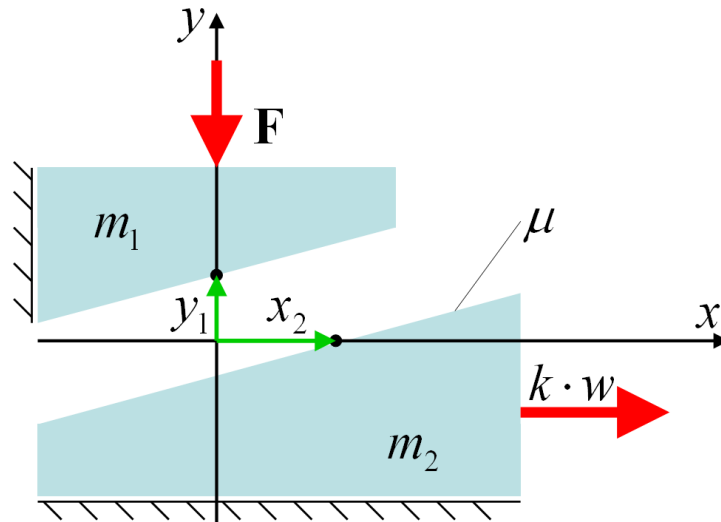


Abbildung 4.2: Kinetik am Keilgetriebe; die Führungen sind reibungsfrei

Massenmatrix:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Vektor der gyroskopischen und eingprägten Kräfte:

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} -F \\ k(v_0 t - x_2) \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Minimalkoordinaten:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} y_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Koordinatentransformation:

$$w = v_0 \cdot t - x_2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{w} = -\ddot{x}_2 \quad (4.13)$$

Gradientenmatrix der Normalkräfte:

$$\mathbf{G}_N = (\nabla g_N) = \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Gradientenmatrix der Gleitreibkräfte:

$$\mathbf{G}_G = (\nabla g_T) = \begin{pmatrix} \sin \gamma \\ -\cos \gamma \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Gradientenmatrix der Haftreibkräfte:

$$\mathbf{G}_H = (\nabla g_T) = \begin{pmatrix} \sin \gamma \\ -\cos \gamma \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Reibwertmatrix:

$$\boldsymbol{\mu}_G = (\mu) \quad (4.17)$$

4.3 Zustandsübergänge für den Anfangszustand *Haften*

Es sei in diesem Abschnitt vorausgesetzt, daß sich das Keilgetriebe im Zustand *Haften* befindet. Das ist, neben dem separierten Zustand, der zweite **natürliche** Anfangszustand für das selbsthemmende Getriebe, wenn kein Antrieb aktiv ist. Den Zustand *Haften* erreicht das Getriebe natürlich auch im Betrieb, wenn nach einem stoßhaften Aufsetzen die beiden Körper in Kontakt bleiben. Der einzig vorhandene Kontakt im Keilgetriebe gehört zur Menge I_H der haftenden Kontakte.

4.3.1 Lineares Komplementaritätsproblem (LCP)

Mit der Zerlegung 3.49 nimmt die Bewegungsgleichung für den Fall *Haften* die Form

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -F \\ k(v_0 t - x_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & -\cos \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_N \\ \lambda_H^{(+)} \\ \lambda_H^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

an. Die Gradientenmatrix \mathbf{G}_G ist in der Bewegungsgleichung 4.18 nicht enthalten, da kein Gleitkontakt existiert! Die Gleichung der Relativbeschleunigungen 3.45 lautet

$$\begin{pmatrix} \ddot{g}_N \\ +\ddot{g}_T \\ -\ddot{g}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ \sin \gamma & -\cos \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

und das Coulombsche Gesetz wird ausgedrückt durch den Gleichungssatz

$$\begin{pmatrix} \ddot{g}_N \\ \ddot{g}_T^+ \\ \ddot{g}_T^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{g}_N \\ +\ddot{g}_T \\ -\ddot{g}_T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^- \\ z^+ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_{H0}^{(-)} \\ \lambda_{H0}^{(+)} \\ \lambda_{H0}^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -1 & 0 \\ \mu & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_N \\ \lambda_H^{(+)} \\ \lambda_H^{(-)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{g}_N \\ \ddot{g}_T^+ \\ \ddot{g}_T^- \\ \lambda_{H0}^{(-)} \\ \lambda_{H0}^{(+)} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_N \\ \lambda_H^{(+)} \\ \lambda_H^{(-)} \\ z^- \\ z^+ \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} \ddot{g}_N \\ \ddot{g}_T^+ \\ \ddot{g}_T^- \\ \lambda_{H0}^{(-)} \\ \lambda_{H0}^{(+)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \lambda_N \\ \lambda_H^{(+)} \\ \lambda_H^{(-)} \\ z^- \\ z^+ \end{pmatrix} = 0. \quad (4.20)$$

Schließlich erhält man durch Einsetzen der Gleichungen 4.18, 4.19 und 4.20 das lineare Komplementaritätsproblem des Keilgetriebes für den Fall *Haften*

$$\begin{pmatrix} m_1 \ddot{g}_N \\ m_1 \ddot{g}_T^+ \\ m_1 \ddot{g}_T^- \\ \lambda_{H0}^{(-)} \\ \lambda_{H0}^{(+)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_2} & -\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2} & \frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2} & 0 & 0 \\ -\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2} & \frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2} & -\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2} & 1 & 0 \\ \frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2} & -\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2} & \frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2} & 0 & 1 \\ \mu & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_N \\ \lambda_H^{(+)} \\ \lambda_H^{(-)} \\ m_1 z^- \\ m_1 z^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-Fm_2 c + km_1 s}{m_2} \\ \frac{Fm_2 s + km_1 c}{m_2} \\ \frac{Fm_2 s + km_1 c}{m_2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{g}_N \\ \ddot{g}_T^+ \\ \ddot{g}_T^- \\ \lambda_{H0}^{(-)} \\ \lambda_{H0}^{(+)} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_N \\ \lambda_H^{(+)} \\ \lambda_H^{(-)} \\ z^- \\ z^+ \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} \ddot{g}_N \\ \ddot{g}_T^+ \\ \ddot{g}_T^- \\ \lambda_{H0}^{(-)} \\ \lambda_{H0}^{(+)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \lambda_N \\ \lambda_H^{(+)} \\ \lambda_H^{(-)} \\ z^- \\ z^+ \end{pmatrix} = 0. \quad (4.21)$$

4.3.2 Analytische Berechnung des LCP

Die analytische Berechnung des LCP 4.21 erfolgt mit dem Verfahren von Lemke (siehe Anhang B). Das Verfahren beginnt mit dem um die zusätzliche Spalte z_0 erweiterten Starttableau 4.22.

Starttableau (1. Stufe):

$m_1 \ddot{g}_N$	$m_1 \ddot{g}_T^+$	$m_1 \ddot{g}_T^-$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N	$\lambda_H^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0^*
(1)	0	0	0	0	$-\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_2}$	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	0	0	-1
0	(1)	0	0	0	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$-\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	$\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	-1	0	-1
0	0	(1)	0	0	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	$-\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	0	-1	-1
0	0	0	(1)	0	$-\mu$	1	0	0	0	-1
0	0	0	0	(1)	$-\mu$	0	1	0	0	-1

(4.22)

Die triviale Lösung ist nicht möglich, da die Bedingung der positiven rechten Seite zu einem Widerspruch führt. Es gibt kein w , welches im Starttableau eine positive rechte Seite erzeugt. Zum Auffinden von Lösungen des LCP 4.22 wird daher das Lemke-Verfahren herangezogen. Das erste Pivotelement wird in der z_0 -Spalte gesucht. Die Pivotspalte sei im weiteren durch einen Stern * markiert. Die Pivotzeile ist die Zeile mit der negativsten rechten Seite.

Auswahl der Pivotzeile im Starttableau (1. Stufe):

$$\begin{aligned}
 1. \text{ Zeile: } & \frac{-Fm_2c + kwm_1s}{m_2} < 0 & \Leftrightarrow & w < \frac{Fm_2c}{k m_1 s} \\
 2. \text{ Zeile: } & -\frac{Fm_2s + kwm_1c}{m_2} < 0 & \Leftrightarrow & w > -\frac{Fm_2s}{k m_1 c} \\
 3. \text{ Zeile: } & \frac{Fm_2s + kwm_1c}{m_2} < 0 & \Leftrightarrow & w < -\frac{Fm_2s}{k m_1 c}
 \end{aligned}$$

Vergleich der Zeilen:

$$\begin{aligned}
 1. \text{Zeile} \wedge 2. \text{Zeile:} \quad & \frac{-Fm_2c+km_1s}{m_2} < -\frac{Fm_2s+km_1c}{m_2} \Leftrightarrow w < -\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c-s}{c+s} \\
 1. \text{Zeile} \wedge 3. \text{Zeile:} \quad & \frac{-Fm_2c+km_1s}{m_2} < \frac{Fm_2s+km_1c}{m_2} \Leftrightarrow w > -\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c+s}{c-s} \\
 2. \text{Zeile} \wedge 3. \text{Zeile:} \quad & -\frac{Fm_2s+km_1c}{m_2} < \frac{Fm_2s+km_1c}{m_2} \Leftrightarrow w > -\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{s}{c}
 \end{aligned}$$

Es gilt immer der Zusammenhang: $\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c}{s} > \frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c-s}{c+s} > -\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{s}{c} > -\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c+s}{c-s}$

Der Vergleich zeigt, daß drei verschiedene Fälle unterschieden werden müssen:

Die 1. Zeile muß gewählt werden, wenn: $\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c-s}{c+s} > w > -\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c+s}{c-s} \Rightarrow$ Fall 1

Die 2. Zeile muß gewählt werden, wenn: $w > \frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c-s}{c+s} \Rightarrow$ Fall 2

Die 3. Zeile muß gewählt werden, wenn: $-\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c+s}{c-s} > w \Rightarrow$ Fall 3

Fall 1 (1. Stufe): $\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c-s}{c+s} > w > -\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c+s}{c-s}$

$m_1 \ddot{y}_N$	$m_1 \ddot{y}_T$	$m_1 \ddot{y}_T$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N	$\lambda_H^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0
(1)	0	0	0	$-\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_2}$	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	0	0	-1*
0	(1)	0	0	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$-\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	$\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	-1	0	-1
0	0	(1)	0	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	$-\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	0	-1	-1
0	0	0	(1)	$-\mu$	1	0	0	0	-1
0	0	0	(1)	$-\mu$	0	1	0	0	-1

Das Pivotelement, mit einem Stern * markiert, kennzeichnet die Spalte, hier z_0 , die bei der folgenden Pivotisierung aus der Menge der Nichtbasisvariablen herausfällt und in die Menge der Basisvariablen übertritt. Die Basisvariable der Pivotzeile ist bisher die Spalte

($m_1 \ddot{g}_N$). Sie fällt, weil durch z_0 verdrängt, bei der Pivotisierung aus der Basis heraus und wechselt in die Menge der Nichtbasisvariablen über. Nun hat man das Zwillingenpaar ($m_1 \ddot{g}_N, \lambda_N$) gleichzeitig in der Menge der Nichtbasisvariablen. Damit ist klar, daß die Spalte von λ_N die neue Pivotspalte werden muß! Die Fälle eines Lösungspfadens seien entsprechend den ausgewählten Pivotzeilen numeriert. Beispielsweise bedeutet „Fall 4.2.5“: Zeile 4 im Starttableau, Zeile 2 im Tableau der 2ten Stufe und Zeile 5 im Tableau der 5ten Stufe. Im weiteren seien zur kompakteren Schreibweise die folgenden Abkürzungen verwendet:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= m_1 s^2 + m_2 c^2 + sc(m_1 - m_2), & M_5 &= \mu(m_1 c^2 + m_2 s^2) - sc(m_1 - m_2), \\
 M_2 &= m_1 c^2 + m_2 s^2 + sc(m_1 - m_2), & M_6 &= \mu sc(m_1 - m_2) - (m_1 s^2 + m_2 c^2), \\
 M_3 &= m_1 s^2 + m_2 c^2 - sc(m_1 - m_2), & M_7 &= \mu(m_1 c^2 + m_2 s^2) + sc(m_1 - m_2), \\
 M_4 &= m_1 c^2 + m_2 s^2 - sc(m_1 - m_2), & M_8 &= \mu sc(m_1 - m_2) + (m_1 s^2 + m_2 c^2).
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Fall 1 (2. Stufe): $\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c-s}{c+s} > w > -\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c+s}{c-s}$

$m_1 \ddot{g}_N$	$m_1 \ddot{g}_T$	$m_1 \ddot{g}_T$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N^*	$\lambda_H^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0
-1	0	0	0	0	$\frac{m_2}{m_1 s^2 + m_2 c^2}$	$-\frac{m_2}{sc(m_1 - m_2)}$	$\frac{m_2}{sc(m_1 - m_2)}$	0	0	(1)
-1	(1)	0	0	0	$\frac{M_1}{m_2}$	$-\frac{M_2}{m_2}$	$\frac{M_2}{m_2}$	-1	0	0
-1	0	(1)	0	0	$\frac{M_3}{m_2}$	$\frac{M_4}{m_2}$	$-\frac{M_4}{m_2}$	0	-1	0
-1	0	0	(1)	0	$\frac{m_2}{m_1 s^2 + m_2 c^2}$	$1 - \frac{m_2}{sc(m_1 - m_2)}$	$\frac{m_2}{sc(m_1 - m_2)}$	0	0	0
-1	0	0	0	(1)	$-\mu + \frac{m_2}{m_1 s^2 + m_2 c^2}$	$-\frac{m_2}{sc(m_1 - m_2)}$	$1 + \frac{m_2}{sc(m_1 - m_2)}$	0	0	0

Zu bemerken sei, daß die rechte Seite für den Fall $\left(\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c-s}{c+s} > w > -\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c+s}{c-s}\right)$ komplett positiv ist. Diese Eigenschaft muß, ausgenommen dem Starttableau, immer von der rechten Seite erfüllt sein! Zur Auswahl des Pivotelements bzw. der Pivotzeile in der Spalte von λ_N verwendet man die Standard-Simplexmethode. Es werden dabei nur die Elemente, d.h. Koeffizienten der Pivotspalte herangezogen, dessen Werte positiv sind. Man bildet für jede Zeile mit positiven Koeffizienten den Quotienten aus der rechten Seite und dem positiven Koeffizienten der Pivotspalte. Der Quotient ist natürlich positiv. Es wird als Pivotelement dann der minimale Quotient gewählt. Wären alle Koeffizienten der Pivotspalte negativ, so würde dieser Pfad ohne Lösung abbrechen. Der nächste Schritt ist die Bestimmung der kleinsten positiven Quotienten, wenn der Koeffizient der Pivotspalte positiv ist.

Auswahl der Pivotzeile im Tableau Fall 1 (2. Stufe):

	positiver Koeffizient?	positiv, wenn	kleinster positiver Quotient
1. Zeile:	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_2} > 0$	\Rightarrow gilt immer!	$\frac{F m_2 c - k w m_1 s}{m_1 s^2 + m_2 c^2} > 0$
2. Zeile:	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 + sc(m_1 - m_2)}{m_2} > 0$	\Rightarrow gilt immer!	$\frac{-(F m_2 s + k w m_1 c) + (F m_2 c - k w m_1 s)}{m_1 s^2 + m_2 c^2 + sc(m_1 - m_2)} > 0$
3. Zeile:	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - sc(m_1 - m_2)}{m_2} > 0$	$\Leftrightarrow \mu > \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2)} > 1$	$\frac{(F m_2 s + k w m_1 c) + (F m_2 c - k w m_1 s)}{m_1 s^2 + m_2 c^2 - sc(m_1 - m_2)} > 0$
4./5. Zeile:	$-\mu + \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_2} > 0$	$\Leftrightarrow \mu < \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_2}$	$\frac{F m_2 c - k w m_1 s}{-\mu m_2 + m_1 s^2 + m_2 c^2} > 0$

Vergleich der Zeilen:

1. Zeile \wedge 4./5. Zeile:	$\frac{F m_2 c - k w m_1 s}{-\mu m_2 + m_1 s^2 + m_2 c^2} > \frac{F m_2 c - k w m_1 s}{m_1 s^2 + m_2 c^2}$	$\Leftrightarrow w < \frac{F m_2 c}{k m_1 s}$
2. Zeile \wedge 3. Zeile:	$\frac{(F m_2 s + k w m_1 c) + (F m_2 c - k w m_1 s)}{m_1 s^2 + m_2 c^2 - sc(m_1 - m_2)} > \frac{-(F m_2 s + k w m_1 c) + (F m_2 c - k w m_1 s)}{m_1 s^2 + m_2 c^2 + sc(m_1 - m_2)}$	$\Leftrightarrow w > -\frac{F s}{k c}$
1. Zeile \wedge 2. Zeile:	$\frac{F m_2 c - k w m_1 s}{m_1 s^2 + m_2 c^2} > \frac{-(F m_2 s + k w m_1 c) + (F m_2 c - k w m_1 s)}{m_1 s^2 + m_2 c^2 + sc(m_1 - m_2)}$	$\Leftrightarrow w > -\frac{F s}{k c}$
1. Zeile \wedge 3. Zeile:	$\frac{(F m_2 s + k w m_1 c) + (F m_2 c - k w m_1 s)}{m_1 s^2 + m_2 c^2 - sc(m_1 - m_2)} > \frac{F m_2 c - k w m_1 s}{m_1 s^2 + m_2 c^2}$	$\Leftrightarrow w > -\frac{F s}{k c}$

Der Vergleich zeigt, daß 2 verschiedene Fälle unterschieden werden müssen:

Die 2. Zeile muß gewählt werden, wenn: $w > -\frac{F s}{k c}$ \Rightarrow Fall 1.2

Die 3. Zeile muß gewählt werden, wenn: $w < -\frac{F s}{k c} \wedge \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2)} > 1$ \Rightarrow Fall 1.3

Fall 1.2 (3. Stufe):

$$\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c-s}{c+s} > w > -\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c+s}{c-s} > -\frac{F}{k} \frac{s}{c} \quad \text{wenn} \quad 1 > \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2)}$$

$$\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c-s}{c+s} > w > -\frac{F}{k} \frac{s}{c} > -\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c+s}{c-s} \quad \text{wenn} \quad \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2)} > 1$$

$m_1 \ddot{g}_N$	$m_1 \ddot{g}_T^+$	$m_1 \ddot{g}_T^-$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N	$\lambda_H^{(*)}$	$\lambda_H^{(-)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0
$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{M_1}$	$-\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{M_1}$	0	0	0	0	$\frac{m_1}{M_1}$	$-\frac{m_1}{M_1}$	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{M_1}$	0	(1)
$-\frac{m_2}{M_1}$	$\frac{m_2}{M_1}$	0	0	(1)	$-\frac{M_2}{M_1}$	$-\frac{M_2}{M_1}$	$\frac{M_2}{M_1}$	$-\frac{m_2}{M_1}$	0	0
$-\frac{2sc(m_1 - m_2)}{M_1}$	$-\frac{M_3}{M_1}$	(1)	0	0	$2\frac{m_1}{M_1}$	$-\frac{2m_1}{M_1}$	$\frac{M_3}{M_1}$	$\frac{M_3}{M_1}$	-1	0
$-\frac{\mu m_2 - sc(m_1 - m_2)}{M_1}$	$\frac{\mu m_2 - m_1 s^2 - m_2 c^2}{M_1}$	0	(1)	0	$\frac{M_1 + m_1 - \mu M_2}{M_1}$	$\frac{\mu M_2 - m_1}{M_1}$	$\frac{\mu M_2 - m_1}{M_1}$	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{M_1}$	0	0
$-\frac{\mu m_2 - sc(m_1 - m_2)}{M_1}$	$\frac{\mu m_2 - m_1 s^2 - m_2 c^2}{M_1}$	0	0	(1)	0	$\frac{M_1 + \mu M_2 - m_1}{M_1}$	$\frac{M_1}{M_1}$	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{M_1}$	0	0

Auswahl der Pivotzeile im Tableau Fall 1.2 (3. Stufe):

	$\underbrace{\text{positiver Koeffizient?}}_{\text{positiv, wenn}}$	$\underbrace{\text{positiv, wenn}}_{\text{kleinster positiver Quotient}}$
1. Zeile:	$\frac{m_1}{M_1} > 0 \Rightarrow$	$Fs + kwc > 0$
2. Zeile:	$-\frac{M_2}{M_1} < 0 \Rightarrow$	negativ!
3. Zeile:	$\frac{2m_1}{M_1} > 0 \Rightarrow$	gilt immer! $\Rightarrow Fs + kwc > 0$
4. Zeile:	$\frac{M_1 + m_1 - \mu M_2}{M_1} > 0 \Leftrightarrow \mu < \frac{M_1 + m_1}{M_2} \Rightarrow$	$\frac{\mu[Fm_2(c-s) - kwm_1(c+s)] + m_1(Fs + kwc)}{M_1 + m_1 - \mu M_2} > 0$
5. Zeile:	$\frac{m_1 - \mu M_2}{M_1} > 0 \Leftrightarrow \mu < \frac{m_1}{M_2} \Rightarrow$	$\frac{\mu[Fm_2(c-s) - kwm_1(c+s)] + m_1(Fs + kwc)}{M_1} > 0$

Vergleich der Zeilen:

$$1./3. \text{ Zeile} \wedge 4. \text{ Zeile: } \frac{\mu[Fm_2(c-s) - kwm_1(c+s)] + m_1(Fs + kwc)}{M_1 + m_1 - \mu M_2} > Fs + kwc \Leftrightarrow \frac{F}{k} \frac{\mu c - s}{\mu s + c} > w$$

$$4. \text{ Zeile} \wedge 5. \text{ Zeile: } \frac{\mu[Fm_2(c-s) - kwm_1(c+s)] + m_1(Fs + kwc)}{M_1} > \frac{\mu[Fm_2(c-s) - kwm_1(c+s)] + m_1(Fs + kwc)}{M_1 + m_1 - \mu M_2} \Leftrightarrow \mu < \frac{m_1}{M_2}$$

Es gilt der Zusammenhang: $\frac{F}{k} \frac{\mu c-s}{\mu s+c} > \frac{F}{k} \frac{m_2 c}{m_1 s} > \frac{F}{k} \frac{m_2 c-s}{m_1 c+s} > -\frac{F}{k} \frac{m_2 s}{m_1 c} > -\frac{F}{k} \frac{m_2 c+s}{m_1 c-s}$

Der Vergleich zeigt, daß die 1.Zeile und die 3.Zeile den minimalen Quotienten habe. Die 3.Zeile führt zu keiner Lösung. Daher muß die 1.Zeile gewählt werden: \Rightarrow Fall 1.2.1

Fall 1.2.1 (4.Stufe): $\frac{F}{k} \frac{m_2 c-s}{m_1 c+s} > w > -\frac{F}{k} \frac{m_2 c+s}{m_1 c-s} > -\frac{F}{k} \frac{s}{c}$ wenn $1 > \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2)}$
 $\frac{F}{k} \frac{m_2 c-s}{m_1 c+s} > w > -\frac{F}{k} \frac{s}{c} > -\frac{F}{k} \frac{m_2 c+s}{m_1 c-s}$ wenn $\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2)} > 1$

$m_1 \ddot{g}_N$	$m_1 \ddot{g}_T^+$	$m_1 \ddot{g}_T^-$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$	$\lambda_H^{(+)}$	λ_N	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0^*
$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	$-\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_1}$	0	0	0	(1)	-1	0	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_1}$	0	$\frac{M_1}{m_1}$
$-\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_1}$	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	0	0	0	(1)	0	(1)	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	0	$\frac{M_2}{m_1}$
0	1	(1)	0	0	0	0	0	-1	-1	$\frac{M_3}{m_1}$
$-\frac{M_5}{m_1}$	$-\frac{M_6}{m_1}$	0	(1)	0	0	1	0	$\frac{M_6}{m_1}$	0	$\frac{\mu M_2 - m_1 - M_1}{m_1}$
$-\mu \frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_1}$	$-\mu \frac{sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	0	0	(1)	0	1	0	$\frac{\mu sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	0	$\frac{\mu M_2 - m_1}{m_1}$
										$Fs + kwc$
										$Fc - kws$
										0
										$\mu(Fc - kws) - (Fs + kwc)$
										$\mu(Fc - kws)$

In dem Tableau hat die Variable z_0 die Basis verlassen und der Algorithmus endet. Somit hat man die Lösung für den Fall 1.2.1 gefunden. Aus dem Tableau entnimmt man die Lösung

$\ddot{g}_N = 0$	$\lambda_N = Fc - kws > 0$
$\dot{g}_T^+ = 0$	$\lambda_H^{(+)} = Fs + kws > 0$
$\ddot{g}_T^- = 0$	$\lambda_H^{(-)} = 0$
$\lambda_{H0}^{(-)} = \mu\lambda_N - \lambda_T^{(+)} > 0$	$z^- = 0$
$\lambda_{H0}^{(+)} = \mu\lambda_N > 0$	$z^+ = 0$

(4.24)

Die Lösung zeigt, daß für den Fall 1.2.1 der **Haftzustand** erhalten bleibt, da die Relativgeschwindigkeiten null sind, die Normalkraft größer null ist und die Haftreibkraft $\lambda_H = \lambda_H^{(+)} - \lambda_H^{(-)}$ größer null ist. Die Gegenüberstellung der Variablen in der Tabelle 4.24 zeigt die Komplementarität der Variablen.

Fall 1.3 (3. Stufe): $\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c-s}{c+s} > -\frac{F}{k} \frac{s}{c} > w > -\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c+s}{c-s}$ wenn $\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2)} > 1$

$m_1 \ddot{g}_N$ $\frac{sc(m_1 - m_2)}{M_3}$	$m_1 \ddot{g}_T^+$	$m_1 \ddot{g}_T^-$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N	$\lambda_H^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$ *	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0
0	$-\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{M_3}$	0	0	0	0	$-\frac{m_1}{M_3}$	$\frac{m_1}{M_3}$	0	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{M_3}$	(1)
$2 \frac{sc(m_1 - m_2)}{M_3}$	$-\frac{m_1}{M_3}$	0	0	0	0	$-2 \frac{m_1}{M_3}$	$2 \frac{m_1}{M_3}$	-1	$\frac{M_1}{M_3}$	0
0	$\frac{m_2}{M_3}$	0	0	0	(1)	$\frac{M_4}{M_3}$	$-\frac{M_4}{M_3}$	0	$-\frac{m_2}{M_3}$	0
$sc(m_1 - m_2) - \mu m_2$ $\frac{M_3}{M_3}$	$\frac{\mu m_2 - m_1 s^2 - m_2 c^2}{M_3}$	(1)	0	0	0	$\frac{\mu M_4 - c(c+s)(m_1 - m_2)}{M_3}$	$\frac{m_1 - \mu M_4}{M_3}$	0	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{M_3}$	0
$sc(m_1 - m_2) - \mu m_2$ $\frac{M_3}{M_3}$	$\frac{\mu m_2 - m_1 s^2 - m_2 c^2}{M_3}$	0	(1)	0	0	$\frac{\mu M_4 - m_1}{M_3}$	$\frac{M_3 + m_1 - \mu M_4}{M_3}$	0	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{M_3}$	0

Auswahl der Pivotzeile im Tableau Fall 1.3 (3. Stufe):

	positiver Koeffizient?	positiv, wenn	kleinster positiver Quotient
1. Zeile:	$\frac{m_1}{M_3} > 0 \Rightarrow$	gilt immer!	$-\bar{F}s - kwc > 0$
2. Zeile:	$\frac{2m_1}{M_3} > 0 \Rightarrow$	gilt immer!	$-\bar{F}s - kwc > 0$
3. Zeile:	$\frac{-m_1 c^2 - m_2 s^2 + sc(m_1 - m_2)}{M_3} > 0 \Rightarrow$	für $m_1 > m_2$ nicht erfüllbar!	
4. Zeile:	$\frac{m_1 - \mu M_4}{M_3} > 0 \Leftrightarrow$	$\mu < \frac{m_1}{M_3}$	$\frac{\mu[Fm_2(c-s) + kwm_1(c-s)] - m_1(Fs + kwc)}{m_1 - \mu M_4} > 0$
5. Zeile:	$\frac{M_3 + m_1 - \mu M_4}{M_3} > 0 \Leftrightarrow$	$\mu < \frac{m_1 + M_3}{M_3}$	$\frac{\mu[Fm_2(c-s) + kwm_1(c-s)] - m_1(Fs + kwc)}{M_3 + m_1 - \mu M_4} > 0$

Vergleich der Zeilen:

4. Zeile \wedge 5. Zeile: $\frac{\mu[Fm_2(c-s) + kwm_1(c-s)] - m_1(Fs + kwc)}{m_1 - \mu M_4} > \frac{\mu[Fm_2(c-s) + kwm_1(c-s)] - m_1(Fs + kwc)}{M_3 + m_1 - \mu M_4}$ gilt immer!

1. Zeile \wedge 5. Zeile: $\frac{\mu[Fm_2(c-s) + kwm_1(c-s)] - m_1(Fs + kwc)}{M_3 + m_1 - \mu M_4} > -Fs - kwc \Leftrightarrow \begin{cases} w > -\frac{F}{k} \frac{\mu c + s}{c - \mu s} & \text{für } \frac{c}{s} > \mu \text{ im Def.-Bereich erfüllt!} \\ \frac{F}{k} \frac{\mu c + s}{\mu s - c} > w & \text{für } \mu > \frac{c}{s} \text{ im Def.-Bereich erfüllt!} \end{cases}$

Es gilt der Zusammenhang: $\left(\frac{F}{k} \frac{\mu c+s}{\mu s-c} > \right)_{\mu > \frac{c}{s}}$ $\frac{F}{k} \frac{\mu c-s}{\mu s+c} > \frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c}{s} > -\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c+s}{c-s} > -\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c+s}{c-s} \left(> -\frac{F}{k} \frac{\mu c+s}{c-\mu s} \right)_{\mu > \frac{c}{s}}$

Der Vergleich der Zeilen ergibt, daß der minimale Quotient in der 1. Zeile und in der 2. Zeile zu finden ist. Die 2. Zeile führt zu keiner Lösung. Daher muß die 1. Zeile gewählt werden: \Rightarrow Fall 1.3.1

Fall 1.3.1 (4. Stufe): $\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c-s}{c+s} > -\frac{F}{k} \frac{s}{c} > w > -\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c+s}{c-s}$ wenn $\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2)} > 1$

$\frac{m_1 \ddot{g}_N}{sc(m_1 - m_2)}$	$m_1 \ddot{g}_T^+$	$m_1 \ddot{g}_T^-$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	$\lambda_N^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$	$\lambda_H^{(+)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0^*
$\frac{m_1}{-m_1 s^2 + m_2 c^2}$	0	$-\frac{m_1}{m_1 s^2 + m_2 c^2}$	0	0	0	-1	(1)	0	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_1}$	$\frac{M_3}{m_1}$
0	(1)	1	0	0	0	0	0	-1	-1	-2
$-\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_1}$	0	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	0	0	(1)	0	0	0	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	$\frac{M_4}{m_1}$
$-\mu \frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_1}$	0	$\mu \frac{sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	(1)	0	0	1	0	0	$-\mu \frac{sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	$\frac{\mu M_4 - m_1}{m_1}$
$-\frac{M_T}{m_1}$	0	$\frac{M_S}{m_1}$	0	(1)	0	-1	0	0	$-\frac{M_S}{m_1}$	$\frac{\mu(M_4 - m_1 - M_1)}{m_1}$
										$-F s - k w c$
										0
										$F c - k w s$
										$\mu(F c - k w s)$
										$\mu(F c - k w s) + (F s + k w c)$

In dem Tableau hat die Variable z_0 die Basis verlassen und der Algorithmus endet. Somit hat man die Lösung für den Fall 1.3.1 gefunden. Aus dem Tableau entnimmt man die Lösung

$\ddot{g}_N = 0$	$\lambda_N = F c - k w s > 0$
$\ddot{g}_T^+ = 0$	$\lambda_H^{(+)} = 0$
$\ddot{g}_T^- = 0$	$\lambda_H^{(-)} = -(F s + k w s) > 0$
$\lambda_{H0}^{(-)} = \mu \lambda_N > 0$	$z^- = 0$
$\lambda_{H0}^{(+)} = \mu \lambda_N - \lambda_T^{(-)} > 0$	$z^+ = 0$

(4.25)

Die Lösung zeigt, daß für den Fall 1.3.1 der **Haftzustand** erhalten bleibt, da die Relativgeschwindigkeiten null sind, die Normalkraft größer null ist und die Haftreibungskraft $\lambda_H = \lambda_H^{(+)} - \lambda_H^{(-)}$ kleiner null ist.

Die wesentlich umfangreicheren Berechnungen der Fälle 2 und 3 findet man im Anhang C.1 und C.2.

4.3.3 Lösungen des LCP für den Anfangszustand *Haften*

Die sehr aufwendige analytische Berechnung des linearen Komplementaritätsproblem für den Anfangszustand *Haften* liefert eine **eindeutige** Lösung. Abhängig von den Getriebeparametern m_1 , m_2 , μ und γ müssen vier Fälle unterschieden werden. In Abbildung 4.3 sind die 4 Fälle dargestellt. Der Reibwert μ bestimmt, welcher Fall vorliegt. μ muß wenigstens die Ratterbedingung 4.2 erfüllen, damit einer der 4 Fälle gültig ist. Der neue Zustand stellt sich in Abhängigkeit von der Federverlängerung w ein. Negative w bedeuten Federstauchung.

Fall 1

$$\mu > \frac{m_1 + m_1s^2 + m_2c^2 + sc(m_1 - m_2)}{m_1c^2 + m_2s^2 + sc(m_1 - m_2)} \quad \text{und} \quad \frac{c}{s} > \mu. \quad (4.26)$$

Es können, ausgehend vom Anfangszustand *Haften*, alle drei Zustände *Haften*, *Gleiten* und *Separation* auftreten. Liegt die Federverlängerung/-stauchung w innerhalb des Bereichs $\left[-\frac{F}{k} \frac{\mu c + s}{c - \mu s}, \dots, \frac{m_1c + m_2c - m_2s}{m_1(2s - c)}\right]$, so verharrt das Keilgetriebe im Zustand *Haften*, ändert seinen Zustand also nicht. Für eine Federverlängerung von $w > \frac{m_1c + m_2c - m_2s}{m_1(2s - c)}$ wechselt das Keilgetriebe vom Haftzustand in den Zustand *Separation* (Abheben). Die Körper trennen sich voneinander. Ist $w < -\frac{F}{k} \frac{\mu c + s}{c - \mu s}$, so geht das Getriebe vom Haftzustand in den Zustand *Gleiten* über.

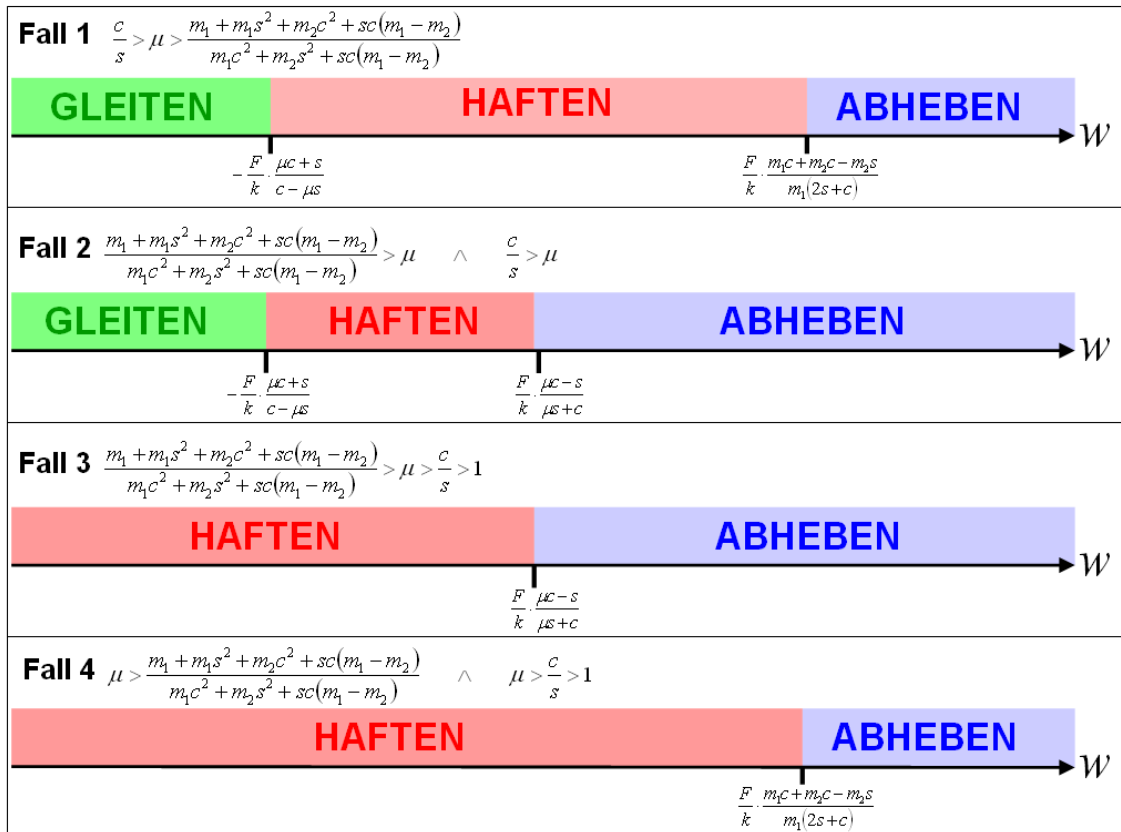


Abbildung 4.3: Lösung für die Anfangsbedingung *Haften*

Fall 2

$$\frac{m_1 + m_1 s^2 + m_2 c^2 + sc(m_1 - m_2)}{m_1 c^2 + m_2 s^2 + sc(m_1 - m_2)} > \mu \quad \text{und} \quad \frac{c}{s} > \mu. \quad (4.27)$$

Im Fall 2 ist gegenüber Fall 1 das Haftgebiet eingeschränkt. Die obere Grenze, die Separationsgrenze, liegt bei $w = \frac{F}{k} \frac{\mu c - s}{\mu s + c}$ und ist kleiner als im Fall 1 oder 4. Der Bereich des Gleitzustands stimmt mit dem von Fall 1 überein.

Fall 3

$$\frac{m_1 + m_1 s^2 + m_2 c^2 + sc(m_1 - m_2)}{m_1 c^2 + m_2 s^2 + sc(m_1 - m_2)} > \mu \quad \text{und} \quad \mu > \frac{c}{s} > 1. \quad (4.28)$$

Hier ist es nicht mehr möglich, daß bei zusammengedrückter Feder das Getriebe in den Zustand *Gleiten* übergeht. Unterhalb der Separationsgrenze $w = \frac{F}{k} \frac{\mu c - s}{\mu s + c}$ verbleibt das Keilgetriebe im Zustand *Haften* und oberhalb wechselt es vom Zustand *Haften* in den Zustand *Separation*.

Fall 4

$$\mu > \frac{m_1 + m_1 s^2 + m_2 c^2 + sc(m_1 - m_2)}{m_1 c^2 + m_2 s^2 + sc(m_1 - m_2)} \quad \text{und} \quad \mu > \frac{c}{s} > 1. \quad (4.29)$$

Wie im Fall 3 ist der Übergang vom Haftbereich in den Gleitbereich nicht möglich. Es ist nur der Übergang in den Zustand *Separation* oder der Verbleib im Zustand *Haften* zulässig. Die Separationsgrenze liegt wie im Fall 1 beim größeren Wert $w = \frac{m_1 c + m_2 c - m_2 s}{m_1 (2s - c)}$.

Der Vergleich der vier Fälle zeigt, daß nur für $\frac{c}{s} > \mu$ (Fall 1 und 2) der Übergang zum Zustand *Gleiten* auftritt. Ist dagegen $\mu > \frac{c}{s} > 1$, so ist der Zustand *Gleiten* nicht mehr möglich (Fall 3 und 4). Weiterhin wird für $\mu > \frac{m_1 + m_1 s^2 + m_2 c^2 + sc(m_1 - m_2)}{m_1 c^2 + m_2 s^2 + sc(m_1 - m_2)}$ der Zustand *Separation* erst später für $w > \frac{m_1 c + m_2 c - m_2 s}{m_1 (2s - c)}$ erreicht (Fälle 1 und 3).

Wesentlich an der Lösung ist die Erkenntnis, daß bei einem selbstbremsenden Getriebe, welches die Ratterbedingung 4.2 erfüllt, zwischen dem Zustand *Haften* und dem Zustand *Separation* (Abheben) **kein** Zustand *Gleiten* existiert. Dagegen hat ein Getriebe, das die Ratterbedingung nicht erfüllt, **zwei** Gebiete, in denen *Gleiten* auftritt. Der zweite Bereich *Gleiten* liegt bei diesen Getriebe zwischen dem Zustand *Haften* und dem Zustand *Separation*. Bei selbstbremsenden Getrieben im Ratterbetrieb wechselt der herausgezogene Keil direkt vom Zustand *Haften* in den Zustand *Separation*. Ein nicht-ratterndes Getriebe wechselt im Gegensatz dazu erst in den Zustand *Gleiten*, bevor es den Zustand *Separation* erreichen kann. Charakteristisch für die Ratterschwingungen ist, daß diese nur im Senkbetrieb auftreten können. *Senkbetrieb* bedeutet, daß der Keil von der Federkraft kw herausgezogen ($w > 0$) und der obere Körper abgesenkt wird. Damit ist offensichtlich der direkte Zustandsübergang von *Haften* nach *Separation* maßgeblich für den Entstehungsmechanismus der Ratterschwingungen! Diese Erkenntnis steht im Gegensatz zu der Behauptung einiger Autoren [21, 67, 63], die im *Senkbetrieb* eine Gleitphase vorausgesetzt haben.

Ob ein selbstbremsendes Getriebe im Hubbetrieb betrieben werden kann, hängt, wie oben angedeutet, vom Reibwert μ ab. Nur wenn $\mu < \frac{c}{s}$ ist, existiert der Gleitbereich, und nur dann ist der Übergang zum Gleitzustand für $w < -\frac{F}{k} \frac{\mu c + s}{c - \mu s}$ überhaupt möglich. Wenn

aber, wie in den Fällen 3 und 4, $\mu > \frac{c}{s}$ ist, dann hat man die Selbsthemmung auch in umgekehrter Richtung, d.h. Selbsthemmung in beide Richtungen [46]. Es ist nämlich

$$\mu > \frac{c}{s} = \frac{1}{\tan\gamma} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right). \quad (4.30)$$

Die Ratterbedingung fordert die Selbsthemmbedingung

$$\mu > \frac{s}{c} = \tan\gamma, \quad (4.31)$$

so daß insgesamt für den Reibwert gilt

$$\mu > \max\left\{\frac{1}{\tan\gamma}, \tan\gamma\right\} \quad \text{mit} \quad \gamma = 0, \dots, \frac{\pi}{2}. \quad (4.32)$$

In Abbildung 4.4 ist der Hubbetrieb für den sehr großen Reibwert bzw. Reibwinkel $\rho > \frac{\pi}{2} - \gamma > \gamma$ dargestellt. Die Antriebskraft $k w$ drückt den Keil in Richtung \dot{x}_2 . Es wirken die Kontaktkräfte λ_T und λ_N , die bei konstanter Bewegung mit der Abtriebskraft F im Gleichgewicht stehen müssen. Das ist aber nur möglich, wenn F entgegen der Kraftkomponente F_\perp nach oben zeigt. Die Abtriebsseite muß somit Antrieb werden, damit die konstante Bewegung aufrechterhalten werden kann. Andernfalls blockiert das Getriebe auch in dieser Bewegungsrichtung. Ratterschwingungen können in der Richtung nicht auftreten, da die Trägheitsbedingungen 4.2, u.a. $m_1 > m_2$, nicht erfüllbar ist. Schließlich gelten die Ratterbedingungen schon für die andere Bewegungsrichtung.

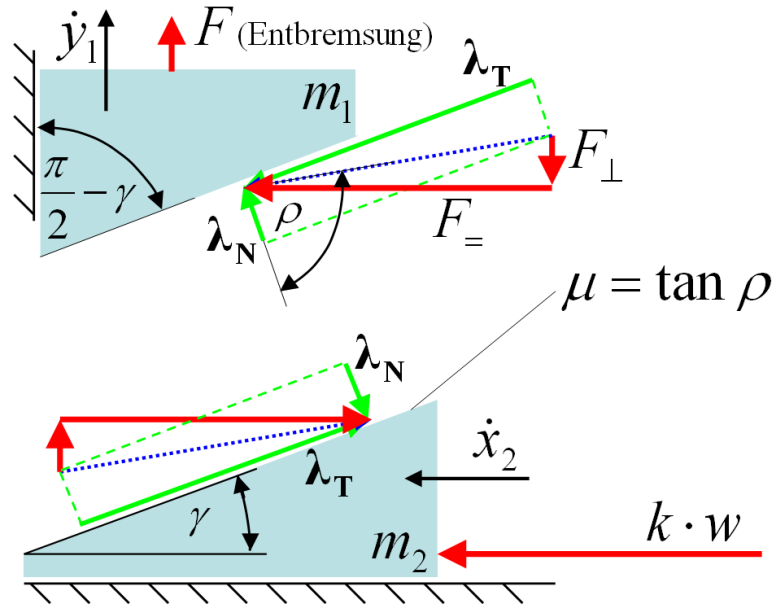


Abbildung 4.4: Kontaktkräfte im Hubbetrieb bei konstanter Bewegung mit $\rho > \frac{\pi}{2} - \gamma > \gamma$.

Damit die Fälle 3 oder 4 auftreten können, muß der Reibwert die Bedingung 4.32 erfüllen. Ist beispielsweise $\gamma = 10^\circ$, so folgt für den Reibwert der sehr große Wert

$$\mu > \max\left\{\frac{1}{\tan\gamma}, \tan\gamma\right\} \Rightarrow \mu > \max\{5.7, 0.18\} = 5.7. \quad (4.33)$$

Je kleiner der Steigungswinkel γ des Getriebes ist, desto größer muß der Reibwert werden, um die Fälle 3 und 4 zu generieren. Daher sind die beiden Fälle für die Praxis eher unrelevant.

4.4 Zustandsübergänge für den Anfangszustand *Gleiten*

Es sei jetzt vorausgesetzt, daß das selbsthemmende Keilgetriebe sich im Zustand *Gleiten* befindet. Die Frage, wie das selbsthemmende Keilgetriebe in diesen Zustand überhaupt gelangt sein könnte, sei erst einmal zurückgestellt. Der einzig vorhandene Kontakt im Keilgetriebe gehört zur Menge I_N/I_H der gleitenden Kontakte.

4.4.1 Lineares Komplementaritätsproblem (LCP)

Für den Anfangszustand *Gleiten* nimmt die Bewegungsgleichung 4.9 die Form

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -F \\ kw \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin\gamma \\ -\cos\gamma \end{pmatrix} (-\mu) \text{sign}(\dot{g}_T) \right] \lambda_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

an. Die Gradientenmatrix \mathbf{G}_H fehlt in der Bewegungsgleichung 4.34. Die Gleichung der Relativbeschleunigungen 3.45 lautet

$$\begin{pmatrix} \ddot{g}_N \\ \ddot{g}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ \sin\gamma & -\cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Das lineare Komplementaritätsproblem hat hier nur eine komplementäre Bedingung für den Kontakt I_N . Für das Gleiten in tangentialer Richtung existiert keine komplementäre Bedingung. Es gibt nur die Bedingung, daß die tangentiale Gleitgeschwindigkeit \dot{g}_T entgegen der eingepprägten tangentialen Gleitreibungskraft $\lambda_T = -\mu \cdot \text{sign}(\dot{g}_T)\lambda_N$ wirkt. Dabei ist es unerheblich, in welche Richtung die Gleitbeschleunigung \ddot{g}_T wirkt. Das ist anders beim Haftkontakt, wo die tangentiale Relativbeschleunigung \ddot{g}_T^\pm und die Haftkraft $\lambda_H^{(\pm)}$ eine komplementäre Beziehung bilden. Die komplementäre Bedingung für den einzigen Kontakt des Keilgetriebes lautet:

$$\lambda_N \geq 0 \quad \wedge \quad \ddot{g}_N \geq 0 \quad \wedge \quad \ddot{g}_N \lambda_N = 0. \quad (4.36)$$

Aus den Gleichungen 4.34, 4.35, 4.36 und den Abkürzungen 4.1 folgt das lineare Komplementaritätsproblem für den Fall *Gleiten* zu

$$\begin{aligned} \ddot{g}_N &= -\frac{Fc}{m_1} + \frac{ks}{m_2}w + \frac{m_2c[c - \text{sign}(\dot{g}_T)\mu s] + m_1s[s + \text{sign}(\dot{g}_T)\mu c]}{m_1m_2} \lambda_N, \\ \lambda_N &\geq 0 \quad \wedge \quad \ddot{g}_N \geq 0 \quad \wedge \quad \ddot{g}_N \lambda_N = 0. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Die Gleitbeschleunigung ergibt sich zu

$$\ddot{g}_T = -\frac{Fs}{m_1} - \frac{kc}{m_2}w + \frac{m_2s[c - \text{sign}(\dot{g}_T)\mu s] - m_1c[s + \text{sign}(\dot{g}_T)\mu c]}{m_1m_2} \lambda_N. \quad (4.38)$$

Aus den Vorzeichen der Gleitbeschleunigung \ddot{g}_T und der Gleitgeschwindigkeit \dot{g}_T läßt sich anschließend feststellen, ob es sich bei der Bewegung um eine beschleunigte oder gebremste Relativbewegung handelt. Die beschleunigte Relativbewegung ist gekennzeichnet durch

$$\text{sign}(\ddot{g}_T \cdot \dot{g}_T) = +1 \quad (4.39)$$

und bei einer gebremste Bewegung gilt

$$\text{sign}(\ddot{g}_T \cdot \dot{g}_T) = -1. \quad (4.40)$$

4.4.2 Analytische Berechnung des LCP

Zur Lösung des linearen Komplementaritätsproblem 4.37 ist der Einsatz des Lemke-Verfahren nicht notwendig. In Abhängigkeit von der Bewegungsrichtung $\text{sign}(\dot{g}_T)$ treten jeweils nur zwei Fälle für die beiden komplementären Variablen \ddot{g}_N und λ_N auf.

Gleiten mit $\dot{g}_T < 0 \Leftrightarrow \text{sign}(\dot{g}_T) = -1$ ($\dot{x}_2 > 0, \dot{y}_1 < 0$):

$$\begin{aligned} \text{LCP} \Rightarrow \quad \ddot{g}_N &= -\frac{Fc}{m_1} + \frac{ks}{m_2}w + \frac{m_2c(\mu s + c) - m_1s(\mu c - s)}{m_1m_2}\lambda_N, \\ \lambda_N &\geq 0 \quad \wedge \quad \ddot{g}_N \geq 0 \quad \wedge \quad \ddot{g}_N\lambda_N = 0. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Fall $\lambda_N = 0 \wedge \ddot{g}_N \geq 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \ddot{g}_N &= \frac{-Fm_2c + kwm_1s}{m_1m_2} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Separation} \quad \text{für } w > \frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c}{s} \\ \Rightarrow \quad \ddot{g}_T &= -\frac{Fm_2s + kwm_1c}{m_1m_2} \begin{cases} < 0 \Rightarrow \text{Beschleunigung} & \text{für } w > -\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{s}{c} \\ > 0 \Rightarrow \text{Bremsung} & \text{für } w < -\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{s}{c} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Fall $\lambda_N \geq 0 \wedge \ddot{g}_N = 0$

$$\Rightarrow \quad (-Fm_2c + kwm_1s) + [m_2c(\mu s + c) - m_1s(\mu c - s)]\lambda_N = 0$$

Mit der Ratterbedingung 4.2 $[m_1s(\mu c - s) - m_2c(\mu s + c)] > 0$ folgt

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad \lambda_N &= \frac{-Fm_2c + kwm_1s}{m_1s(\mu c - s) - m_2c(\mu s + c)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad w > \frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c}{s} \\ \Rightarrow \quad \ddot{g}_T &= \frac{-F(\mu c - s) + kw(\mu s + c)}{m_1s(\mu c - s) - m_2c(\mu s + c)} \begin{cases} < 0 \Rightarrow \text{Beschleunigung} & \text{für } w < \frac{F}{k} \frac{\mu c - s}{\mu s + c} \\ > 0 \Rightarrow \text{Bremsung} & \text{für } w > \frac{F}{k} \frac{\mu c - s}{\mu s + c} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Gleiten mit $\dot{g}_T > 0 \Leftrightarrow \text{sign}(\dot{g}_T) = +1$ ($\dot{x}_2 < 0, \dot{y}_1 > 0$):

$$\begin{aligned} \text{LCP} \Rightarrow \quad \ddot{g}_N &= -\frac{Fc}{m_1} + \frac{ks}{m_2}w + \frac{m_2c(c - \mu s) + m_1s(\mu c + s)}{m_1m_2}\lambda_N, \\ \lambda_N &\geq 0 \quad \wedge \quad \ddot{g}_N \geq 0 \quad \wedge \quad \ddot{g}_N\lambda_N = 0. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Fall $\lambda_N = 0 \wedge \ddot{g}_N \geq 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \ddot{g}_N &= \frac{-Fm_2c + kwm_1s}{m_1m_2} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Separation} \quad \text{für } w > \frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c}{s} \\ \Rightarrow \quad \ddot{g}_T &= -\frac{Fm_2s + kwm_1c}{m_1m_2} \begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{Beschleunigung} & \text{für } w < -\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{s}{c} \\ < 0 \Rightarrow \text{Bremsung} & \text{für } w > -\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{s}{c} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Fall $\lambda_N \geq 0 \wedge \dot{g}_N = 0$

$$\Rightarrow 0 = (-Fm_2c + kwm_1s) + [m_2c(c - \mu s) + m_1s(\mu c + s)] \lambda_N = 0$$

Für $\frac{c}{s} > \mu$ ist $[m_2c(c - \mu s) + m_1s(\mu c + s)] > 0$, so daß folgt

$$\Leftrightarrow \lambda_N = \frac{Fm_2c - kwm_1s}{m_2c(c - \mu s) + m_1s(\mu c + s)} > 0 \Leftrightarrow w < \frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c}{s}$$

$$\Rightarrow \ddot{g}_T = \frac{-F(\mu c + s) - kw(c - \mu s)}{m_2c(c - \mu s) + m_1s(\mu c + s)} \begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{Beschleunigung} & \text{für } w < -\frac{F}{k} \frac{\mu c + s}{c - \mu s} \\ < 0 \Rightarrow \text{Bremsung} & \text{für } w > -\frac{F}{k} \frac{\mu c + s}{c - \mu s} \end{cases} \quad (4.46)$$

4.4.3 Lösungen des LCP für den Anfangszustand *Gleiten*

Das lineare Komplementaritätsproblem unterscheidet jeweils zwei Lösungen für die Fälle $\dot{g}_T < 0$ und $\dot{g}_T > 0$.

Gleiten mit $\dot{g}_T < 0$

Im ersten Fall gibt es zwei widersprüchliche und inkonsistente Lösungen. Sowohl der Zustandswechsel von *Gleiten* nach *Separation* als auch der Verbleib im Zustand *Gleiten* ist für $w > \frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c}{s}$ gleichzeitig möglich. Für den Zustand unterhalb von $\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c}{s}$ kann in beiden Fällen keine explizite Aussage formuliert werden. Wenn für $w > \frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c}{s}$ die Körper abheben, sollte für $w < \frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c}{s}$ weiter Kontakt bestehen. Aber die zweite Lösung behauptet genau das Gegenteil. Dort besteht für $w > \frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c}{s}$ der Kontakt und für $w < \frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c}{s}$ ist die Kontaktkraft gleich null. Auch die tangentialen Geschwindigkeiten zeigen kein sinnvolles Bild. Im angeblichen Kontaktfall für $w > \frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c}{s}$ hätte man im Bereich $\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c}{s} < w < \frac{F}{k} \frac{\mu c - s}{\mu s + c}$ eine aufrechterhaltende oder beschleunigte Bewegung und für $w > \frac{F}{k} \frac{\mu c - s}{\mu s + c}$ ergibt sich sogar eine gebremste Bewegung, die zum Haften führen kann, obwohl die den Keil herausziehende Federkraft kw immer größer wird. Aus beiden Fällen kann nur gefolgert werden, daß das LCP für den Fall des „herausgezogenen Keils“ keine sinnvolle Lösung liefert.

Gleiten mit $\dot{g}_T > 0$

Hier liefert das LCP zwei Lösungen, die sich aber nicht widersprechen. Der erste Fall zeigt an, daß für $w > \frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c}{s}$ der Zustandswechsel von *Gleiten* nach *Separation* möglich ist. Allerdings haben in dem Bereich die vorausgesetzte Relativgeschwindigkeit $\dot{g}_T > 0$ und die sich ergebende Relativbeschleunigung $\ddot{g}_T < 0$ entgegengesetzte Vorzeichen, so daß es sich um eine gebremste Bewegung handelt, die im Kontaktfall zum Zustand *Haften* führen kann. Die zweite Lösung liefert für $w < \frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c}{s}$ weiterhin den Zustand *Kontakt* ($\lambda_N > 0$). Im Bereich $\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c}{s} > w > \frac{F}{k} \frac{\mu c - s}{\mu s + c}$ handelt es sich um eine gebremste Bewegung ($\dot{g}_T > 0 \wedge \ddot{g}_T < 0$), die zum *Haften* führen wird. Ist $w < \frac{F}{k} \frac{\mu c - s}{\mu s + c}$, so ändert sich der Zustand *Gleiten* nicht, es bleibt bei einer Aufrechterhaltung der Gleitbewegung.

4.4 Zustandsübergänge für den Anfangszustand Gleiten

Zusammengefasst läßt sich feststellen, daß es für den Anfangszustand *Gleiten* eine eindeutige Lösung nur für die Bedingungen $\dot{g}_T > 0$ mit $\frac{c}{s} > \mu$ und $w < \frac{F}{k} \frac{\mu c - s}{\mu s + c}$ gibt. Diese Lösung sagt aus, daß es zu keinem Zustandswechsel kommt und der Zustand *Gleiten* erhalten bleibt. Das stimmt auch mit der Lösung für den Anfangszustand *Haften* überein, wo unter den gleichen Bedingungen der Zustandswechsel von *Haften* nach *Gleiten* erfolgt. Es ist zu bedenken, daß für $\dot{g}_T < 0$ der Anfangszustand *Gleiten* vorausgesetzt wurde. Daß dann keine sinnvolle Lösung gefunden werden kann, zeigt an, daß die Voraussetzung des *Gleitens* in Frage gestellt werden muß. Der Anfangszustand *Haften* hat gezeigt, daß vom Zustand *Haften* aus der Zustand *Gleiten* für $\dot{g}_T < 0$ nicht erreicht werden kann. Es bleibt die Möglichkeit, den Zustand *Gleiten* beim stoßhaften Aufsetzen zu erreichen. Ob der Zustand *Gleiten* beim Zustandsübergang *Separation* \rightarrow *Kontakt* möglich ist, zeigen die nächsten beiden Kapitel.

5 Stoßmechanik

In den vorausgegangenen Kapiteln wurde vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeitsverläufe stetig sein müssen, also stoßfrei sind. Damit können nur die Zustandsübergänge beschrieben werden, wo ein Zwang in der Menge der aktiven Restriktionen verbleibt, oder wo aus der Menge der aktiven Restriktionen I_N ein Zwang entfernt wird. Es fehlt die Beschreibung für den Fall, daß zur Menge der aktiven Restriktionen I_N ein Zwang hinzugefügt wird. Das ist der Inhalt dieses Kapitels. Wird ein Zwang zu I_N hinzugefügt, so wird ein Kontakt geschlossen, was mit einem Stoß verbunden sein kann. Infolge dessen kann bei sehr kurzer Stoßdauer $\Delta t \rightarrow 0$ im idealisierten Sinn der Starrkörperannahme ein Sprung im Geschwindigkeitsverlauf auftreten. In Realität bedeutet der Sprung allerdings nur einen sehr großen zeitlichen Gradienten im Geschwindigkeitsverlauf, da natürlich auch der Geschwindigkeitsverlauf stetig sein muß. Ein Sprung im Geschwindigkeitsverlauf ist verbunden mit einem impulshaften Verlauf der Beschleunigung. Da Änderungen in den Beschleunigungen nur von Kräften hervorgerufen werden können, bedeutet das einen impulshaften Verlauf der Kräfte. Damit eine Geschwindigkeitsänderung überhaupt erkennbar wird, wenn die Stoßdauer gegen Null geht, müssen die wirkenden Kräfte sehr groß werden.

Ein Stoßgesetz, welches globale Aussagen über die Geschwindigkeitsänderungen infolge von Stößen erlaubt, muß zur Starrkörperannahme passen. Geeignete Stoßgesetze sind das Gesetz nach Newton und das Gesetz nach Poisson. Nach Glocker [12] zeigt sich das Poissonsche Gesetz als besonders zweckmäßig, da es in Kombination mit einem Reibgesetz für die tangentielle Richtung als lineares Komplementaritätsproblem (LCP) auf Impulsebene formuliert werden kann. Das Poissonsche Stoßgesetz teilt den Kraftverlauf eines Stoßes in zwei Phasen auf. In Abbildung 5.1 ist die Zerlegung des impulshaften Kraftverlaufs

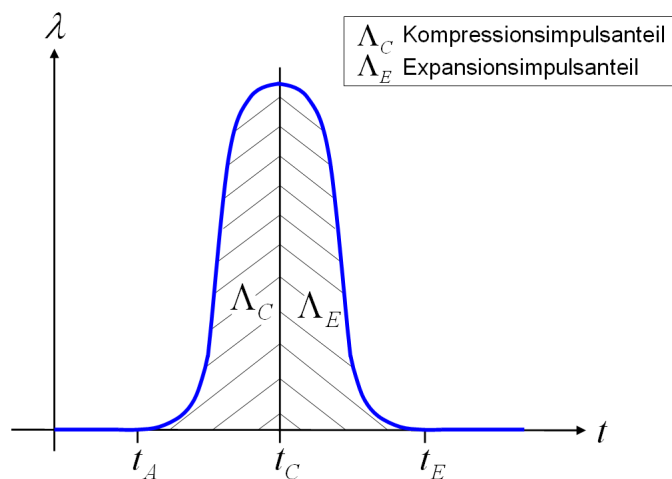


Abbildung 5.1: Aufteilung des Kraftimpulses in die Kompressions- und Expansionsphase nach Poisson

$\lambda(t)$ in die Kompressionsphase $[t_A, t_C]$ und die Expansionsphase $[t_C, t_E]$ dargestellt. Die Teilflächen Λ_C und Λ_E ergeben sich aus der zeitlichen Integration des Kraftverlaufs in den beiden Phasen $[t_A, t_C]$ und $[t_C, t_E]$ und sind die Impulse der jeweiligen Phase. Beim Stoß bremst ein positiver Impuls während der Kompressionsphase die sich mit negativer Relativgeschwindigkeit nähernden Körper solange ab, bis die Relativgeschwindigkeit Null ist. In der anschließenden Expansionsphase beschleunigt der weiterhin positive Expansionsimpuls die Körper, so daß eine positive Relativgeschwindigkeit erreicht wird.

Für jede der beiden Phasen des Stoßes läßt sich die Impulsbilanzgleichung des Starrkörpersystems aufstellen. Unter anderem bedingt die Starrkörperannahme und die Stoßdauer $\Delta t \rightarrow 0$ bei der Aufstellung der Impulsgleichungen folgende Voraussetzungen:

- Nur Impulse können Sprünge in den Geschwindigkeiten hervorrufen.
- Während des Stoßes bleiben die Lagen und Richtungen der Körper konstant, d.h. stetige Verschiebungen und Drehungen ohne Sprünge.
- Die Starrkörper bleiben auch während des Stoßes starr.
- Während des Stoßes sind alle anderen Kräfte gegenüber den Stoßkräften vernachlässigbar.
- Die Kontaktpunkte und die Wirkungslinien ändern sich während des Stoßes nicht.
- Effekte durch Wellenausbreitung in den Körpern bleiben unberücksichtigt.

Trotz dieser Vereinfachungen können globale Aussagen über den Stoßvorgang gemacht werden [57, 61, 66]. Die verwendete Methode ist in der Lage, neben den konventionellen Stoßvorgängen (gerade, exzentrisch, reversibel, irreversibel) auch solche Effekte wie Stöße ohne Kollision, Reibstöße oder statische und dynamische Selbsthemmungseffekte zu berücksichtigen, wie sie im selbstbremsenden Getrieben auftreten.

5.1 Impulsbilanzgleichungen

Ausgehend von der Bewegungsgleichung 3.40 für alle geschlossenen Kontakte $j \in I_S$ mit $I_S = \{j \in I_G | g_{Nj} = 0\}$ gilt die Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h} - \mathbf{G}_N \cdot \boldsymbol{\lambda}_N - \mathbf{G}_T \cdot \boldsymbol{\lambda}_T = \mathbf{0}. \quad (5.1)$$

Es müssen alle geschlossenen Kontakte berücksichtigt werden, da der Stoß in einem Kontakt alle anderen Kontakte beeinflussen kann. Die Integration der Kontaktkräfte $\boldsymbol{\lambda}_N$ und $\boldsymbol{\lambda}_T$ in den Zeitbereichen $[t_A, t_C]$ und $[t_C, t_E]$ führt auf die Impulse

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{NC}} = \lim_{(t_C - t_A) \rightarrow 0} \int_{t_A}^{t_C} \boldsymbol{\lambda}_N dt \quad , \quad \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{TC}} = \lim_{(t_C - t_A) \rightarrow 0} \int_{t_A}^{t_C} \boldsymbol{\lambda}_T dt \quad (5.2)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{NE}} = \lim_{(t_E - t_C) \rightarrow 0} \int_{t_C}^{t_E} \boldsymbol{\lambda}_N dt \quad , \quad \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{TE}} = \lim_{(t_E - t_C) \rightarrow 0} \int_{t_C}^{t_E} \boldsymbol{\lambda}_T dt. \quad (5.3)$$

Allerdings hat die Integration über die beiden Zeitbereiche den Nachteil, daß Zustandswechsel während der Integrationsintervalle nicht erfasst werden können. Es kann nur festgestellt werden, welcher gemittelte Zustand am Ende der Phasen vorliegt. Mit den obigen

Voraussetzungen und den Grenzübergängen $\lim_{(t_C-t_A)\rightarrow 0}$ und $\lim_{(t_E-t_C)\rightarrow 0}$ ergeben sich die Impulsbilanzgleichungen durch Integration der Bewegungsgleichung 5.1 zu

$$\mathbf{M} \cdot (\dot{\mathbf{q}}_C - \dot{\mathbf{q}}_A) - \mathbf{G}_N \cdot \boldsymbol{\Lambda}_{NC} - \mathbf{G}_T \cdot \boldsymbol{\Lambda}_{TC} = \mathbf{0}, \quad (5.4)$$

$$\mathbf{M} \cdot (\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_C) - \mathbf{G}_N \cdot \boldsymbol{\Lambda}_{NE} - \mathbf{G}_T \cdot \boldsymbol{\Lambda}_{TE} = \mathbf{0}. \quad (5.5)$$

So wie der Stoßvorgang in die Kompressions- und Expansionsphase aufgeteilt ist, stellt man für die Kompressions- und Expansionsphase jeweils eine eigene Impulsbilanzgleichung auf. Im Kontakt j können die Relativverschiebungen in Minimalkoordinaten \mathbf{q} ausgedrückt werden

$$g_{Nj} = g_{Nj}(\mathbf{q}, t), \quad g_{Tj} = g_{Tj}(\mathbf{q}, t). \quad (5.6)$$

Die totalen Differentiale der Relativverschiebungen 5.6 in Abhängigkeit von den Minimalkoordinaten lauten

$$dg_{Nj} = \frac{\partial g_{Nj}}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial g_{Nj}}{\partial t} dt \Leftrightarrow \dot{g}_{Nj} = \frac{\partial g_{Nj}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial g_{Nj}}{\partial t}, \quad (5.7)$$

$$dg_{Tj} = \frac{\partial g_{Tj}}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial g_{Tj}}{\partial t} dt \Leftrightarrow \dot{g}_{Tj} = \frac{\partial g_{Tj}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial g_{Tj}}{\partial t}. \quad (5.8)$$

Unter Verwendung der Abkürzungen

$$\check{g}_{Nj} = \frac{\partial g_{Nj}}{\partial t} \quad \text{und} \quad \check{g}_{Tj} = \frac{\partial g_{Tj}}{\partial t} \quad (5.9)$$

lassen sich die Relativbeschleunigungen durch

$$\dot{g}_{Nj} = \nabla \mathbf{g}_{Nj}^T \dot{\mathbf{q}} + \check{g}_{Nj}, \quad \dot{g}_{Tj} = \nabla \mathbf{g}_{Tj}^T \dot{\mathbf{q}} + \check{g}_{Tj} \quad (5.10)$$

beschreiben. Die Gleichungen 5.10 können dann für alle Kontakte in den beiden Matrizen-gleichungen

$$\dot{\mathbf{g}}_N = \mathbf{G}_N^T \dot{\mathbf{q}} + \check{\mathbf{g}}_N, \quad \dot{\mathbf{g}}_T = \mathbf{G}_T^T \dot{\mathbf{q}} + \check{\mathbf{g}}_T \quad (5.11)$$

zusammengefasst werden. Für die Zeitpunkte t_A , t_C und t_E lauten die Relativgeschwindigkeiten 5.11

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{g}}_{NA} \\ \dot{\mathbf{g}}_{TA} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{G}_N^T \\ \mathbf{G}_T^T \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_A + \begin{pmatrix} \check{\mathbf{g}}_N \\ \check{\mathbf{g}}_T \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{g}}_{NC} \\ \dot{\mathbf{g}}_{TC} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{G}_N^T \\ \mathbf{G}_T^T \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_C + \begin{pmatrix} \check{\mathbf{g}}_N \\ \check{\mathbf{g}}_T \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{g}}_{NE} \\ \dot{\mathbf{g}}_{TE} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{G}_N^T \\ \mathbf{G}_T^T \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_E + \begin{pmatrix} \check{\mathbf{g}}_N \\ \check{\mathbf{g}}_T \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Mit den Gleichungssätzen 5.4 bzw. 5.5 und 5.12 liegen halb so viele Gleichungen wie Unbekannte vor. Die Stoßgesetze der Kompressions- und Expansionsphase liefern die fehlenden Gleichungen.

5.2 Das Stoßgesetz der Kompressionsphase

Die Kontakte stellen nach Kapitel 3 unilaterale Bindungen dar, die durch die Komplementaritätsbedingungen 3.56 auf Kraft-/Beschleunigungsebene beschrieben werden können. Während des Stoßes stehen die beiden Stoßpartner genauso in Kontakt, so daß sich auch hierfür komplementäre Gleichungen finden lassen. Die Formulierung erfolgt allerdings auf Impulsebene. Es werden analog zu Kapitel 3 die Normalen- und Tangentialrichtung getrennt behandelt. Die Integration der Komplementaritätsbedingung in Normalenrichtung nach Gleichung 3.56

$$\ddot{\mathbf{g}}_N \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \boldsymbol{\lambda}_N \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \ddot{\mathbf{g}}_N^T \boldsymbol{\lambda}_N = 0$$

führt auf die Komplementaritätsbedingung der Kompressionsphase auf Impulsebene

$$\dot{\mathbf{g}}_{NC} \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \boldsymbol{\Lambda}_{NC} \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \dot{\mathbf{g}}_{NC}^T \boldsymbol{\Lambda}_{NC} = 0. \quad (5.13)$$

Das Stoßgesetz 5.13 sagt aus, daß am Ende der Kompressionsphase die Stoßkontakte in Normalenrichtung sich wegen $\dot{g}_{Nj} = 0$ nicht mehr entgegengesetzt bewegen und dabei einen Druckimpuls $\Lambda_{Nj} > 0$ austauschen, bzw. grade öffnende Kontakte mit $\dot{g}_{Nj} \geq 0$ wegen $\Lambda_{Nj} = 0$ keinen Normalenimpuls übertragen. Die Geschwindigkeit \dot{g}_{Nj} und der Normalenimpuls Λ_{Nj} schließen sich gegenseitig aus, d.h. es gilt $\dot{g}_{Nj} \Lambda_{Nj} = 0$. Für das tangential Stoßgesetz kann nach Pfeiffer [61] ein dem Coulombschen Reibgesetz 3.47 entsprechendes dissipatives Reibstoßgesetz auf Impulsebene angegeben werden.

$$\begin{aligned} \Lambda_{TCj} = -\mu_j \Lambda_{NCj} &\Rightarrow \dot{g}_{TCj} > 0 \\ |\Lambda_{TCj}| \leq \mu_j \Lambda_{NCj} &\Rightarrow \dot{g}_{TCj} = 0 \\ \Lambda_{TCj} = \mu_j \Lambda_{NCj} &\Rightarrow \dot{g}_{TCj} < 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Man erhält *Gleiten* mit $\dot{g}_{TCj} \leq 0$ bzw. $\dot{g}_{TCj} \geq 0$ am Ende der Kompressionsphase, wenn der tangentiale Reibimpuls Λ_{TCj} dem Integral der während der gesamten Kompressionsphase wirkenden tangentialen Gleitreibkräfte $\lambda_{Tj} = \mu_j \lambda_{Nj}$ bzw. $\lambda_{Tj} = -\mu_j \lambda_{Nj}$ entspricht. Andernfalls ist der tangentiale Reibimpuls kleiner als $\mu_j \Lambda_{NCj}$ und es tritt *Haften* mit $\dot{g}_{TCj} = 0$ ein. Die Abbildung 5.2 zeigt die beiden Kennlinien des Stoßgesetzes nach Gleichung 5.13 und 5.14 für die Kompressionsphase. Im linken Bild 5.2 sind für den Punkt A

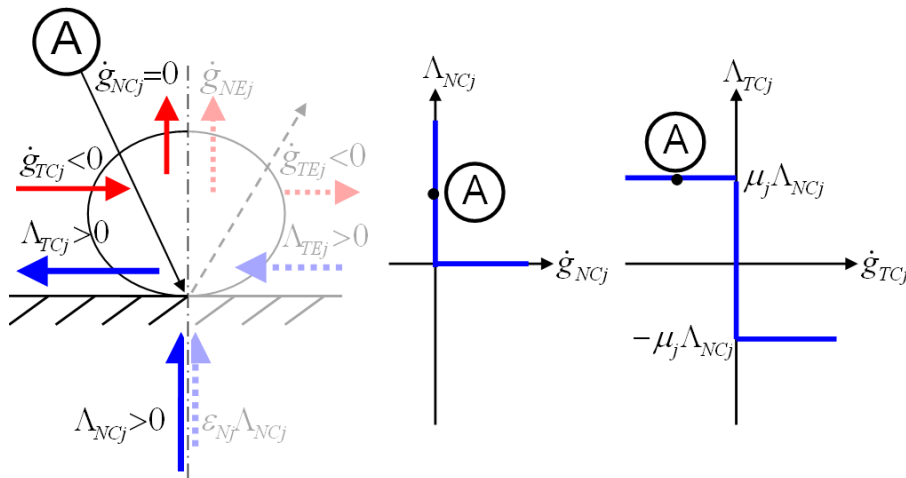


Abbildung 5.2: Links: Impulse und Relativgeschwindigkeiten am Punkt A; Mitte/Rechts: Kompressionsstoßgesetz

des Stoßgesetzes die Richtungen der Impulse und Geschwindigkeiten am Ende der Kompressionsphase an einem Kontaktpunkt dargestellt. Der Reibimpuls wirkt entgegen der tangentialen Geschwindigkeit. Der Punkt A beschreibt den Fall des Gleiten, so daß wegen $\dot{g}_{TCj}\Lambda_{TCj} < 0$ Energie dissipiert wird.

5.3 Das Stoßgesetz der Expansionsphase

Ist die Kompressionsphase beendet, so gelten die Ergebnisse am Ende der Kompressionsphase als Startgrößen für die Expansionsphase. Die Kompressionsphase liefert die Impulse Λ_{NC} und Λ_{TC} , die Relativgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{g}}_{NC}$ und $\dot{\mathbf{g}}_{TC}$, sowie die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}_C$ der Minimalkoordinaten. Das Ergebnis der Kompressionsphase bestimmt dann die Kennlinien der Expansionsphase. Das Stoßgesetz der Expansionsphase für die Normalenrichtung unterscheidet sich etwas von dem der Kompressionsphase. Nach Poisson berechnet sich der Expansionsimpuls in Normalenrichtung Λ_{NEj} aus dem Kompressionsimpuls in Normalenrichtung Λ_{NC} , welcher mit einem Restitutionskoeffizienten $0 \leq \epsilon_{Nj} \leq 1$ verringert wird, so daß für den Impuls $\Lambda_{NEj} = \epsilon_{Nj}\Lambda_{NCj}$ gilt. Aufgrund des Zusammenwirkens mehrerer, sich beeinflussender Kontakte kann der Poissonimpuls des Kontakte $j \in I_S$ eventuell nicht ausreichen, um ein Eindringen der Körper zu verhindern, so daß ein größerer Impuls zum Erreichen von wenigstens $\dot{\mathbf{g}}_{NEj} = 0$ erforderlich ist. Damit lautet das Stoßgesetz der Expansionsphase in Normalenrichtung

$$\dot{\mathbf{g}}_{NE} \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad (\Lambda_{NE} - \epsilon_N \Lambda_{NC}) \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \dot{\mathbf{g}}_{NE}^T (\Lambda_{NE} - \epsilon_N \Lambda_{NC}) = 0. \quad (5.15)$$

Das tangentiale Stoßgesetz der Expansionsphase unterscheidet sich insoweit vom Stoßgesetz der Kompressionsphase, als daß es die Art des Stoßes festlegt. Die Modellierung der Expansionskennlinie über entsprechende tangentiale Stoßparameter bestimmt, ob symmetrische oder unsymmetrische Stöße, wie reversible Stöße, möglich sind. Eine unsymmetrische Kennlinie wie in Abbildung 5.3, deren linker Ast in die rechte Hälfte verschoben

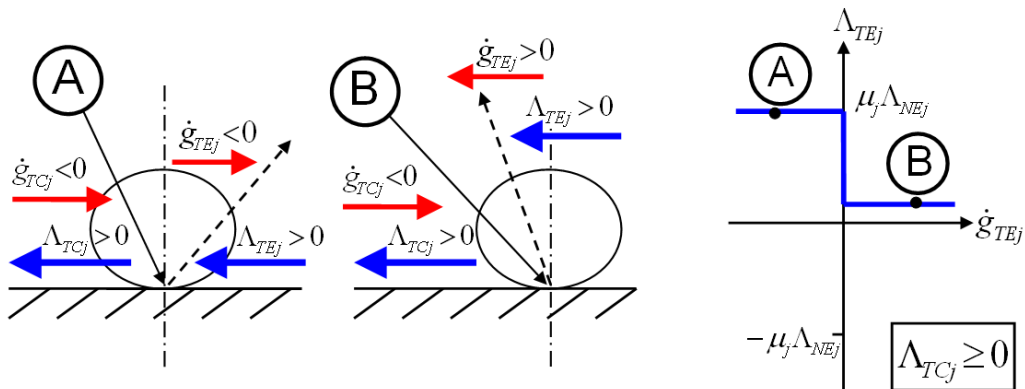


Abbildung 5.3: Links: unsymmetrischer Stoß; Mitte: reversible Stoß; Rechts: tangentiales Reibstoßgesetz der Expansionsphase für reversible Stöße

ist, beschreibt einen reversiblen Stoß. Führt die Lösung zum Punkt A der Kennlinie, so liegt der nichtreversible Stoß im linken Teil der Abbildung 5.3 vor. Liefert die Lösung den Punkt B, kommt es beim reversiblen Stoß zu einer Richtungsumkehr in tangentialer Richtung, wie es das mittlere Bild in Abbildung 5.3 andeutet. Eine symmetrische Kennlinie

für das Reibstoßgesetz der Expansionsphase ist völlig ausreichend, um die Verhältnisse bei trockener Reibung abzubilden. Es gilt für das symmetrische Stoßgesetz

$$\begin{aligned}\Lambda_{TEj} = -\mu_j \Lambda_{NEj} &\Rightarrow \dot{g}_{TEj} > 0 \\ |\Lambda_{TEj}| \leq \mu_j \Lambda_{NEj} &\Rightarrow \dot{g}_{TEj} = 0 \\ \Lambda_{TEj} = \mu_j \Lambda_{NEj} &\Rightarrow \dot{g}_{TEj} < 0.\end{aligned}\tag{5.16}$$

Die im weiteren verwendeten Kennlinien für die Expansionsphase nach Gleichung 5.15 und 5.16 sind in der Abbildung 5.4 dargestellt.

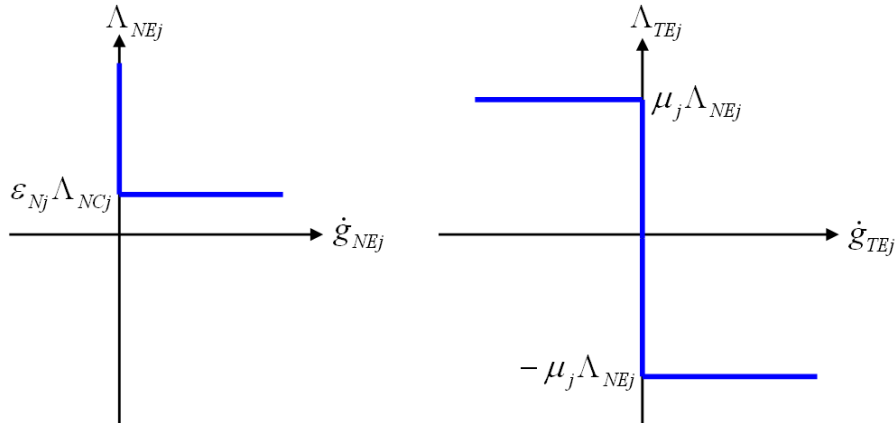


Abbildung 5.4: Links: Expansionsstoßgesetz für die Normalenrichtung; Rechts: symmetrisches tangenciales Reibstoßgesetz für trockene Reibung

5.4 Das Stoßproblem als lineares Komplementaritätsproblem (LCP)

Mit den Impulsbilanzgleichungen 5.4 bzw. 5.5, den Relativgeschwindigkeiten 5.12, dem Kompressionsstoßgesetz 5.13 und 5.14 bzw. dem Expansionsstoßgesetz 5.15 und 5.16 liegen alle notwendigen Gleichungen vor, um die beiden Teilstoßprobleme als lineare Komplementaritätsprobleme zu formulieren.

5.4.1 LCP der Kompressionsphase

Im ersten Schritt muß das tangenciales Reibstoßgesetz der Kompressionsphase wieder in komplementäre Teilbeziehungen zerlegt werden, so wie es in der Darstellung 5.18 zu sehen ist. Die Zerlegung baut auf der Beziehung

$$\Lambda_{TC} = \Lambda_{TC}^{(+)} - \Lambda_{TC}^{(-)}\tag{5.17}$$

auf und entspricht der bekannten Zerlegung aus Abschnitt 3.3. Es müssen in den Gleichungen 3.56 nur die Kräfte durch die Impulse und die Beschleunigungen durch die Geschwindigkeiten ersetzt werden

5.4 Das Stoßproblem als lineares Komplementaritätsproblem (LCP)

$$\begin{aligned}
 & \dot{\mathbf{g}}_{NC} \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \Lambda_{NC} \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \dot{\mathbf{g}}_{NC}^T \Lambda_{NC} = 0 \\
 -\dot{\mathbf{g}}_{TC} &= -\dot{\mathbf{g}}_{TC}^+ + \mathbf{z}_C^- \quad \wedge \quad \dot{\mathbf{g}}_{TC}^+ \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \Lambda_{TC}^{(+)} \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \dot{\mathbf{g}}_{TC}^{+T} \Lambda_{TC}^{(+)} = 0 \\
 \Lambda_{T0C}^{(-)} &= \mu_S \Lambda_{NC} - \Lambda_{TC}^{(+)} \quad \wedge \quad \mathbf{z}_C^- \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \Lambda_{T0C}^{(-)} \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \mathbf{z}_C^{-T} \Lambda_{T0C}^{(-)} = 0 \\
 +\dot{\mathbf{g}}_{TC} &= -\dot{\mathbf{g}}_{TC}^- + \mathbf{z}_C^+ \quad \wedge \quad \dot{\mathbf{g}}_{TC}^- \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \Lambda_{TC}^{(-)} \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \dot{\mathbf{g}}_{TC}^{-T} \Lambda_{TC}^{(-)} = 0 \\
 \Lambda_{T0C}^{(+)} &= \mu_S \Lambda_{NC} - \Lambda_{TC}^{(-)} \quad \wedge \quad \mathbf{z}_C^+ \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \Lambda_{T0C}^{(+)} \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \mathbf{z}_C^{+T} \Lambda_{T0C}^{(+)} = 0.
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

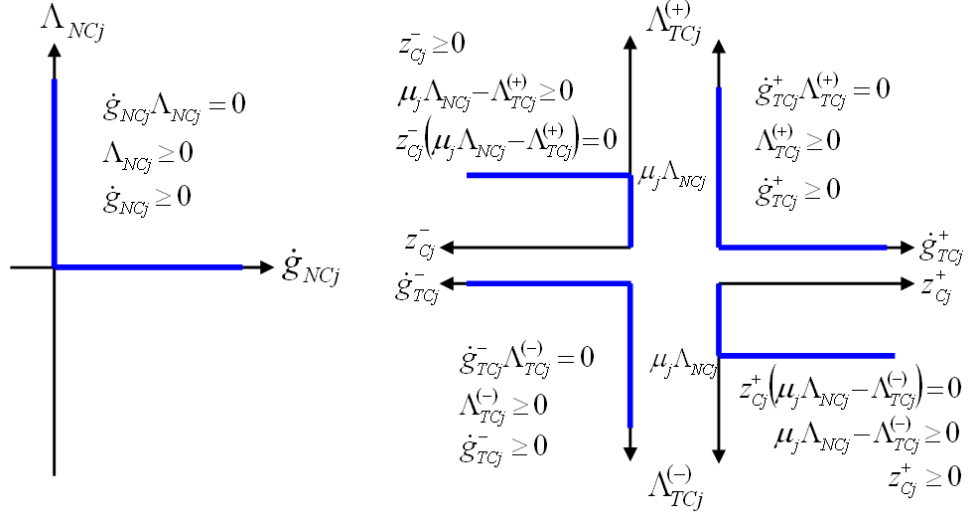


Abbildung 5.5: Links: Kompressionsstoßgesetz für die Normalenrichtung; Rechts: Zerlegung des symmetrischen tangentialen Reibstoßgesetz

Unter Berücksichtigung der Impulszerlegung 5.17 in der Impulsbilanzgleichung 5.4, der Differenz aus den Relativgeschwindigkeiten 5.12 der Zeitpunkte t_A und t_C erhält man die bestimmenden Gleichungen der Kompressionsphase

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}_C - \dot{\mathbf{q}}_A) - [\mathbf{G}_N \quad \mathbf{G}_T \quad -\mathbf{G}_T] \begin{pmatrix} \Lambda_{NC} \\ \Lambda_{TC}^{(+)} \\ \Lambda_{TC}^{(-)} \end{pmatrix} &= \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} \Lambda_{T0C}^{(-)} \\ \Lambda_{T0C}^{(+)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_S & -\mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mu_S & \mathbf{0} & -\mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{NC} \\ \Lambda_{TC}^{(+)} \\ \Lambda_{TC}^{(-)} \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{g}}_{NC} \\ \dot{\mathbf{g}}_{TC}^+ \\ \dot{\mathbf{g}}_{TC}^- \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{G}_N^T \\ +\mathbf{G}_T^T \\ -\mathbf{G}_T^T \end{pmatrix} (\dot{\mathbf{q}}_C - \dot{\mathbf{q}}_A) + \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{g}}_{NA} \\ +\dot{\mathbf{g}}_{TA} \\ -\dot{\mathbf{g}}_{TA} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_C^- \\ \mathbf{z}_C^+ \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Elimination der Minimalkoordinaten in 5.19 und eine geeignete Umstellung der Gleichungen 5.18 und 5.19 liefert das gesuchte lineare Komplementaritätsproblem

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{g}}_{NC} \\ \dot{\mathbf{g}}_{TC}^+ \\ \dot{\mathbf{g}}_{TC}^- \\ \Lambda_{T0C}^{(-)} \\ \Lambda_{T0C}^{(+)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{G}_N^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_N & \mathbf{G}_N^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_T & -\mathbf{G}_N^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_T^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_N & \mathbf{G}_T^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_T & -\mathbf{G}_T^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_T & \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{G}_T^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_N & -\mathbf{G}_T^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_T & \mathbf{G}_T^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_T & \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \mu_S & -\mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mu_S & \mathbf{0} & -\mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{NC} \\ \Lambda_{TC}^{(+)} \\ \Lambda_{TC}^{(-)} \\ \mathbf{z}_C^- \\ \mathbf{z}_C^+ \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{g}}_{NA} \\ \dot{\mathbf{g}}_{TA} \\ -\dot{\mathbf{g}}_{TA} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{g}}_{NC} \\ \dot{\mathbf{g}}_{TC}^+ \\ \dot{\mathbf{g}}_{TC}^- \\ \Lambda_{T0C}^{(-)} \\ \Lambda_{T0C}^{(+)} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} \Lambda_{NC} \\ \Lambda_{TC}^{(+)} \\ \Lambda_{TC}^{(-)} \\ \mathbf{z}_C^- \\ \mathbf{z}_C^+ \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{g}}_{NC} \\ \dot{\mathbf{g}}_{TC}^+ \\ \dot{\mathbf{g}}_{TC}^- \\ \Lambda_{T0C}^{(-)} \\ \Lambda_{T0C}^{(+)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Lambda_{NC} \\ \Lambda_{TC}^{(+)} \\ \Lambda_{TC}^{(-)} \\ \mathbf{z}_C^- \\ \mathbf{z}_C^+ \end{pmatrix} &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

5.4.2 LCP der Expansionsphase

Auch wenn die tangentialen Stoßgesetze der Kompressionsphase 5.14 und der Expansionsphase 5.16 von gleicher Form sind, unterscheiden sich beide im Stoßgesetz für die Normalenrichtung. Der verschobene Ast der Kennlinie in Abbildung 5.4 läßt eine direkte Umformung der Gleichungen des Expansionsstoßes in ein äquivalentes LCP nicht zu. Zuvor ist eine Transformation auf neue Impulsvariablen notwendig. Die Transformation

$$\begin{aligned}\Lambda_{NP} &= \Lambda_{NE} - \epsilon_N \Lambda_{NC} \\ \Lambda_{TP} &= \Lambda_{TE} - \epsilon_N \Lambda_{TC}\end{aligned}\quad (5.21)$$

führt mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}\Lambda_P^{(+)} &= \mu_S (\Lambda_{NP} + \epsilon_N \Lambda_{NC}) - \epsilon_N \Lambda_{TC} \\ -\Lambda_P^{(-)} &= -\mu_S (\Lambda_{NP} + \epsilon_N \Lambda_{NC}) - \epsilon_N \Lambda_{TC}\end{aligned}\quad (5.22)$$

zum transformierten Stoßgesetz der Expansionsphase

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{g}}_{NE} \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \Lambda_{NP} \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \dot{\mathbf{g}}_{NE}^T \Lambda_{NP} = 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} \Lambda_{TPj} = \Lambda_{Pj}^{(-)} \quad \Rightarrow \quad \dot{g}_{TEj} > 0 \\ -\Lambda_{Pj}^{(-)} \leq \Lambda_{TPj} \leq \Lambda_{Pj}^{(+)} \quad \Rightarrow \quad \dot{g}_{TEj} = 0 \\ \Lambda_{TPj} = \Lambda_{Pj}^{(+)} \quad \Rightarrow \quad \dot{g}_{TEj} < 0 \end{array} \right\}.\end{aligned}\quad (5.23)$$

Die Matrix der Reibwerte μ_S und die Matrix der Stoßwerte ϵ_N sind Diagonalmatrizen. Die LCP-gerechte Zerlegung des Stoßgesetzes 5.23 kann der Abbildung 5.6 entnommen werden. Die Zerlegung nach Abbildung 5.6 führt mit

$$\Lambda_{TP} = \Lambda_{TP}^{(+)} - \Lambda_{TP}^{(-)} \quad (5.24)$$

auf die Gleichungen des Stoßgesetzes, die eine Formulierung des Expansionsproblem als LCP erlaubt

$$\begin{aligned}-\dot{\mathbf{g}}_{TE} &= -\dot{\mathbf{g}}_{TE}^+ + \mathbf{z}_E^- \quad \wedge \quad \dot{\mathbf{g}}_{TE}^+ \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \Lambda_{TP}^{(+)} \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \dot{\mathbf{g}}_{TE}^{+T} \Lambda_{TP}^{(+)} = 0 \\ \Lambda_{T0P}^{(-)} &= \Lambda_P^{(+)} - \Lambda_{TP}^{(+)} \quad \wedge \quad \mathbf{z}_E^- \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \Lambda_{T0P}^{(-)} \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \mathbf{z}_E^{-T} \Lambda_{T0P}^{(-)} = 0 \\ +\dot{\mathbf{g}}_{TE} &= -\dot{\mathbf{g}}_{TE}^- + \mathbf{z}_E^+ \quad \wedge \quad \dot{\mathbf{g}}_{TE}^- \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \Lambda_{TP}^{(-)} \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \dot{\mathbf{g}}_{TE}^{-T} \Lambda_{TP}^{(-)} = 0 \\ \Lambda_{T0P}^{(+)} &= \Lambda_P^{(-)} - \Lambda_{TP}^{(-)} \quad \wedge \quad \mathbf{z}_E^+ \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \Lambda_{T0P}^{(+)} \geq \mathbf{0} \quad \wedge \quad \mathbf{z}_E^{+T} \Lambda_{T0P}^{(+)} = 0.\end{aligned}\quad (5.25)$$

Das Einsetzen der Transformationsgleichungen 5.21 in die Impulsbilanzgleichung 5.5, die Bildung der Differenz der Relativgeschwindigkeiten nach Gleichung 5.12 zu den Zeitpunkten t_C und t_E und Berücksichtigung der Gleichungen aus dem Stoßgesetz 5.25 liefert die bestimmenden Gleichungen der Expansionsphase

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_C) - [\mathbf{G}_N \quad \mathbf{G}_T - \mathbf{G}_T] \begin{pmatrix} \Lambda_{NP} \\ \Lambda_{TP}^{(+)} \\ \Lambda_{TP}^{(-)} \end{pmatrix} - [\mathbf{G}_N \quad \mathbf{G}_T] \begin{pmatrix} \epsilon_N \Lambda_{NC} \\ \epsilon_N \Lambda_{TC} \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} \Lambda_{T0P}^{(-)} \\ \Lambda_{T0P}^{(+)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_S & -\mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mu_S & \mathbf{0} & -\mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{NP} \\ \Lambda_{TP}^{(+)} \\ \Lambda_{TP}^{(-)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_S & -\mathbf{E} \\ \mu_S & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_N \Lambda_{NC} \\ \epsilon_N \Lambda_{TC} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{g}}_{NE} \\ \dot{\mathbf{g}}_{TE}^+ \\ \dot{\mathbf{g}}_{TE}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_N^T \\ +\mathbf{G}_T^T \\ -\mathbf{G}_T^T \end{pmatrix} (\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_C) + \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{g}}_{NC} \\ +\dot{\mathbf{g}}_{TC} \\ -\dot{\mathbf{g}}_{TC} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_E^- \\ \mathbf{z}_E^+ \\ \mathbf{z}_E^- \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (5.26)$$

5.4 Das Stoßproblem als lineares Komplementaritätsproblem (LCP)

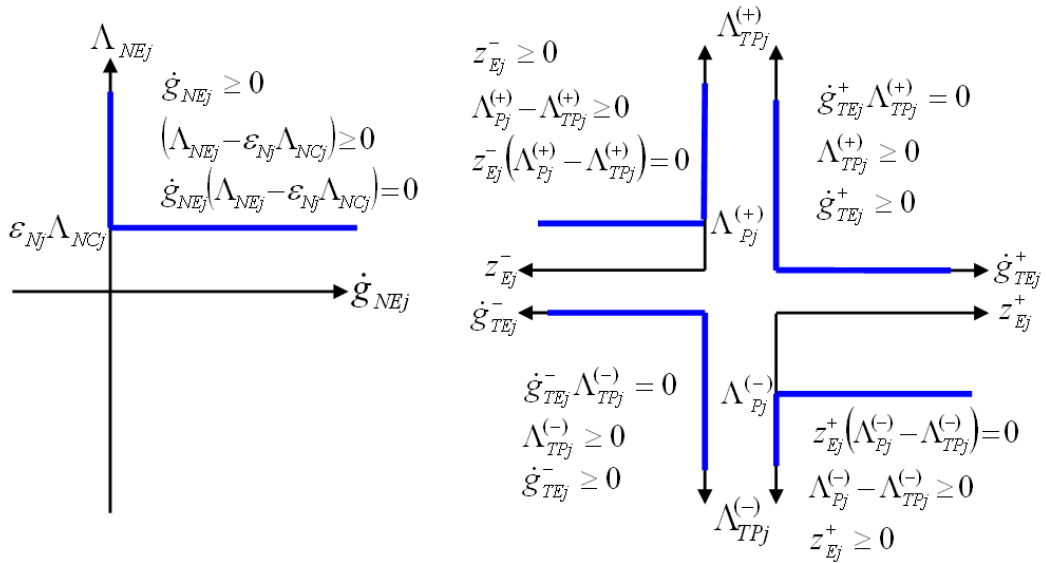


Abbildung 5.6: Links: Expansionsstoßgesetz für die Normalenrichtung; Rechts: Zerlegung des symmetrischen tangentialen Reibstoßgesetz

Nach der Elimination der Minimalkoordinaten im Gleichungssatz 5.26 findet man letztendlich zusammen mit dem Expansionsstoßgesetz 5.25 das lineare Komplementaritätsproblem der Expansionsphase

$$\begin{pmatrix} \dot{g}_{NE} \\ \dot{g}_{TE}^+ \\ \dot{g}_{TE}^- \\ \Lambda_{TOP}^{(-)} \\ \Lambda_{TOP}^{(+)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{G}_N^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_N & \mathbf{G}_N^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_T & -\mathbf{G}_N^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_T^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_N & \mathbf{G}_T^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_T & -\mathbf{G}_T^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_T & \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{G}_T^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_N & -\mathbf{G}_T^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_T & \mathbf{G}_T^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_T & \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \boldsymbol{\mu}_S & -\mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\mu}_S & \mathbf{0} & -\mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{NP} \\ \Lambda_{TP}^{(+)} \\ \Lambda_{TP}^{(-)} \\ \mathbf{z}_E^- \\ \mathbf{z}_E^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{g}_{NC} \\ \dot{g}_{TC} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \dots \\
 \dots + \begin{pmatrix} \mathbf{G}_N^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_N & \mathbf{G}_N^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_T \\ \mathbf{G}_T^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_N & \mathbf{G}_T^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_T \\ -\mathbf{G}_T^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_N & -\mathbf{G}_T^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_T \\ \boldsymbol{\mu}_S & -\mathbf{E} \\ \boldsymbol{\mu}_S & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_N \Lambda_{NC} \\ \epsilon_N \Lambda_{TC} \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} \dot{g}_{NE} \\ \dot{g}_{TE}^+ \\ \dot{g}_{TE}^- \\ \Lambda_{TOP}^{(-)} \\ \Lambda_{TOP}^{(+)} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} \Lambda_{NP} \\ \Lambda_{TP}^{(+)} \\ \Lambda_{TP}^{(-)} \\ \mathbf{z}_E^- \\ \mathbf{z}_E^+ \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} \dot{g}_{NE} \\ \dot{g}_{TE}^+ \\ \dot{g}_{TE}^- \\ \Lambda_{TOP}^{(-)} \\ \Lambda_{TOP}^{(+)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Lambda_{NP} \\ \Lambda_{TP}^{(+)} \\ \Lambda_{TP}^{(-)} \\ \mathbf{z}_E^- \\ \mathbf{z}_E^+ \end{pmatrix} = 0. \quad (5.27)$$

Im Unterschied zum LCP der Kompressionsphase 5.20 enthält das LCP der Expansionsphase 5.27 auf der rechten Seite einen zusätzlichen Term, der die Impulse der Kompressionsphase beinhaltet. Der Term ist dafür verantwortlich, daß in der Expansionsphase die abgebremsten Körper wieder beschleunigt werden und ablösen können, wenn es die Stoßzahlen ϵ_N zulassen. Wenn $\mu > 0$ gilt, ist beim Reibstoß der Einfallswinkel nicht unbedingt gleich dem Ausfallswinkel!

Bei inelastischen, d.h. vollplastischen Stößen sind die Stoßzahlen ϵ_N gleich Null. Dann entfällt in Gleichung 5.27 der zusätzliche Term auf der rechten Seite. Haften beispielsweise bei einem Einkontaktproblem zwei Kontaktpartner nach einem inelastischen Stoß am Ende der Kompressionsphase, so sind die normale und tangentielle Relativgeschwindigkeit gleich Null. Dann ist die rechte Seite komplett Null und das lineare Komplementaritätsproblem der Expansionsphase hat die triviale Lösung als Ergebnis. Die beiden Körper verbleiben demnach auch am Ende der Expansionsphase in dem Zustand, den sie am Ende der Kompressionsphase eingenommen haben, weil fehlende Impulse in der Expansionsphase den Zustand nicht ändern können.

6 Stoßzustandsübergänge am selbstbremsenden Keilgetriebe

Damit ein Stoß überhaupt auftreten kann, müssen die Geschwindigkeiten \dot{y}_1 und \dot{x}_2 kurz vor dem Stoß entsprechend gerichtet und von bestimmter Größe sein. Von Interesse ist der Fall des Senkbetriebes, wo sich der Keil m_2 wie in Abbildung 6.1 nach rechts herausbewegt, also $\dot{x}_2 > 0$, und der Körper m_1 sich nach unten bewegt, d.h., $\dot{y}_1 < 0$. Zur einfacheren

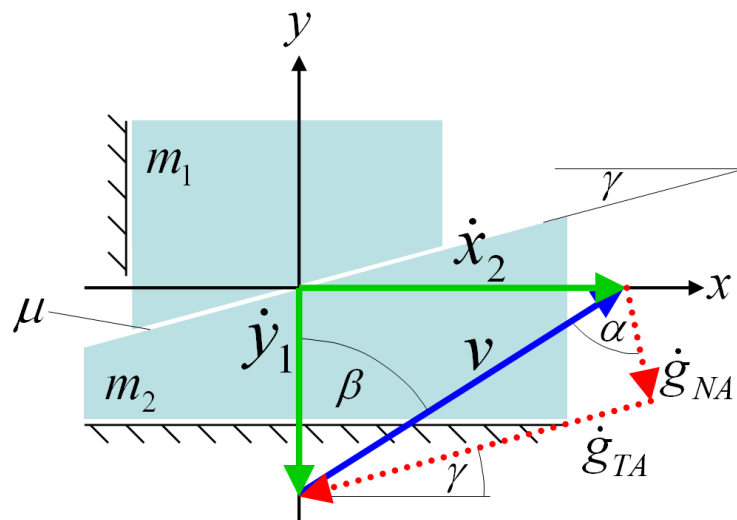


Abbildung 6.1: Geschwindigkeiten der beiden Körper 1 und 2 am Stossbeginn

Handhabung werden \dot{x}_2 und \dot{y}_1 durch die Geschwindigkeit v und den Winkel β ersetzt

$$\dot{x}_2 = v \cdot \sin \beta, \quad \dot{y}_1 = -v \cdot \cos \beta. \quad (6.1)$$

Daraus ergeben sich mit den Gleichungen 4.5 und der Winkelsumme $\alpha = \beta + \gamma$ die Relativgeschwindigkeiten

$$\dot{g}_{NA} = \dot{y}_1 \cos \gamma + \dot{x}_2 \sin \gamma = -v \cdot \cos(\beta + \gamma) \Leftrightarrow \dot{g}_{NA} = -v \cdot \cos(\alpha), \quad (6.2)$$

$$\dot{g}_{TA} = \dot{y}_1 \sin \gamma - \dot{x}_2 \cos \gamma = -v \cdot \sin(\beta + \gamma) \Leftrightarrow \dot{g}_{TA} = -v \cdot \sin(\alpha). \quad (6.3)$$

als Anfangsgeschwindigkeiten für den Stoß. Der Senkbetrieb ist nur möglich innerhalb des Winkelbereichs

$$-\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \quad (6.4)$$

weshalb die folgende Untersuchung auf diesen Bereich beschränkt sei. Der Winkelbereich $-\pi < \alpha \leq -\frac{\pi}{4}$ beinhaltet den unkritischen Hubbetrieb des Keilgetriebes und bedarf keiner Untersuchung. Es gelten natürlich wieder die Ratterbedingungen nach Gleichung 4.2 als Voraussetzungen für den Ratterbetrieb. Zuerst ist das Kompressionsproblem zu lösen. Anschließend kann mit der Lösung der Kompressionsphase das Expansionsproblem gelöst werden.

6.1 Stoßzustände am Ende der Kompressionsphase

6.1.1 Lineares Komplementaritätsproblem

Das lineare Komplementaritätsproblem der Kompressionsphase nach Gleichung 5.20 nimmt mit den Gleichungen 4.8, 6.2 und 6.3 die Form

$$\begin{pmatrix} m_1 \dot{g}_{NC} \\ m_1 \dot{g}_{TC}^+ \\ m_1 \dot{g}_{TC}^- \\ \Lambda_{TOC}^{(-)} \\ \Lambda_{TOC}^{(+)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_2} & -\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2} & \frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2} & 0 & 0 \\ -\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2} & \frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2} & -\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2} & 1 & 0 \\ \frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2} & -\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2} & \frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2} & 0 & 1 \\ \mu & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{NC} \\ \Lambda_{TC}^{(+)} \\ \Lambda_{TC}^{(-)} \\ m_1 z_C^- \\ m_1 z_C^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -vm_1 \cos \alpha \\ -vm_1 \sin \alpha \\ vm_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{g}_{NC} \\ \dot{g}_{TC}^+ \\ \dot{g}_{TC}^- \\ \Lambda_{TOC}^{(-)} \\ \Lambda_{TOC}^{(+)} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} \Lambda_{NC} \\ \Lambda_{TC}^{(+)} \\ \Lambda_{TC}^{(-)} \\ z_C^- \\ z_C^+ \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} \dot{g}_{NC} \\ \dot{g}_{TC}^+ \\ \dot{g}_{TC}^- \\ \Lambda_{TOC}^{(-)} \\ \Lambda_{TOC}^{(+)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Lambda_{NC} \\ \Lambda_{TC}^{(+)} \\ \Lambda_{TC}^{(-)} \\ z_C^- \\ z_C^+ \end{pmatrix} = 0. \quad (6.5)$$

an. Zur analytischen Lösung des Problems 6.5 eignet sich der Lemke-Algorithmus aus Anhang B.

6.1.2 Analytische Berechnung des LCP

Die analytische Berechnung des LCP 6.5 mit dem Verfahren von Lenke beginnt mit dem Starttableau, in welchem die zusätzliche Spalte z_0 eingefügt wird.

Starttableau (1. Stufe):

$m_1 \dot{g}_{NC}$	$m_1 \dot{g}_{TC}^+$	$m_1 \dot{g}_{TC}^-$	$\Lambda_{TOC}^{(-)}$	$\Lambda_{TOC}^{(+)}$	Λ_{NC}	$\Lambda_{TC}^{(+)}$	$\Lambda_{TC}^{(-)}$	$m_1 z_C^-$	$m_1 z_C^+$	z_0^*	
(1)	0	0	0	0	$-\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_2}$	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	0	0	-1	$-vm_1 \cos \alpha$
0	(1)	0	0	0	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$-\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	$\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	-1	0	-1	$-vm_1 \sin \alpha$
0	0	(1)	0	0	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	$-\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	0	-1	-1	$vm_1 \sin \alpha$
0	0	0	(1)	0	$-\mu$	1	0	0	0	-1	0
0	0	0	0	(1)	$-\mu$	0	1	0	0	-1	0

(6.6)

Die triviale Lösung ist nicht möglich. Es gibt kein α , welches im Starttableau eine *positive rechte Seite* erzeugt. Zum Auffinden von Lösungen des LCP 6.6 wird deshalb das Lemke-Verfahren angewendet. Im Starttableau wird das erste Pivotelement in der z_0 -Spalte gesucht. Die Pivotzeile ist die Zeile mit der negativsten rechten Seite.

Auswahl der Pivotzeile im Starttableau (1. Stufe):

Die 1. Zeile hat die negativste rechte Seite, wenn: $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4} \Rightarrow$ Fall 1

Die 2. Zeile hat die negativste rechte Seite, wenn: $\frac{\pi}{4} < \alpha < \pi \Rightarrow$ Fall 2

Die 3. Zeile hat die negativste rechte Seite, wenn: $-\frac{\pi}{2} < \alpha < -\frac{\pi}{4} \Rightarrow$ {Fall 3}

Fall 1 (2. Stufe): $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4}$

$m_1 \dot{g}_{NC}$	$m_1 \dot{g}_{TC}^+$	$m_1 \dot{g}_{TC}^-$	$\Lambda_{TOC}^{(+)}$	Λ_{NC}^*	$\Lambda_{TC}^{(+)}$	$\Lambda_{TC}^{(-)}$	$m_1 z_C^-$	$m_1 z_C^+$	z_0
-1	0	0	0	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{M_1}$	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	0	0	(1)
-1	(1)	0	0	$\frac{m_2}{M_2}$	$-\frac{m_2}{m_2}$	$\frac{m_2}{m_2}$	-1	0	0
-1	0	(1)	0	$\frac{m_2}{M_3}$	$\frac{m_2}{m_2}$	$-\frac{M_4}{m_2}$	0	-1	0
-1	0	0	(1)	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{m_2}$	$\frac{m_2 - sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	0	0	0
-1	0	0	(1)	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{m_2}$	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$\frac{m_2 + sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	0	0	0

Auswahl der Pivotzeile im Tableau Fall 1 (2. Stufe):

	positiver Koeffizient?	positiv, wenn	kleinster positiver Quotient
1. Zeile:	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_2} > 0 \Rightarrow$	$gilt\ immer!$	$\frac{v m_1 m_2 \cos \alpha}{m_1 s^2 + m_2 c^2} > 0$
2. Zeile:	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 + sc(m_1 - m_2)}{m_2} > 0 \Rightarrow$	$gilt\ immer!$	$\frac{v m_1 m_2 (\cos \alpha - \sin \alpha)}{m_1 s^2 + m_2 c^2 + sc(m_1 - m_2)} > 0$
3. Zeile:	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - sc(m_1 - m_2)}{m_2} > 0 \Leftrightarrow$	$\mu > \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2)} > 1 \Rightarrow$	$\frac{v m_1 m_2 (\cos \alpha + \sin \alpha)}{m_1 s^2 + m_2 c^2 - sc(m_1 - m_2)} > 0$
4./5. Zeile:	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{m_2} > 0 \Leftrightarrow$	$\mu < \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_2} \Rightarrow$	$\frac{v m_1 m_2 \cos \alpha}{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2} > 0$

Vergleich der Zeilen:

1. Zeile \wedge 4./5. Zeile:	$\frac{v m_1 m_2 \cos \alpha}{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2} > \frac{v m_1 m_2 \cos \alpha}{m_1 s^2 + m_2 c^2}$	$\Leftrightarrow \mu > 0 \checkmark$
2. Zeile \wedge 3. Zeile:	$\frac{v m_1 m_2 (\cos \alpha + \sin \alpha)}{m_1 s^2 + m_2 c^2 - sc(m_1 - m_2)} > \frac{v m_1 m_2 (\cos \alpha - \sin \alpha)}{m_1 s^2 + m_2 c^2 + sc(m_1 - m_2)}$	$\Leftrightarrow 2 [sc(m_1 - m_2) \cos \alpha + (m_1 s^2 + m_2 c^2) \sin \alpha] > 0 \checkmark$
1. Zeile \wedge 2. Zeile:	$\frac{v m_1 m_2 \cos \alpha}{m_1 s^2 + m_2 c^2} > \frac{v m_1 m_2 (\cos \alpha - \sin \alpha)}{m_1 s^2 + m_2 c^2 + sc(m_1 - m_2)}$	$\Leftrightarrow sc(m_1 - m_2) \cos \alpha + (m_1 s^2 + m_2 c^2) \sin \alpha > 0 \checkmark$

Der Vergleich zeigt, daß die 2. Zeile den kleinsten positiven Quotienten hat und als Pivotzeile gewählt werden muß.

Fall 1.2 (3.Stufe): $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4}$

$m_1 \dot{g}_{NC}$	$m_1 \dot{g}_{TC}^+$	$m_1 \dot{g}_{TC}^-$	$\Lambda_{TOC}^{(+)}$	Λ_{NC}	$\Lambda_{TC}^{(+)}$ *	$\Lambda_{TC}^{(-)}$	$m_1 \dot{z}_C^-$	$m_1 \dot{z}_C^+$	z_0
$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{M_1}$	$-\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{M_1}$	0	0	0	$-\frac{m_1}{M_1}$	$-\frac{m_1}{M_1}$	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{M_1}$	0	(1)
$-\frac{m_2}{M_1}$	$\frac{m_2}{M_1}$	0	0	(1)	$-\frac{M_2}{M_1}$	$\frac{M_2}{M_1}$	$-\frac{m_2}{M_1}$	0	0
$-2 \frac{sc(m_1 - m_2)}{M_1}$	$-\frac{M_3}{M_1}$	(1)	0	0	$2 \frac{m_1}{M_1}$	$-2 \frac{m_1}{M_1}$	$\frac{M_3}{M_1}$	-1	0
$-\frac{\mu m_2 - sc(m_1 - m_2)}{M_1}$	$\frac{\mu m_2 - (m_1 s^2 + m_2 c^2)}{M_1}$	0	(1)	0	$\frac{M_1 + m_1 - \mu M_2}{M_1}$	$\frac{\mu M_2 - m_1}{M_1}$	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{M_1}$	0	0
$-\frac{\mu m_2 - sc(m_1 - m_2)}{M_1}$	$\frac{\mu m_2 - (m_1 s^2 + m_2 c^2)}{M_1}$	0	0	(1)	$\frac{m_1 - \mu M_2}{M_1}$	$\frac{M_1 - m_1 + \mu M_2}{M_1}$	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{M_1}$	0	0

Auswahl der Pivotzeile im Tableau Fall 1.2 (3.Stufe):

positiver Koeffizient?	positiv, wenn	kleinster positiver Quotient
1. Zeile:	$\frac{m_1}{M_1} > 0 \Rightarrow$	$v [sc(m_1 - m_2) \cos \alpha + (m_1 s^2 + m_2 c^2) \sin \alpha] > 0$
2. Zeile:	$-\frac{M_2}{M_1} < 0 \Rightarrow$	negativ!
3. Zeile:	$\frac{2m_1}{M_1} > 0 \Leftrightarrow$	gilt immer!
4. Zeile:	$\frac{M_1 + m_1 - \mu M_2}{M_1} > 0 \Leftrightarrow$	$\mu < \frac{m_1 + M_1}{M_2}$
5. Zeile:	$\frac{m_1 - \mu M_2}{m_2} > 0 \Leftrightarrow$	$\mu < \frac{m_1}{M_2}$

Vergleich der Zeilen:

$$\begin{aligned}
 & \text{1./3. Zeile} \wedge \text{4. Zeile:} \quad v m_1 \frac{[\mu m_2 + sc(m_1 - m_2)] \cos \alpha + [m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2] \sin \alpha}{m_1 + M_1 - \mu M_2} > v [sc(m_1 - m_2) \cos \alpha + (m_1 s^2 + m_2 c^2) \sin \alpha] \\
 & \Leftrightarrow \mu > \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2)} > \frac{(m_1 s^2 + m_2 c^2) \sin \alpha + sc(m_1 - m_2) \cos \alpha}{(m_1 c^2 + m_2 s^2) \cos \alpha + sc(m_1 - m_2) \sin \alpha} \quad \checkmark \\
 & \text{4. Zeile} \wedge \text{5. Zeile:} \quad v m_1 \frac{[\mu m_2 + sc(m_1 - m_2)] \cos \alpha + [m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2] \sin \alpha}{m_1 - \mu M_2} > v m_1 \frac{[\mu m_2 + sc(m_1 - m_2) \cos \alpha + [m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2] \sin \alpha]}{m_1 + M_1 - \mu M_2} \\
 & \Leftrightarrow m_1 s^2 + m_2 c^2 + sc(m_1 - m_2) > 0 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Der Vergleich zeigt, daß die 1. Zeile den kleinsten positiven Quotienten hat und als Pivotzeile gewählt werden muß.

Fall 1.2.1 (4. Stufe): $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4}$

$m_1 \dot{g}_{NC}$	$m_1 \dot{g}_{TC}^+$	$m_1 \dot{g}_{TC}^-$	$\Lambda_{TOC}^{(-)}$	$\Lambda_{TOC}^{(+)}$	Λ_{NC}	$\Lambda_{TC}^{(+)}$	$\Lambda_{TC}^{(-)}$	$m_1 z_C^-$	$m_1 z_C^+$	z_0^*	
$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	$-\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_1}$	0	0	0	0	(1)	-1	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_1}$	0	$\frac{M_1}{m_1}$	$v [sc(m_1 - m_2) \cos \alpha + (m_1 s^2 + m_2 c^2) \sin \alpha]$
$-\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_1}$	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	0	0	0	(1)	0	0	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	0	$\frac{M_2}{m_1}$	$v [(m_1 c^2 + m_2 s^2) \cos \alpha + sc(m_1 - m_2) \sin \alpha]$
0	1	(1)	0	0	0	0	0	-1	-1	-2	0
$-\frac{M_5}{m_1}$	$-\frac{M_6}{m_1}$	0	(1)	0	0	0	1	$\frac{M_6}{m_1}$	0	$\frac{\mu M_2 - m_1 - M_1}{m_1}$	$\mu \Lambda_{NC} - \Lambda_{TC}^{(+)}$
$-\frac{\mu(m_1 c^2 + m_2 s^2)}{m_1}$	$-\frac{\mu sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	0	0	(1)	0	0	1	$\frac{\mu sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	0	$\frac{\mu M_2 - m_1}{m_1}$	$\mu v [(m_1 c^2 + m_2 s^2) \cos \alpha + sc(m_1 - m_2) \sin \alpha]$

Die Variable z_0 hat die Basis verlassen und der Algorithmus endet. Aus dem Tableau entnimmt man für den Fall 1.2.1 die Lösung

$\dot{g}_{NC} = 0$	$\Lambda_{NC} = v [(m_1 c^2 + m_2 s^2) \cos \alpha + sc(m_1 - m_2) \sin \alpha] > 0$
$\dot{g}_{TC}^+ = 0$	$\Lambda_{TC}^{(+)} = v [sc(m_1 - m_2) \cos \alpha + (m_1 s^2 + m_2 c^2) \sin \alpha] > 0$
$\dot{g}_{TC}^- = 0$	$\Lambda_{TC}^{(-)} = 0$
$\Lambda_{TOC}^{(-)} = \mu \Lambda_{NC} - \Lambda_{TC}^{(+)} > 0$	$z_C^- = 0$
$\Lambda_{TOC}^{(+)} = \mu \Lambda_{NC} > 0$	$z_C^+ = 0$

(6.7)

Nach Tabelle 6.7 erfolgt für den Fall 1.2.1 ein Zustandsübergang von *Separation* nach *Haften*. Den Fall 2 findet man durchgerechnet im Anhang D.

6.1.3 Lösungen des LCP am Ende der Kompressionsphase

Unter Berücksichtigung der Ratterbedingungen 4.2 liefert das LCP der Kompressionsphase im Winkelbereich $-\frac{\pi}{4} \leq \alpha < \pi$ eine eindeutige Lösung. Es sei noch einmal in Erinnerung gerufen, daß der Bereich $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ den Senkbetrieb beinhaltet. Die Lösung zeigt, daß im Ratterbetrieb beim Herausziehen des Keils am Ende der Kompressionsphase kein Gleitbereich vorhanden ist. Unterhalb der Grenze zur Separation $\alpha = \frac{\pi}{2}$ wechselt das Keilgetriebe vom Zustand *Separation* in den Zustand *Haften* und oberhalb verbleibt es im Zustand *Separation*. In der Abbildung 6.2 sind die Lösungen der Kompressionsphase zusammenfassend dargestellt. Die Lösungen am Ende der Kompressionsphase gelten als

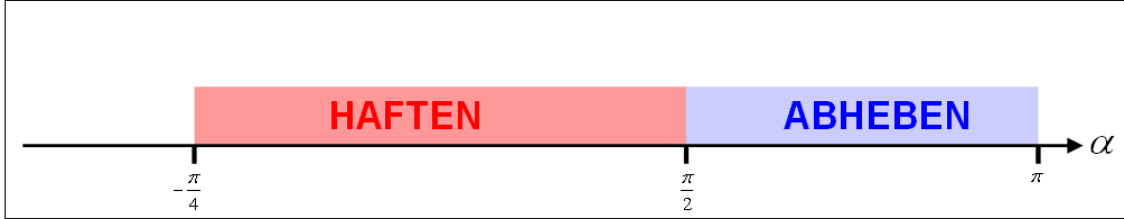


Abbildung 6.2: Lösungen im Ratterbetrieb am Ende der Kompressionsphase.

Startbedingungen für die Gleichungen der Expansionsphase, welche im anschließenden Abschnitt behandelt wird. Es ist davon auszugehen, daß im Winkelbereich $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq -\frac{\pi}{4}$ der Zustand *Gleiten* sicher möglich ist.

6.2 Stoßzustände am Ende der Expansionsphase

Die beiden Lösungen der Kompressionsphase führen auf zwei zu lösende lineare Komplementaritätsprobleme der Expansionsphase. Unabhängig von den speziellen Lösungen der Kompressionsphase gilt für die linearen Komplementaritätsprobleme der Expansionsphase des Keilgetriebes nach Gleichung 5.27

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} m_1 \dot{g}_{NE} \\ m_1 \dot{g}_{TE}^+ \\ m_1 \dot{g}_{TE}^- \\ \Lambda_{TOP}^{(-)} \\ \Lambda_{TOP}^{(+)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_2} & -\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2} & \frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2} & 0 & 0 \\ -\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2} & \frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2} & -\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2} & 1 & 0 \\ \frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2} & -\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2} & \frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2} & 0 & 1 \\ \mu & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{NP} \\ \Lambda_{TP}^{(+)} \\ \Lambda_{TP}^{(-)} \\ m_1 z_E^- \\ m_1 z_E^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \dot{g}_{NC} \\ m_1 \dot{g}_{TC} \\ -m_1 \dot{g}_{TC} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dots \\
 & \dots + \begin{pmatrix} \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_2} & -\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2} \\ -\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2} & \frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2} \\ \frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2} & -\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2} \\ \mu & -1 \\ \mu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_N \Lambda_{NC} \\ \epsilon_N \Lambda_{TC} \end{pmatrix}, \\
 & \begin{pmatrix} \dot{g}_{NE} \\ \dot{g}_{TE}^+ \\ \dot{g}_{TE}^- \\ \Lambda_{TOP}^{(-)} \\ \Lambda_{TOP}^{(+)} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} \Lambda_{NP} \\ \Lambda_{TP}^{(+)} \\ \Lambda_{TP}^{(-)} \\ z_E^- \\ z_E^+ \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} \dot{g}_{NE} \\ \dot{g}_{TE}^+ \\ \dot{g}_{TE}^- \\ \Lambda_{TOP}^{(-)} \\ \Lambda_{TOP}^{(+)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Lambda_{NP} \\ \Lambda_{TP}^{(+)} \\ \Lambda_{TP}^{(-)} \\ z_E^- \\ z_E^+ \end{pmatrix} = 0. \tag{6.8}
 \end{aligned}$$

Für die weitere Berechnung der Expansionsphase sind die Lösungen der Kompressionsphase, das sind die Geschwindigkeiten \dot{g}_{NC} und \dot{g}_{TC} , sowie die Impulse Λ_{NC} und Λ_{TC} , in Gleichung 6.8 einzusetzen. Die Kompressionsphase endet, abhängig vom Stoßrichtungswinkel α , gemäß dem vorigen Abschnitt entweder mit dem Verbleib des Keilgetriebes im Zustand *Separation* oder mit dem Übergang in den Zustand *Haften*.

Fall *Haften*: $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Die Startbedingungen für die Expansionsphase im Fall *Haften* lauten:

$$\begin{aligned}\Lambda_{NC} &= v [(m_1 c^2 + m_2 s^2) \cos \alpha + sc(m_1 - m_2) \sin \alpha], \\ \Lambda_{TC} &= \Lambda_{TC}^{(+)} - \Lambda_{TC}^{(-)} = v [sc(m_1 - m_2) \cos \alpha + (m_1 c^2 + m_2 s^2) \sin \alpha], \\ \dot{g}_{NC} &= 0 \\ \dot{g}_{TC} &= \dot{g}_{TC}^+ - \dot{g}_{TC}^- = 0.\end{aligned}\tag{6.9}$$

Fall *Separation*: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Die Startbedingungen für die Expansionsphase im Fall *Separation* lauten:

$$\begin{aligned}\dot{g}_{NC} &= -v \cos \alpha > 0, \\ \dot{g}_{TC} &= \dot{g}_{TC}^+ - \dot{g}_{TC}^- = -v \sin \alpha, \\ \Lambda_{NC} &= 0, \\ \Lambda_{TC} &= \Lambda_{TC}^{(+)} - \Lambda_{TC}^{(-)} = 0.\end{aligned}\tag{6.10}$$

6.2.1 LCP, wenn *Separation* am Ende der Kompressionsphase

Befindet sich das Keilgetriebe nach der Kompression im Zustand *Separation* (Anhang D, Gleichung D.3), so ist natürlich zu erwarten, daß unabhängig von der Stoßzahl ϵ_N auch am Ende der Expansionsphase der Zustand *Separation* erhalten bleibt. Das LCP lautet

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} m_1 \dot{g}_{NE} \\ m_1 \dot{g}_{TE}^+ \\ m_1 \dot{g}_{TE}^- \\ \Lambda_{TOP}^{(-)} \\ \Lambda_{TOP}^{(+)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_2} & -\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2} & \frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2} & 0 & 0 \\ -\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2} & \frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2} & -\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2} & 1 & 0 \\ \frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2} & -\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2} & \frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2} & 0 & 1 \\ \mu & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{NP} \\ \Lambda_{TP}^{(+)} \\ \Lambda_{TP}^{(-)} \\ m_1 z_E^- \\ m_1 z_E^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -vm_1 \cos \alpha \\ -vm_1 \sin \alpha \\ vm_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \dot{g}_{NE} \\ \dot{g}_{TE}^+ \\ \dot{g}_{TE}^- \\ \Lambda_{TOP}^{(-)} \\ \Lambda_{TOP}^{(+)} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} \Lambda_{NP} \\ \Lambda_{TP}^{(+)} \\ \Lambda_{TP}^{(-)} \\ z_E^- \\ z_E^+ \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} \dot{g}_{NE} \\ \dot{g}_{TE}^+ \\ \dot{g}_{TE}^- \\ \Lambda_{TOP}^{(-)} \\ \Lambda_{TOP}^{(+)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Lambda_{NP} \\ \Lambda_{TP}^{(+)} \\ \Lambda_{TP}^{(-)} \\ z_E^- \\ z_E^+ \end{pmatrix} = 0.\end{aligned}\tag{6.11}$$

Vergleicht man das LCP der Expansionsphase 6.11 mit dem LCP der Kompressionsphase 6.5, so fällt der identische Aufbau der Un-/Gleichungen auf. Für den Fall der Separation 6.10 können die Ergebnisse der Kompressionsphase direkt auf die Expansionsphase

übertragen werden. Die Lösung lautet mit $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

$$\begin{aligned}\dot{g}_{NE} &= -v \cos \alpha > 0, \\ \dot{g}_{TE} &= \dot{g}_{TE}^+ - \dot{g}_{TE}^- = -v \sin \alpha, \\ \Lambda_{NP} &= 0, \\ \Lambda_{TP} &= \Lambda_{TP}^{(+)} - \Lambda_{TP}^{(-)} = 0.\end{aligned}\tag{6.12}$$

Die beiden Keile des Keilgetriebes trennen sich auch am Ende der Expansionsphase.

6.2.2 LCP, wenn *Haften* am Ende der Kompressionsphase

Für den Zustand *Haften* am Ende der Kompressionsphase lautet das lineare Komplementaritätsproblem

$$\begin{aligned}& \begin{pmatrix} m_1 \dot{g}_{NE} \\ m_1 \dot{g}_{TE}^+ \\ m_1 \dot{g}_{TE}^- \\ \Lambda_{TOP}^{(-)} \\ \Lambda_{TOP}^{(+)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_2} & -\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_1 c^2 + m_2 s^2} & \frac{sc(m_1 - m_2)}{m_1 c^2 + m_2 s^2} & 0 & 0 \\ -\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2} & \frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2} & -\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2} & 1 & 0 \\ \frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2} & -\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2} & \frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2} & 0 & 1 \\ \mu & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{NP} \\ \Lambda_{TP}^{(+)} \\ \Lambda_{TP}^{(-)} \\ m_1 z_E^- \\ m_1 z_E^+ \end{pmatrix} = \dots \\ & \dots \begin{pmatrix} \epsilon_N v m_1 \cos \alpha \\ \epsilon_N v m_1 \sin \alpha \\ -\epsilon_N v m_1 \sin \alpha \\ \epsilon_N v (M_5 \cos \alpha + M_6 \sin \alpha) \\ \epsilon_N v (M_7 \cos \alpha + M_8 \sin \alpha) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{g}_{NE} \\ \dot{g}_{TE}^+ \\ \dot{g}_{TE}^- \\ \Lambda_{TOP}^{(-)} \\ \Lambda_{TOP}^{(+)} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} \Lambda_{NP} \\ \Lambda_{TP}^{(+)} \\ \Lambda_{TP}^{(-)} \\ z_E^- \\ z_E^+ \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} \dot{g}_{NE} \\ \dot{g}_{TE}^+ \\ \dot{g}_{TE}^- \\ \Lambda_{TOP}^{(-)} \\ \Lambda_{TOP}^{(+)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Lambda_{NP} \\ \Lambda_{TP}^{(+)} \\ \Lambda_{TP}^{(-)} \\ z_E^- \\ z_E^+ \end{pmatrix} = 0.\end{aligned}\tag{6.13}$$

Die Lösung des LCP 6.13 hängt unter anderem von der Stoßzahl $\epsilon_N \geq 0$ ab.

Fall $\epsilon_N = 0$

Im Fall des komplett inelastischen (vollplastischen) Stoßes ist $\epsilon_N = 0$. Damit vereinfachen sich die Startbedingungen 6.9 im Fall *Haften* zu

$$\begin{aligned}\Lambda_{NC} &= 0, \\ \Lambda_{TC} &= \Lambda_{TC}^{(+)} - \Lambda_{TC}^{(-)} = 0, \\ \dot{g}_{NC} &= 0 \\ \dot{g}_{TC} &= \dot{g}_{TC}^+ - \dot{g}_{TC}^- = 0,\end{aligned}\tag{6.14}$$

so daß die rechte Seite der LCP-Gleichung zum Nullvektor wird. Dann hat das LCP 6.13 die triviale Lösung

$$\begin{pmatrix} \dot{g}_{NE} \\ \dot{g}_{TE}^+ \\ \dot{g}_{TE}^- \\ \Lambda_{TOP}^{(-)} \\ \Lambda_{TOP}^{(+)} \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} \Lambda_{NP} \\ \Lambda_{TP}^{(+)} \\ \Lambda_{TP}^{(-)} \\ z_E^- \\ z_E^+ \end{pmatrix} = \mathbf{0}.\tag{6.15}$$

Beim vollplastischen Stoß vermögen die Expansionsimpulse $\Lambda_{TE} = \Lambda_{TP} = \Lambda_{TP}^{(+)} - \Lambda_{TP}^{(-)} = 0$ und $\Lambda_{NE} = \Lambda_{NP} = 0$ den Zustand des Getriebes am Ende der Expansionsphase nicht zu ändern, es verbleibt im Zustand *Haften*.

Fall $\epsilon_N > 0$

Beim teil- oder volllastischen Stoß wird zur Lösung des LCP 6.13 mit dem Verfahren von Lenke im Starttableau wieder die zusätzliche Spalte z_0 eingefügt.

Starttableau (1.Stufe): $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

$m_1 \dot{g}_{NE}$	$m_1 \dot{g}_{TE}^+$	$m_1 \dot{g}_{TE}^-$	$\Lambda_{TOP}^{(-)}$	$\Lambda_{TOP}^{(+)}$	Λ_{NP}	$\Lambda_{TP}^{(+)}$	$\Lambda_{TP}^{(-)}$	$m_1 z_E^-$	$m_1 z_E^+$	z_0^*
(1)	0	0	0	0	$-\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_2}$	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	0	0	-1
0	(1)	0	0	0	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$-\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	$\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	-1	0	-1
0	0	(1)	0	0	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	$-\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	0	-1	-1
0	0	0	(1)	0	$-\mu$	1	0	0	0	-1
0	0	0	0	(1)	$-\mu$	0	1	0	0	-1

(6.16)

Die triviale Lösung ist nicht möglich, da es kein α gibt, welches im Starttableau eine *positive rechte Seite* erzeugt. Im Winkelbereich $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ hat die rechte Seite der dritte Zeile den negativsten Wert.

Fall 1 (2.Stufe): $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

$m_1 \dot{g}_{NE}$	$m_1 \dot{g}_{TE}^+$	$m_1 \dot{g}_{TE}^-$	$\Lambda_{TOP}^{(-)}$	$\Lambda_{TOP}^{(+)}$	Λ_{NP}	$\Lambda_{TP}^{(+)}$	$\Lambda_{TP}^{(-)*}$	$m_1 z_E^-$	$m_1 z_E^+$	z_0
(1)	0	-1	0	0	$-\frac{M_3}{m_2}$	$-\frac{M_4}{m_2}$	$\frac{M_4}{m_2}$	0	1	0
0	(1)	-1	0	0	$2 \frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$-\frac{m_2}{2m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$2 \frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	-1	1	0
0	0	-1	0	0	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$-\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	1	(1)
0	0	-1	(1)	0	$\frac{sc(m_1 - m_2) - \mu m_2}{m_2}$	$\frac{m_2 - (m_1 c^2 + m_2 s^2)}{m_2}$	$\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	0	1	0
0	0	-1	0	(1)	$\frac{sc(m_1 - m_2) - \mu m_2}{m_2}$	$-\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	$\frac{m_2 + (m_1 c^2 + m_2 s^2)}{m_2}$	0	1	0

(1)

Auswahl der Pivotzeile im Tableau Fall 1 (2. Stufe):

	positiver Koeffizient?	\Rightarrow	positiv, wenn	\Rightarrow	kleinster positiver Quotient
1. Zeile:	$\frac{M_3}{m_2} > 0$	\Rightarrow	gilt immer!	\Rightarrow	$\frac{\epsilon_{NV} v m_1 m_2 (\sin \alpha + \cos \alpha)}{M_3} > 0$
2./3. Zeile:	$\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2} > 0$	\Rightarrow	gilt immer!	\Rightarrow	$\frac{\epsilon_{NV} v m_1 m_2 \sin \alpha}{m_1 c^2 + m_2 s^2} > 0$
4. Zeile:	$\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2} > 0$	\Rightarrow	gilt immer!	\Rightarrow	$\frac{\epsilon_{NV} v m_2 [M_5 \cos \alpha + (m_1 + M_6) \sin \alpha]}{m_1 c^2 + m_2 s^2} > 0$
5. Zeile:	$\frac{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2} > 0$	\Rightarrow	gilt immer!	\Rightarrow	$\frac{\epsilon_{NV} v m_2 [M_7 \cos \alpha + (m_1 + M_8) \sin \alpha]}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2} > 0$

Vergleich der Zeilen:

$$\begin{aligned}
 2./3. \text{ Zeile} \wedge 4. \text{ Zeile: } & \frac{\epsilon_{NV} v m_2 [M_5 \cos \alpha + (m_1 + M_6) \sin \alpha]}{m_1 c^2 + m_2 s^2} > \frac{\epsilon_{NV} v m_1 m_2 \sin \alpha}{m_1 c^2 + m_2 s^2} \Leftrightarrow M_5 \cos \alpha + M_6 \sin \alpha > 0 \quad \checkmark \\
 2./3. \text{ Zeile} \wedge 5. \text{ Zeile: } & \frac{\epsilon_{NV} v m_2 [M_7 \cos \alpha + (m_1 + M_8) \sin \alpha]}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2} > \frac{\epsilon_{NV} v m_1 m_2 \sin \alpha}{m_1 c^2 + m_2 s^2} \Leftrightarrow (m_1 c^2 + m_2 s^2) \cos \alpha + sc(m_1 - m_2) \sin \alpha > 0 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Der Vergleich zeigt, daß die 3. Zeile den kleinsten positiven Quotienten hat und als Pivotzeile gewählt werden muß.

Fall 1.3 (3. Stufe): $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

	$m_1 \dot{g}_{NE}$	$m_1 \dot{g}_{TE}^+$	$m_1 \dot{g}_{TE}^-$	$\Lambda_{TOP}^{(-)}$	$\Lambda_{TOP}^{(+)}$	Λ_{NP}	$\Lambda_{TP}^{(+)}$	$\Lambda_{TP}^{(-)}$	$m_1 z_E^-$	$m_1 z_E^+$	z_0^*
(1)	0	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	0	0	$\frac{-m_1}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	0	0	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{-M_3}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$
0	(1)	1	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-2
0	0	$\frac{-m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	0	0	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	-1	(1)	0	$\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$
0	0	0	(1)	0	0	- μ	1	0	0	0	-1
0	0	$\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	(1)	0	$\frac{-M_7}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	1	0	0	$\frac{-m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{-m_2 - (m_1 c^2 + m_2 s^2)}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$
											$\frac{\epsilon_{NV} v m_1 [(m_1 c^2 + m_2 s^2) \cos \alpha + sc(m_1 - m_2) \sin \alpha]}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$
											$\frac{\epsilon_{NV} v m_1 m_2 \sin \alpha}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$
											$\frac{\epsilon_{NV} v M_7 [(m_1 c^2 + m_2 s^2) \cos \alpha + sc(m_1 - m_2) \sin \alpha]}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$

Die Variable z_0 hat die Basis verlassen und der Algorithmus endet. Dem Tableau entnimmt man für den Fall 1.3 die Lösung

$\dot{g}_{NE} = \frac{\epsilon_N v [(m_1 c^2 + m_2 s^2) \cos \alpha + s c (m_1 - m_2) \sin \alpha]}{m_1 c^2 + m_2 s^2} > 0$	$\Lambda_{NP} = 0$	(6.17)
$\dot{g}_{TE}^+ = 0$	$\Lambda_{TP}^{(+)} = 0$	
$\dot{g}_{TE}^- = 0$	$\Lambda_{TP}^{(-)} = \frac{\epsilon_N v m_1 m_2 \sin \alpha}{m_1 c^2 + m_2 s^2} > 0$	
$\Lambda_{TOP}^{(-)} = 0$	$z_E^- = 0$	
$\Lambda_{TOP}^{(+)} = \frac{\epsilon_N v M_7 [(m_1 c^2 + m_2 s^2) \cos \alpha + s c (m_1 - m_2) \sin \alpha]}{m_1 c^2 + m_2 s^2} > 0$	$z_E^+ = 0$	

Für $\epsilon_N > 0$ erfolgt nach Tabelle 6.17 ein Zustandsübergang von *Haften* nach *Separation*. Die Lösung 6.17 wird mit den Gleichungen 5.21 und 5.24 zurücktransformiert

$$\begin{aligned} \dot{g}_{NE} &= \epsilon_N v \cos \alpha + \epsilon_N v \frac{s c (m_1 - m_2)}{m_1 c^2 + m_2 s^2} \sin \alpha, \\ \dot{g}_{TE} &= 0, \\ \Lambda_{NE} &= \epsilon_N v [(m_1 c^2 + m_2 s^2) \cos \alpha + s c (m_1 - m_2) \sin \alpha], \\ \Lambda_{TE} &= \epsilon_N v [s c (m_1 - m_2) \cos \alpha + (m_1 c^2 + m_2 s^2) \sin \alpha] - \frac{\epsilon_N v m_1 m_2 \sin \alpha}{m_1 c^2 + m_2 s^2}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

und man erhält die Anfangswerte für die Bewegungsgleichungen der separierten Keile.

6.2.3 Lösungen des LCP am Ende der Expansionsphase

Im Winkelbereich $-\frac{\pi}{4} \leq \alpha < \pi$ unter Berücksichtigung der Ratterbedingungen 4.2 liefert das LCP der Expansionsphase eine eindeutige Lösung. Die Lösung zeigt, daß im Ratterbetrieb beim Herausziehen des Keils auch am Ende der Expansionsphase kein Gleitbereich existiert. Es treten nur Haftreibstöße auf. Unterhalb der Separationsgrenze $\alpha = \frac{\pi}{2}$ wechselt das Keilgetriebe am Ende der Expansionsphase für $\epsilon_N > 0$ vom Zustand *Haften* in den Zustand *Separation*. Oberhalb verbleibt es, wie schon zuvor am Ende der Kompressionsphase, im Zustand *Separation*. Das macht Sinn, weil es aufgrund der Anfangsbedingung $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ gar nicht zum Stoß kommen kann. Bei vollplastischem Stoß mit $\epsilon_N = 0$ ändert sich der Zustand *Haften* am Ende der Kompressionsphase auch am Ende der Expansionsphase nicht. In der Abbildung 6.2 sind die Lösungen der Expansionsphase für $\epsilon_N = 0$ und $\epsilon_N > 0$ zusammenfassend dargestellt.

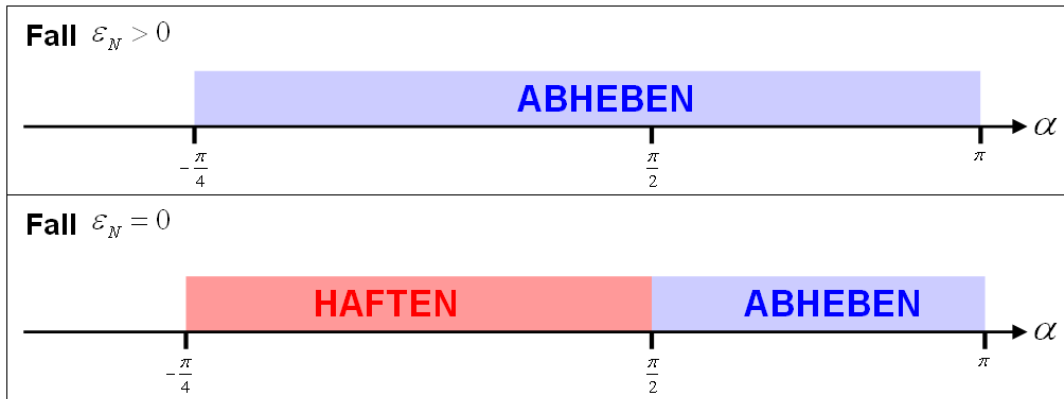


Abbildung 6.3: Lösungen im Ratterbetrieb am Ende der Expansionsphase.

7 Experimentelle Untersuchungen

In den Kapitel 4 und 6 wurde am Beispiel des selbstbremsenden Keilgetriebes analytisch bewiesen, daß im Ratterbetrieb grundsätzlich keine Gleitphase existiert. Nur das Experiment kann letztendlich bestätigen, daß sich das reale selbstbremsende Getriebe wirklich so verhält. Daher wurde ein Prüfstand entwickelt und so ausgelegt, daß Ratterschwingungen auch unter ungünstigen Bedingungen, z.B. bei Einfettung der eigentlich trocken laufenden Getriebestufe, auftreten. Als Getriebestufe kommt ein Schneckengetriebe als gängigster Vertreter der selbstbremsungsfähigen Getriebe zum Einsatz. Das Schneckengetriebe mit seinen rotatorischen Freiheitsgraden ermöglicht eine einfache und ausreichend genaue Messung der Ratterschwingungen mit Absolutwertgebern. Der Nachweis der Selbstbremsungsfähigkeit des Schneckengetriebes erfolgt durch Überprüfung der Reibkennlinie.

7.1 Prüfstandsaufbau und Meßtechnik

Die Funktionsweise des Prüfstandes in Abbildung 7.1 ist angelehnt an die eines Hubwerkgetriebes. Es wird eine definierte, konstante Last (Gewicht) an einem Ausleger im Fall der Reibwertmessung heraufgezogen oder im Fall der Ratterschwingungsmessung her-

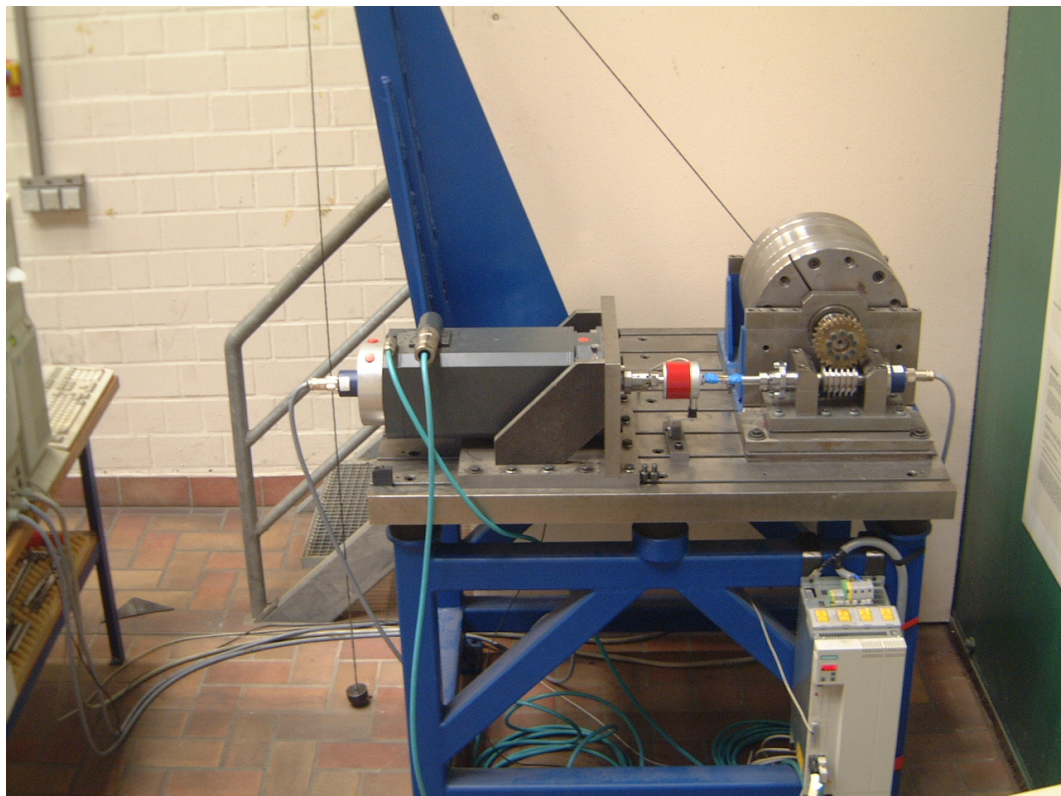


Abbildung 7.1: Prüfstand

7 Experimentelle Untersuchungen

abgelassen. Die Drehbewegungen von Motor, Schnecke und Schneckenrad werden mit opto-digitalen Absolutwertgebern hoher Auflösung gemessen. Ein digital geregelter synchroner Servomotor garantiert dabei höchste Dynamik mit exakter Antriebsdrehzahl. Auf der Abtriebsseite ist die Drehträgeit durch anschraubbare Halbscheiben in einem großen Bereich variierbar, so daß sowohl ratterfreier als auch ratternder Betrieb über die Abtriebsdrehträgeit eingestellt werden kann. Die im Vergleich zu den anderen Wellen sehr elastische Antriebswelle ist zur Messung des Antriebsmomentes mit vier DMS-Streifen in Vollbrückenschaltung bestückt. Die Signalübertragung erfolgt mit einem Schleifringüberträger. Eine schematische Darstellung des Versuchsaufbau zeigt die Abbildung 7.2.

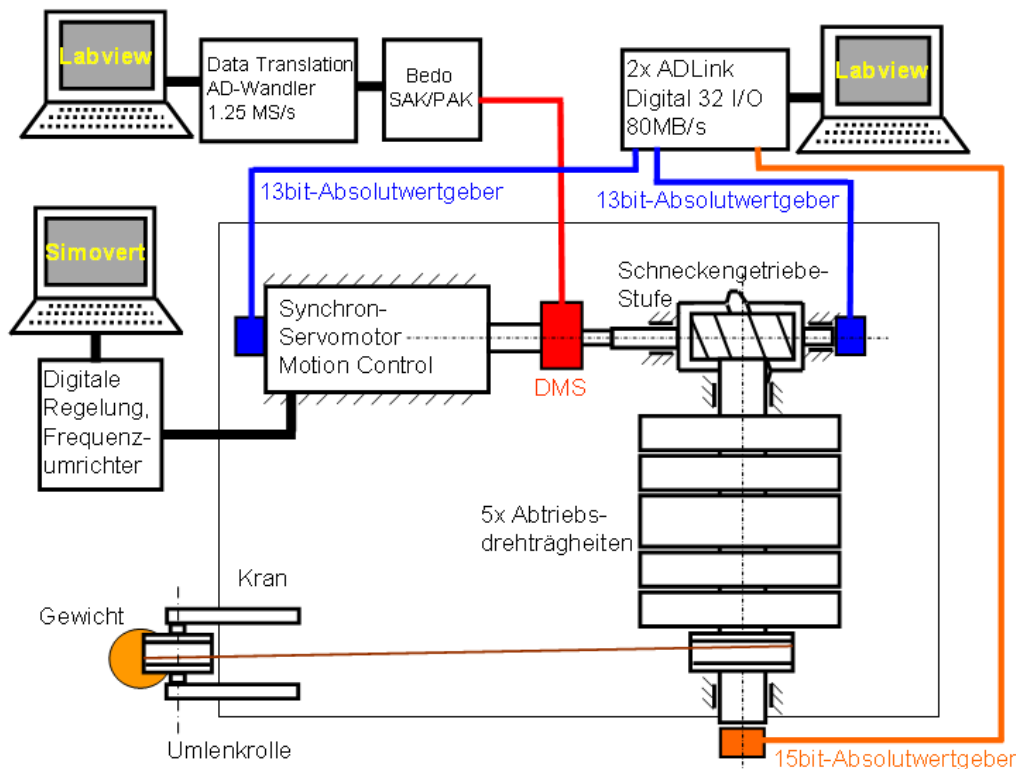


Abbildung 7.2: Versuchsaufbau, schematische Darstellung, Ansicht von Oben

Technische Daten:

Antriebsregelung:	Siemens SIMOVERT Masterdrive Motion Control.
Motor:	Synchroner Servomotor Siemens 1FT6, 11bit-Absolutwertgeber, $n_{nenn} = 1500U/min$, $M_{max} = 70Nm$.
Optische Absolut-Drehgeber:	IVO GA241, parallel, Singleturn, 13bit Auflösung, fehlerfrei bis 9300U/min (Codewechselfrequenz 1270kHz). Stegmann Coretech CA6, SSI, Singleturn, 15bit Auflösung, fehlerfrei bis 1500U/min (Codewechselfrequenz 200kHz).
Signalkonditionierung:	ADLink NuDAQ PCI-7300A, Ultra-High Speed 40MB/s, 32 Digitale I/O Kanäle pro Karte. Data Translation DT2839, 1.25MSamples/s, 32 Kanäle, 12bit Auflösung / Bedo PAK Trägerfrequenzmeßverstärker.
Dehnungsmessstreifen:	HBM Typ 3/35 KK13G.

7.2 Reibkennlinie und Ratterbedingung

Eine Hauptforderung an den Prüfstand ist die Erfüllung der Ratterbedingung des Schneckengetriebes. Nur dann können Ratterschwingungen auftreten und gemessen werden. Zu diesem Zweck wurde das üblicherweise enge Zahnspiel bewußt auf 2mm vergrößert, damit sich die Ratterschwingungen meßbar ausbilden können. Der Ratterbedingung 2.33 entnimmt man die Größen μ , ρ , γ , Θ_1 , Θ_2 , r_1 und r_2 als mögliche Stellgrößen zur Einstellung des Ratterbetriebes. Während die Größen μ , γ , r_1 und r_2 für eine gezielte Parametervariation eher ungeeignet sind, bieten die Größen Θ_1 und Θ_2 eine einfache und flexible Möglichkeit dafür. Die unveränderlichen Größen des Schneckengetriebes sind:

$$\gamma = 3.18^\circ, r_1 = 50\text{mm}, r_2 = 36\text{mm}, \Theta_1^0 = 14343\text{kgmm}^2, \Theta_2 = 1560\text{kgmm}^2. \quad (7.1)$$

Die abtriebsseitige Grunddrehträgheit $\Theta_1^0 = 14343\text{kgmm}^2$ kann durch fünf zusätzliche Drehträgheiten, $1 \times 861081\text{kgmm}^2$ und $4 \times 512345\text{kgmm}^2$, vergrößert werden. Es stehen die Abtriebsdrehträgheiten $\Theta_1^0 = 14343\text{kgmm}^2$, $\Theta_1^1 = 875424\text{kgmm}^2$, $\Theta_1^2 = 1387769\text{kgmm}^2$, $\Theta_1^3 = 1900114\text{kgmm}^2$, $\Theta_1^4 = 2412459\text{kgmm}^2$ und $\Theta_1^5 = 2924804\text{kgmm}^2$ zur Verfügung. Der Reibwert μ ist noch unbekannt und muß durch Messung bestimmt werden. Durch Umstellung der Gleichung 2.32 nach dem Reibwert μ ergibt sich die nutzbare Beziehung

$$\mu = \cos \alpha_n \tan \left[-\gamma + \arctan \frac{M_2 - \Theta_2 \ddot{\varphi}_2}{\Theta_1 \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \tan \gamma \ddot{\varphi}_2 + M_1 \frac{r_2}{r_1}} \right], \quad (7.2)$$

welche eine Möglichkeit zur Abschätzung der Reibwerte eröffnet. Zur Ermittlung der Reibwerte wird bei stetigem Kontakt die konstante Last $m = 7.2\text{kg}$ „gehoben“ und dabei der Drehwinkel φ_2 sowie das Drehmoment M_2 der Antriebswelle gemessen. Für das Abtriebsmoment gilt $M_1 = m \cdot g \cdot r_g = 7.2\text{kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0.05\text{m} = 3.53\text{Nm}$, welches noch um die drehzahlabhängige Lagerreibung $M_r(n)$ reduziert wird. Einsetzen der Messergebnisse in die Gleichung 7.2 liefert die Reibkennlinien in Abbildung 7.3.

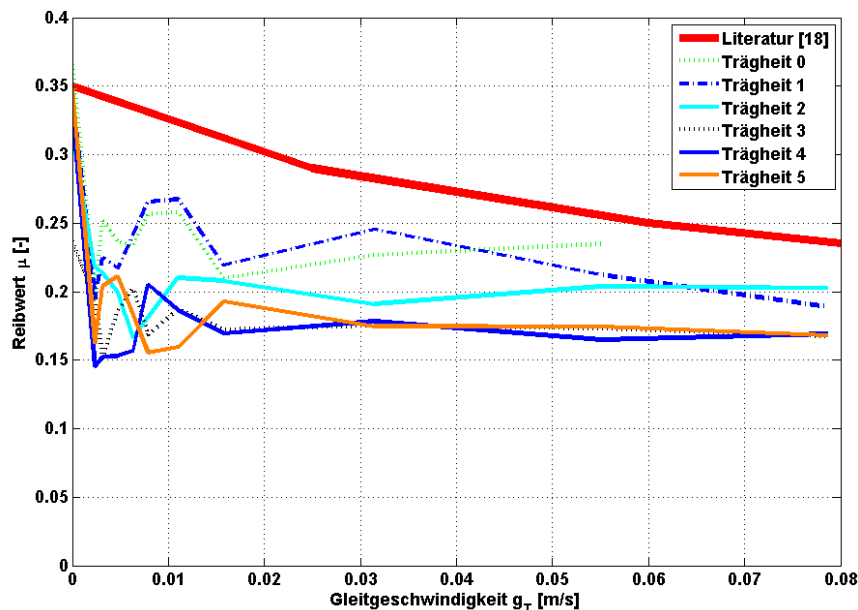


Abbildung 7.3: Reibkennlinien

Als Referenz enthält die Abbildung 7.3 die Reibkennlinie für trockene Reibung aus [18]. Die gemessenen Reibkennlinien liegen allesamt unterhalb der Referenzkennlinie. Ursache dafür ist eine Restöligkeit, aufgrund der vorangegangenen Ölschmierung beim Einlaufen des Schneckengetriebes, die nicht vollständig beseitigt werden konnte. Das Einlaufen dient dem Erhalt eines sauberen, geeigneten Tragbildes, damit nicht lokale Effekte wie Kantentragen oder Fressen unerwünschte unetstetige Verhältnisse schaffen. Die Reibkennlinien gestatten jetzt die Überprüfung der Selbstbremsungsfähigkeit und der Ratterbedingung. Der kleinste aus Abbildung 7.3 ablesbare Reibwert ist $\mu = 0.14$. Mit Gleichung 2.30 ergibt sich der Reibwinkel zu $\rho = 8.47^\circ$, so daß bei einem Steigungswinkel von $\gamma = 3.18^\circ$ die Selbstbremsungsbedingung $\rho > \gamma$ mit großer Sicherheit erfüllt wird.

Die Ratterbedingung wird anhand der Ungleichung 2.33 überprüft. Dazu wird die Ungleichung nach der am Prüfstand variierbaren Größe Θ_1 umgestellt

$$\Theta_1 > \frac{\Theta_2}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \tan \gamma \tan (\rho - \gamma)} \quad \Leftrightarrow \quad \Theta_1 > \frac{1560 \text{kgmm}^2}{\left(\frac{36 \text{mm}}{50 \text{mm}}\right)^2 \tan 3.18^\circ \tan (\rho - 3.18^\circ)}. \quad (7.3)$$

Je größer bei konstantem Steigungswinkel γ der Reibwert μ ist, desto niedriger ist der erforderliche Drehträgheitswert Θ_1 zur Erfüllung der Ratterbedingung, bzw. je niedriger der Reibwert, desto höher ist der Drehträgheitswert. Der kleinste Reibwert $\mu = 0.14$ erfordert für das Rattern gemäß der Ungleichung 7.3 die Drehträgheit

$$\mu = 0.14 \quad \Rightarrow \quad \Theta_1 > 584978 \text{kgmm}^2, \quad (7.4)$$

Folglich wird für den Ratterbetrieb wenigstens die erste Trägheit $\Theta_1^1 = 14343 \text{kgmm}^2 + 861081 \text{kgmm}^2 = 875424 \text{kgmm}^2$ gebraucht. Der größte gemessene Reibwert liegt bei ca. $\mu = 0.4$. Dann tritt Rattern auf, wenn

$$\mu = 0.4 \quad \Rightarrow \quad \Theta_1 > 149805 \text{kgmm}^2. \quad (7.5)$$

Demnach genügt die Grunddrehträgheit $\Theta_1^0 = 14343 \text{kgmm}^2$ nicht, um Ratterschwingungen entstehen zu lassen. Die maximale Abtriebsdrehträgheit beträgt $\Theta_1 = 2924804 \text{kgmm}^2$. Es stellt sich die Frage, wie klein der Reibwert werden darf, damit gerade noch Ratterbetrieb möglich ist. Dazu wird die Ungleichung 2.33 nach μ umgestellt und die Werte eingesetzt. Man erhält

$$\mu > \cos \alpha_n \tan \left[\gamma + \arctan \frac{\frac{\Theta_2}{\Theta_1}}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \tan \gamma} \right] \quad \Rightarrow \quad \mu > 0.07. \quad (7.6)$$

Für $\mu > 0.07$ kann das Getriebe bei maximaler Abtriebsdrehträgheit im Ratterzustand betrieben werden. Zusammengefaßt läßt sich feststellen, daß gemäß den Bedingungen 7.4, 7.5 und 7.6 die Reibverhältnisse am Prüfstand sowohl den ratterfreien als auch den ratternden Betrieb gestatten.

7.3 Ratterschwingungen

Nachdem im vorangegangenen Abschnitt gezeigt wurde, daß der Prüfstand den ratterfreien und ratternden Betrieb erlaubt, können jetzt die Bewegungsbahnen der beiden

Betriebszustände gemessen werden. Die nachfolgend ausgewählten Messergebnisse stehen stellvertretend für viele andere durchgeführte Messungen mit anderen Lasten und Geschwindigkeiten, deren Ergebnisse aber die gleichen Aussagen liefern. Eine gute Auflösung der Messergebnisse erhält man für die Last $m = 7.2\text{kg}$ und die Antriebsdrehzahl $n = 4.5U/min$. Die Relativgeschwindigkeit beträgt ca. $\dot{g}_T = 0.003\frac{m}{s^2}$. Bei dieser geringen Drehzahl wird ein wechselseitiges Anschlagen der Zahnflanken gerade vermieden, weil die translatorische Geschwindigkeit der Zahnflanke der Schnecke zu niedrig ist, um die durch die Last beschleunigte Gegenflanke des Schneckenrads zu erreichen. Höhere Drehzahlen führen zu einem Hin- und Herschlagen der Zähne. Nach Gleichung 7.5 genügt die Grunddrehträgheit $\Theta_1^0 = 14343\text{kgmm}^2$ nicht, um Ratterschwingungen anzuregen. Das wird durch die Messung im linken Diagramm von Abbildung 7.4 bestätigt. Zwischen Schnecke

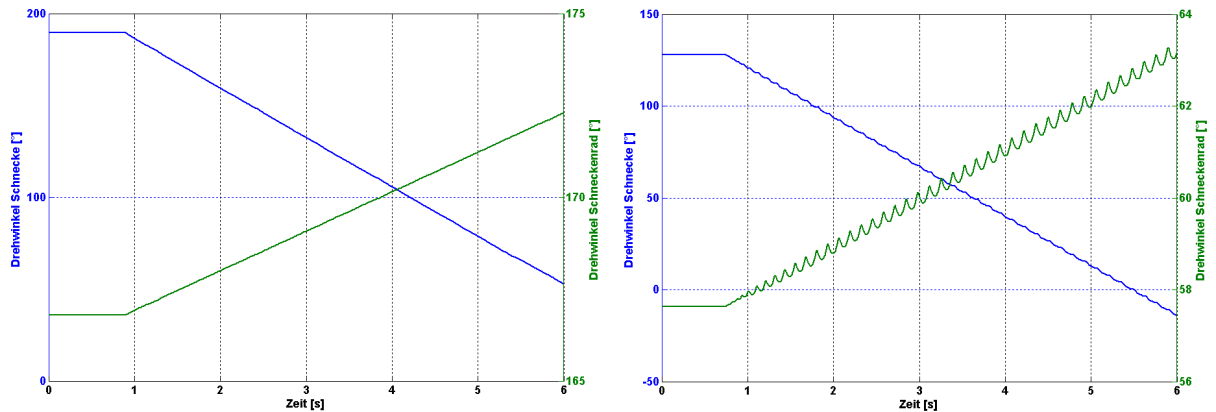


Abbildung 7.4: Links: Ratterfreier Drehwinkelverlauf für die Drehträgheit $\Theta_1 = \Theta_1^0$; Rechts: Ratternder Drehwinkelverlauf für die Drehträgheit $\Theta_1 = \Theta_1^1$ mit einseitigem Anschlagen bei niedrigen Drehzahlen.

und Schneckenrad besteht beim Herunterlassen der Last durchgängig Gleitkontakt. Das ändert sich mit Erhöhung der Abtriebsdrehträgheit auf $\Theta_1^1 = 875424\text{kgmm}^2$ entsprechend Gleichung 7.4. Die Messkurven im rechten Diagramm 7.4 zeigen, beim Herablassen der Last, Ratterschwingungen über den gesamten Messzeitraum. Die Schwingungen bestehen aus abwechselnden kurzzeitigen Stoßkontakten und längeren kontaktlosen Flugphasen zwischen den Zähnen. Die vergrößerte Darstellung der Zustandsübergänge vom ersten Haftzustand zur ersten Flugphase im linken Diagramm von Abbildung 7.5 bestätigt sofortiges

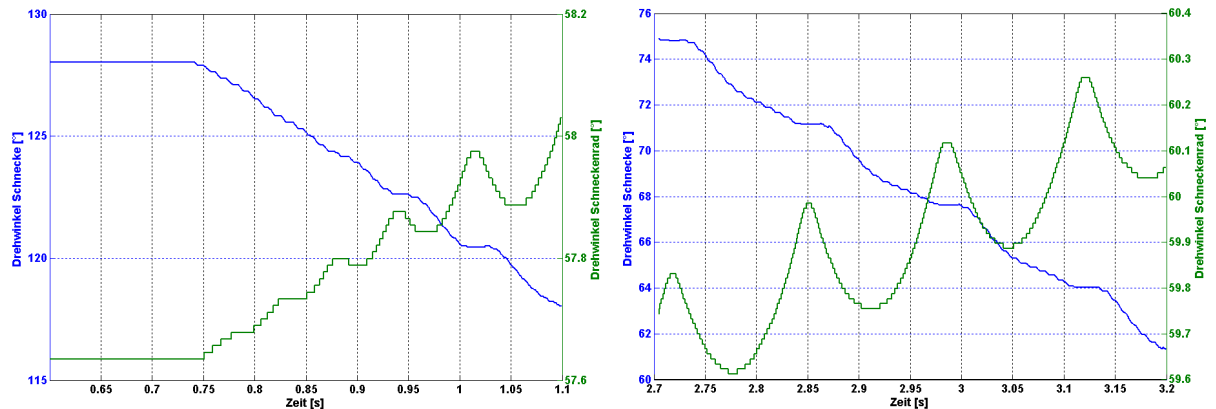


Abbildung 7.5: $\Theta_1 = \Theta_1^1$; links: Übergang *Haften* nach *Separation*; rechts: Hafttreibstöße.

7 Experimentelle Untersuchungen

Ablösen nach der Haftphase. Die Geradensteigung (Winkelgeschwindigkeit) direkt nach der ersten Haftphase beträgt bei der Schnecke ca. $\dot{\varphi}_2 = 26.8^\circ/s$, die des Schneckenrades beträgt ca. $\dot{\varphi}_1 = 1.3^\circ/s$. Würde Gleitkontakt vorliegen, so müßte das Schneckenrad gemäß der Bindungsgleichung die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_1 = \frac{36mm}{50mm} \cdot 26.8^\circ/s \cdot \tan 3.18^\circ = 1.07^\circ/s$ haben. Die Bindungsgleichung wird nicht erfüllt, so daß Separation vorliegt. Das für diesen Fall zu geringe Auflösungsvermögen des Absolutwertgebers kann die ersten beiden Stöße im linken Diagramm nicht als Haftreibstöße identifizieren. Im rechten Diagramm 7.5 erkennt man aber zu einem späteren Zeitpunkt der Messung die Haftreibstöße sehr deutlich. Der Drehwinkelverlauf der Schnecke zeigt während der Stoßphasen ca. 0.025s andauernde horizontale Abschnitte mit unveränderlichem Drehwinkel, d.h. die Schnecke steht während der Haftreibstöße still. Als Maß für Dauer eines Stoßes kann die Länge des horizontalen Abschnittes der Schnecke herangezogen werden.

Je größer die Abtriebsdrehträgheit ist, desto eindeutiger stellen sich die Zustandsübergänge dar. In den linken Diagrammen der Abbildungen 7.6 und 7.7 zeigen die Messergebnisse klare Zustandsübergänge von *Haften* nach *Separation*, und alle dort abgebildeten Stöße sind zweifellos Haftreibstöße. In den Bereichen, wo die Schnecke aufgrund des Stillstands

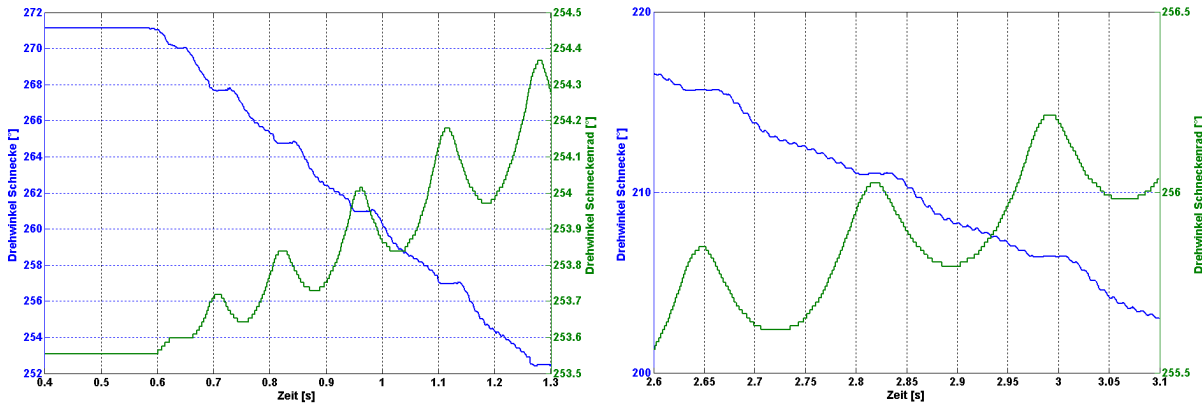


Abbildung 7.6: $\Theta_1 = \Theta_1^3$; links: Übergang *Haften* nach *Separation*; rechts: Stoßübergänge.

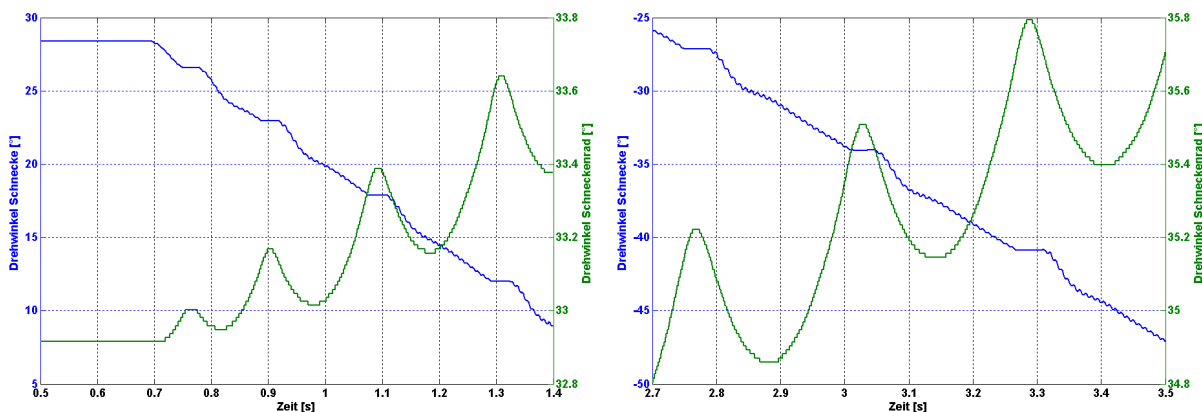


Abbildung 7.7: $\Theta_1 = \Theta_1^5$; links: Übergang *Haften* nach *Separation*; rechts: Stoßübergänge.

im Drehwinkelverlauf horizontale Abschnitte besitzt, findet man im Drehwinkelverlauf des Schneckenrades nur sehr kurze horizontale Abschnitte. Die Begründung dafür liefern die elastischen Verformungen der am Stoß teilhabenden Zähne. Während die Schnecke beim

Stoß hauptsächlich axial belastet und verformt wird und somit die Verformung für den Absolutwertgeber der Schnecke praktisch unsichtbar bleibt, nimmt der Absolutwertgeber des Schneckenrades trotz Stillstands der Schnecke sowohl die Verformung des Schneckenrades als auch die der Schnecke auf.

Bei gleicher Last von $m = 7.2\text{kg}$ bleibt der grundsätzliche Verlauf der Meßkurven bis zur Drehzahl $n = 12U/min$ unverändert. Darüber hinaus führt die höhere Drehzahl der Schnecke dazu, daß sie die Gegenflanke des Schneckenrads erreicht und es dort zum Stoß kommt. Einmal dort angestoßen beginnt ein wechselseitiges Hin- und Herschlagen zwischen den Zähnen. Im Diagramm 7.8 tritt der erste leichte Stoß der Schnecke mit der Gegenflanke des Schneckenrads bei ca. 1.4s sichtbar in beiden Kurven auf. Ab diesem Stoß ähnelt die Kurve des Schneckenrades einem Sägezahn. Eine Bewegung der Schnecke auf der Gegenflanke ist ratterunkritisch, weil diese Bewegung dem Hubbetrieb entspricht.

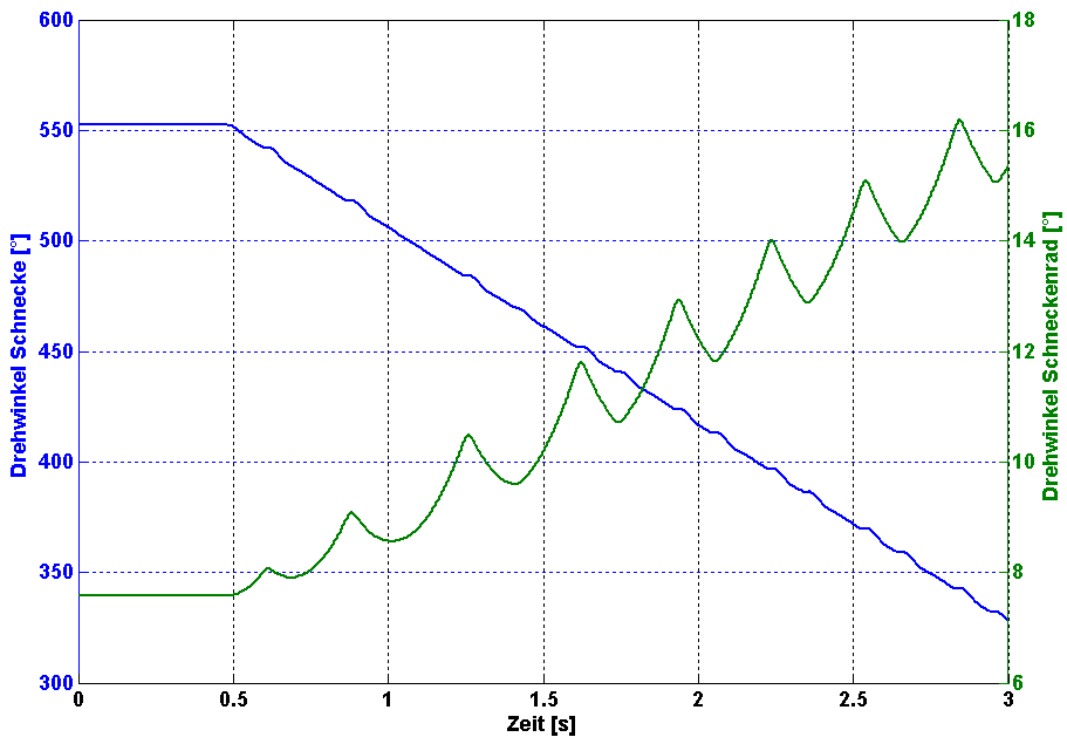


Abbildung 7.8: Wechselseitiges Anschlagen bei höheren Drehzahlen ($n = 15U/min$).

8 Zusammenfassung

Die Arbeit beantwortet die Fragen, wie Ratterschwingungen in selbsthemmenden Getrieben aussehen, welcher Mechanismus die Ratterschwingungen antreibt und wie Ratterschwingungen berechnet werden können. Im Gegensatz zur bisher üblichen mathematischen Beschreibung der Ratterschwingungen wird hier das kombinierte Problem der einseitigen Bindung in Normalenrichtung und der Coulombschen Reibung in Tangentialrichtung als lineares Komplementaritätsproblem (LCP) formuliert. Das LCP wird mit dem auf dem Simplexverfahren aufbauenden komplementären Lemke-Algorithmus gelöst. Die Lösungen des LCP sind eindeutig und widerspruchsfrei. Auf diese Weise wird durch analytische Berechnung die bisherige Annahme der Gleitreibung im Ratterbetrieb widerlegt.

Der Beweis erfolgt an einem selbstbremsenden Keilschubgetriebe aus idealisierten starren Keilen, deren oberer Keil mit einer konstanten Last belastet wird, und deren unterer Keil über eine elastische Feder mit einer konstanten Antriebsgeschwindigkeit aus dem Keilverbund herausgezogen wird. Im Ratterbetrieb liefert das LCP als Lösungen die zulässigen Zustandsübergänge Haften-Haften, Haften-Separation, Separation-Haften und Separation-Separation. Im Senkbetrieb ist die Entstehung der Ratterschwingungen aus der Gleitphase heraus nicht möglich, weil die Gleitphase nicht zulässig ist. Beginnt die Initiierung der Ratterschwingungen in der Gleitphase des Hubbetriebs, so ist dies zulässig und problemlos möglich. Von da aus gelangt man, eventuell mit Richtungsumkehr, aber nur über die Haftphase mit anschließender Separation in den Senkbetrieb. Die Lösungen der zulässigen Zustandsübergänge sind die Anfangsbedingungen für die nachfolgenden Bewegungsphasen, die durch gewöhnliche Bewegungsgleichungen beschrieben werden können. Es gibt zwei zulässige Anfangsbedingungen für ratterschwingungsfähige Getriebe, wie den Getrieben in Abb. 2.8 bzw. Abb. 7.2. Das sind die Anfangszustände Haften und Separation.

Für den Anfangszustand Haften starten die Ratterschwingungen aus dem initialen Ruhezustand. Durch die Antriebsbewegung wird die Antriebsfeder gespannt und baut am unteren Keil des Keilschubgetriebes bzw. am Schneckenrad eine Kraft auf, die schließlich den ersten wichtigen Zustandsübergang von Haften nach Separation auslöst. Die Separation leitet dann die zweite Phase der Ratterschwingungen ein, nämlich die Flugphase. In der Flugphase schwingen die beiden Getriebeteile unabhängig voneinander. Die freie Schwingung führt die beiden Getriebeteile wieder zusammen und leitet die dritte Bewegungsphase ein, nämlich den Haftreibstoß. Der Haftreibstoß ist der Zustandsübergang von Separation nach Haften. Abhängig von der Stoßzahl sind zwei anschließende Bewegungsszenarien möglich. Im Regelfall ist die Stoßzahl größer Null, so daß nach der Kompressionsphase der Expansionsimpuls ausreicht, um den Zustandsübergang von Kontakt nach Separation zu initiieren. Es folgt wieder eine Flugphase, die wiederum in einem Haftreibstoß mündet. Die Ratterschwingungen bestehen dann im weiteren aus einer Abwechslung von Haftreibstößen und Flugphasen. Für die Stoßzahl Null ist der Expansionsimpuls gleich Null, so

daß keine Separation möglich ist. Das Getriebe verharrt am Ende der Expansionsphase im Zustand Haften, also in dem Zustand, den es auch am Ende der Kompressionsphase eingenommen hat. Die Feder des ratterschwingungsfähigen Getriebes baut durch die Antriebsgeschwindigkeit wieder eine Kraft auf, die auch wieder zum Zustandsübergang von Haften nach Separation führt, so daß die Schwingung von neuem beginnt. Lautet der Anfangszustand Separation, so entfällt im Vergleich zum Anfangszustand Haften die erste Haftphase. Der weitere Ablauf stimmt ab der zweiten Phase, der Flugphase, mit dem zuvor beschriebenen überein. Die experimentelle Validierung mit der präzisen opto-digitalen Meßtechnik hat die zulässigen, real auftretenden Zustandsübergänge am Beispiel des ratternden Schneckengetriebes bestätigt.

Die analytische Betrachtung setzt ideal starre Körper voraus. Damit ergibt sich die Rattergrenze, dem Übergang vom ratterfreien zum ratternden Betrieb, als scharfe Grenze, die durch die Füsigenformel gegeben ist. Sowohl die numerische Berechnung als auch der Versuch bestätigen diese Grenze. Oberhalb der durch die Füsigenformel gegebenen Grenze, beispielsweise für die Drehträgheit Θ_1 , tritt immer eindeutig Rattern auf. Allerdings existiert unterhalb der Grenze ein Übergangsbereich, indem mal Rattern und mal Gleiten vorhanden ist und der Zustand häufiger auftritt, an dessen Bereich man näher dran liegt. Das hat seine Ursache in den elastischen Körpern und in real auftretenden Ungenauigkeiten, wie z.B. ungleichmäßige Reibwerte oder unebene Oberflächen. Außerhalb dieses Übergangsbereichs sind die Verhältnisse aber eindeutig. Im Versuch liegt für die Drehträgheit $\Theta_1 = \Theta_1^0$ kein Rattern vor. Dagegen läßt sich für $\Theta_1 = \Theta_1^1$ Rattern in der beschriebenen Weise klar nachweisen.

Anhang A

Satz von Farkas

Der Satz von Farkas beschreibt ein Problem der linearen Algebra. Er sagt aus

$$\{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{x} \geq 0 \wedge \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{0}\} \Leftrightarrow \{\mathbf{a} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \wedge \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\}. \quad (\text{A.1})$$

Zur Veranschaulichung sei der Satz an einem Beispiel erläutert. Gegeben sei das Ungleichungssystem

$$\mathbf{B}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n}_1^T \mathbf{x} \leq 0 \\ \mathbf{n}_2^T \mathbf{x} \leq 0 \\ \mathbf{n}_3^T \mathbf{x} \leq 0 \end{array} \right\}. \quad (\text{A.3})$$

In der Abbildung A.1 ist das Ungleichungssystem, bestehend aus den drei Halbräumen $\mathbf{n}_1^T \mathbf{x} \leq 0$, $\mathbf{n}_2^T \mathbf{x} \leq 0$ und $\mathbf{n}_3^T \mathbf{x} \leq 0$, dargestellt. Die Normalenvektoren der die Halbräume begrenzenden Geradengleichungen weisen wegen des Kleinerzeichens vom jeweiligen zulässigen Gebiet weg. Den drei zulässigen Halbräumen ist der Lösungskegel gemeinsam. Im

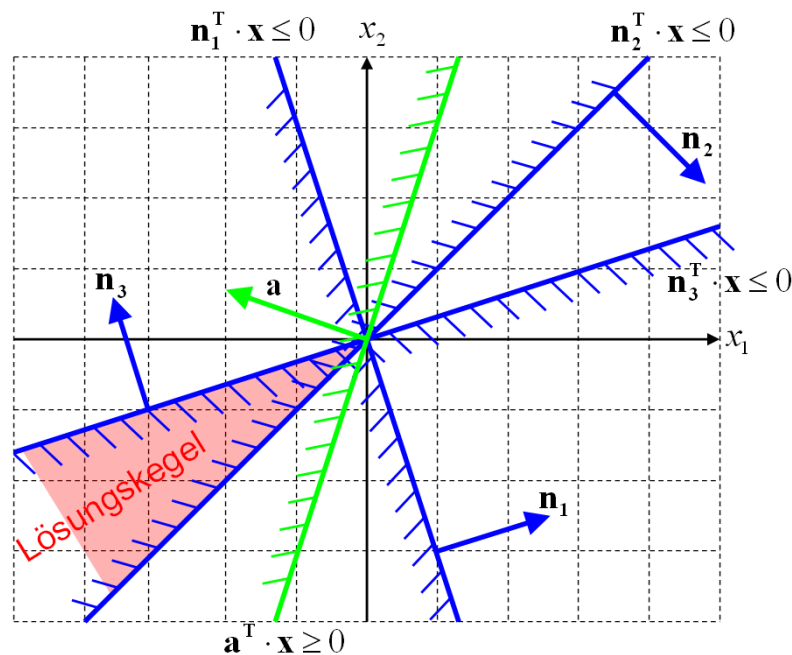


Abbildung A.1: Satz von Farkas

Lösungskegel liegen alle zulässigen Lösungen des Ungleichungssystem $\mathbf{B}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{0}$. Der Satz von Farkas sagt aus, daß eine zusätzliche Ungleichung $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq 0$ ebenfalls den kompletten Lösungskegel in seinem zulässigen Halbraum beinhaltet, wenn für ein beliebiges $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$ die Gleichung $\mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ erfüllt wird.

Beispiel:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{a} = -\mathbf{B}\mathbf{u} = - \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Demnach enthält auch der zulässige Halbraum der Ungleichung

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \geq 0 \quad (\text{A.5})$$

den gesamten Lösungskegel. Aufgrund des Größerzeichens weist in Abbildung A.1 der Normalenvektor \mathbf{a} in das zulässige Gebiet der Ungleichung $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq 0$. Der Normalenvektor \mathbf{a} berechnet sich aus der Linearkombination der negativen Normalenvektoren \mathbf{n}_j

$$\mathbf{a} = - \sum_{j=1}^3 \mathbf{n}_j \mathbf{u} = - [\mathbf{n}_1 \ \mathbf{n}_2 \ \mathbf{n}_3] \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

wobei $\mathbf{u} \geq 0$, damit \mathbf{a} auf der negativen (zulässigen) Seite aller Normalenvektoren \mathbf{n}_j liegt.

Anhang B

Verfahren von Lemke

Gegeben sei das lineare Komplementaritätsproblem (LCP) in seiner Standardform

$$\begin{aligned} \mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{z} &= \mathbf{q} \\ \mathbf{v}^T \mathbf{z} &= 0 \\ \mathbf{v} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{B.1}$$

mit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Zur Lösung des LCP sei das lineare Gleichungssystem in einem Tableau dargestellt

$$\Leftrightarrow (\mathbf{E} \quad -\mathbf{A}) \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \mathbf{q}$$
$$\begin{array}{cc|c} \mathbf{v} & \mathbf{z} & \\ \hline \mathbf{E} & -\mathbf{A} & \mathbf{q} \end{array} \tag{B.2}$$

Es ist $(\mathbf{E} \quad -\mathbf{A}) \in \mathbb{R}^{n,2n}$, d.h. das Gleichungssystem hat nur halb soviel Gleichungen wie Unbekannte. Allerdings kommen noch die n nichtlinearen, komplementären Gleichungen $\mathbf{v}^T \mathbf{z} = 0$ mit $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$ und $\mathbf{z} \geq \mathbf{0}$ hinzu, so daß das Problem lösbar ist. Die n komplementären Gleichungen bedingen, daß die Hälfte der Unbekannten gleich Null sind. Die rechte Seite ist die nichtnegative Linearkombination von n *Basisvektoren* aus der Menge der $2n$ Spaltenvektoren in $(\mathbf{E} \quad -\mathbf{A})$. Die *Basis* besteht aus so vielen Basisvektoren, wie die Lösung von Null verschieden Lösungswerte hat. Bei einer zulässigen Lösung erfüllt die Linearkombination der Basisvektoren mit den n Nicht-Null-Komponenten die rechte Seite, denn die Nicht-Basisvektoren ergeben mit den restlichen n komplementären Null-Komponenten den Nullvektor.

Das Verfahren von Lemke ist ein komplementärer Pivotalgorithmus und entspricht in seiner Art einem speziellen Simplexalgorithmus, der die nichtlinearen komplementären Bedingungen berücksichtigt. Wie bereits im Kapitel 3 beschrieben, gilt für den Fall der komplett positiven rechten Seite $\mathbf{q} \geq \mathbf{0}$ die triviale Lösung $\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$. I.d.R. ist die rechte Seite aber beliebig besetzt, so daß der Lemke-Algorithmus zum Einsatz kommt. Eine wichtige Eigenschaft des Lemke-Algorithmus gilt für die rechte Seite des Gleichungstableaus. Bis auf das Starttableau ist die rechte Seite „immer“ positiv! Diese Eigenschaft ist bei der Bestimmung der Zustandsübergänge entscheidend. Um die komplementäre Eigenschaft der Lösungskomponenten (v_j, z_j) im Algorithmus zu berücksichtigen, wird das Tableau B.2 um eine Spalte erweitert, die in jeder Zeile -1 stehen hat. In dem Starttableau bilden die Spaltenvektoren aus \mathbf{E} die Start-Basisvektoren. Die Spaltenvektoren aus $-\mathbf{A}$ und die z_0 -Spalte bilden die ersten Nicht-Basisvektoren. Das Starttableau lautet

$$\begin{array}{cc|c|c} \mathbf{v} & \mathbf{z} & z_0 & \\ \hline \mathbf{E} & -\mathbf{A} & -\mathbf{1} & \mathbf{q} \end{array} \tag{B.3}$$

Im ersten Schritt des Algorithmus muß die rechte Seite des Starttableaus positiv werden. Das erreicht man, indem man in der z_0 -Spalte die Zeile als Pivotzeile wählt, dessen rechte Seite am negativsten ist. Als Folge wird nach der Pivotisierung die rechte Seite positiv und somit zulässig. Die z_0 -Spalte tritt dabei in die Menge der Basisvektoren über und verdrängt den Spaltenvektor aus der Startbasis \mathbf{E} , der in der Zeile des Pivotelements die 1 stehen hat. Dieser Spaltenvektor gehört jetzt zur Menge der Nicht-Basisvektoren. Die Variablen der Nicht-Basisvektoren sind gleich Null.

Bei der Wahl der nächsten Pivotspalte wird nun die komplementäre Bedingung integriert. Gewählt wird nämlich derjenige Vektor der Nicht-Basisvektoren, deren Zwilling zuvor in die Menge der Nicht-Basisvektoren übergetreten ist. Damit wird erreicht, daß sich keine komplementären Zwillinge (v_j, z_j) gleichzeitig in der Menge der Nicht-Basisvektoren befinden. Der weitere Ablauf des Algorithmus erfolgt in der gleichen Weise. Entsprechend dem konventionellen Simplexverfahren wird die Zeile als Pivotzeile gewählt, dessen Element in der Pivotspalte positiv ist und dessen Quotient aus der rechten Seite und dem Pivotspaltenelement am kleinsten ist. Der Quotient ist natürlich immer positiv. Damit ist das nächste Pivotelement bestimmt und nach der Pivotisierung verläßt die aktuelle Pivotspalte die Menge der Nicht-Basisvektoren und tritt in die Menge der Basisvektoren über. Der Algorithmus läuft solange ab, bis entweder die z_0 -Spalte die Basis verläßt, dann hat man eine Lösung gefunden, oder bis in der Pivotspalte alle Elemente negativ sind, dann endet der Algorithmus auf einem sekundären Strahl [41] bzw. auf einer unbeschränkten F-Facette [1], d.h. der Lösungspfad liefert keine Lösung.

Der Algorithmus von Lemke

- SCHRITT 0: Ist q_j nichtnegativ für alle j , STOP.
 $\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ ist eine komplementäre Lösung.
- SCHRITT 1: Man pivotiere im Starttableau B.3 in der Spalte von z_0 und in der Zeile j mit $q_j = \min(q_i)$ und erhält ein zulässiges Tableau.
- SCHRITT 2: Man betrachte die Spalte der Variablen, deren komplementäre Variable im vorausgegangenen Schritt Nicht-Basisvariable geworden ist.
 Hat diese Spalte keinen positiven Eintrag, STOP. Abbruch ohne Lösung.
- SCHRITT 3: Man pivotiere in der betrachteten Spalte so, daß die Zulässigkeit erhalten bleibt. Ist z_0 noch Basisvariable, so gehe zu SCHRITT 2.
 Andernfalls ist eine komplementäre Lösung gefunden, STOP.

Der Algorithmus sei an einem kleinen Beispiel verdeutlicht. Die Basisvektoren seien durch runde Klammern und das Pivotelement durch einen Stern (*) gekennzeichnet.

Beispiel

$$\begin{array}{cc|cc|c|c}
 v_1 & v_2 & z_1 & z_2 & z_0 & \\
 \hline
 (1) & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\
 0 & (1) & -1 & 1 & -1* & -1
 \end{array}$$

v_1	v_2	z_1	z_2	z_0	
(1)	-1	2	1*	0	3
0	-1	1	-1	(1)	1
1	-1	2	(1)	0	3
1	-2	3*	0	(1)	4
1	1	0	(3)	-2	1
1	-2	(3)	0	1	4

(B.4)

Die künstliche Variable hat die Basis verlassen und der Lemke-Algorithmus stoppt mit einer komplementären Lösung

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

Wenn der Algorithmus keine Lösung findet, heißt das aber nicht, daß keine Lösung existiert. Es stellt sich die Frage nach der Menge der Vektoren $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$, für die das lineare Komplementaritätsproblem eine Lösung besitzt. Die Lösung eines LCP stellt die rechte Seite als nichtnegative Linearkombination der Basisvektoren dar. Einen Überblick über den Lösungsraum für die rechte Seite $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ erhält man, wenn man die komplementäre Basis als Ursprungskegel im (q_1, q_2) -Raum darstellt. Im Beispiel gibt es insgesamt $2^2 = 4$ mögliche komplementäre Basispaare bzw. Ursprungskegel

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} q_1 \geq 0 \\ q_2 \geq 0 \end{pmatrix} & \text{C1,} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} q_2 \leq \frac{1}{2}q_1 \\ q_2 \geq 0 \end{pmatrix} & \text{C2,} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} q_1 \geq 0 \\ q_2 \geq -q_1 \end{pmatrix} & \text{C3,} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} q_1 \leq \frac{1}{2}q_1 \\ q_2 \geq -q_1 \end{pmatrix} & \text{C4.} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Die Abbildung B.1 zeigt die Ursprungskegel C1 - C4 im (q_1, q_2) -Raum. Die Ursprungskegel der Matrix $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ werden gebildet aus den Basisvektoren der jeweiligen komplementären Variablen, die nicht Null sind. Bei vier Variablen gibt es zwei Basisvektoren, die einen Kegel aufspannen. So spannen beispielsweise die Basisvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Variablen z_1 und z_2 den Ursprungskegel C4 auf. In Abbildung B.1 wird sichtbar, daß die Ursprungskegel des Beispiels nicht den gesamten (q_1, q_2) -Raum ausfüllen und daß die Kegel sich überdecken. Aus der Tatsache, daß es Bereiche gibt, die von keinem Ursprungskegel abgedeckt werden, folgt, daß es nicht für alle rechten Seiten (q_1, q_2) eine Lösungen gibt. Der Punkt \mathbf{Q}_4 ist ein solcher Punkt, wo keine zulässige Lösung des LCP existiert. Dagegen gibt es Bereichen, die von mehreren Kegeln abgedeckt werden. Dort gibt es mehrere Lösungen. In den Punkten \mathbf{Q}_2 und \mathbf{Q}_3 hat das LCP zwei Lösungen, und im Punkt \mathbf{Q}_1 existieren sogar vier Lösungen.

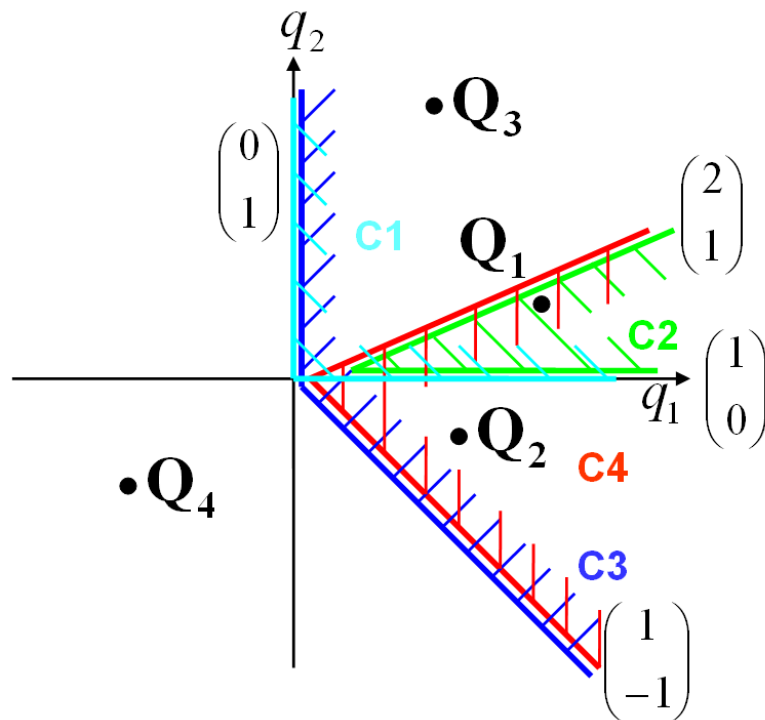


Abbildung B.1: Ursprungskegel C1 - C4 des LCP und verschieden rechte Seiten \mathbf{q}

Ein LCP mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ hat insgesamt 2^n Kegel. Das Lösungsverhalten wird dabei von der Matrix \mathbf{A} bestimmt. Weitere Informationen zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen eines LCP findet man in [9, 45].

Anhang C

Analytische Berechnung Kontakt

C.1 Analytische Berechnung Haften Fall 2

Fall 2 (1.Stufe): $w > \frac{F m_2 c-s}{k m_1 c+s}$

$m_1 \ddot{g}_N$	$m_1 \ddot{g}_T^+$	$m_1 \ddot{g}_T^-$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N	$\lambda_H^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0
(1)	0	0	0	0	$-\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_2}$	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	0	0	-1
0	(1)	0	0	0	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$-\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	-1	0	-1*
0	0	(1)	0	0	$-\frac{m_2}{sc(m_1 - m_2)}$	$\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$-\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	-1	-1
0	0	0	(1)	0	$-\mu$	1	0	0	0	-1
0	0	0	0	(1)	$-\mu$	0	1	0	0	-1
										$-\frac{F m_2 c + k w m_1 s}{m_2}$
										$-\frac{F m_2 s + k w m_1 c}{m_2}$
										$\frac{F m_2 s + k w m_1 c}{m_2}$
										0
										0

Das mit dem Stern gekennzeichnete Pivotelement verdrängt bei der Pivotisierung die Basisvariable ($m_1 \ddot{g}_T^+$) aus der Menge der Basisvariablen. Dann muß der Zwilling $\lambda_H^{(+)}$ aus der Menge der Nichtbasisvariablen entfernt werden. Die neue Pivotspalte ist demnach die Spalte $\lambda_H^{(+)}$.

Fall 2 (2. Stufe): $w > \frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c-s}{c+s}$

$m_1 \ddot{g}_N$	$m_1 \ddot{g}_T^+$	$m_1 \ddot{g}_T^-$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N	$\lambda_H^{(+)*}$	$\lambda_H^{(-)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0
(1)	-1	0	0	0	$-\frac{M_1}{m_2}$	$\frac{M_2}{m_2}$	$-\frac{M_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	1	0	$\frac{F m_2 s + k w m_1 c - F m_2 c + k w m_1 s}{m_2}$
0	-1	0	0	0	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$-\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	1	0	$\frac{F m_2 s + k w m_1 c}{m_2}$
0	-1	(1)	0	0	$-\frac{2 sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$\frac{m_2}{2 m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$-\frac{2 m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	1	-1	$\frac{2 F m_2 s + k w m_1 c}{m_2}$
0	-1	0	(1)	0	$-\mu - \frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$\frac{m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$-\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	1	0	$\frac{F m_2 s + k w m_1 c}{m_2}$
0	-1	0	0	(1)	$-\mu - \frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{m_2 - (m_1 c^2 + m_2 s^2)}{m_2}$	1	0	$\frac{F m_2 s + k w m_1 c}{m_2}$

Auch im Fall $w > \frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c-s}{c+s}$ ist die rechte Seite natürlich positiv.

Auswahl Pivotzeile im Tableau Fall 2 (2. Stufe):

	positiver Koeffizient?	positiv, wenn	kleinster positiver Quotient
1. Zeile:	$\frac{M_2}{m_2} > 0$	\Rightarrow	$\frac{F m_2 s + k w m_1 c - F m_2 c + k w m_1 s}{M_2} > 0$
2. Zeile:	$\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2} > 0$	\Rightarrow	$\frac{F m_2 s + k w m_1 c}{m_1 c^2 + m_2 s^2} > 0$
3. Zeile:	$\frac{2 m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2} > 0$	\Rightarrow	$\frac{F m_2 s + k w m_1 c}{m_1 c^2 + m_2 s^2} > 0$
4. Zeile:	$\frac{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2} > 0$	\Rightarrow	$\frac{F m_2 s + k w m_1 c}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2} > 0$
5. Zeile:	$\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2} > 0$	\Rightarrow	$\frac{F m_2 s + k w m_1 c}{m_1 c^2 + m_2 s^2} > 0$

Vergleich der Zeilen:

2./3./5. Zeile \wedge 4. Zeile:	$\frac{F m_2 s + k w m_1 c}{m_1 c^2 + m_2 s^2} > \frac{F m_2 s + k w m_1 c}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	\Leftrightarrow	$m_2 > 0$ ✓
1. Zeile \wedge 4. Zeile:	$\frac{F m_2 s + k w m_1 c}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2} > \frac{F m_2 s + k w m_1 c - F m_2 c + k w m_1 s}{M_2}$	\Leftrightarrow	$\frac{F}{k} \frac{m_1 c + m_2 c - m_2 s}{2 m_1 s + m_1 c} > w$

Es gilt der Zusammenhang: $\frac{F}{k} \frac{m_1 c + m_2 c - m_2 s}{2 m_1 s + m_1 c} > \frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c-s}{c+s}$.

Der Vergleich zeigt, daß 2 verschiedene Fälle unterschieden werden müssen:

Die 1. Zeile muß gewählt werden, wenn: $\frac{F}{k} \frac{m_1 c + m_2 c - m_2 s}{2m_1 s + m_1 c} > w > \frac{F}{k} \frac{m_2 c - s}{m_1 c + s}$ \Rightarrow Fall 2.1

Die 4. Zeile muß gewählt werden, wenn: $w > \frac{F}{k} \frac{m_1 c + m_2 c - m_2 s}{2m_1 s + m_1 c}$ \Rightarrow Fall 2.4

Fall 2.1 (3. Stufe): $\frac{F}{k} \frac{m_1 c + m_2 c - m_2 s}{2m_1 s + m_1 c} > w > \frac{F}{k} \frac{m_2 c - s}{m_1 c + s}$

$m_1 \ddot{g}_N$	$m_1 \ddot{g}_T^+$	$m_1 \ddot{g}_T^-$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_{N^*}	$\lambda_H^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0
$\frac{m_2}{M_2}$	$-\frac{m_2}{M_2}$	0	0	0	$-\frac{M_1}{M_2}$	(1)	-1	$\frac{m_2}{M_2}$	0	0
$-\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{M_2}$	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{M_2}$	0	0	0	$\frac{m_1}{M_2}$	0	0	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{M_2}$	0	(1)
$-\frac{2m_1 c^2 + m_2 s^2}{M_2}$	$\frac{M_4}{M_2}$	(1)	0	0	$2\frac{m_1}{M_2}$	0	0	$-\frac{M_4}{M_2}$	-1	0
$-\frac{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}{M_2}$	$\frac{m_2 - sc(m_1 - m_2)}{M_2}$	0	(1)	0	$-\mu + \frac{m_1 + M_1}{M_2}$	0	1	$\frac{m_2 + sc(m_1 - m_2)}{M_2}$	0	0
$-\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{M_2}$	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{M_2}$	0	0	(1)	$-\mu + \frac{m_1}{M_2}$	0	1	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{M_2}$	0	0

Auswahl der Pivotzeile im Tableau Fall 2.1 (3. Stufe):

1. Zeile:	$-\frac{M_1}{M_2} < 0 \Rightarrow$	$\underbrace{\text{positiver Koeffizient?}}_{\text{positiv, wenn negativ!}}$	$\underbrace{\text{kleinster positiver Quotient}}$
2. Zeile:	$\frac{m_1}{M_2} > 0 \Rightarrow$	gilt immer!	$\frac{Fm_1 c - kwm_1 s}{m_1} > 0$
3. Zeile:	$2\frac{m_1}{M_2} > 0 \Rightarrow$	gilt immer!	$\frac{Fm_1 c - kwm_1 s}{m_1} > 0$
4. Zeile:	$-\mu + \frac{m_1 + M_1}{M_2} > 0 \Rightarrow$	$\frac{m_1 + M_1}{M_2} > \mu$	$\frac{(Fm_1 c - kwm_1 s) - (Fm_2 s + kwm_1 c - Fm_2 c + kwm_1 s)}{m_1 + M_1 - \mu M_2} > 0$
5. Zeile:	$-\mu + \frac{m_1}{M_2} > 0 \Rightarrow$	$\frac{m_1}{M_2} > \mu$	$\frac{Fm_1 c - kwm_1 s}{m_1 - \mu M_2} > 0$

Vergleich der Zeilen:

$$2./3. \text{ Zeile} \wedge 4. \text{ Zeile: } \frac{(Fm_1c - kwm_1s) - (Fm_2s + kwm_1c - Fm_2c + kwm_1s)}{m_1 + M_1 - \mu M_2} > \frac{Fm_1c - kwm_1s}{m_1} \Leftrightarrow \frac{F}{k} \frac{\mu c - s}{\mu s + c} > w$$

$$4. \text{ Zeile} \wedge 5. \text{ Zeile: } \frac{Fm_1c - kwm_1s}{m_1 - \mu M_2} > \frac{(Fm_1c - kwm_1s) - (Fm_2s + kwm_1c - Fm_2c + kwm_1s)}{m_1 - \mu M_2 + M_1} \Leftrightarrow \text{gilt immer!}$$

Es gilt: $\frac{F}{k} \frac{\mu c - s}{\mu s + c} > \frac{F}{k} \frac{m_2 c - s}{m_1 c + s}$. Die Zeile 3 führt zu keiner Lösung. Der Vergleich zeigt, daß 2 verschiedene Fälle zu unterscheiden sind.

$$\text{Die 2. Zeile muß gewählt werden, wenn: } \left\{ \begin{array}{l} \frac{F}{k} \frac{m_1c + m_2c - m_2s}{2m_1s + m_1c} > w > \frac{F}{k} \frac{\mu c - s}{\mu s + c} \wedge \mu > \frac{m_1 + M_1}{M_2} \\ \frac{F}{k} \frac{\mu c - s}{\mu s + c} > w > \frac{F}{k} \frac{m_2 c - s}{m_1 c + s} \end{array} \right. \Rightarrow \text{Fall 2.1.2}$$

$$\text{Die 4. Zeile muß gewählt werden, wenn: } \frac{F}{k} \frac{m_1c + m_2c - m_2s}{2m_1s + m_1c} > w > \frac{F}{k} \frac{\mu c - s}{\mu s + c} \wedge \mu < \frac{m_1 + M_1}{M_2} \Rightarrow \text{Fall 2.1.4}$$

Fall 2.1.2 (4. Stufe): $\frac{F}{k} \frac{m_1c + m_2c - m_2s}{2m_1s + m_1c} > w > \frac{F}{k} \frac{\mu c - s}{\mu s + c}$ wenn $\mu > \frac{m_1 + M_1}{M_2}$
 $\frac{F}{k} \frac{\mu c - s}{\mu s + c} > w > \frac{F}{k} \frac{m_2 c - s}{m_1 c + s}$

$m_1 \dot{g}_N$	$m_1 \dot{g}_T^+$	$m_1 \dot{g}_T^-$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N	$\lambda_H^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0^*
$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	$-\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_1}$	0	0	0	0	(1)	-1	$\frac{m_1}{m_1 s^2 + m_2 c^2}$	0	$\frac{M_1}{m_1}$
$-\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_1}$	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	0	0	(1)	0	0	0	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	0	$\frac{M_2}{m_1}$
0	1	(1)	0	0	0	0	0	$\frac{m_1}{m_1}$	-1	$\frac{m_1}{m_1}$
$-\frac{M_5}{m_1}$	$-\frac{M_6}{m_1}$	0	(1)	0	0	0	1	$\frac{M_6}{m_1}$	0	-2
$-\mu \frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_1}$	$-\mu \frac{sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	0	0	(1)	0	0	1	$\frac{\mu sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	0	$\frac{\mu M_2 - m_1 - M_1}{m_1}$
										$\frac{\mu M_2 - m_1}{m_1}$
										$\mu(Fc - kws) - (Fs + kwc)$
										$\mu(Fc - kws)$

Die Variable z_0 hat die Basis verlassen und der Algorithmus endet. Aus dem Tableau entnimmt man für den Fall 2.1.2 die Lösung

$\dot{g}_N = 0$	$\lambda_N = Fc - kws > 0$
$\dot{g}_T^+ = 0$	$\lambda_H^{(+)} = Fs + kws > 0$
$\dot{g}_T^- = 0$	$\lambda_H^{(-)} = 0$
$\lambda_{H0}^{(-)} = \mu \lambda_N - \lambda_T^{(+)} > 0$	$z^- = 0$
$\lambda_{H0}^{(+)} = \mu \lambda_N > 0$	$z^+ = 0$

(C.1)

Für den Fall 2.1.2 bleibt der **Haftzustand** erhalten, wie es die komplementären Variablen in Tabelle C.1 beweisen.

Fall 2.1.4 (4. Stufe): $\frac{F}{k} \frac{m_1 c + m_2 c - m_2 s}{2m_1 s + m_1 c} > w > \frac{F}{k} \frac{\mu c - s}{\mu s + c} \wedge \mu < \frac{m_1 + M_1}{M_2}$

$m_1 \ddot{y}_N$	$m_1 \ddot{y}_T^+$	$m_1 \ddot{y}_T^-$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N	$\lambda_H^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$	$m_1 z^+ *$	$m_1 z^+$	z_0
$-\frac{\mu m_2 + sc(m_1 - m_2)}{m_1 + M_1 - \mu M_2}$	$\frac{\mu m_2 - m_1 s^2 - m_2 c^2}{m_1 + M_1 - \mu M_2}$	0	$\frac{M_1}{m_1 + M_1 - \mu M_2}$	0	0	(1)	$\frac{\mu M_2 - m_1}{m_1 + M_1 - \mu M_2}$	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{m_1 + M_1 - \mu M_2}$	0	$\frac{m_1(Fs + kwc) + \mu[Fm_2(c-s) - kwm_1(c+s)]}{m_1 + M_1 - \mu M_2}$
$\frac{M_5}{m_1 + M_1 - \mu M_2}$	$\frac{m_1 + M_1 - \mu M_2}{M_6}$	0	$\frac{-m_1}{m_1 + M_1 - \mu M_2}$	0	0	0	$\frac{-m_1}{m_1 + M_1 - \mu M_2}$	$-\frac{m_1 + M_1 - \mu M_2}{M_6}$	0	$\frac{(Fs + kwc) - \mu(Fc - kus)}{m_1 + M_1 - \mu M_2}$
$2 \frac{M_5}{m_1 + M_1 - \mu M_2}$	$\frac{m_1 + M_1 - \mu M_2}{c(c+s)(m_1 - m_2) - \mu M_4}$	(1)	$\frac{-2m_1}{m_1 + M_1 - \mu M_2}$	0	0	0	$\frac{-2m_1}{m_1 + M_1 - \mu M_2}$	$\frac{m_1 + M_1 - \mu M_2}{\mu M_4 - c(c+s)(m_1 - m_2)}$	-1	$\frac{2m_1(Fs + kwc) - \mu(Fc - kus)}{m_1 + M_1 - \mu M_2}$
$-\frac{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_1 + M_1 - \mu M_2}$	$\frac{m_2 - sc(m_1 - m_2)}{m_1 + M_1 - \mu M_2}$	0	$\frac{M_2}{m_1 + M_1 - \mu M_2}$	0	(1)	0	$\frac{M_2}{m_1 + M_1 - \mu M_2}$	$\frac{sc(m_1 - m_2) - m_2}{m_1 + M_1 - \mu M_2}$	0	$\frac{m_1(Fc - kus) + [Fm_2(c-s) - kwm_1(c+s)]}{m_1 + M_1 - \mu M_2}$
$-\frac{\mu m_2 + sc(m_1 - m_2)}{m_1 + M_1 - \mu M_2}$	$\frac{\mu m_2 - m_1 s^2 - m_2 c^2}{m_1 + M_1 - \mu M_2}$	0	$\frac{\mu M_2 - m_1}{m_1 + M_1 - \mu M_2}$	(1)	0	0	$\frac{M_1}{m_1 + M_1 - \mu M_2}$	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{m_1 + M_1 - \mu M_2}$	0	$\frac{m_1(Fs + kwc) + \mu[Fm_2(c-s) - kwm_1(c+s)]}{m_1 + M_1 - \mu M_2}$

Auswahl der Pivotzeile im Tableau Fall 2.1.4 (4. Stufe):

1. Zeile:	$\underbrace{\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{m_1 + M_1 - \mu M_2} > 0}_{\text{positiver Koeffizient?}} \Rightarrow$	$\underbrace{\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_2} > \mu}_{\text{positiv, wenn}} \Rightarrow$	$\underbrace{\frac{m_1(Fs + kwc) + \mu[Fm_2(c-s) - kwm_1(c+s)]}{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2} > 0}_{\text{kleinster positiver Quotient}}$
2. Zeile:	$-\frac{M_6}{m_1 + M_1 - \mu M_2} < 0 \Rightarrow$	negativ!	
3. Zeile:	$\frac{\mu M_4 - c(c+s)(m_1 - m_2)}{m_1 + M_1 - \mu M_2} < 0 \Rightarrow$	negativ!	
4. Zeile:	$\frac{sc(m_1 - m_2) - m_2}{m_1 + M_1 - \mu M_2} > 0 \Rightarrow$	gilt immer!	$\frac{m_1(Fc - kus) + [Fm_2(c-s) - kwm_1(c+s)]}{sc(m_1 - m_2) - m_2} > 0$
5. Zeile:	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{m_1 + M_1 - \mu M_2} > 0 \Rightarrow$	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_2} > \mu \Rightarrow$	$\frac{m_1(Fs + kwc) + \mu[Fm_2(c-s) - kwm_1(c+s)]}{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2} > 0$

Vergleich der Zeilen:

$$1./5. \text{ Zeile} \wedge 4. \text{ Zeile: } \frac{m_1(Fs + kwc) + \mu[Fm_2(c-s) - kwm_1(c+s)]}{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2} > \frac{m_1(Fc - kus) + [Fm_2(c-s) - kwm_1(c+s)]}{sc(m_1 - m_2) - m_2} \Leftrightarrow w > \frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1 s}$$

Es gilt: $\frac{F}{k} \frac{\mu c - s}{\mu s + c} > \frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1 s}$. Die 4. Zeile muß gewählt werden. \Rightarrow Fall 2.1.4.4

Fall 2.1.4.4 (5. Stufe): $\frac{F}{k} \frac{m_1 c + m_2 c - m_2 s}{2m_1 s + m_1 c} > w > \frac{F}{k} \frac{\mu c - s}{\mu s + c} \wedge \mu < \frac{m_1 + M_1}{M_2}$

$m_1 \dot{g}_N^*$	$m_1 \dot{g}_T^+$	$m_1 \ddot{g}_T^-$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N	$\lambda_H^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0
$\frac{m_2}{sc(m_1 - m_2) - m_2}$	0	0	$\frac{-m_2}{sc(m_1 - m_2) - m_2}$	0	$\frac{\mu m_2 - m_1 s^2 - m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2) - m_2}$	(1)	0	0	0	$\frac{-Fm_2 c + km_1 s}{sc(m_1 - m_2) - m_2}$
$\frac{m_2}{sc(m_1 - m_2) - m_2}$	0	0	$\frac{-sc(m_1 - m_2)}{sc(m_1 - m_2) - m_2}$	0	$\frac{M_6}{sc(m_1 - m_2) - m_2}$	0	0	0	0	(1)
$\frac{m_2}{-(m_1 - m_2)c^2}$	0	(1)	$\frac{M_4}{sc(m_1 - m_2) - m_2}$	0	$\frac{sc(m_1 - m_2) - m_2}{c(c+s)(m_1 - m_2) - \mu M_4}$	0	0	0	-1	0
$\frac{m_2}{sc(m_1 - m_2) - m_2}$	-1	0	$\frac{M_2}{sc(m_1 - m_2) - m_2}$	0	$\frac{sc(m_1 - m_2) - m_2}{m_1 + M_1 - \mu M_2}$	0	$\frac{M_2}{sc(m_1 - m_2) - m_2}$	(1)	0	0
$\frac{m_2}{sc(m_1 - m_2) - m_2}$	0	0	$\frac{-sc(m_1 - m_2)}{sc(m_1 - m_2) - m_2}$	(1)	$\frac{\mu m_2 - m_1 s^2 - m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2) - m_2}$	0	0	0	0	0
$\frac{m_2}{sc(m_1 - m_2) - m_2}$	0	0	$\frac{-sc(m_1 - m_2)}{sc(m_1 - m_2) - m_2}$	(1)	$\frac{sc(m_1 - m_2) - m_2}{sc(m_1 - m_2) - m_2}$	0	0	0	0	0

Auswahl der Pivotzeile im Tableau Fall 2.1.4.4 (5. Stufe):

	positiver Koeffizient?	positiv, wenn	kleinster positiver Quotient
1. Zeile:	$\frac{m_2}{sc(m_1 - m_2) - m_2} > 0 \Rightarrow$	gilt immer!	$\frac{-Fm_2 c + km_1 s}{m_2} > 0$
2. Zeile:	$\frac{m_2}{sc(m_1 - m_2) - m_2} > 0 \Rightarrow$	gilt immer!	$\frac{-Fm_2 c + km_1 s}{m_2} > 0$
3. Zeile:	$-\frac{(m_1 - m_2)c^2}{sc(m_1 - m_2) - m_2} < 0 \Rightarrow$	negativ!	
4. Zeile:	$-\frac{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}{sc(m_1 - m_2) - m_2} < 0 \Rightarrow$	negativ!	
5. Zeile:	$\frac{m_2}{sc(m_1 - m_2) - m_2} > 0 \Rightarrow$	gilt immer!	$\frac{-Fm_2 c + km_1 s}{m_2} > 0$

1. Zeile und 5. Zeile führen zu keiner Lösung, der Algorithmus endet an einer sogenannten unbeschränkten F-Facetten [1], was gleichbedeutend ist mit einem sekundären Strahl [41]. Deshalb wird die 2. Zeile gewählt. \Rightarrow Fall 2.1.4.4.2

Fall 2.1.4.4.2 (6. Stufe): $\frac{F}{k} \frac{m_1 c + m_2 c - m_2 s}{2m_1 s + m_1 c} > w > \frac{F}{k} \frac{\mu c - s}{\mu s + c} \wedge \mu < \frac{m_1 + M_1}{M_2}$

$m_1 \ddot{g}_N$	$m_1 \ddot{g}_T^+$	$m_1 \ddot{g}_T^-$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N	$\lambda_H^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0^*
0	0	0	1	0	$-\mu$	(1)	0	0	0	-1
(1)	0	0	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	0	$\frac{M_6}{m_2}$	0	0	0	0	$\frac{sc(m_1 - m_2) - m_2}{m_2}$
0	0	(1)	$-\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	0	$\frac{M_5}{m_2}$	0	0	0	-1	$\frac{(m_1 - m_2)c^2}{m_2}$
0	-1	0	$-\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	0	$\frac{M_5}{m_2}$	0	$\frac{M_2}{m_2}$	(1)	0	$\frac{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$
0	0	0	0	(1)	$-\mu$	0	0	0	0	-1
										$\frac{-Fm_2 c + kwm_1 s}{m_2}$
										$\frac{Fm_2 s + kwm_1 c}{m_2}$
										$\frac{Fm_2 s + kwm_1 c}{m_2}$
										0

Die Variable z_0 hat die Basis verlassen und der Algorithmus endet. Aus dem Tableau entnimmt man für den Fall 2.1.4.4.2 die Lösung

$\ddot{g}_N = \frac{-Fm_2 c + kwm_1 s}{m_1 m_2} > 0$	$\lambda_N = 0$
$\ddot{g}_T^+ = 0$	$\lambda_H^+ = 0$
$\ddot{g}_T^- = \frac{Fm_2 s + kwm_1 c}{m_1 m_2} > 0$	$\lambda_H^- = 0$
$\lambda_{H0}^{(-)} = 0$	$z^- = \frac{Fm_2 s + kwm_1 c}{m_1 m_2} > 0$
$\lambda_{H0}^{(+)} = 0$	$z^+ = 0$

(C.2)

Für den Fall 2.1.4.4.2 erfolgt der Zustandsübergang vom Zustand *Haften* zum Zustand *Separation*. Die Tabelle C.2 zeigt die komplexeren Variablen dieser Lösung.

Fall 2.4 (3. Stufe): $w > \frac{F}{k} \frac{m_1 c + m_2 c - m_2 s}{2m_1 s + m_1 c}$

$m_1 \ddot{g}_N$	$m_1 \ddot{g}_T^+$	$m_1 \ddot{g}_T^-$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N	$\lambda_H^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0
(1)	$\frac{sc(m_1 - m_2) - m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	$-\frac{M_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	$\frac{\mu M_2 - m_1 - M_1}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	$-\frac{M_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{m_2 - sc(m_1 - m_2)}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	0
0	$\frac{-m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	$\frac{M_5}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	$\frac{M_5}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	$-\frac{M_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	(1)
0	$\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2 - m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	(1)	$\frac{2M_5}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	$\frac{2M_5}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	$-\frac{2(m_1 c^2 + m_2 s^2)}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{m_2 - m_1 c^2 - m_2 s^2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	-1	0
0	$\frac{-m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	$\frac{m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	$\frac{\mu m_2 + sc(m_1 - m_2)}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	(1)	$-\frac{M_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	0
0	$\frac{-m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	$\frac{m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	(1)	$\frac{\mu m_2 + sc(m_1 - m_2)}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	$-\frac{M_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	0
										$\frac{kwm_1(c+s) - Fm_2(c-s) - m_1(Fc - kws)}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$
										$\frac{Fm_2 s + kwm_1 c}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$
										$\frac{2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$
										$\frac{Fm_2 s + kwm_1 c}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$
										$\frac{Fm_2 s + kwm_1 c}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$
										0

Auswahl der Pivotzeile im Tableau Fall 2.4 (3.Stufe):

	positiver Koeffizient?	positiv, wenn	kleinster positiver Quotient
1. Zeile:	$\frac{m_2 - sc(m_1 - m_2)}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2} < 0 \Rightarrow$	negativ!	
2. Zeile:	$\frac{m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2} > 0 \Rightarrow$	gilt immer!	$\frac{Fm_2s + kwm_1c}{m_2} > 0$
3. Zeile:	$\frac{m_2 - (m_1 c^2 + m_2 s^2)}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2} < 0 \Rightarrow$	negativ!	
4. Zeile:	$\frac{m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2} > 0 \Rightarrow$	gilt immer!	$\frac{Fm_2s + kwm_1c}{m_2} > 0$
5. Zeile:	$\frac{m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2} > 0 \Rightarrow$	gilt immer!	$\frac{Fm_2s + kwm_1c}{m_2} > 0$

4. Zeile und 5. Zeile führen zu keiner Lösung. Deshalb wird die 2. Zeile gewählt. \Rightarrow Fall 2.4.2

Fall 2.4.2 (4. Stufe): $w > \frac{F}{k} \frac{m_1 c + m_2 c - m_2 s}{2m_1 s + m_1 c}$

	$m_1 \ddot{g}_N$	$m_1 \ddot{g}_T^+$	$m_1 \ddot{g}_T^-$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$	$\lambda_H^{(+)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0^*
(1)	0	0	0	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	0	0	$\frac{sc(m_1 - m_2) - m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$
0	-1	0	0	$-\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$-\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$-\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$-\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	(1)	0	$\frac{m_2}{Fm_2s + kwm_1c}$
0	0	(1)	0	$-\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$-\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$-\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$-\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	-1	$\frac{m_2}{Fm_2s + kwm_1c}$
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	(1)	(1)	1	1	0	0	-1

Die Variable z_0 hat die Basis verlassen und der Algorithmus endet. Aus dem Tableau entnimmt man für den Fall 2.4.2 die Lösung

$\ddot{g}_N = \frac{-Fm_2c + kwm_1s}{m_1m_2} > 0$ $\ddot{g}_T^+ = 0$ $\ddot{g}_T^- = \frac{Fm_2s + kwm_1c}{m_1m_2} > 0$ $\lambda_{H0}^{(-)} = 0$ $\lambda_{H0}^{(+)} = 0$	$\lambda_N = 0$ $\lambda_H^{(+)} = 0$ $\lambda_H^{(-)} = 0$ $z^- = \frac{Fm_2s + kwm_1c}{m_1m_2} > 0$ $z^+ = 0$
---	---

(C.3)

Nach Tabelle C.3 erfolgt für den Fall 2.4.2 ein Zustandsübergang vom Zustand *Haften* zum Zustand *Separation*.

C.2 Analytische Berechnung Haften Fall 3

Fall 3 (1. Stufe): $-\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c+s}{c-s} > w$

$m_1 \ddot{g}_N$	$m_1 \ddot{g}_T^+$	$m_1 \ddot{g}_T^-$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N	$\lambda_H^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0
(1)	0	0	0	0	$-\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_2}$	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	0	0	-1
0	(1)	0	0	0	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$-\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	$\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	-1	0	-1
0	0	(1)	0	0	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	$-\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	0	-1	-1*
0	0	0	(1)	0	$-\mu$	1	0	0	0	-1
0	0	0	0	(1)	$-\mu$	0	1	0	0	-1

Das Pivotelement verdrängt bei der Pivotisierung die Basisvariable ($m_1 \ddot{g}_T^-$) aus der Menge der Basisvariablen. Dann muß der Zwilling $\lambda_H^{(-)}$ aus der Menge der Nichtbasisvariablen entfernt werden. Die neue Pivotspalte ist die Spalte $\lambda_H^{(-)}$.

Fall 3 (2. Stufe): $-\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c+s}{c-s} > w$

$m_1 \ddot{g}_N$	$m_1 \ddot{g}_T^+$	$m_1 \ddot{g}_T^-$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N	$\lambda_H^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)*}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0
(1)	0	-1	0	0	$-\frac{M_3}{m_2}$	$-\frac{M_4}{m_2}$	$\frac{M_4}{m_2}$	0	1	0
0	(1)	-1	0	0	$2 \frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$-\frac{2}{m_2} \frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	$2 \frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	-1	1	0
0	0	-1	0	0	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$-\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	$\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	0	1	(1)
0	0	-1	(1)	0	$-\mu + \frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$\frac{m_2 - (m_1 c^2 + m_2 s^2)}{m_2}$	$\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	0	1	0
0	0	-1	0	(1)	$-\mu + \frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$-\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	$\frac{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2}$	0	1	0

Für $-\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c+s}{c-s} > w$ ist die rechte Seite positiv.

Auswahl der Pivotzeile im Tableau Fall 3 (2.Stufe):

	positiver Koeffizient?	positiv, wenn	kleinster positiver Quotient
1. Zeile:	$\frac{M_4}{m_2} > 0$	\Rightarrow gilt immer!	$\frac{-Fm_2(c+s) - kwm_1(c-s)}{M_4} > 0$
2. Zeile:	$2 \frac{m_1c^2 + m_2s^2}{m_2} > 0$	\Rightarrow gilt immer!	$-\frac{Fm_2s + km_1c}{m_1c^2 + m_2s^2} > 0$
3. Zeile:	$\frac{m_1c^2 + m_2s^2}{m_2} > 0$	\Rightarrow gilt immer!	$-\frac{Fm_2s + km_1c}{m_1c^2 + m_2s^2} > 0$
4. Zeile:	$\frac{m_1c^2 + m_2s^2}{m_2} > 0$	\Rightarrow gilt immer!	$-\frac{Fm_2s + km_1c}{m_1c^2 + m_2s^2} > 0$
5. Zeile:	$\frac{m_2 + m_1c^2 + m_2s^2}{m_2} > 0$	\Rightarrow gilt immer!	$-\frac{Fm_2s + km_1c}{m_2 + m_1c^2 + m_2s^2} > 0$

Vergleich der Zeilen:

$$1. \text{ Zeile} \wedge 5. \text{ Zeile: } -\frac{Fm_2s + km_1c}{m_2 + m_1c^2 + m_2s^2} > -\frac{Fm_2(c+s) - kwm_1(c-s)}{M_4} \Leftrightarrow F(m_1c + m_2c + m_2s) > kwm_1(2s - c)$$

$$2./3./4. \text{ Zeile} \wedge 5. \text{ Zeile: } -\frac{Fm_2s + km_1c}{m_1c^2 + m_2s^2} > -\frac{Fm_2s + km_1c}{m_2 + m_1c^2 + m_2s^2} \Leftrightarrow w < -\frac{F}{k} \frac{m_2s}{m_1c}$$

Drei Fälle sind zu unterscheiden.

Die 1. Zeile muß gewählt werden, wenn:
$$\begin{cases} \frac{F}{k} \frac{m_1c + m_2c + m_2s}{m_1(2s-c)} > -\frac{F}{k} \frac{m_2c+s}{m_1c} > w \\ -\frac{F}{k} \frac{m_2c+s}{m_1c-s} > w > -\frac{F}{k} \frac{m_1c + m_2c + m_2s}{m_1(c-2s)} \end{cases} \wedge \frac{s}{c} > \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Fall 3.1a}$$

Die 5. Zeile muß gewählt werden, wenn:
$$-\frac{F}{k} \frac{m_1c + m_2c + m_2s}{m_1(c-2s)} > w \wedge \frac{s}{c} < \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Fall 3.1b}$$

Die 5. Zeile muß gewählt werden, wenn:
$$-\frac{F}{k} \frac{m_1c + m_2c + m_2s}{m_1(c-2s)} > w \wedge \frac{s}{c} < \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Fall 3.5}$$

Fall 3.1a (3. Stufe): $-\frac{F}{k} \frac{m_2c+s}{m_1c-s} > w \wedge \frac{s}{c} > \frac{1}{2}$

m_{1gN}	m_{1gT}^+	m_{1gT}^-	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_{N^*}	$\lambda_H^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$	m_1z^-	m_1z^+	z_0
$\frac{m_2}{M_4}$	0	$-\frac{m_2}{M_4}$	0	0	$-\frac{M_3}{M_4}$	-1	(1)	0	$\frac{m_2}{M_4}$	0
$-2 \frac{m_1c^2 + m_2s^2}{M_4}$	(1)	$\frac{M_2}{M_4}$	0	0	$2 \frac{m_1}{M_4}$	0	0	-1	$-\frac{M_2}{M_4}$	0
$-\frac{m_1c^2 + m_2s^2}{M_4}$	0	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{M_4}$	0	0	$\frac{m_1}{M_4}$	0	0	0	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{M_4}$	(1)
$-\frac{m_1c^2 + m_2s^2}{M_4}$	0	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{M_4}$	(1)	0	$\frac{m_1}{M_4} - \mu$	1	0	0	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{M_4}$	0
$-\frac{m_2 + m_1c^2 + m_2s^2}{M_4}$	0	$\frac{m_2 + sc(m_1 - m_2)}{M_4}$	0	(1)	$\frac{m_1 + M_3}{M_4} - \mu$	1	0	0	$-\frac{m_2 + sc(m_1 - m_2)}{M_4}$	0
										$-\frac{Fm_2(c+s) + km_1(c-s)}{M_4}$
										$2 \frac{m_1(Fc - kws)}{M_4}$
										$\frac{m_1(Fc - kws)}{M_4}$
										$\frac{m_1(Fc - kws)}{M_4}$
										$\frac{m_1(Fc - kws) + [Fm_2(c+s) + km_1(c-s)]}{M_4}$

Auswahl der Pivotzeile im Tableau Fall 3.1a (3.Stufe):

positiver Koeffizient?	positiv, wenn	kleinster positiver Quotient
1. Zeile:	$-\frac{M_3}{M_4} > 0 \Rightarrow 1 > \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2)}$	$\frac{Fm_2(c+s) + kw m_1(c-s)}{M_3} > 0$
2. Zeile:	$2\frac{m_1}{M_4} > 0 \Rightarrow$ gilt immer!	$Fc - kws > 0$
3. Zeile:	$\frac{m_1}{M_4} > 0 \Rightarrow$ gilt immer!	$Fc - kws > 0$
4. Zeile:	$\frac{m_1 - \mu M_4}{M_4} > 0 \Rightarrow \frac{m_1}{M_4} > \mu$	$\frac{m_1(Fc - kws)}{m_1 - \mu M_4} > 0$
5. Zeile:	$\frac{m_1 + M_3}{M_4} - \mu > 0 \Rightarrow \frac{m_1 + M_3}{M_4} > \mu$	$\frac{m_1(Fc - kws) + [Fm_2(c+s) + kw m_1(c-s)]}{m_1 + M_3 - \mu M_4} > 0$

Vergleich der Zeilen:

$$\begin{aligned}
 1. \text{ Zeile} \wedge 2./3. \text{ Zeile:} & \quad \frac{Fm_2(c+s) + kw m_1(c-s)}{M_3} > Fc - kws \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{F}{k} \frac{s}{c} > w \\
 2./3. \text{ Zeile} \wedge 4. \text{ Zeile:} & \quad \frac{m_1(Fc - kws)}{m_1 - \mu M_4} > Fc - kws \quad \Leftrightarrow \quad M_4 > 0 \quad \checkmark \\
 2./3. \text{ Zeile} \wedge 5. \text{ Zeile:} & \quad \frac{m_1(Fc - kws) + [Fm_2(c+s) + kw m_1(c-s)]}{m_1 + M_3 - \mu M_4} > Fc - kws \quad \Leftrightarrow \quad F(\mu c + s) > kw(\mu s - c)
 \end{aligned}$$

Die Zeile 2 führt zu keiner Lösung. Der Vergleich zeigt, daß drei verschiedene Fälle zu unterscheiden sind.

Die 1. Zeile muß gewählt werden, wenn:	$ \left\{ \begin{aligned} & -\frac{F}{k} \frac{m_2 c + s}{m_1 c - s} > w > -\frac{F}{k} \frac{s}{c} \quad \wedge \quad \frac{s}{c} > \frac{1}{2} \\ & -\frac{F}{k} \frac{m_2 c + s}{m_1 c - s} > w > -\frac{F}{k} \frac{\mu c + s}{c - \mu s} \quad \wedge \quad \frac{c}{s} > \mu > \frac{s}{c} > \frac{1}{2} \\ & -\frac{F}{k} \frac{s}{c} > w > -\frac{F}{k} \frac{\mu c + s}{c - \mu s} \quad \wedge \quad \frac{c}{s} > \mu > \frac{s}{c} > \frac{1}{2} \end{aligned} \right. $	$ \left\{ \begin{aligned} & 1 > \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2)} \\ & \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2)} > 1 \\ & 1 > \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2)} \end{aligned} \right. $	$ \begin{aligned} & \Rightarrow \text{Fall 3.1a.1} \\ & \Rightarrow \text{Fall 3.1a.3} \\ & \Rightarrow \text{Fall 3.1a.5} \end{aligned} $	
Die 3. Zeile muß gewählt werden, wenn:	$ \left\{ \begin{aligned} & -\frac{F}{k} \frac{m_2 c + s}{m_1 c - s} > w \\ & -\frac{F}{k} \frac{s}{c} > w \end{aligned} \right. $	$ \left\{ \begin{aligned} & \mu > \frac{c}{s} > \frac{s}{c} > \frac{1}{2} \\ & \mu > \frac{c}{s} > \frac{s}{c} > \frac{1}{2} \\ & \mu > \frac{c}{s} > \frac{s}{c} > \frac{1}{2} \end{aligned} \right. $	$ \left\{ \begin{aligned} & \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2)} > 1 \\ & 1 > \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2)} \\ & 1 > \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2)} \end{aligned} \right. $	$ \begin{aligned} & \Rightarrow \text{Fall 3.1a.1} \\ & \Rightarrow \text{Fall 3.1a.3} \\ & \Rightarrow \text{Fall 3.1a.5} \end{aligned} $
Die 5. Zeile muß gewählt werden, wenn:	$ -\frac{F}{k} \frac{\mu c + s}{c - \mu s} > w $	$ \mu > \frac{c}{s} > \frac{s}{c} > \frac{1}{2} $	$ 1 > \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2)} $	$ \Rightarrow \text{Fall 3.1a.5} $

Fall 3.1a.1 (4. Stufe): $-\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c+s}{c-s} > w > -\frac{F}{k} \frac{s}{c} \wedge \frac{s}{c} > \frac{1}{2} \wedge 1 > \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2)}$

$m_1 \ddot{g}_N$	$m_1 \ddot{g}_T^+$	$m_1 \ddot{g}_T^*$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N	$\lambda_H^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0
$\frac{m_2}{-M_3}$	0	$\frac{-m_2}{-M_3}$	0	0	(1)	$\frac{-M_4}{-M_3}$	$\frac{M_4}{-M_3}$	0	$\frac{m_2}{-M_3}$	0
$\frac{-2sc(m_1 - m_2)}{-M_3}$	(1)	$\frac{M_1}{-M_3}$	0	0	0	$\frac{2m_1}{-M_3}$	$\frac{-2m_1}{-M_3}$	-1	$\frac{-M_1}{-M_3}$	0
$\frac{-sc(m_1 - m_2)}{-M_3}$	0	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{-M_3}$	0	0	0	$\frac{m_1}{-M_3}$	$\frac{-m_1}{-M_3}$	0	$\frac{-m_1 s^2 - m_2 c^2}{-M_3}$	(1)
$\frac{\mu m_2 - sc(m_1 - m_2)}{-M_3}$	0	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{-M_3}$	(1)	0	0	$\frac{c(c+s)(m_1 - m_2) - \mu M_4}{-M_3}$	$\frac{\mu M_4 - m_1}{-M_3}$	0	$\frac{\mu m_2 - m_1 s^2 - m_2 c^2}{-M_3}$	0
$\frac{\mu m_2 - sc(m_1 - m_2)}{-M_3}$	0	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{-M_3}$	0	(1)	0	$\frac{m_1 - \mu M_4}{-M_3}$	$\frac{\mu M_4 - m_1 - M_3}{-M_3}$	0	$\frac{\mu m_2 - m_1 s^2 - m_2 c^2}{-M_3}$	0

Auswahl der Pivotzeile im Tableau Fall 3.1a.1 (4. Stufe):

	positiver Koeffizient?	positiv, wenn	kleinster positiver Quotient
1. Zeile:	$\frac{-m_2}{-M_3} < 0 \Rightarrow$	negativ!	
2. Zeile:	$\frac{M_1}{-M_3} > 0 \Rightarrow$	gilt immer!	$\frac{2m_1(Fs+kwc)}{M_1} > 0$
3. Zeile:	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{-M_3} > 0 \Rightarrow$	gilt immer!	$\frac{m_1(Fs+kwc)}{m_1 s^2 + m_2 c^2} > 0$
4. Zeile:	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{-M_3} > 0 \Rightarrow$	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_2} > \mu$	$\frac{m_1(Fs+kwc) - \mu[Fm_2(c+s) + kwm_1(c-s)]}{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2} > 0$
5. Zeile:	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{-M_3} > 0 \Rightarrow$	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_2} > \mu$	$\frac{m_1(Fs+kwc) - \mu[Fm_2(c+s) + kwm_1(c-s)]}{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2} > 0$

Vergleich der Zeilen:

2. Zeile \wedge 3. Zeile:	$\frac{m_1(Fs+kwc)}{m_1 s^2 + m_2 c^2} > \frac{2m_1(Fs+kwc)}{M_1}$	$\Leftrightarrow 1 > \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2)}$	\checkmark
3. Zeile \wedge 4./5. Zeile:	$\frac{m_1(Fs+kwc) - \mu[Fm_2(c+s) + kwm_1(c-s)]}{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2} > \frac{m_1(Fs+kwc)}{m_1 s^2 + m_2 c^2}$	$\Leftrightarrow \frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c}{s} > w$	\checkmark

Der Vergleich zeigt, daß die 2. Zeile gewählt werden muß.

Fall 3.1a.1.2 (5. Stufe): $-\frac{F}{k} \frac{m_2 c+s}{m_1 c-s} > w > -\frac{F}{k} \frac{s}{c} \wedge \frac{s}{c} > \frac{1}{2} \wedge 1 > \frac{m_1 s^2+m_2 c^2}{sc(m_1-m_2)}$

$m_1 \ddot{y}_N$	$m_1 \ddot{y}_T^+$	$m_1 \ddot{y}_T^-$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N	$\lambda_H^{(+)*}$	$\lambda_H^{(-)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0
$-\frac{m_2}{M_1}$	$\frac{m_2}{M_1}$	0	0	0	(1)	$-\frac{M_2}{M_1}$	$\frac{M_2}{M_1}$	0	0	0
$-\frac{2sc(m_1-m_2)}{M_1}$	$-\frac{M_3}{M_1}$	(1)	0	0	0	$\frac{2m_1}{M_1}$	$-\frac{2m_1}{M_1}$	-1	-1	0
$-\frac{sc(m_1-m_2)}{M_1}$	$-\frac{m_1 s^2+m_2 c^2}{M_1}$	0	0	0	0	$\frac{m_1}{M_1}$	$-\frac{m_1}{M_1}$	0	0	(1)
$-\frac{\mu m_2+sc(m_1-m_2)}{M_1}$	$\frac{\mu m_2-m_1 s^2-m_2 c^2}{M_1}$	0	(1)	0	0	$\frac{M_1+m_1-\mu M_2}{M_1}$	$\frac{\mu M_2-m_1}{M_1}$	0	0	0
$-\frac{\mu m_2+sc(m_1-m_2)}{M_1}$	$\frac{M_1 b}{M_1}$	0	0	(1)	0	$\frac{m_1-\mu M_2}{M_1}$	$\frac{M_1-m_1+\mu M_2}{M_1}$	0	0	0

Auswahl der Pivotzeile im Tableau Fall 3.1a.1.2 (5. Stufe):

	$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{positiver Koeffizient?}}$	$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{positiv, wenn}}$	$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{kleinster positiver Quotient}}$
1. Zeile:	$-\frac{M_2}{M_1} < 0 \Rightarrow$	\Rightarrow	\Rightarrow
2. Zeile:	$\frac{2m_1}{M_1} > 0 \Rightarrow$	\Rightarrow	$\Rightarrow F + kw c > 0$
3. Zeile:	$\frac{m_1}{M_1} > 0 \Rightarrow$	\Rightarrow	$\Rightarrow F + kw c > 0$
4. Zeile:	$\frac{M_1+m_1-\mu M_2}{M_1} > 0 \Rightarrow$	$\frac{m_1+M_1}{M_2} > \mu \Rightarrow$	$\frac{m_1(Fs+kw c)+\mu[Fm_2(c-s)-kw m_1(c+s)]}{M_1+m_1-\mu M_2} > 0$
5. Zeile:	$\frac{m_1-\mu M_2}{M_1} > 0 \Rightarrow$	$\frac{m_1}{M_2} > \mu \Rightarrow$	$\frac{m_1(Fs+kw c)+\mu[Fm_2(c-s)-kw m_1(c+s)]}{m_1-\mu M_2} > 0$

Vergleich der Zeilen:

$$\begin{aligned}
 & 2./3. \text{ Zeile} \wedge 4. \text{ Zeile: } \frac{m_1(Fs+kw c)+\mu[Fm_2(c-s)-kw m_1(c+s)]}{M_1+m_1-\mu M_2} > Fs + kw c \Leftrightarrow \frac{F}{k} \frac{\mu c-s}{\mu s+c} > w \quad \checkmark \\
 & 4. \text{ Zeile} \wedge 5. \text{ Zeile: } \frac{m_1(Fs+kw c)+\mu[Fm_2(c-s)-kw m_1(c+s)]}{m_1-\mu M_2} > \frac{m_1(Fs+kw c)+\mu[Fm_2(c-s)-kw m_1(c+s)]}{M_1+m_1-\mu M_2} \Leftrightarrow M_1 > 0 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Die Zeile 2 führt zu keiner Lösung. Der Vergleich ergibt, daß die 3. Zeile gewählt werden muß.

Fall 3.1a.1.2.3 (6. Stufe): $-\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c+s}{c-s} > w > -\frac{F}{k} \frac{s}{c}$ \wedge $\frac{s}{c} > \frac{1}{2}$ \wedge $1 > \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2)}$

$m_1 \dot{g}_N$	$m_1 \ddot{g}_T^+$	$m_1 \ddot{g}_T^-$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N	$\lambda_H^{(-)}$	$\lambda_H^{(+)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0^*
$-\frac{m_1 \dot{g}_N}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$-\frac{m_1 \ddot{g}_T^+}{sc(m_1 - m_2)}$	$-\frac{m_1 \ddot{g}_T^-}{m_1}$	0	0	(1)	0	0	0	0	$\frac{M_2}{m_1}$
0	1	(1)	0	0	0	0	-1	-1	-1	-2
$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	$-\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_1}$	$-\frac{M_6}{m_1}$	0	0	0	(1)	-1	0	0	$\frac{M_1}{m_1}$
$-\frac{m_1 \dot{g}_N}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$-\frac{m_1 \ddot{g}_T^+}{\mu sc(m_1 - m_2)}$	$-\frac{m_1 \ddot{g}_T^-}{M_1}$	(1)	0	0	0	1	0	0	$\frac{\mu M_2 - m_1 - M_1}{m_1}$
$-\frac{\mu(m_1 c^2 + m_2 s^2)}{m_1}$	$-\frac{\mu sc(m_1 - m_2)}{M_1}$	0	0	(1)	0	0	1	0	0	$\frac{\mu M_2 - m_1}{m_1}$

$$F_C - kws$$

$$0$$

$$F_S + kwc$$

$$\mu(F_C - kws) - (F_S + kwc)$$

$$\mu(F_C - kws)$$

Die Variable z_0 hat die Basis verlassen und der Algorithmus endet. Aus dem Tableau entnimmt man für den Fall 3.1a.1.2.3 die Lösung

$\dot{g}_N = 0$	$\lambda_N = F_C - kws > 0$
$\dot{g}_T^+ = 0$	$\lambda_H^{(+)} = F_S + kwc > 0$
$\dot{g}_T^- = 0$	$\lambda_H^{(-)} = 0$
$\lambda_{H0}^{(-)} = \mu\lambda_N - \lambda_H^{(+)} > 0$	$z^- = 0$
$\lambda_{H0}^{(+)} = \mu\lambda_N > 0$	$z^+ = 0$

(C.4)

Nach Tabelle C.4 erfolgt für den Fall 3.1a.1.2.3 kein Zustandsübergang, es bleibt beim Haften.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c+s}{c-s} > w > -\frac{F}{k} \frac{\mu c+s}{c-\mu s} \wedge \frac{c}{s} > \mu > \frac{s}{c} > \frac{1}{2} \wedge \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2)} > 1 \\ -\frac{F}{k} \frac{s}{c} > w > -\frac{F}{k} \frac{\mu c+s}{c-\mu s} \wedge \frac{c}{s} > \mu > \frac{s}{c} > \frac{1}{2} \wedge 1 > \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2)} \\ -\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c+s}{c-s} > w > \frac{c}{s} > \mu > \frac{s}{c} > \frac{1}{2} \wedge \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2)} > 1 \\ -\frac{F}{k} \frac{s}{c} > w > \frac{c}{s} > \mu > \frac{s}{c} > \frac{1}{2} \wedge 1 > \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2)} \end{array} \right.$$

Fall 3.1a.3 (4. Stufe):

$m_1 \dot{g}_N$	$m_1 \ddot{g}_T^+$	$m_1 \ddot{g}_T^-$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N	$\lambda_H^{(-)}$	$\lambda_H^{(+)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0^*
$\frac{m_1 \dot{g}_N}{sc(m_1 - m_2)}$	0	$-\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_1}$	0	0	0	-1	(1)	0	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_1}$	$\frac{M_3}{m_1}$
0	(1)	1	0	0	0	0	-1	-1	-1	-2
$-\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_1}$	0	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	0	0	(1)	0	0	0	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	$\frac{M_4}{m_1}$
$-\mu \frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_1}$	0	$\frac{\mu sc(m_1 - m_2)}{M_1}$	(1)	0	0	1	0	0	$-\frac{\mu sc(m_1 - m_2)}{M_1}$	$\frac{\mu M_4 - m_1}{m_1}$
$-\frac{M_7}{m_1}$	0	$\frac{M_8}{M_1}$	0	(1)	0	1	0	0	$-\frac{M_8}{M_1}$	$\frac{\mu M_4 - m_1 - M_3}{m_1}$

$$-(F_S + kwc)$$

$$0$$

$$F_C - kws$$

$$\mu(F_C - kws)$$

$$\mu(F_C - kws) + (F_S + kwc)$$

Die Variable z_0 hat die Basis verlassen und der Algorithmus endet. Aus dem Tableau entnimmt man für den Fall 3.1a.3 die Lösung

$$(C.5) \quad \boxed{\begin{array}{l} \dot{g}_N = 0 \\ \ddot{g}_T^+ = 0 \\ \dot{g}_T^- = 0 \\ \lambda_{H_0}^{(-)} = \mu\lambda_N > 0 \\ \lambda_{H_0}^{(+)} = \mu\lambda_N - \lambda_H^{(-)} > 0 \end{array}} \quad \begin{array}{l} \lambda_N = Fc - kws > 0 \\ \lambda_H^{(+)} = 0 \\ \lambda_H^{(-)} = -(Fs + kwc) > 0 \\ z^- = 0 \\ z^+ = 0 \end{array}$$

Nach Tabelle C.5 erfolgt für den Fall 3.1a.3 kein Zustandsübergang, es bleibt beim Haften.

Fall 3.1a.5 (4. Stufe): $-\frac{F}{k} \frac{\mu c + s}{c - \mu s} > w \quad \wedge \quad \frac{c}{s} > \mu > \frac{s}{c} > \frac{1}{2}$

$\frac{m_1 \dot{g}_N}{sc(m_1 - m_2) - \mu m_2}$	$m_1 \dot{g}_T^+$	$m_1 \ddot{g}_T^-$	$\lambda_{H_0}^{(-)}$	$\lambda_{H_0}^{(+)}$	λ_N	$\lambda_H^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+ *$	z_0
$\frac{m_1 + M_3 - \mu M_4}{2M_7}$	0	$\frac{\mu m_2 - m_1 s^2 - m_2 c^2}{m_1 + M_3 - \mu M_4}$	0	$\frac{M_3}{m_1 + M_3 - \mu M_4}$	0	$\frac{\mu M_4 - m_1}{m_1 + M_3 - \mu M_4}$	(1)	0	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{m_1 + M_3 - \mu M_4}$	0
$\frac{m_1 + M_3 - \mu M_4}{M_7}$	(1)	$\frac{c(c-s)(m_1 - m_2) - \mu M_2}{m_1 + M_3 - \mu M_4}$	0	$\frac{-2m_1}{m_1 + M_3 - \mu M_4}$	0	$\frac{-2m_1}{m_1 + M_3 - \mu M_4}$	0	-1	$\frac{\mu M_2 - c(c-s)(m_1 - m_2)}{m_1 + M_3 - \mu M_4}$	0
$\frac{sc(m_1 - m_2) - \mu m_2}{m_1 + M_3 - \mu M_4}$	0	$\frac{-M_8}{m_1 + M_3 - \mu M_4}$	0	$\frac{-m_1}{m_1 + M_3 - \mu M_4}$	0	$\frac{-m_1}{m_1 + M_3 - \mu M_4}$	0	0	$\frac{M_8}{m_1 + M_3 - \mu M_4}$	(1)
$\frac{m_1 + M_3 - \mu M_4}{-m_2 - m_1 c^2 - m_2 s^2}$	0	$\frac{\mu m_2 - m_1 s^2 - m_2 c^2}{m_1 + M_3 - \mu M_4}$	(1)	$\frac{\mu M_4 - m_1}{m_1 + M_3 - \mu M_4}$	0	$\frac{M_3}{m_1 + M_3 - \mu M_4}$	0	0	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{m_1 + M_3 - \mu M_4}$	0
$\frac{m_1 + M_3 - \mu M_4}{-m_2 - m_1 c^2 - m_2 s^2}$	0	$\frac{m_2 + sc(m_1 - m_2)}{m_1 + M_3 - \mu M_4}$	0	$\frac{M_3}{m_1 + M_3 - \mu M_4}$	(1)	$\frac{M_4}{m_1 + M_3 - \mu M_4}$	0	0	$\frac{m_1 + M_3 - \mu M_4}{-m_2 - sc(m_1 - m_2)}$	0

Auswahl der Pivotzeile im Tableau Fall 3.1a.5 (4. Stufe):

	positiver Koeffizient?	positiv, wenn	kleinster positiver Quotient
1. Zeile:	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{m_1 + M_3 - \mu M_4} > 0 \Rightarrow$	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_2} > \mu$	$\frac{\mu[Fm_2(c+s) + km_1(c-s)] - m_1(Fs + kwc)}{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2} > 0$
2. Zeile:	$\frac{\mu M_2 - c(c-s)(m_1 - m_2)}{m_1 + M_3 - \mu M_4} > 0 \Rightarrow$	$\mu > \frac{c(c-s)(m_1 - m_2)}{M_2}$	$\frac{-2m_1[\mu(Fc - kws) + (Fs + kwc)]}{\mu M_2 - c(c-s)(m_1 - m_2)} > 0$
3. Zeile:	$\frac{M_8}{m_1 + M_3 - \mu M_4} > 0 \Rightarrow$	gilt immer!	$\frac{-m_1[\mu(Fc - kws) + (Fs + kwc)]}{M_8} > 0$
4. Zeile:	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{m_1 + M_3 - \mu M_4} > 0 \Rightarrow$	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_2} > \mu$	$\frac{\mu[Fm_2(c+s) + km_1(c-s)] - m_1(Fs + kwc)}{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2} > 0$
5. Zeile:	$\frac{-m_2 - sc(m_1 - m_2)}{m_1 + M_3 - \mu M_4} < 0 \Rightarrow$	negativ!	

Vergleich der Zeilen:

$$\begin{aligned}
 & 1./4. \text{ Zeile} \wedge 3. \text{ Zeile:} \quad \frac{\mu[Fm_2(c+s)+kwm_1(c-s)]-m_1(Fs+kwc)}{m_1s^2+m_2c^2-\mu m_2} > \frac{-m_1[\mu(Fc-kws)+(Fs+kwc)]}{M_8} \Leftrightarrow \frac{m_1+M_3}{M_4} > \mu \quad \checkmark \\
 & 2. \text{ Zeile} \wedge 3. \text{ Zeile:} \quad \frac{-2m_1[\mu(Fc-kws)+(Fs+kwc)]}{\mu M_2-c(c-s)(m_1-m_2)} > \frac{-m_1[\mu(Fc-kws)+(Fs+kwc)]}{M_8} \Leftrightarrow \frac{m_1+M_3}{M_4} > \mu \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Der Vergleich zeigt, daß die 3. Zeile den kleinsten positiven Quotienten hat.

Fall 3.1a.5.3 (5. Stufe): $-\frac{F}{k} \frac{\mu c+s}{c-\mu s} > w \quad \wedge \quad \frac{c}{s} > \mu > \frac{s}{c} > \frac{1}{2}$

$m_1 \ddot{g}_N$	$m_1 \ddot{g}_T^+$	$m_1 \ddot{g}_T^-$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N	$\lambda_H^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0^*
$-\frac{\mu m_2}{M_8}$	0	0	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{M_8}$	0	$-\frac{\mu sc(m_1 - m_2)}{M_8}$	(1)	0	0	$\frac{\mu m_2 - m_1 s^2 - m_2 c^2}{M_8}$
$\frac{M_7}{M_8}$	(1)	0	$-\frac{m_1}{M_8}$	0	$-\frac{m_1}{M_8}$	0	-1	0	$\frac{c(c-s)(m_1 - m_2) - \mu M_2}{M_8}$
$\frac{M_7}{M_8}$	0	-1	$-\frac{m_1}{M_8}$	0	$-\frac{m_1}{M_8}$	0	0	(1)	$\frac{m_1 + M_3 - \mu M_4}{M_8}$
$-\frac{\mu m_2}{M_8}$	0	0	$-\frac{\mu sc(m_1 - m_2)}{M_8}$	0	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{M_8}$	0	0	0	$\frac{\mu(Fm_2 c - kwm_1 s)}{M_8}$
$-\frac{m_2}{M_8}$	0	0	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{M_8}$	(1)	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{M_8}$	0	0	0	$\frac{\mu(Fm_2 c - kwm_1 s)}{M_8}$

Die Variable z_0 hat die Basis verlassen und der Algorithmus endet. Aus dem Tableau entnimmt man für den Fall 3.1a.5.3 die Lösung

$\ddot{g}_N = 0$	$\lambda_N = \frac{Fm_2 c - kwm_1 s}{\mu sc(m_1 - m_2) + m_1 s^2 + m_2 c^2} > 0$
$\ddot{g}_T^+ = \frac{-\mu(Fc - kws) - (Fs + kwc)}{\mu sc(m_1 - m_2) + m_1 s^2 + m_2 c^2} > 0$	$\lambda_H^{(+)} = 0$
$\ddot{g}_T^- = 0$	$\lambda_H^{(-)} = \mu \lambda_N > 0$
$\lambda_{H0}^{(-)} = \mu \lambda_N > 0$	$z^- = 0$
$\lambda_{H0}^{(+)} = 0$	$z^+ = \ddot{g}_T^+ > 0$

(C.6)

Nach Tabelle C.6 wechselt der Zustand für den Fall 3.1a.5.3 von *Haften* nach *Gleiten*.

Fall 3.1b (3.Stufe): $-\frac{F}{k} \frac{m_2 c+s}{m_1 c-s} > w > -\frac{F}{k} \frac{m_1 c+m_2 c+m_2 s}{m_1(c-2s)} \wedge \frac{s}{c} < \frac{1}{2}$

$m_1 g_N$	$m_1 g_T^+$	$m_1 g_T^-$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N^*	$\lambda_H^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0
$\frac{m_2}{M_4}$	0	$-\frac{m_2}{M_4}$	0	0	$-\frac{M_3}{M_4}$	-1	(1)	0	$\frac{m_2}{M_4}$	0
$-\frac{2m_1 c^2+m_2 s^2}{M_4}$	(1)	$\frac{M_2}{M_4}$	0	0	$2\frac{m_1}{M_4}$	0	0	-1	$-\frac{M_2}{M_4}$	0
$-\frac{m_1 c^2+m_2 s^2}{M_4}$	0	$\frac{sc(m_1-m_2)}{M_4}$	0	0	$\frac{m_1}{M_4}$	0	0	0	$-\frac{sc(m_1-m_2)}{M_4}$	(1)
$-\frac{m_1 c^2+m_2 s^2}{M_4}$	0	$\frac{sc(m_1-m_2)}{M_4}$	(1)	0	$\frac{m_1}{M_4} - \mu$	1	0	0	$-\frac{sc(m_1-m_2)}{M_4}$	0
$-\frac{m_2+m_1 c^2+m_2 s^2}{M_4}$	0	$\frac{m_2+sc(m_1-m_2)}{M_4}$	0	(1)	$\frac{m_1+M_3}{M_4} - \mu$	1	0	0	$-\frac{m_2+sc(m_1-m_2)}{M_4}$	0

Auswahl der Pivotzeile im Tableau Fall 3.1b (3.Stufe):

	$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{positiver Koeffizient?}}$	$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{positiv, wenn}}$	$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{kleinster positiver Quotient}}$
1. Zeile:	$-\frac{M_3}{M_4} > 0 \Rightarrow$	$1 > \frac{m_1 s^2+m_2 c^2}{sc(m_1-m_2)} \Rightarrow$	$\frac{Fm_2(c+s)+kwm_1(c-s)}{M_3} > 0$
2. Zeile:	$2\frac{m_1}{M_4} > 0 \Rightarrow$	gilt immer!	$Fc - kws > 0$
3. Zeile:	$\frac{m_1}{M_4} > 0 \Rightarrow$	gilt immer!	$Fc - kws > 0$
4. Zeile:	$\frac{m_1-\mu M_4}{M_4} > 0 \Rightarrow$	$\frac{m_1}{M_4} > \mu$	$\frac{m_1(Fc-kws)}{m_1-\mu M_4} > 0$
5. Zeile:	$\frac{m_1+M_3}{M_4} - \mu > 0 \Rightarrow$	$\frac{c}{s} > \frac{m_1+M_3}{M_4} > \mu \Rightarrow$	$\frac{m_1(Fc-kws)+[Fm_2(c+s)+kwm_1(c-s)]}{m_1+M_3-\mu M_4} > 0$

Vergleich der Zeilen:

1. Zeile \wedge 2./3. Zeile:	$\frac{Fm_2(c+s)+kwm_1(c-s)}{M_3} > Fc - kws$	\Leftrightarrow	$-\frac{F}{k} \frac{s}{c} > w$
2./3. Zeile \wedge 4. Zeile:	$\frac{m_1(Fc-kws)}{m_1-\mu M_4} > Fc - kws$	\Leftrightarrow	$M_4 > 0 \checkmark$
2./3. Zeile \wedge 5. Zeile:	$\frac{m_1(Fc-kws)+[Fm_2(c+s)+kwm_1(c-s)]}{m_1+M_3-\mu M_4} > Fc - kws$	\Leftrightarrow	$F(\mu c + s) > kw(\mu s - c)$

Die Zeile 2 führt zu keiner Lösung. Der Vergleich zeigt, daß drei verschiedene Fälle zu unterscheiden sind.

Die 1. Zeile gilt, wenn:
$$\begin{cases} -\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c+s}{c-s} > w > -\frac{F}{k} \frac{s}{c} \\ -\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c+s}{c-s} > w > -\frac{F}{k} \frac{\mu c+s}{m_1 c-\mu s} \\ -\frac{F}{k} \frac{s}{c} > w > -\frac{F}{k} \frac{\mu c+s}{m_1 c-\mu s} \end{cases} \wedge \frac{s}{c} < \frac{1}{2} \wedge \frac{m_1+M_3}{M_4} > \mu \wedge 1 > \frac{m_1 s^2+m_2 c^2}{sc(m_1-m_2)} > 1$$
 \Rightarrow Fall 3.1b.1

Die 3. Zeile gilt, wenn:
$$\begin{cases} -\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c+s}{c-s} > w > -\frac{F}{k} \frac{m_1 c+m_2 c+m_2 s}{m_1(c-2s)} \\ -\frac{F}{k} \frac{s}{c} > w > -\frac{F}{k} \frac{m_1 c+m_2 c+m_2 s}{m_1(c-2s)} \\ -\frac{F}{k} \frac{\mu c+s}{m_1 c-\mu s} > w > -\frac{F}{k} \frac{m_1 c+m_2 c+m_2 s}{m_1(c-2s)} \end{cases} \wedge \frac{s}{c} < \frac{1}{2} \wedge \mu > \frac{m_1+M_3}{M_4} \wedge \frac{m_1 s^2+m_2 c^2}{sc(m_1-m_2)} > 1$$
 \Rightarrow Fall 3.1b.3

Die 5. Zeile gilt, wenn:
$$-\frac{F}{k} \frac{\mu c+s}{m_1 c-\mu s} > w > -\frac{F}{k} \frac{m_1 c+m_2 c+m_2 s}{m_1(c-2s)} \wedge \frac{s}{c} < \frac{1}{2} \wedge \frac{\mu}{s} > \frac{m_1+M_3}{M_4} > \mu$$
 \Rightarrow Fall 3.1b.5

Fall 3.1b.1 (4. Stufe): $-\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c+s}{c-s} > w > -\frac{F}{k} \frac{s}{c} \wedge \frac{s}{c} < \frac{1}{2} \wedge 1 > \frac{m_1 s^2+m_2 c^2}{sc(m_1-m_2)}$

$m_1 \ddot{g}_N$	$m_1 \ddot{g}_T^+$	$m_1 \ddot{g}_T^*$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N	$\lambda_H^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0
$\frac{m_2}{-M_3}$	0	$\frac{-m_2}{-M_3}$	0	0	(1)	$\frac{-M_4}{-M_3}$	$\frac{M_4}{-M_3}$	0	$\frac{m_2}{-M_3}$	0
$\frac{-2sc(m_1-m_2)}{-M_3}$	(1)	$\frac{M_1}{-M_3}$	0	0	0	$\frac{-2m_1}{-M_3}$	$\frac{-M_1}{-M_3}$	-1	$\frac{-M_1}{-M_3}$	0
$\frac{-sc(m_1-m_2)}{-M_3}$	0	$\frac{m_1 s^2+m_2 c^2}{-M_3}$	0	0	0	$\frac{m_1}{-M_3}$	$\frac{-m_1}{-M_3}$	0	$\frac{-m_1 s^2+m_2 c^2}{-M_3}$	(1)
$\frac{\mu m_2 - sc(m_1-m_2)}{-M_3}$	0	$\frac{m_1 s^2+m_2 c^2 - \mu m_2}{-M_3}$	(1)	0	0	$\frac{c(c+s)(m_1-m_2) - \mu M_4}{-M_3}$	$\frac{\mu M_4 - m_1}{-M_3}$	0	$\frac{\mu m_2 - m_1 s^2 - m_2 c^2}{-M_3}$	0
$\frac{\mu m_2 - sc(m_1-m_2)}{-M_3}$	0	$\frac{m_1 s^2+m_2 c^2 - \mu m_2}{-M_3}$	0	(1)	0	$\frac{m_1 - \mu M_4}{-M_3}$	$\frac{\mu M_4 - m_1 - M_3}{-M_3}$	0	$\frac{\mu m_2 - m_1 s^2 - m_2 c^2}{-M_3}$	0

Auswahl der Pivotzeile im Tableau Fall 3.1b.1 (4. Stufe):

	$\underbrace{\frac{-m_2}{-M_3}}_{\text{positiver Koeffizient?}}$	$\underbrace{\frac{M_1}{-M_3}}_{\text{positiv, wenn negativ!}}$	$\underbrace{\frac{m_1 s^2+m_2 c^2}{-M_3}}_{\text{kleinster positiver Quotient}}$
1. Zeile:	$\frac{-m_2}{-M_3} < 0 \Rightarrow$	$\frac{M_1}{-M_3} > 0 \Rightarrow$	$\frac{2m_1(Fs+kwc)}{M_1} > 0$
2. Zeile:	$\frac{M_1}{-M_3} > 0 \Rightarrow$	$\frac{m_1(Fs+kwc)}{m_1 s^2+m_2 c^2} > 0$	$\frac{m_1(Fs+kwc)}{m_1 s^2+m_2 c^2} > 0$
3. Zeile:	$\frac{m_1 s^2+m_2 c^2}{-M_3} > 0 \Rightarrow$	$\frac{m_1(Fs+kwc) - \mu[Fm_2(c+s) + kwm_1(c-s)]}{m_1 s^2+m_2 c^2 - \mu m_2} > \mu$	$\frac{m_1(Fs+kwc) - \mu[Fm_2(c+s) + kwm_1(c-s)]}{m_1 s^2+m_2 c^2 - \mu m_2} > 0$
4. Zeile:	$\frac{m_1 s^2+m_2 c^2 - \mu m_2}{-M_3} > 0 \Rightarrow$	$\frac{m_1 s^2+m_2 c^2}{m_2} > \mu$	$\frac{m_1(Fs+kwc) - \mu[Fm_2(c+s) + kwm_1(c-s)]}{m_1 s^2+m_2 c^2 - \mu m_2} > 0$
5. Zeile:	$\frac{m_1 s^2+m_2 c^2 - \mu m_2}{-M_3} > 0 \Rightarrow$	$\frac{m_1 s^2+m_2 c^2}{m_2} > \mu$	$\frac{m_1(Fs+kwc) - \mu[Fm_2(c+s) + kwm_1(c-s)]}{m_1 s^2+m_2 c^2 - \mu m_2} > 0$

Vergleich der Zeilen:

$$\begin{aligned}
 & 2. \text{Zeile} \wedge 3. \text{Zeile:} \quad \frac{m_1(Fs+kw c)}{m_1s^2+m_2c^2} > \frac{2m_1(Fs+kw c)}{M_1} \quad \Leftrightarrow \quad 1 > \frac{m_1s^2+m_2c^2}{sc(m_1-m_2)} \quad \checkmark \\
 & 3. \text{Zeile} \wedge 4./5. \text{Zeile:} \quad \frac{m_1(Fs+kw c)-\mu[Fm_2(c+s)+kwm_1(c-s)]}{m_1s^2+m_2c^2-\mu m_2} > \frac{m_1(Fs+kw c)}{m_1s^2+m_2c^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c}{s} > w \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Der Vergleich zeigt, daß die 2. Zeile gewählt werden muß.

Fall 3.1b.1.2 (5. Stufe): $-\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c+s}{c-s} > w > -\frac{F}{k} \frac{s}{c} \quad \wedge \quad \frac{s}{c} < \frac{1}{2} \quad \wedge \quad 1 > \frac{m_1s^2+m_2c^2}{sc(m_1-m_2)}$

$m_1 \ddot{g}_N$	$m_1 \ddot{g}_T^+$	$m_1 \ddot{g}_T^-$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N	$\lambda_H^{(+)*}$	$\lambda_H^{(-)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0
$\frac{-m_2}{M_1}$	$\frac{m_2}{M_1}$	0	0	0	(1)	$-\frac{M_2}{M_1}$	$\frac{M_2}{M_1}$	0	0	0
$\frac{-2sc(m_1-m_2)}{M_1}$	$-\frac{M_3}{M_1}$	(1)	0	0	0	$\frac{2m_1}{M_1}$	$-\frac{2m_1}{M_1}$	-1	-1	0
$\frac{-sc(m_1-m_2)}{M_1}$	$-\frac{m_1s^2+m_2c^2}{M_1}$	0	0	0	0	$\frac{m_1}{M_1}$	$-\frac{m_1}{M_1}$	0	0	(1)
$-\frac{\mu m_2+sc(m_1-m_2)}{M_1}$	$\frac{\mu m_2-m_1s^2-m_2c^2}{M_1}$	0	(1)	0	0	$\frac{M_1+m_1-\mu M_2}{M_1}$	$\frac{\mu M_2-m_1}{M_1}$	0	0	0
$-\frac{\mu m_2+sc(m_1-m_2)}{M_1}$	$\frac{\mu m_2-m_1s^2-m_2c^2}{M_1}$	0	0	(1)	0	$\frac{m_1-\mu M_2}{M_1}$	$\frac{M_1-m_1+\mu M_2}{M_1}$	0	0	0

Auswahl der Pivotzeile im Tableau Fall 3.1b.1.2 (5. Stufe):

	$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{positiver Koeffizient?}}$	$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{positiv, wenn}}$	$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{kleinster positiver Quotient}}$
1. Zeile:	$-\frac{M_2}{M_1} < 0 \Rightarrow$	negativ!	
2. Zeile:	$\frac{2m_1}{M_1} > 0 \Rightarrow$	gilt immer!	$Fs + kw c > 0$
3. Zeile:	$\frac{m_1}{M_1} > 0 \Rightarrow$	gilt immer!	$Fs + kw c > 0$
4. Zeile:	$\frac{M_1+m_1-\mu M_2}{M_1} > 0 \Rightarrow$	$\frac{m_1+M_1}{M_2} > \mu \Rightarrow$	$\frac{m_1(Fs+kw c)+\mu[Fm_2(c-s)-kwm_1(c+s)]}{M_1+m_1-\mu M_2} > 0$
5. Zeile:	$\frac{m_1-\mu M_2}{M_1} > 0 \Rightarrow$	$\frac{m_1}{M_2} > \mu \Rightarrow$	$\frac{m_1(Fs+kw c)+\mu[Fm_2(c-s)-kwm_1(c+s)]}{m_1-\mu M_2} > 0$

Vergleich der Zeilen:

$$\begin{aligned}
 2./3. \text{ Zeile} \wedge 4. \text{ Zeile:} & \quad \frac{m_1(Fs+kwc)+\mu[Fm_2(c-s)-kwm_1(c+s)]}{M_1+m_1-\mu M_2} > Fs+kwc & \Leftrightarrow & \quad \frac{F}{k} \frac{\mu c-s}{\mu s+c} > w \quad \checkmark \\
 4. \text{ Zeile} \wedge 5. \text{ Zeile:} & \quad \frac{m_1(Fs+kwc)+\mu[Fm_2(c-s)-kwm_1(c+s)]}{m_1-\mu M_2} > \frac{m_1(Fs+kwc)+\mu[Fm_2(c-s)-kwm_1(c+s)]}{M_1+m_1-\mu M_2} & \Leftrightarrow & \quad M_1 > 0 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Die Zeile 2 führt zu keiner Lösung. Der Vergleich ergibt, daß die 3. Zeile gewählt werden muß.

Fall 3.1b.1.2.3 (6. Stufe): $-\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c+s}{c-s} > w > -\frac{F}{k} \frac{s}{c} \quad \wedge \quad \frac{s}{c} < \frac{1}{2} \quad \wedge \quad 1 > \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2)}$

$m_1 \ddot{g}_N$	$m_1 \ddot{g}_T^+$	$m_1 \ddot{g}_T^-$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N	$\lambda_H^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0^*
$-\frac{m_1}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$-\frac{m_1}{sc(m_1 - m_2)}$	0	0	0	(1)	0	0	0	0	$\frac{M_2}{m_1}$
0	1	(1)	0	0	0	0	0	-1	-1	-2
$-\frac{m_1}{sc(m_1 - m_2)}$	$-\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{-M_6}$	0	0	0	(1)	-1	0	0	0	$\frac{M_1}{m_1}$
$-\frac{M_5}{m_1}$	$-\frac{M_6}{m_1}$	0	(1)	0	0	1	0	0	0	$\frac{\mu M_2 - m_1 - M_1}{m_1}$
$-\frac{\mu(m_1 c^2 + m_2 s^2)}{m_1}$	$-\frac{\mu sc(m_1 - m_2)}{M_1}$	0	0	(1)	0	0	1	0	0	$\frac{\mu M_2 - m_1}{m_1}$
										$Fc - kws$
										0
										$Fs + kwc$
										$\mu(Fc - kws) - (Fs + kwc)$
										$\mu(Fc - kws)$

Die Variable z_0 hat die Basis verlassen und der Algorithmus endet. Aus dem Tableau entnimmt man für den Fall 3.1b.1.2.3 die Lösung

$\ddot{g}_N = 0$	$\lambda_N = Fc - kws > 0$
$\ddot{g}_T^+ = 0$	$\lambda_H^{(+)} = Fs + kwc > 0$
$\ddot{g}_T^- = 0$	$\lambda_H^{(-)} = 0$
$\lambda_{H0}^{(-)} = \mu\lambda_N - \lambda_H^{(+)} > 0$	$z^- = 0$
$\lambda_{H0}^{(+)} = \mu\lambda_N > 0$	$z^+ = 0$

(C.7)

Nach Tabelle C.7 erfolgt für den Fall 3.1b.1.2.3 kein Zustandsübergang, es bleibt beim Haften.

$$\text{Fall 3.1b.3 (4. Stufe):} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c+s}{c-s} > w > -\frac{F}{k} \frac{\mu c+s}{c-\mu s} \wedge \frac{s}{c} < \frac{1}{2} \wedge \frac{m_1+M_3}{M_4} > \mu \wedge \frac{m_1 s^2+m_2 c^2}{sc(m_1-m_2)} > 1 \\ -\frac{F}{k} \frac{s}{c} > w > -\frac{F}{k} \frac{\mu c+s}{c-\mu s} \wedge \frac{s}{c} < \frac{1}{2} \wedge \frac{m_1+M_3}{M_4} > \mu \wedge 1 > \frac{m_1 s^2+m_2 c^2}{sc(m_1-m_2)} \\ -\frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1} \frac{c+s}{c-s} > w > -\frac{F}{k} \frac{m_1 c+m_2 c+m_2 s}{m_1(c-2s)} \wedge \frac{s}{c} < \frac{1}{2} \wedge \mu > \frac{m_1+M_3}{M_4} \wedge \frac{m_1 s^2+m_2 c^2}{sc(m_1-m_2)} > 1 \\ -\frac{F}{k} \frac{s}{c} > w > -\frac{F}{k} \frac{m_1 c+m_2 c+m_2 s}{m_1(c-2s)} \wedge \frac{s}{c} < \frac{1}{2} \wedge \mu > \frac{m_1+M_3}{M_4} \wedge 1 > \frac{m_1 s^2+m_2 c^2}{sc(m_1-m_2)} \end{array} \right.$$

$m_1 \ddot{g}_N$	$m_1 \ddot{g}_T^+$	$m_1 \ddot{g}_T^-$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N	$\lambda_H^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0^*
$\frac{sc(m_1-m_2)}{m_1}$	0	$-\frac{m_1 s^2+m_2 c^2}{m_1}$	0	0	0	-1	(1)	0	$\frac{m_1 s^2+m_2 c^2}{m_1}$	$\frac{M_3}{m_1}$
0	(1)	1	0	0	0	0	-1	-1	-1	-2
$-\frac{m_1 c^2+m_2 s^2}{m_1}$	0	$\frac{sc(m_1-m_2)}{m_1}$	0	0	(1)	0	0	0	$-\frac{sc(m_1-m_2)}{m_1}$	$\frac{M_4}{m_1}$
$-\mu \frac{m_1 c^2+m_2 s^2}{M_T}$	0	$\frac{\mu sc(m_1-m_2)}{M_T}$	(1)	0	0	1	0	0	$-\frac{\mu sc(m_1-m_2)}{M_T}$	$\frac{\mu M_4-m_1}{m_1}$
$-\frac{m_1}{M_T}$	0	$\frac{M_T}{M_1}$	0	(1)	0	1	0	0	$-\frac{M_T}{M_1}$	$\frac{\mu M_4-m_1-M_3}{m_1}$

Die Variable z_0 hat die Basis verlassen und der Algorithmus endet. Aus dem Tableau entnimmt man für den Fall 3.1b.3 die Lösung

$\ddot{g}_N = 0$	$\lambda_N = Fc - kws > 0$
$\ddot{g}_T^+ = 0$	$\lambda_H^{(+)} = 0$
$\ddot{g}_T^- = 0$	$\lambda_H^{(-)} = -(Fs + kwc) > 0$
$\lambda_{H0}^{(-)} = \mu \lambda_N > 0$	$z^- = 0$
$\lambda_{H0}^{(+)} = \mu \lambda_N - \lambda_H^{(-)} > 0$	$z^+ = 0$

(C.8)

Nach Tabelle C.8 erfolgt für den Fall 3.1b.3 kein Zustandsübergang, es bleibt beim Haften.

Fall 3.1b.5 (4.Stufe): $-\frac{F}{k} \frac{\mu c+s}{c-\mu s} > w > -\frac{F}{k} \frac{m_1+m_2c+m_2s}{m_1(c-2s)}$ $\wedge \frac{s}{c} < \frac{1}{2} \wedge \frac{c}{s} > \frac{m_1+M_3}{M_4} > \mu$

$m_1\ddot{y}_N$	$m_1\ddot{y}_T^+$	$m_1\ddot{y}_T^-$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N	$\lambda_H^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$	m_1z^+	m_1z^+*	z_0
$\frac{sc(m_1-m_2)-\mu m_2}{m_1+M_3-\mu M_4}$	0	$\frac{\mu m_2-m_1s^2-m_2c^2}{m_1+M_3-\mu M_4}$	0	$\frac{M_3}{m_1+M_3-\mu M_4}$	0	$\frac{\mu M_4-m_1}{m_1+M_3-\mu M_4}$	(1)	0	$\frac{m_1s^2+m_2c^2-\mu m_2}{m_1+M_3-\mu M_4}$	0
$\frac{2M_7}{m_1+M_3-\mu M_4}$	(1)	$\frac{c(c-s)(m_1-m_2)-\mu M_2}{m_1+M_3-\mu M_4}$	0	$\frac{-2m_1}{m_1+M_3-\mu M_4}$	0	$\frac{-2m_1}{m_1+M_3-\mu M_4}$	0	-1	$\frac{\mu M_2-c(c-s)(m_1-m_2)}{m_1+M_3-\mu M_4}$	0
$\frac{M_7}{m_1+M_3-\mu M_4}$	0	$\frac{-M_8}{m_1+M_3-\mu M_4}$	0	$\frac{-m_1}{m_1+M_3-\mu M_4}$	0	$\frac{-m_1}{m_1+M_3-\mu M_4}$	0	0	$\frac{M_8}{m_1+M_3-\mu M_4}$	(1)
$\frac{m_1+M_3-\mu M_4}{sc(m_1-m_2)-\mu m_2}$	0	$\frac{\mu m_2-m_1s^2-m_2c^2}{m_1+M_3-\mu M_4}$	(1)	$\frac{\mu M_4-m_1}{m_1+M_3-\mu M_4}$	0	$\frac{M_3}{m_1+M_3-\mu M_4}$	0	0	$\frac{m_1+M_3-\mu M_4}{m_1s^2+m_2c^2-\mu m_2}$	0
$\frac{-m_2-m_1c^2-m_2s^2}{m_1+M_3-\mu M_4}$	0	$\frac{m_2+sc(m_1-m_2)}{m_1+M_3-\mu M_4}$	0	$\frac{M_3}{m_1+M_3-\mu M_4}$	(1)	$\frac{M_4}{m_1+M_3-\mu M_4}$	0	0	$\frac{-m_2-sc(m_1-m_2)}{m_1+M_3-\mu M_4}$	0

Auswahl der Pivotzeile im Tableau Fall 3.1b.5 (4.Stufe):

	positiver Koeffizient?	$\frac{m_1s^2+m_2c^2-\mu m_2}{m_1+M_3-\mu M_4} > 0 \Rightarrow$	$\frac{m_1s^2+m_2c^2}{m_2} > \mu$	$\frac{\mu[Fm_2(c+s)+kw m_1(c-s)]-m_1(Fs+kw c)}{m_1s^2+m_2c^2-\mu m_2} > 0$	kleinster positiver Quotient
1. Zeile:		$\frac{\mu M_2-c(c-s)(m_1-m_2)}{m_1+M_3-\mu M_4} > 0 \Rightarrow$	$\mu > \frac{c(c-s)(m_1-m_2)}{M_2}$	$\frac{-2m_1[\mu(Fc-kws)+(Fs+kw c)]}{\mu M_2-c(c-s)(m_1-m_2)} > 0$	
2. Zeile:		$\frac{M_8}{m_1+M_3-\mu M_4} > 0 \Rightarrow$	gilt immer!	$\frac{-m_1[\mu(Fc-kws)+(Fs+kw c)]}{M_8} > 0$	
3. Zeile:		$\frac{m_1s^2+m_2c^2-\mu m_2}{m_1+M_3-\mu M_4} > 0 \Rightarrow$	$\frac{m_1s^2+m_2c^2}{m_2} > \mu$	$\frac{\mu[Fm_2(c+s)+kw m_1(c-s)]-m_1(Fs+kw c)}{m_1s^2+m_2c^2-\mu m_2} > 0$	
4. Zeile:		$\frac{-m_2-sc(m_1-m_2)}{m_1+M_3-\mu M_4} < 0 \Rightarrow$	negativ!		

Vergleich der Zeilen:

$$\begin{aligned}
 1./4. \text{ Zeile} \wedge 3. \text{ Zeile: } & \frac{\mu[Fm_2(c+s)+kw m_1(c-s)]-m_1(Fs+kw c)}{m_1s^2+m_2c^2-\mu m_2} > \frac{-m_1[\mu(Fc-kws)+(Fs+kw c)]}{M_8} \Leftrightarrow \frac{m_1+M_3}{M_4} > \mu \checkmark \\
 2. \text{ Zeile} \wedge 3. \text{ Zeile: } & \frac{-2m_1[\mu(Fc-kws)+(Fs+kw c)]}{\mu M_2-c(c-s)(m_1-m_2)} > \frac{-m_1[\mu(Fc-kws)+(Fs+kw c)]}{M_8} \Leftrightarrow \frac{m_1+M_3}{M_4} > \mu \checkmark
 \end{aligned}$$

Der Vergleich zeigt, daß die 3. Zeile den kleinsten positiven Quotienten hat.

Fall 3.1b.5.3 (5. Stufe): $-\frac{F}{k} \frac{\mu c+s}{c-\mu s} > w > -\frac{F}{k} \frac{m_1+m_2c+m_2s}{m_1(c-2s)}$ $\wedge \frac{s}{c} < \frac{1}{2} \wedge \frac{c}{s} > \frac{m_1+M_3}{M_4} > \mu$

$m_1 \ddot{g}_N$	$m_1 \dot{g}_T^+$	$m_1 \ddot{g}_T^-$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N	$\lambda_H^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0^*
$-\frac{\mu m_2}{M_8}$	0	0	0	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{M_8}$	0	$-\frac{\mu sc(m_1 - m_2)}{M_8}$	(1)	0	0	$\frac{\mu m_2 - m_1 s^2 - m_2 c^2}{M_8}$
$\frac{M_7}{M_8}$	(1)	0	0	$-\frac{m_1}{M_8}$	0	$-\frac{m_1}{M_8}$	0	-1	0	$\frac{c(c-s)(m_1 - m_2) - \mu M_2}{M_8}$
$\frac{M_7}{M_8}$	0	-1	0	$-\frac{m_1}{M_8}$	0	$-\frac{m_1}{M_8}$	0	0	(1)	$\frac{m_1 + M_3 - \mu M_4}{M_8}$
$\frac{\mu m_2}{M_8}$	0	0	(1)	$-\frac{\mu sc(m_1 - m_2)}{M_8}$	0	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{M_8}$	0	0	0	$\frac{\mu m_2 - m_1 s^2 - m_2 c^2}{M_8}$
$-\frac{m_2}{M_8}$	0	0	0	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{M_8}$	(1)	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{M_8}$	0	0	0	$\frac{m_2 + sc(m_1 - m_2)}{M_8}$
										$\frac{\mu(Fm_2c - k\mu m_1 s)}{M_8}$
										$\frac{-m_1[\mu(Fc - kws) + (Fs + kwc)]}{M_8}$
										$\frac{-m_1[\mu(Fc - kws) + (Fs + kwc)]}{M_8}$
										$\frac{\mu(Fm_2c - k\mu m_1 s)}{M_8}$
										$\frac{Fm_2c - k\mu m_1 s}{M_8}$

Die Variable z_0 hat die Basis verlassen und der Algorithmus endet. Aus dem Tableau entnimmt man für den Fall 3.1b.5.3 die Lösung

$\ddot{g}_N = 0$	$\lambda_N = \frac{Fm_2c - k\mu m_1 s}{\mu sc(m_1 - m_2) + m_1 s^2 + m_2 c^2} > 0$
$\ddot{g}_T^+ = -\frac{\mu(Fc - kws) - (Fs + kwc)}{\mu sc(m_1 - m_2) + m_1 s^2 + m_2 c^2} > 0$	$\lambda_H^{(+)} = 0$
$\ddot{g}_T^- = 0$	$\lambda_H^{(-)} = \mu \lambda_N > 0$
$\lambda_{H0}^{(-)} = \mu \lambda_N > 0$	$z^- = 0$
$\lambda_{H0}^{(+)} = 0$	$z^+ = \ddot{g}_T^+ > 0$

(C.9)

Nach Tabelle C.9 wechselt der Zustand für den Fall 3.1b.5.3 von *Haften* nach *Gleiten*.

Fall 3.5 (3. Stufe): $-\frac{F}{k} \frac{m_1 c + m_2 c + m_2 s}{m_1(c-2s)} > w \wedge \frac{s}{c} < \frac{1}{2}$

$m_1 \ddot{g}_N$	$m_1 \ddot{g}_T^+$	$m_1 \ddot{g}_T^-$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N	$\lambda_H^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+ *$	z_0
(1)	0	$-\frac{m_2 + sc(m_1 - m_2)}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	$\frac{-M_4}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{\mu M_4 - m_1 - M_3}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{-M_4}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	0	$\frac{m_2 + sc(m_1 - m_2)}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0
0	(1)	$\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2 - m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	$\frac{-2(m_1 c^2 + m_2 s^2)}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{2M_7}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{-2(m_1 c^2 + m_2 s^2)}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	-1	$\frac{m_2 - m_1 c^2 - m_2 s^2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0
0	0	$\frac{-m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	$\frac{-(m_1 c^2 + m_2 s^2)}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{M_7}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	0	$\frac{m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	(1)
0	0	$\frac{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	(1)	$\frac{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{sc(m_1 - m_2) - \mu m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	0	$\frac{m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0
0	0	$\frac{-m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	$\frac{-(m_1 c^2 + m_2 s^2)}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{sc(m_1 - m_2) - \mu m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{-(m_1 c^2 + m_2 s^2)}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	(1)	0	$\frac{m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0

Auswahl der Pivotzeile im Tableau Fall 3.5 (3. Stufe):

	positiver Koeffizient?	positiv, wenn	kleinster positiver Quotient
1. Zeile:	$\frac{m_2 + sc(m_1 - m_2)}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2} > 0 \Rightarrow$	gilt immer!	$\frac{F(m_1 c + m_2 c + m_2 s) + kwm_1(c-2s)}{m_2 + sc(m_1 - m_2)} > 0$
2. Zeile:	$\frac{m_2 - m_1 c^2 - m_2 s^2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2} < 0 \Rightarrow$	negativ!	
3. Zeile:	$\frac{m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2} > 0 \Rightarrow$	gilt immer!	$\frac{-(Fm_2 s + kwm_1 c)}{m_2} > 0$
4. Zeile:	$\frac{m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2} > 0 \Rightarrow$	gilt immer!	$\frac{-(Fm_2 s + kwm_1 c)}{m_2} > 0$
5. Zeile:	$\frac{m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2} > 0 \Rightarrow$	gilt immer!	$\frac{-(Fm_2 s + kwm_1 c)}{m_2} > 0$

Vergleich der Zeilen:

$$1. \text{ Zeile} \wedge 3./4./5. \text{ Zeile: } \frac{-(Fm_2 s + kwm_1 c)}{m_2} > -\frac{F(m_1 c + m_2 c + m_2 s) + kwm_1(c-2s)}{m_2 + sc(m_1 - m_2)} \Leftrightarrow \frac{F}{k} \frac{m_2}{m_1 s} > w \quad \checkmark$$

Der Vergleich zeigt, daß die Zeile 1 den nächsten zulässigen Pfad vorgibt.

Fall 3.5.1 (4. Stufe): $-\frac{F}{k} \frac{m_1 c + m_2 c + m_2 s}{m_1(c-2s)} > w \quad \wedge \quad \frac{s}{c} < \frac{1}{2}$

$m_1 \dot{y}_N$	$m_1 \ddot{y}_T$	$m_1 \ddot{y}_T$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N^*	$\lambda_H^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0
$\frac{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2 + sc(m_1 - m_2)}$	0	-1	0	$\frac{-M_4}{m_2 + sc(m_1 - m_2)}$	$\frac{\mu M_4 - m_1 - M_3}{m_2 + sc(m_1 - m_2)}$	$\frac{-M_4}{m_2 + sc(m_1 - m_2)}$	0	0	(1)	0
$\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2 - m_2}{m_2 + sc(m_1 - m_2)}$	(1)	0	0	$\frac{-M_2}{m_2 + sc(m_1 - m_2)}$	$\frac{\mu M_2 - c(c-s)(m_1 - m_2)}{m_2 + sc(m_1 - m_2)}$	$\frac{-M_2}{m_2 + sc(m_1 - m_2)}$	0	-1	0	0
$\frac{-m_2}{m_2 + sc(m_1 - m_2)}$	0	0	0	$\frac{M_8}{m_2 + sc(m_1 - m_2)}$	$\frac{M_8}{m_2 + sc(m_1 - m_2)}$	$\frac{-sc(m_1 - m_2)}{m_2 + sc(m_1 - m_2)}$	0	0	0	(1)
$\frac{-m_2}{m_2 + sc(m_1 - m_2)}$	0	0	(1)	$\frac{m_2 + sc(m_1 - m_2)}{m_2 + sc(m_1 - m_2)}$	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{m_2 + sc(m_1 - m_2)}$	$\frac{m_2}{m_2 + sc(m_1 - m_2)}$	0	0	0	0
$\frac{-m_2}{m_2 + sc(m_1 - m_2)}$	0	0	0	$\frac{m_2}{m_2 + sc(m_1 - m_2)}$	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{m_2 + sc(m_1 - m_2)}$	$\frac{-sc(m_1 - m_2)}{m_2 + sc(m_1 - m_2)}$	(1)	0	0	0

Auswahl der Pivotzeile im Tableau Fall 3.5.1 (4. Stufe):

	$\underbrace{\frac{\mu M_4 - m_1 - M_3}{m_2 + sc(m_1 - m_2)} > 0}_{\text{positiver Koeffizient?}}$	$\underbrace{\mu > \frac{m_1 + M_3}{M_4}}_{\text{positiv, wenn}}$	$\underbrace{\frac{-F(m_1 c + m_2 c + m_2 s) - k w m_1(c-2s)}{\mu M_4 - m_1 - M_3} > 0}_{\text{kleinster positiver Quotient}}$
1. Zeile:	$\frac{\mu M_4 - m_1 - M_3}{m_2 + sc(m_1 - m_2)} > 0 \Rightarrow$	$\mu > \frac{m_1 + M_3}{M_4} \Rightarrow$	$\frac{-F(m_1 c + m_2 c + m_2 s) - k w m_1(c-2s)}{\mu M_4 - m_1 - M_3} > 0$
2. Zeile:	$\frac{\mu M_2 - c(c-s)(m_1 - m_2)}{m_2 + sc(m_1 - m_2)} > 0 \Rightarrow$	$\mu > \frac{c(c-s)(m_1 - m_2)}{M_2} \Rightarrow$	$\frac{F(m_2 c - m_2 s - m_1 c) - k w m_1 c}{\mu M_2 - c(c-s)(m_1 - m_2)} > 0$
3. Zeile:	$\frac{M_8}{m_2 + sc(m_1 - m_2)} > 0 \Rightarrow$	gilt immer!	$\frac{F m_2 c - k w m_1 s}{M_8} > 0$
4. Zeile:	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{m_2 + sc(m_1 - m_2)} > 0 \Rightarrow$	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_2} > \mu$	$\frac{F m_2 c - k w m_1 s}{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2} > 0$
5. Zeile:	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{m_2 + sc(m_1 - m_2)} > 0 \Rightarrow$	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_2} > \mu$	$\frac{F m_2 c - k w m_1 s}{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2} > 0$

Vergleich der Zeilen:

1. Zeile \wedge 2. Zeile:	$\frac{F(m_2 c - m_2 s - m_1 c) - k w m_1 c}{\mu M_2 - c(c-s)(m_1 - m_2)} > \frac{-F(m_1 c + m_2 c + m_2 s) - k w m_1(c-2s)}{\mu M_4 - m_1 - M_3}$	$\Leftrightarrow F(\mu c + s) > k w(\mu s - c)$
1. Zeile \wedge 3. Zeile:	$\frac{F m_2 c - k w m_1 s}{M_8} > \frac{-F(m_1 c + m_2 c + m_2 s) - k w m_1(c-2s)}{\mu M_4 - m_1 - M_3}$	$\Leftrightarrow F(\mu c + s) > k w(\mu s - c)$
2. Zeile \wedge 3. Zeile:	$\frac{F m_2 c - k w m_1 s}{M_8} > \frac{\mu M_2 - c(c-s)(m_1 - m_2)}{F(m_2 c - m_2 s - m_1 c) - k w m_1 c}$	$\Leftrightarrow F(\mu c + s) > k w(\mu s - c)$
3. Zeile \wedge 4./5. Zeile:	$\frac{F m_2 c - k w m_1 s}{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2} > \frac{F m_2 c - k w m_1 s}{M_8}$	$\Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} > 1 > 1 - \frac{1}{sc} \checkmark$

Der Vergleich zeigt, daß zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden sind.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{F}{k} \frac{m_1 c + m_2 c + m_2 s}{m_1(c-2s)} > w \\ -\frac{F}{k} \frac{m_1 c + m_2 c + m_2 s}{m_1(c-2s)} > w > -\frac{F}{k} \frac{\mu c + s}{c - \mu s} \end{array} \right\} \wedge \left\{ \begin{array}{l} \frac{s}{c} < \frac{1}{2} \\ \frac{s}{c} < \frac{1}{2} \end{array} \right\} \wedge \left\{ \begin{array}{l} \mu > \frac{c}{s} \\ \mu > \frac{c}{s} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Fall 3.5.1.1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{F}{k} \frac{m_1 c + m_2 c + m_2 s}{m_1(c-2s)} > w \\ -\frac{F}{k} \frac{\mu c + s}{c - \mu s} > w \end{array} \right\} \wedge \left\{ \begin{array}{l} \frac{s}{c} < \frac{1}{2} \\ \frac{s}{c} < \frac{1}{2} \end{array} \right\} \wedge \left\{ \begin{array}{l} \mu > \frac{c}{s} \\ \mu > \frac{c}{s} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Fall 3.5.1.3}$$

Fall 3.5.1.1 (5. Stufe):

$m_1 \ddot{g}_N$	$m_1 \ddot{g}_T^+$	$m_1 \ddot{g}_T^-$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	$\lambda_{H0}^{(*)}$	λ_N	$\lambda_H^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0
$\frac{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}{M_5 - M_3 - m_1}$	0	$-\frac{m_2 + sc(m_1 - m_2)}{M_5 - M_3 - m_1}$	0	$\frac{-M_4}{M_5 - M_3 - m_1}$	(1)	$\frac{-M_4}{M_5 - M_3 - m_1}$	0	$\frac{m_2 + sc(m_1 - m_2)}{M_5 - M_3 - m_1}$	0	$-\frac{F(m_1 c + m_2 c + m_2 s) + kum_1(c-2s)}{M_5 - M_3 - m_1}$
$\frac{-2M_7}{M_5 - M_3 - m_1}$	(1)	$\frac{\mu M_2 - c(c-s)(m_1 - m_2)}{M_5 - M_3 - m_1}$	0	$\frac{2m_1}{M_5 - M_3 - m_1}$	0	$\frac{2m_1}{M_5 - M_3 - m_1}$	0	$\frac{c(c-s)(m_1 - m_2) - \mu M_2}{M_5 - M_3 - m_1}$	0	$\frac{\mu(Fc - kws) + (Fs + kwc)}{2m_1}$
$\frac{-M_7}{M_5 - M_3 - m_1}$	0	$\frac{M_4}{M_5 - M_3 - m_1}$	0	$\frac{m_1}{M_5 - M_3 - m_1}$	0	$\frac{m_1}{M_5 - M_3 - m_1}$	0	$\frac{-M_8}{M_5 - M_3 - m_1}$	(1)	$\frac{\mu(Fc - kws) + (Fs + kwc)}{m_1}$
$\frac{\mu m_2 - sc(m_1 - m_2)}{M_5 - M_3 - m_1}$	0	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{M_5 - M_3 - m_1}$	(1)	$\frac{m_1 - \mu M_4}{M_5 - M_3 - m_1}$	0	$\frac{m_1 - \mu M_4}{M_5 - M_3 - m_1}$	0	$\frac{\mu m_2 - m_1 s^2 - m_2 c^2}{M_5 - M_3 - m_1}$	0	$\frac{m_1(Fs + kwc) - \mu[Fm_2(c+s) + kum_1(c-s)]}{M_5 - M_3 - m_1}$
$\frac{\mu m_2 - sc(m_1 - m_2)}{M_5 - M_3 - m_1}$	0	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{M_5 - M_3 - m_1}$	0	$\frac{-M_3}{M_5 - M_3 - m_1}$	0	$\frac{m_1 - \mu M_4}{M_5 - M_3 - m_1}$	(1)	$\frac{\mu m_2 - m_1 s^2 - m_2 c^2}{M_5 - M_3 - m_1}$	0	$\frac{m_1(Fs + kwc) - \mu[Fm_2(c+s) + kum_1(c-s)]}{M_5 - M_3 - m_1}$

Auswahl der Pivotzeile im Tableau Fall 3.5.1.1 (5. Stufe):

	positiver Koeffizient?	positiv, wenn	kleinster positiver Quotient
1. Zeile:	$\frac{-M_4}{M_5 - M_3 - m_1} < 0 \Rightarrow$	negativ!	
2. Zeile:	$\frac{2m_1}{M_5 - M_3 - m_1} > 0 \Rightarrow$	gilt immer!	$\mu(Fc - kws) + (Fs + kwc) > 0$
3. Zeile:	$\frac{m_1}{M_5 - M_3 - m_1} > 0 \Rightarrow$	gilt immer!	$\mu(Fc - kws) + (Fs + kwc) > 0$
4. Zeile:	$\frac{m_1 - \mu M_4}{M_5 - M_3 - m_1} < 0 \Rightarrow$	negativ!	
5. Zeile:	$\frac{-M_3}{M_5 - M_3 - m_1} > 0 \Rightarrow$	$-M_3 > 0 \Rightarrow$	$\frac{m_1(Fs + kwc) - \mu[Fm_2(c+s) + kum_1(c-s)]}{-M_3} > 0$

Vergleich der Zeilen:

$$2./3.\text{Zeile} \wedge 5.\text{Zeile: } \frac{m_1(Fs+kw c) - \mu[Fm_2(c+s) + km_1(c-s)]}{-M_3} > \mu(Fc - kws) + (Fs + kw c) \Leftrightarrow \mu > \frac{m_1 + M_3}{M_4} \quad \checkmark$$

Die Zeile 2 führt zu keiner Lösung. Der Vergleich ergibt, daß die 3.Zeile gewählt werden muß.

Fall 3.5.1.1.3 (6.Stufe): $\left\{ \begin{array}{l} -\frac{F}{k} \frac{m_1 c + m_2 c + m_2 s}{m_1(c-2s)} > w \quad \wedge \quad \frac{s}{c} < \frac{1}{2} \quad \wedge \quad \mu > \frac{c}{s} \\ -\frac{F}{k} \frac{m_1 c + m_2 c + m_2 s}{m_1(c-2s)} > w > -\frac{F}{k} \frac{\mu c + s}{c - \mu s} \quad \wedge \quad \frac{s}{c} < \frac{1}{2} \quad \wedge \quad \frac{c}{s} > \mu \quad \wedge \quad \mu > \frac{m_1 + M_3}{M_4} \end{array} \right\}$

$m_1 \dot{g}_N$	$m_1 \dot{g}_T^+$	$m_1 \dot{g}_T^-$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N	$\lambda_H^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0^*
$-\frac{m_1 \dot{g}_N}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	0	0	(1)	0	0	0	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	$\frac{M_4}{m_1}$
0	(1)	1	0	0	0	0	-1	-1	-1	-2
$-\frac{M_T}{m_1}$	0	$\frac{M_S}{m_1}$	0	(1)	0	1	0	0	$-\frac{M_S}{m_1}$	$\frac{M_5 - M_3 - m_1}{m_1}$
$-\frac{\mu(m_1 c^2 + m_2 s^2)}{m_1}$	0	$\frac{\mu sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	(1)	0	0	1	0	0	$-\frac{\mu sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	$\frac{\mu M_3 - m_1}{m_1}$
$\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	0	$-\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_1}$	0	0	0	-1	(1)	0	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{m_1}$	$\frac{M_3}{m_1}$
										$Fc - kws$
										0
										$\mu(Fc - kws) + (Fs + kw c)$
										$\mu(Fc - kws)$
										$-(Fs + kw c)$

Die Variable z_0 hat die Basis verlassen und der Algorithmus endet. Aus dem Tableau entnimmt man für den Fall 3.5.1.1.3 die Lösung

$\dot{g}_N = 0$	$\lambda_N = Fc - kws > 0$
$\dot{g}_T^+ = 0$	$\lambda_H^{(+)} = 0$
$\dot{g}_T^- = 0$	$\lambda_H^{(-)} = -(Fs + kw c) > 0$
$\lambda_{H0}^{(-)} = \mu \lambda_N > 0$	$z^- = 0$
$\lambda_{H0}^{(+)} = \mu \lambda_N - \lambda_H^{(-)} > 0$	$z^+ = 0$

(C.10)

Nach Tabelle C.10 erfolgt für den Fall 3.5.1.1.3 kein Zustandsübergang, es bleibt beim Haften.

$$\text{Fall 3.5.1.3 (5. Stufe): } \left\{ \begin{array}{l} -\frac{F}{k} \frac{m_1 c + m_2 c + m_2 s}{m_1(c-2s)} > w \quad \wedge \quad \frac{s}{c} < \frac{1}{2} \quad \wedge \quad \frac{c}{s} > \mu \quad \wedge \quad \frac{m_1 + M_3}{M_4} > \mu \\ -\frac{F}{k} \frac{\mu c + s}{c - \mu s} > w \quad \wedge \quad \frac{s}{c} < \frac{1}{2} \quad \wedge \quad \frac{c}{s} > \mu \quad \wedge \quad \mu > \frac{m_1 + M_3}{M_4} \end{array} \right\}$$

$m_1 \ddot{g}_N$	$m_1 \ddot{g}_T^+$	$m_1 \ddot{g}_T^-$	$\lambda_{H0}^{(-)}$	$\lambda_{H0}^{(+)}$	λ_N	$\lambda_H^{(+)}$	$\lambda_H^{(-)}$	$m_1 z^-$	$m_1 z^+$	z_0^*
$\frac{M_7}{M_8}$	0	-1	0	$-\frac{m_1}{M_8}$	0	$-\frac{m_1}{M_8}$	0	0	(1)	$-\frac{m_1}{M_8} \frac{\mu(Fc-kws) + (Fs+kw)}{M_8}$
$\frac{M_7}{M_8}$	(1)	0	0	$-\frac{m_1}{M_8}$	0	$-\frac{m_1}{M_8}$	0	-1	0	$-\frac{m_1}{M_8} \frac{\mu(Fc-kws) + (Fs+kw)}{M_8}$
$-\frac{m_2}{M_8}$	0	0	0	$-\frac{sc(m_1-m_2)}{M_8}$	(1)	$-\frac{sc(m_1-m_2)}{M_8}$	0	0	0	$\frac{Fm_2c-kwm_1s}{M_8}$
$-\frac{\mu m_2}{M_8}$	0	0	(1)	$-\frac{\mu sc(m_1-m_2)}{M_8}$	0	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{M_8}$	0	0	0	$\frac{\mu(Fm_2c-kwm_1s)}{M_8}$
$-\frac{\mu m_2}{M_8}$	0	0	0	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{M_8}$	0	$-\frac{\mu sc(m_1-m_2)}{M_8}$	(1)	0	0	$\frac{\mu(Fm_2c-kwm_1s)}{M_8}$

Die Variable z_0 hat die Basis verlassen und der Algorithmus endet. Aus dem Tableau entnimmt man für den Fall 3.5.1.3 die Lösung

$\ddot{g}_N = 0$	$\lambda_N = \frac{Fm_2c-kwm_1s}{\mu sc(m_1-m_2) + (m_1 s^2 + m_2 c^2)} > 0$
$\ddot{g}_T^+ = -\frac{\mu(Fc-kws) + (Fs+kw)}{\mu sc(m_1-m_2) + (m_1 s^2 + m_2 c^2)} > 0$	$\lambda_H^{(+)} = 0$
$\ddot{g}_T^- = 0$	$\lambda_H^{(-)} = \mu \lambda_N > 0$
$\lambda_{H0}^{(-)} = \mu \lambda_N > 0$	$z^- = 0$
$\lambda_{H0}^{(+)} = 0$	$z^+ = \ddot{g}_T^+ > 0$

(C.11)

Nach Tabelle C.11 erfolgt für den Fall 3.5.1.3 ein Zustandsübergang von *Haften* nach *Gleiten*.

Anhang D

Analytische Berechnung Stoß

D.1 Analytische Berechnung Stoß Fall 2

Fall 2 (2.Stufe): $\frac{\pi}{4} < \alpha < \pi$

$m_1 \dot{g}_{NC}$	$m_1 \dot{g}_{TC}^+$	$m_1 \dot{g}_{TC}^-$	$\Lambda_{TOC}^{(-)}$	$\Lambda_{TOC}^{(+)}$	Λ_{NC}	$\Lambda_{TC}^{(*)}$	$\Lambda_{TC}^{(-)}$	$m_1 z_C^-$	$m_1 z_C^+$	z_0
(1)	-1	0	0	0	$-\frac{M_1}{m_2}$	$\frac{M_2}{m_2}$	$-\frac{M_2}{m_2}$	1	0	0
0	-1	0	0	0	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$-\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	1	0	(1)
0	-1	(1)	0	0	$-\frac{2sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$\frac{2m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$-\frac{2m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	1	-1	0
0	-1	0	(1)	0	$-\frac{\mu m_2 + sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$\frac{m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$-\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	1	0	0
0	-1	0	0	(1)	$-\frac{\mu m_2 + sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	$\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{m_2 - (m_1 c^2 + m_2 s^2)}{m_2}$	1	0	0

Auswahl der Pivotzeile im Tableau Fall 2 (2. Stufe):

	positiver Koeffizient?	positiv, wenn	kleinster positiver Quotient
1. Zeile:	$\frac{M_2}{m_2} > 0$	\Rightarrow	$\frac{v m_1 m_2 (s \sin \alpha - c \cos \alpha)}{M_2} > 0$
2./5. Zeile:	$\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2} > 0$	\Rightarrow	$\frac{v m_1 m_2 s \sin \alpha}{m_1 c^2 + m_2 s^2} > 0$
3. Zeile:	$2 \frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2} > 0$	\Leftrightarrow	$\frac{v m_1 m_2 s \sin \alpha}{m_1 c^2 + m_2 s^2} > 0$
4... Zeile:	$\frac{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2} > 0$	\Leftrightarrow	$\frac{v m_1 m_2 s \sin \alpha}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2} > 0$

Vergleich der Zeilen:

$$4. \text{Zeile} \wedge 2./3./5. \text{Zeile: } \frac{v m_1 m_2 \sin \alpha}{m_1 c^2 + m_2 s^2} > \frac{v m_1 m_2 \sin \alpha}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2} \Leftrightarrow m_2 > 0 \quad \checkmark$$

$$1. \text{Zeile} \wedge 4. \text{Zeile: } \frac{v m_1 m_2 (\sin \alpha - \cos \alpha)}{M_2} > \frac{v m_1 m_2 \sin \alpha}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2} \Leftrightarrow \alpha = \beta + \gamma$$

$$m_2 (c + 2s) \sin \beta - (m_1 c + m_2 c - m_2 s) \cos \beta > 0$$

Der Vergleich ergibt, daß zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden sind.

Die 1. Zeile muß gewählt werden, wenn: $\frac{\pi}{4} < \alpha < \gamma + \arctan \frac{m_1 c + m_2 c - m_2 s}{m_2 (c + 2s)}$ \Rightarrow Fall 2.1

Die 4. Zeile muß gewählt werden, wenn: $\gamma + \arctan \frac{m_1 c + m_2 c - m_2 s}{m_2 (c + 2s)} < \alpha < \pi$ \Rightarrow Fall 2.4

Fall 2.1 (3. Stufe): $\frac{\pi}{4} < \alpha < \gamma + \arctan \frac{m_1 c + m_2 c - m_2 s}{m_2 (c + 2s)}$

$m_1 g_{NC}$	$m_1 g_{TC}^+$	$m_1 g_{TC}^-$	$\Lambda_{TOC}^{(-)}$	$\Lambda_{TOC}^{(+)}$	Λ_{NC}^*	$\Lambda_{TC}^{(+)}$	$\Lambda_{TC}^{(-)}$	$m_1 z_C^-$	$m_1 z_C^+$	z_0
$\frac{m_2}{M_2}$	$-\frac{m_2}{M_2}$	0	0	0	$-\frac{M_1}{M_2}$	(1)	-1	$\frac{m_2}{M_2}$	0	0
$-\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{M_2}$	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{M_2}$	0	0	0	$\frac{m_1}{M_2}$	0	0	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{M_2}$	0	(1)
$-2 \frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{M_2}$	$\frac{M_4}{M_2}$	(1)	0	0	$2 \frac{m_1}{M_2}$	0	0	$-\frac{M_4}{M_2}$	-1	0
$-\frac{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}{M_2}$	$\frac{m_2 - sc(m_1 - m_2)}{M_2}$	0	(1)	0	$\frac{M_1 + m_1 - \mu M_2}{M_2}$	0	1	$\frac{sc(m_1 - m_2) - m_2}{M_2}$	0	0
$-\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{M_2}$	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{M_2}$	0	0	(1)	$\frac{m_1 - \mu M_2}{M_2}$	0	1	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{M_2}$	0	0

Auswahl der Pivotzeile im Tableau Fall 2.1 (3. Stufe):

	positiver Koeffizient?	positiv, wenn	kleinster positiver Quotient
1. Zeile:	$-\frac{M_1}{M_2} < 0 \Rightarrow$	negativ!	
2. Zeile:	$\frac{m_1}{M_2} > 0 \Rightarrow$	gilt immer!	$v [sc(m_1 - m_2) \sin \alpha + (m_1 c^2 + m_2 s^2) \cos \alpha] > 0$
3. Zeile:	$2 \frac{m_1}{M_2} > 0 \Leftrightarrow$	gilt immer!	$v [sc(m_1 - m_2) \sin \alpha + (m_1 c^2 + m_2 s^2) \cos \alpha] > 0$
4. Zeile:	$\frac{M_1 + m_1 - \mu M_2}{M_2} > 0 \Leftrightarrow$	$\mu < \frac{m_1 + M_1}{M_2}$	$v m_1 \frac{[m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2] \cos \alpha - [m_2 - sc(m_1 - m_2)] \sin \alpha}{m_1 + M_1 - \mu M_2} > 0$
5. Zeile:	$\frac{m_1 - \mu M_2}{M_2} > 0 \Leftrightarrow$	$\mu < \frac{m_1}{M_2}$	$v m_1 \frac{sc(m_1 - m_2) \sin \alpha + (m_1 c^2 + m_2 s^2) \cos \alpha}{m_1 - \mu M_2} > 0$

Vergleich der Zeilen:

$$2./3.\text{Zeile} \wedge 4.\text{Zeile:} \quad vm_1 \frac{[m_2+m_1c^2+m_2s^2] \cos\alpha - [m_2-sc(m_1-m_2)] \sin\alpha}{m_1+M_1-\mu M_2} > v [sc(m_1-m_2) \sin\alpha + (m_1c^2+m_2s^2) \cos\alpha]$$

$$\Leftrightarrow \mu > \frac{m_1s^2+m_2c^2}{sc(m_1-m_2)} > \frac{(m_1s^2+m_2c^2) \sin\alpha + sc(m_1-m_2) \cos\alpha}{(m_1c^2+m_2s^2) \cos\alpha + sc(m_1-m_2) \sin\alpha} \quad \checkmark$$

$$2./3.\text{Zeile} \wedge 5.\text{Zeile:} \quad vm_1 \frac{sc(m_1-m_2) \sin\alpha + (m_1c^2+m_2s^2) \cos\alpha}{m_1-\mu M_2} > v [sc(m_1-m_2) \sin\alpha + (m_1c^2+m_2s^2) \cos\alpha]$$

$$\Leftrightarrow m_1c^2 + m_2s^2 + sc(m_1 - m_2) > 0 \quad \checkmark$$

Der Vergleich zeigt, daß die 2.Zeile den kleinsten positiven Quotienten hat und als Pivotzeile gewählt werden muß.

Fall 2.1.2 (4.Stufe): $\frac{\pi}{4} < \alpha < \gamma + \arctan \frac{m_1c+m_2c-m_2s}{m_2(c+2s)}$

$m_1 \dot{g}_{NC}$	$m_1 \dot{g}_{TC}^+$	$m_1 \dot{g}_{TC}^-$	$\Lambda_{TOC}^{(-)}$	$\Lambda_{TOC}^{(+)}$	$\Lambda_{NC}^{(-)}$	$\Lambda_{NC}^{(+)}$	$\Lambda_{TC}^{(-)}$	$\Lambda_{TC}^{(+)}$	z_0^*	
$-\frac{sc(m_1-m_2)}{m_1}$	$-\frac{m_1s^2+m_2c^2}{m_1}$	0	0	0	0	(1)	-1	0	$\frac{M_1}{m_1}$	$v [sc(m_1-m_2) \cos\alpha + (m_1s^2+m_2c^2) \sin\alpha]$
$-\frac{m_1c^2+m_2s^2}{m_1}$	$-\frac{sc(m_1-m_2)}{m_1}$	0	0	(1)	0	0	0	0	$\frac{M_2}{m_1}$	$v [(m_1c^2+m_2s^2) \cos\alpha + sc(m_1-m_2) \sin\alpha]$
0	1	(1)	0	0	0	0	0	-1	-2	0
$-\frac{M_5}{m_1}$	$-\frac{M_6}{m_1}$	0	(1)	0	0	0	1	0	$\frac{\mu M_2 - m_1 - M_1}{m_1}$	$\mu \Lambda_{NC} - \Lambda_{TC}^{(+)}$
$-\frac{\mu(m_1c^2+m_2s^2)}{m_1}$	$-\frac{\mu sc(m_1-m_2)}{m_1}$	0	0	(1)	0	0	1	0	$\frac{\mu M_2 - m_1}{m_1}$	$\mu v [(m_1c^2+m_2s^2) \cos\alpha + sc(m_1-m_2) \sin\alpha]$

Die Variable z_0 hat die Basis verlassen und der Algorithmus endet. Aus dem Tableau entnimmt man für den Fall 2.1.2 die Lösung

$\dot{g}_{NC} = 0$	$\Lambda_{NC} = v [(m_1c^2+m_2s^2) \cos\alpha + sc(m_1-m_2) \sin\alpha] > 0$
$\dot{g}_{TC}^+ = 0$	$\Lambda_{TC}^{(+)} = v [sc(m_1-m_2) \cos\alpha + (m_1s^2+m_2c^2) \sin\alpha] > 0$
$\dot{g}_{TC}^- = 0$	$\Lambda_{TC}^{(-)} = 0$
$\Lambda_{TOC}^{(-)} = \mu \Lambda_{NC} - \Lambda_{TC}^{(+)} > 0$	$z_C^- = 0$
$\Lambda_{TOC}^{(+)} = \mu \Lambda_{NC} > 0$	$z_C^+ = 0$

(D.1)

Nach Tabelle D.1 erfolgt für den Fall 2.1.2 ein Zustandsübergang von *Separation* nach *Haften*.

Fall 2.4 (3.Stufe): $\gamma + \arctan \frac{m_1 c + m_2 c - m_2 s}{m_2(c+2s)} < \alpha < \pi$

$m_1 \dot{g}_{NC}$	$m_1 \dot{g}_{TC}^+$	$m_1 \dot{g}_{TC}^-$	$\Lambda_{TOC}^{(+)}$	Λ_{NC}	$\Lambda_{TC}^{(+)}$	$\Lambda_{TC}^{(-)}$	$m_1 \dot{z}_C^*$	$m_1 \dot{z}_C^+$	\dot{z}_0	$\frac{[m_2 - sc(m_1 - m_2)] \sin \alpha - m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2} \cos \alpha$
(1)	$\frac{sc(m_1 - m_2) - m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	$\frac{-M_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{\mu M_2 - m_1 - M_1}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	$\frac{-M_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{m_2 - sc(m_1 - m_2)}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	0	$v m_1 \frac{[m_2 - sc(m_1 - m_2)] \sin \alpha - m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2} \cos \alpha$
0	$\frac{-m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	$\frac{M_5}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{M_5}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	$\frac{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}{-(m_1 c^2 + m_2 s^2)}$	$\frac{m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	(1)	$v m_1 \frac{m_2 \sin \alpha}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$
0	$\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2 - m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	(1)	$\frac{-2(m_1 c^2 + m_2 s^2)}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{2M_5}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	$\frac{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}{-2(m_1 c^2 + m_2 s^2)}$	$\frac{m_2 - (m_1 c^2 + m_2 s^2)}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	-1	0	$2 v m_1 \frac{m_2 \sin \alpha}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$
0	$\frac{-m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	$\frac{m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{-\mu m_2 - sc(m_1 - m_2)}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	(1)	$\frac{m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	0	$v m_1 \frac{m_2 \sin \alpha}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$
0	$\frac{-m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	(1)	$\frac{m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{-\mu m_2 - sc(m_1 - m_2)}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	$\frac{m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	$\frac{m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	0	$v m_1 \frac{m_2 \sin \alpha}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$

Auswahl der Pivotzeile im Tableau Fall 2.4 (3. Stufe):

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{positiver Koeffizient?}}$	$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{positiv, wenn}}$	$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{kleinster positiver Quotient}}$
$1. \text{ Zeile: } \frac{m_2 - sc(m_1 - m_2)}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2} > 0 \Leftrightarrow m_2 - sc(m_1 - m_2) > 0 \Rightarrow v m_1 \frac{[m_2 - sc(m_1 - m_2)] \sin \alpha - [m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2] \cos \alpha}{m_2 - sc(m_1 - m_2)} > 0$		
$2./4./5. \text{ Zeile: } \frac{m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2} > 0 \Leftrightarrow$	$\text{gilt immer!} \Rightarrow$	$v m_1 \sin \alpha > 0$
$3. \text{ Zeile: } \frac{m_2 - (m_1 c^2 + m_2 s^2)}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2} < 0 \Rightarrow$	negativ!	

Vergleich der Zeilen:

$$1. \text{ Zeile} \wedge 2./4./5. \text{ Zeile: } v m_1 \sin \alpha > v m_1 \frac{[m_2 - sc(m_1 - m_2)] \sin \alpha - [m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2] \cos \alpha}{m_2 - sc(m_1 - m_2)} \Leftrightarrow \cos \alpha > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Die Zeilen 4 und 5 führen zu keiner Lösung. Es ist $\gamma + \arctan \frac{m_1 c + m_2 c - m_2 s}{m_2(c+2s)} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow m_2 - sc(m_1 - m_2) > 0$.

Die 1. Zeile muß gewählt werden für $\gamma + \arctan \frac{m_1 c + m_2 c - m_2 s}{m_2(c+2s)} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ Fall 2.4.1

Die 2. Zeile muß gewählt werden für $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow$ Fall 2.4.2

Fall 2.4.1 (4. Stufe): $\frac{\pi}{4} < \gamma + \arctan \frac{m_1 c + m_2 c - m_2 s}{m_2(c+2s)} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$m_1 \dot{g}_{NC}$	$m_1 \dot{g}_{TC}^+$	$m_1 \dot{g}_{TC}^-$	$\Lambda_{TOC}^{(+)}$	$\Lambda_{TOC}^{(-)}$	Λ_{NC}^*	$\Lambda_{TC}^{(+)}$	$\Lambda_{TC}^{(-)}$	$m_1 z_C^-$	$m_1 z_C^+$	z_0
$\frac{m_2 + (m_1 c^2 + m_2 s^2)}{m_2 - sc(m_1 - m_2)}$	-1	0	$\frac{-M_2}{m_2 - sc(m_1 - m_2)}$	0	$\frac{\mu M_2 - m_1 - M_1}{m_2 - sc(m_1 - m_2)}$	0	$\frac{-M_2}{m_2 - sc(m_1 - m_2)}$	(1)	0	0
$\frac{-m_2}{m_2 - sc(m_1 - m_2)}$	0	0	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2 - sc(m_1 - m_2)}$	0	$\frac{-M_6}{m_2 - sc(m_1 - m_2)}$	0	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2 - sc(m_1 - m_2)}$	0	0	(1)
$\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2 - m_2}{m_2 - sc(m_1 - m_2)}$	0	(1)	$\frac{-M_4}{m_2 - sc(m_1 - m_2)}$	0	$\frac{\mu M_4 - m_1 + M_3}{m_2 - sc(m_1 - m_2)}$	0	$\frac{-M_4}{m_2 - sc(m_1 - m_2)}$	0	-1	0
$\frac{-m_2}{m_2 - sc(m_1 - m_2)}$	0	0	$\frac{m_2}{sc(m_1 - m_2)}$	0	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{m_2 - sc(m_1 - m_2)}$	(1)	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2 - sc(m_1 - m_2)}$	0	0	0
$\frac{-m_2}{m_2 - sc(m_1 - m_2)}$	0	0	$\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2 - sc(m_1 - m_2)}$	(1)	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{m_2 - sc(m_1 - m_2)}$	0	$\frac{m_2}{m_2 - sc(m_1 - m_2)}$	0	0	0

Auswahl der Pivotzeile im Tableau Fall 2.4.1 (4. Stufe):

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{positiver Koeffizient?}}$	$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{positiv, wenn}}$	$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{kleinster positiver Quotient}}$
1. Zeile:	$\frac{\mu M_2 - m_1 - M_1}{m_2 - sc(m_1 - m_2)} > 0 \Leftrightarrow \mu > \frac{m_1 + M_1}{M_2} \Rightarrow v m_1$	$\frac{[m_2 - sc(m_1 - m_2)] \sin \alpha - [m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2] \cos \alpha}{\mu M_2 - m_1 - M_1} > 0$
2. Zeile:	$\frac{-M_6}{m_2 - sc(m_1 - m_2)} < 0 \Rightarrow$ negativ!	
3. Zeile:	$\frac{\mu M_4 - m_1 + M_3}{m_2 - sc(m_1 - m_2)} > 0 \Leftrightarrow \mu M_4 - m_1 + M_3 > 0 \Rightarrow v m_1$	$\frac{[m_2 - sc(m_1 - m_2)] \sin \alpha + [m_2 - (m_1 c^2 + m_2 s^2)] \cos \alpha}{\mu M_4 - m_1 + M_3} > 0$
4./5. Zeile:	$\frac{m_1 s^2 + m_2 c^2 - \mu m_2}{m_2 - sc(m_1 - m_2)} < 0 \Rightarrow$ negativ!	

Wegen $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ist $\mu > \frac{m_1 s^2 + m_2 c^2}{sc(m_1 - m_2)} > \frac{m_1 + M_1}{M_2}$, so daß Zeile 1 für den Fall 2.4.1 immer gilt.

Vergleich der Zeilen:

$$\begin{aligned}
 & 1. \text{ Zeile} \wedge 3. \text{ Zeile:} \quad v m_1 \frac{[m_2 - sc(m_1 - m_2)] \sin \alpha + [m_2 - (m_1 c^2 + m_2 s^2)] \cos \alpha}{\mu M_4 - m_1 + M_3} > v m_1 \frac{[m_2 - sc(m_1 - m_2)] \sin \alpha - [m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2] \cos \alpha}{\mu M_2 - m_1 - M_1} \\
 & \Leftrightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} > 0 > -\frac{M_6}{M_5} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Der Vergleich ergibt, daß die Zeile 1 den kleinsten positiven Quotienten hat.

Fall 2.4.1.1 (5. Stufe): $\frac{\pi}{4} < \gamma + \arctan \frac{m_1 c + m_2 c - m_2 s}{m_2(c+2s)} < \alpha < \frac{\pi}{2} \wedge m_2 - sc(m_1 - m_2) > 0$

$m_1 g_{NC}$	$m_1 g_{TC}^+$	$m_1 g_{TC}^-$	Λ_{TOC}^*	$\Lambda_{TOC}^{(-)}$	$\Lambda_{NC} \Lambda_{TC}^{(+)}$	$\Lambda_{TC}^{(-)}$	$m_1 z_C^-$	$m_1 z_C^+$	z_0
$\frac{m_2 + (m_1 c^2 + m_2 s^2)}{\mu M_2 - m_1 - M_1}$	$\frac{sc(m_1 - m_2) - m_2}{\mu M_2 - m_1 - M_1}$	0	0	0	(1)	0	$\frac{m_2 - sc(m_1 - m_2)}{\mu M_2 - m_1 - M_1}$	0	$v m_1 \frac{[m_2 - sc(m_1 - m_2)] \sin \alpha - [m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2] \cos \alpha}{\mu M_2 - m_1 - M_1}$
$\frac{\mu M_2 - m_1 - M_1}{-M_5}$	$\frac{\mu M_2 - m_1 - M_1}{-M_6}$	0	0	0	0	0	$\frac{\mu M_2 - m_1 - M_1}{M_6}$	0	$v m_1 \frac{M_6 \sin \alpha + M_5 \cos \alpha}{\mu M_2 - m_1 - M_1}$
$\frac{\mu M_2 - m_1 - M_1}{-2M_5}$	$\frac{\mu M_2 - m_1 - M_1}{\mu M_4 - m_1 + M_3}$	(1)	0	0	0	0	$\frac{\mu M_2 - m_1 - M_1}{2m_1}$	-1	$2v m_1 \frac{M_6 \sin \alpha + M_5 \cos \alpha}{\mu M_2 - m_1 - M_1}$
$\frac{\mu M_2 - m_1 - M_1}{\mu M_2 - m_1 - M_1}$	$\frac{\mu M_2 - m_1 - M_1}{\mu M_2 - m_1 - M_1}$	0	0	0	0	0	$\frac{\mu M_2 - m_1 - M_1}{\mu M_2 - m_1 - M_1}$	0	$v m_1 \frac{[\mu m_2 - (m_1 s^2 + m_2 c^2)] \sin \alpha - [\mu m_2 + sc(m_1 - m_2)] \cos \alpha}{\mu M_2 - m_1 - M_1}$
$\frac{\mu m_2 + sc(m_1 - m_2)}{\mu M_2 - m_1 - M_1}$	$\frac{\mu M_2 - m_1 - M_1}{\mu M_2 - m_1 - M_1}$	0	(1)	0	(1)	0	$\frac{\mu M_2 - m_1 - M_1}{\mu M_2 - m_1 - M_1}$	0	$v m_1 \frac{[\mu m_2 - (m_1 s^2 + m_2 c^2)] \sin \alpha - [\mu m_2 + sc(m_1 - m_2)] \cos \alpha}{\mu M_2 - m_1 - M_1}$

Auswahl der Pivotzeile im Tableau Fall 2.4.1.1 (5. Stufe):

$\underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \frac{-M_2}{\mu M_2 - m_1 - M_1} < 0 \\ \frac{m_1}{\mu M_2 - m_1 - M_1} > 0 \\ \frac{2m_1}{\mu M_2 - m_1 - M_1} > 0 \\ \frac{-M_1}{\mu M_2 - m_1 - M_1} < 0 \\ \frac{m_1 - \mu M_2}{\mu M_2 - m_1 - M_1} < 0 \end{array} \right.}$ positiver Koeffizient?	$\underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \text{positiv, wenn} \\ \text{negativ!} \\ \text{gilt immer!} \\ \text{gilt immer!} \\ \text{negativ!} \\ \text{negativ!} \end{array} \right.}$ kleinster positiver Quotient
1. Zeile:	$\frac{-M_2}{\mu M_2 - m_1 - M_1} < 0 \Rightarrow$ negativ!
2. Zeile:	$\frac{m_1}{\mu M_2 - m_1 - M_1} > 0 \Leftrightarrow$ gilt immer! $\Rightarrow v(M_6 \sin \alpha + M_5 \cos \alpha) > 0$
3. Zeile:	$\frac{2m_1}{\mu M_2 - m_1 - M_1} > 0 \Leftrightarrow$ gilt immer! $\Rightarrow v(M_6 \sin \alpha + M_5 \cos \alpha) > 0$
4. Zeile:	$\frac{-M_1}{\mu M_2 - m_1 - M_1} < 0 \Rightarrow$ negativ!
5. Zeile:	$\frac{m_1 - \mu M_2}{\mu M_2 - m_1 - M_1} < 0 \Rightarrow$ negativ!

Zeile 3 führt zu keiner Lösung. Somit verbleibt nur noch der Pfad entlang der Zeile 2.

Fall 2.4.1.1.2 (6. Stufe): $\frac{\pi}{4} < \gamma + \arctan \frac{m_1 c + m_2 c - m_2 s}{m_2(c+2s)} < \alpha < \frac{\pi}{2} \wedge m_2 - sc(m_1 - m_2) > 0$

$m_1 g_{NC}$	$m_1 g_{TC}^+$	$m_1 g_{TC}^-$	$\Lambda_{TOC}^{(-)}$	$\Lambda_{TC}^{(-)}$	$\Lambda_{NC} \Lambda_{TC}^{(+)}$	$m_1 z_C^-$	$m_1 z_C^+$	z_0^*
$-\frac{m_1 c^2 + m_2 s^2}{m_1}$	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	0	0	0	(1)	0	0	$\frac{M_2}{m_1}$
$-\frac{M_5}{m_1}$	$-\frac{M_6}{m_1}$	0	(1)	0	0	$\frac{M_6}{m_1}$	0	$\frac{\mu M_2 - m_1 - M_1}{m_1}$
0	1	(1)	0	0	0	-1	-1	-2
$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	$-\frac{\mu(m_1 s^2 + m_2 c^2)}{m_1}$	0	0	0	(1)	-1	0	$\frac{M_1}{m_1}$
$-\frac{\mu(m_1 c^2 + m_2 s^2)}{m_1}$	$-\frac{\mu sc(m_1 - m_2)}{m_1}$	0	0	1	0	1	0	$\frac{\mu M_2 - m_1}{m_1}$

$$v [sc(m_1 - m_2) \sin \alpha + (m_1 c^2 + m_2 s^2) \cos \alpha]$$

$$\mu \Lambda_{NC} - \Lambda_{TC}^{(+)}$$

$$0$$

$$v [(m_1 s^2 + m_2 c^2) \sin \alpha + sc(m_1 - m_2) \cos \alpha]$$

$$\mu v [sc(m_1 - m_2) \sin \alpha + (m_1 c^2 + m_2 s^2) \cos \alpha]$$

Die Variable z_0 hat die Basis verlassen und der Algorithmus endet. Aus dem Tableau entnimmt man für den Fall 2.4.1.1.2 die Lösung

$\dot{g}_{NC} = 0$	$\Lambda_{NC} = v [(m_1 c^2 + m_2 s^2) \cos\alpha + sc(m_1 - m_2) \sin\alpha] > 0$
$\dot{g}_{TC}^+ = 0$	$\Lambda_{TC}^{(+)} = v [sc(m_1 - m_2) \cos\alpha + (m_1 s^2 + m_2 c^2) \sin\alpha] > 0$
$\dot{g}_{TC}^- = 0$	$\Lambda_{TC}^{(-)} = 0$
$\Lambda_{TOC}^{(-)} = \mu\Lambda_{NC} - \Lambda_{TC}^{(+)} > 0$	$z_G^- = 0$
$\Lambda_{TOC}^{(+)} = \mu\Lambda_{NC} > 0$	$z_G^+ = 0$

(D.2)

Nach Tabelle D.2 erfolgt für den Fall 2.4.1.1.2 ein Zustandsübergang von *Separation* nach *Haften*.

Fall 2.4.2 (4. Stufe): $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

$m_1 \dot{g}_{NC}$	$m_1 \dot{g}_{TC}^+$	$m_1 \dot{g}_{TC}^-$	$\Lambda_{TOC}^{(-)}$	$\Lambda_{TOC}^{(+)}$	$\Lambda_{NC}^{(+)}$	$\Lambda_{TC}^{(-)}$	$m_1 z_G^-$	$m_1 z_G^+$	z_0^*
(1)	0	0	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	0	M_6	$-\frac{sc(m_1 - m_2)}{m_2}$	0	0	$\frac{sc(m_1 - m_2) - m_2}{m_2}$
0	-1	0	$-\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	M_5	$\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	(1)	0	$\frac{m_2}{m_2 + m_1 c^2 + m_2 s^2}$
0	0	(1)	$-\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	M_5	$-\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2}$	0	-1	$\frac{m_2}{m_1 c^2 + m_2 s^2 - m_2}$
0	0	0	1	0	$-\mu$	(1)	0	0	-1
0	0	0	0	(1)	$-\mu$	0	1	0	-1
									$-vm_1 \cos\alpha$
									$vm_1 \sin\alpha$
									$vm_1 \sin\alpha$
									0
									0

(D.3)

Der Algorithmus endet, nachdem die Variable z_0 die Basis verlassen hat. Das Tableau liefert für den Fall 2.4.2 die Lösung

$\dot{g}_{NC} = -v \cos\alpha > 0$	$\Lambda_{NC} = 0$
$\dot{g}_{TC}^+ = 0$	$\Lambda_{TC}^{(+)} = 0$
$\dot{g}_{TC}^- = v \sin\alpha > 0$	$\Lambda_{TC}^{(-)} = 0$
$\Lambda_{TOC}^{(-)} = 0$	$z_G^- = v \sin\alpha > 0$
$\Lambda_{TOC}^{(+)} = 0$	$z_G^+ = 0$

Nach Tabelle D.3 verbleibt das System für den Fall 2.4.2 im Zustand *Separation*.

Literaturverzeichnis

- [1] Bastian, M.: Lineare Komplementärprobleme im Operations Research und in der Wirtschaftstheorie. Mathematical Systems in Economics, Vol. 25, Verlag Anton Hain, 1976
- [2] Beitelschmidt, M.: Reibstöße in Mehrkörpersystemen. VDI Fortschrittsberichte, Reihe 11, Nr. 275, VDI-Verlag Düsseldorf, 1998
- [3] Bell, R.; Burdekin, M.: A Study of the Stick-Slip Motion of Machine Tool Feed Drives. Proc. Inst. of Mech. Engineers, Vol. 184 (1969-70), Part I, No. 30, pp.543-560
- [4] Böttcher, S.; Sierig, G.: Selbsthemmung an Zahnradgetrieben. Konstruktion, Band 21 (1969), Heft 11, 421-427
- [5] Bouché, Bernhard: Reibungszahlen von Schneckengetriebeverzahnungen im Mischreibungsgebiet. Dissertation, Heft 91.6, Ruhr-Universität Bochum, 1991
- [6] Bremer, H.; Pfeiffer, F.: Elastische Mehrkörpersysteme. Teubner Studienbücher, Stuttgart, 1992
- [7] Budd, C.; Dux, F.; Cliffe, A.: The Effect Of Frequency And Clearance Variations On Single-Degree-Of-Freedom Impact Oscillators. Journal of Sound and Vibration, Vol. 184 (1995), No. 3, pp 475-502
- [8] Czichos, H.; Habig, K.H.: Tribologie Handbuch. Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1992
- [9] Cottle, R.W.; Dantzig, G.B.: Complementary Pivot Theory of Mathematical Programming. Linear Algebra and Its Applications, Vol. 1 (1968), pp.103-125
- [10] Earles, S.W.E.; Badi, M.N.M.: Oscillatory instabilities generated in a double-pin and disc undamped system: a mechanism of disc-brake squeal. Mechanical Engineering Science, Vol. 198 (1984), No. 4, pp.43-50
- [11] Füsgen, P. Untersuchungen über das Auftreten des Ratterns bei selbsthemmenden Schneckengetrieben und seine Verhütung. Forschungsberichte des Wirtschafts- und Verkehrsministerium NRW, Nr. 66, 1954

- [12] Glocker, C.: Dynamik von Starrkörpersystemen mit Reibung und Stößen. VDI Fortschrittsberichte, Reihe 18, Nr. 182, VDI-Verlag Düsseldorf, 1995
- [13] Hamel, G.: Theoretische Mechanik. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, Band 57, 1967
- [14] Haag, P.: Selbsthemmung von ruhenden Schneckengetrieben. Abschlußbericht - FVA e.V., Forschungsvorhaben Nr. 138, 1992, Heft 368
- [15] Haag, Peter: Anlaufwirkungsgrade und Selbsthemmungsfähigkeit von ruhenden Schneckengetrieben. Dissertation, Heft 91.7, Ruhr-Universität Bochum, 1991
- [16] Hajek, M.: Reibungsdämpfer für Turbinenschaufeln. VDI Fortschrittsberichte, Reihe 11, Nr. 128, VDI-Verlag Düsseldorf, 1989
- [17] Hess, D. P.; Soom, A.: Normal and Angular Motions at Rough Planar Contacts During Sliding With Friction. Transactions of the ASME, Journal of Tribology, July 1992, Vol. 114, pp. 567-678
- [18] Hinrichs, N.: Reibschwingungen mit Selbst- und Fremderregung: Experiment, Modellierung und Berechnung. VDI Fortschrittsberichte, Reihe 11, Nr. 240, VDI-Verlag Düsseldorf, 1997, DFG gefördert
- [19] Horst, R.: Nichtlineare Optimierung. Carl Hanser Verlag, München, 1979
- [20] Hortel, M.: Irreguläre - chaotische Schwingungen in Getriebesystemen. 8. World Congress On The Theory Of Machines And Mechanisms, Prague, Czechoslovakia, August, 26 - 31, 1991
- [21] Jiang, F.: Ratterschwingungen bei selbsthemmenden Schneckengetrieben. Dissertation, Fachbereich Maschinenwesen der Universität Kaiserslautern, 1989
- [22] Jürging, M.: Selbstbremsung von dynamisch belasteten Schneckengetrieben. Dissertation, Heft 97.4, Ruhr-Universität Bochum, 1997
- [23] Karagiannis, K.: Analyse stoßbehafteter Schwingungssysteme mit Anwendung auf Rasselschwingungen in Getrieben. Dissertation, Lehrstuhl B für Mechanik, TU München, VDI-Fortschrittsberichte, Reihe 11, Nr.125, VDI-Verlag 1989
- [24] Karamardian, S.: The Complementarity Problem. Mathematical Programming, Vol. 2 (1972), pp.107-129
- [25] Karvelis, A. V.: Self-Locking worm gears: fact or fiction? Power Transmission Design, March 1996, pp.26-27

- [26] Kilmister, C.W.; Reeve, J.E.: Rational Mechanics. Longmans, Green and Co. LTD, 1966
- [27] Klarbring, A.; Björngman, G.: A Mathematical Programming Approach To Contact Problems With Friction And Varying Contact Surface. Computers & Structure, Vol. 30 (1988), No. 5, pp.1185-1198
- [28] Klein, B.: Wirkungsgrad und Selbsthemmung an Schneckengetrieben. Antriebstechnik, Band 19 (1980), Nr. 9, S. 408-410
- [29] Klein, B.: Zur Frage der Selbsthemmung an Zahnradgetrieben. Der Konstrukteur, 1983, Nr. 1-2, S. 332-335
- [30] Klein, B.: Ratterursachen in Antrieben bei Schiebetrieb und Maßnahmen zur Abhilfe. Maschinenmarkt, Band 86 (1984), S. 2005-2008
- [31] Klein, B. Die Einflüsse des Ratterns in Getriebemotoren mit einer Schneckenstufe. Maschinenmarkt, Band 92 (1984), S. 2240-2242
- [32] Klein, B.: Theoretische Grundlagen zum Auslegen von Antrieben für ratterfreien Betrieb. Maschinenmarkt, Band 96 (1984), S. 2347-2349
- [33] Klein, B.: Dynamische Analyse drehschwingbeanspruchter Antriebssysteme. Maschinenmarkt, Band 84 (1978), Nr. 87, S. 1702-1705
- [34] Klein, B.: Konstruktive Voraussetzungen der Selbsthemmung an Planetengetrieben. Maschinenmarkt, Band 86 (1986), Nr. 99, S.1965-1967
- [35] Klein, B.: Selbsthemmende Antriebsstränge zur Lastsperrung. Der Konstrukteur, Band 6 (1982), S. 18-24
- [36] Klein, B.: Grenzbereiche für selbsthemmende Planetengetriebe. VDI-Z, Band 126 (1984), Nr. 7, S. 221-231
- [37] Klein, B.: Der Effekt der Reibung in der mechanischen Technik. Der Konstrukteur, Band 11 (1985), S. 36-44 und Band 12 (1985), S. 58-62
- [38] Klein, B.: Selbsthemmung in Planetengetrieben. Technica, Band 35 (1987), Nr. 6, S. 15-21 und Band 36 (1987), Nr. 7, S. 53-61
- [39] Lötstedt, P.: Coulomb Friction in Two-Dimensional Rigid Body Systems. ZAMM, Band 61, (1981), S. 605-615
- [40] Lötstedt, P.: On the Numerical Simulation of the Motion of a System of Rigid Bodies Subject to Variable Constraints. Thesis, Dept. of Numerical Analysis and Computing Science, Royal Institute of Technology, Sweden, TRITA-NA-7922, 1979
- [41] Lüthi, H.J.; Komplementaritäts- und Fixpunktalgorithmen in der mathematischen Programmierung, Spieltheorie und Ökonomie. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 129, Springer Verlag, 1976

- [42] Magnus, K.; Popp, K.: Schwingungen. Teubner Studienbücher, Stuttgart, 1997
- [43] Martins, J.A.C.; Oden, J.T.; Simoes, F.M.F.: A Study Of Static and Kinetic Friction. Int. J. Engineering Science, Vol. 28 (1990), No. 1, pp. 29-92
- [44] Moreau, J.J.; Jean, M.: Unilaterality And Dry Friction In The Dynamics Of Rigid Body Collections. Proc. Contact Mechanics Int. Symp., PPUR, 1992, pp.31-48
- [45] Murty, K.G.: On the Number of Solutions to the Complementarity Problem and Spanning Properties of Complementary Cones. Linear Algebra and Its Applications, Vol. 5 (1972), pp.65-108
- [46] Müller, H. W.: Zum Mechanismus der Selbsthemmung. Konstruktion, Band 39 (1987), Heft 3, S. 93-100
- [47] Musiol, Feliks: Erklärung der Vorgänge in der Kontaktzone von trockenlaufenden Reibpaarungen über gesetzmäßig auftretende Phänomene im Reibprozeß. Dissertation D83, TU Berlin, 1994
- [48] Niemann, G.; Ehrenspiel, K; Anlaufreibung und Stick-Slip bei Gleitpaarungen. VDI-Zeitschrift, Band 105 (1963), Heft 6, S. 221-284
- [49] Oledzki, A. A.: Dynamik der Selbsthemmenden Schneckengetriebe während der Anlaufzeit. Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Ilmenau, 1963
- [50] Oledzki, A.A.: Dynamics Of Permanent Self-Locking Systems. Journal Of Mechanics, Vol. 4, No. 105, 1965
- [51] Oledzki, A. A.: Hight Efficiency Self-Locking Gears. Eight World Congress on the Theory of Machines an Mechanisms, Vol.2, 26.8.-31.8.1991
- [52] Oledzki, A. A.: Modeling and Simulation of Self-Locking Drives. Mechanism and Machine Theory, Vol. 30 (1995), No. 6, pp.929-941,
- [53] Oestreich, M.: Untersuchung von Schwingern mit nichtglatten Kennlinien. VDI Fortschrittsberichte, Reihe 11, Nr. 258, VDI-Verlag Düsseldorf, 1998
- [54] Panjuchin, V.: Doppelschraubengetriebe, Kinematische Bedingungen für selbsthemmende Zahnradgetriebe. Der Konstrukteur, Antreiben-Steuern-Bewegen, Sonderheft 1994
- [55] Peressini, A.L.; Sullivan, F.E.; Uhl Jr., J.J.: The Mathematics of Non-linear Programming. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1993

- [56] Persson, B.N.J. , Tosatti, E. : Physics Of Sliding Friction. NATO ASI Series, Series E: Applied Sciences - Vol. 311, 1995
- [57] Pfeiffer, F.: Mechanische Systeme mit un stetigen Übergängen. Ingenieur-Archiv, Band 54 (1984), S.232-240
- [58] Pfeiffer, F.: Dynamical Systems with Time-Varying or Unsteady Structures. ZAMM, Vol. 71, No. 4, 1991
- [59] Pfeiffer, F.; Küçükay, F.: Über Rasselschwingungen in Kfz-Schaltgetrieben. Ingenieur-Archiv, Band 56 (1986), S.25-37
- [60] Pfeiffer, F.; Glocker, Ch.: Stick-Slip Phenomena and Application. Nonlinearity and Chaos in Engineering Dynamics, IUTAM Symposium, UCL, July 1994, pp.103-113
- [61] Pfeiffer, F.: Methoden zur nichtlinearen Antriebstechnik. VDI Berichte Nr. 1153, S.599-624, Tagung Würzburg 26. und 27. Sept. 1994
- [62] Popper, B.; Pessen, D. W.: The Twinworm Drive, A Self-Locking Wormgear Transmission of High Efficiency. Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry, Aug.1960, pp.191-199
- [63] Richter, M.; Schalk, M.: Reibschwingungen an einer Pkw-Sitzlehnenverstellung. VDI-Bericht Nr. 627, Dämpfung von Schwingungen bei Maschinen und Bauwerken, VDI-Verlag, 1987
- [64] Schiehlen, W.: Reibungsbehaftete Bindungen in Mehrkörpersystemen. Ingenieur-Archiv, Band 53 (1983), S.265-273
- [65] Schramm, D.: Ein Beitrag zur Dynamik reibungsbehafteter Mehrkörpersysteme. VDI Fortschrittsberichte, Reihe 18, Nr. 32, VDI-Verlag Düsseldorf, 1986
- [66] Seyfferth, W.: Modellierung un stetiger Montageprozesse mit Robotern. VDI Fortschrittsberichte, Reihe 11, Nr. 199, VDI-Verlag Düsseldorf, 1993
- [67] Steinhilper W.; Fuqing, J.: Mechanik der Schneckengetriebe - Verknüpfung von Selbsthemmung und Rattern. Antriebstechnik, Band 11 (1992), Nr. 11, S. 75-78
- [68] Stelter, P.: Nichtlineare Schwingungen reibungsselbsterregter Strukturen. VDI Fortschrittsberichte, Reihe 11, Nr. 137, VDI-Verlag Düsseldorf, 1990
- [69] Szabó, I.: Höhere Technische Mechanik. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 5. Auflage, 1985
- [70] VDI-Richtlinie VDI 2158: Selbsthemmende und selbstbremsende Getriebe. VDI-Handbuch II, Dez. 1991

- [71] Wahler, W.: Reibschwingungen in Hubspindelgetrieben. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau der Technische Universität Wien, 2002
- [72] Wiegner, R.: Berechnung von Reib- und Ratterschwingungen in selbstbremsenden Getrieben mit der Methode der finiten Elemente. Diplomarbeit, Universität Kassel, 2001
- [73] Niemann, G.; Winter, H.: Maschinenelemente Band III. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 2. Auflage, 1983
- [74] Yandell, W.O.: A new Theory of Hysteretic Sliding Friction. Wear, Vol. 17 (1971), pp.229-244