Universität Ulm

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2008/09

Gesamt: 20 Punkte

Lösungen zur Funktionalanalysis

Blatt 15

58. Sei U ein Unterraum eines normierten Vektorraums X und $\varphi\colon U \to \mathbb{K}$ linear und stetig. Zeige, dass U genau dann dicht in X ist, wenn es genau eine stetige lineare Fortsetzung von φ auf X gibt! (2)

Lösung: Ist U dicht in X, so gibt es laut Vorlesung genau eine stetige lineare Fortsetzung von φ auf X.

Sei nun also U nicht dicht in X und damit $V := \overline{U} \neq X$. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es eine stetige lineare Fortsetzung ψ_1 von φ auf X. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es zudem ein $\chi \in X'$ mit $\chi|_V = 0$ und $\chi \neq 0$. Dann ist $\psi_2 := \psi_1 + \chi \neq \psi_1$ eine weitere stetige lineare Fortsetzung von φ auf X. Die Fortsetzung ist also in diesem Fall nicht eindeutig.

Bemerkung: Ist die Fortsetzung nicht eindeutig, so gibt es sogar stets unendlich viele stetige lineare Fortsetzungen, beispielsweise die Funktionale $\psi_1 + t\chi$, $t \in \mathbb{R}$.

59. Sei X ein normierter Raum, U ein abgeschlossener Unterraum von X, V ein endlichdimensionaler Unterraum von X und $W := U + V$. Zeige:

(a) W ist ein abgeschlossener Unterraum von X. (2)

Lösung: Es ist klar, dass W ein Unterraum ist. Sei zuerst $\dim V = 1$, also $V = \operatorname{span}\{v\}$ mit $v \in X$. Ist $v \in U$, so ist $W = U$ und daher nichts mehr zu zeigen. Sei also $v \notin U$. Dann ist

$$W = \{u + tv : u \in U, t \in \mathbb{R}\}.$$

Sei nun (w_n) eine gegen w konvergente Folge in W, $w_n = u_n + t_n v$. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es $\varphi \in X'$ mit $\varphi|_U = 0$ und $\varphi(v) = 1$. Dann gilt $t_n = \varphi(w_n) \to \varphi(w)$. Definiere $t := \varphi(w)$ und $u := w - tv$. Wegen $w_n \to w$ und $t_n \to t$ folgt $u_n \to u$, also $w \leftarrow w_n \to u + tv \in W$, was $w \in W$ und damit die Abgeschlossenheit von W zeigt.
Der allgemeine Fall folgt per Induktion. Sei nämlich $(v_i)_{i=1}^n$ eine Basis von V. Setze $W_0 := U$. Nach obigen Überlegungen sind die Unterräume $W_i := W_{i-1} + \operatorname{span}\{v_i\}$ für jedes $1 \le i \le n$ abgeschlossenen, insbesondere also auch $W = W_n$.

(b) Ist U projezierbar, so auch W. (2)

Lösung: Sei zuerst $\dim V = 1$, also $V = \operatorname{span}\{v\}$ mit $v \in X$. Ist $v \in U$, so ist $W = U$ und daher nichts mehr zu zeigen. Sei also im Folgenden $v \notin U$. Sei P eine Projektion auf U und $w := v - Pv$. Wegen $v \notin U$ ist $v \neq Pv$ und daher $w \neq 0$. Wegen $v \in V$ und $Pv \in U$ ist aber $w \in W$. Wegen $W = U + V$ gilt daher auch $W = U + \operatorname{span}\{w\}$; man kann dies aber auch direkt nachrechnen. Zudem ist $Pw = 0$. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es $\varphi \in X'$ mit $\varphi|_U = 0$ und $\varphi(w) = 1$. Definiere $Q\colon X \to X$ durch $Qx := Px + \varphi(x)w$. Dann ist Q linear und stetig und es gilt

$$\begin{aligned} Q^2x &= P(Px + \varphi(x)w) + \varphi(Px + \varphi(x)w)w \\ &= P^2x + \varphi(x)Pw + \varphi(Px)w + \varphi(x)\varphi(w)w = Px + \varphi(x)w = Qx. \end{aligned}$$

Zudem ist $Qx \in W$ für alle $x \in X$, $Qu = u$ für $u \in U$ und $Qw = w$. Also ist $\operatorname{Rg} Q = W$, und damit Q eine stetige, lineare Projektion auf W, also W projezierbar.
Der allgemeine Fall folgt genau wie im ersten Aufgabenteil mittels Induktion.

60. Sei $U := \{(x_k) \in \ell^2 : kx_{2k-1} = x_{2k}\ \forall k \in \mathbb{N}\}$ und $V := \{(x_k) \in \ell^2 : x_{2k-1} = 0\ \forall k \in \mathbb{N}\}$. Zeige:

(a) U und V sind abgeschlossene, projezierbare Unterräume von ℓ^2. (2)

Lösung: Es ist leicht zu sehen, dass U und V Unterräume sind. Ist (x^n) eine Folge in U bzw. V, die gegen x konvergiert, so konvergiert insbesondere (x^n_k) gegen x_k für jedes $k \in \mathbb{N}$. Nach den Grenzwertrechenregeln folgt dann $x \in U$ bzw. $x \in V$. Damit sind U und V abgeschlossene Unterräume von ℓ^2. Weil ℓ^2 ein Hilbertraum ist, sind U und V daher auch projezierbar; man kann hierfür die orthogonale Projektion wählen.

(b) $U \cap V = \{0\}$ (1)

Lösung: Ist $x \in U \cap V$, so ist $x_{2k-1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und daher $x_{2k} = kx_{2k-1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also $x = 0$.

(c) Ist $x \in U \oplus V$, so ist $(kx_{2k-1}) \in \ell^2$. (1)

Lösung: Ist $u \in U$, so ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} |ku_{2k-1}|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |u_{2k}|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^2 = \|u\|_2 < \infty,$$

also $(ku_{2k-1}) \in \ell^2$. Ist $x \in U \oplus V$, so gibt es $u \in U$ und $v \in V$ mit $x = u + v$. Nach Definition von V und obiger Überlegung folgt $(kx_{2k-1}) = (ku_{2k-1}) \in \ell^2$.

(d) $U \oplus V$ ist dicht in ℓ^2. (1)

Lösung: Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist n gerade, also $n = 2k$, so ist $e_n \in V$, also $e_n \in U \oplus V$. Ist n ungerade, also $n = 2k - 1$, so ist $e_n = (e_{2k-1} + ke_{2k}) + (-ke_{2k}) \in U \oplus V$, da der erste Summand in U und der zweite Summand in V liegt. Hieraus folgt $e_n \in U \oplus V$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was zeigt, dass $U \oplus V$ dicht in ℓ^2 ist.

(e) $U \oplus V$ ist nicht abgeschlossen. (1)

Lösung: Wäre $U \oplus V$ abgeschlossen, so wäre nach dem vorigen Aufgabenteil $U \oplus V = \ell^2$. Allerdings nach Aufgabenteil (c) aber die durch $x_k := \frac{1}{k}$ gegebene Folge x zwar in ℓ^2, nicht aber in $U \oplus V$, denn $(\frac{k}{2k-1}) \notin \ell^2$.

61. Sei X ein normierter Raum, $\varphi \in X'$ und $U := \operatorname{Kern} \varphi$. Zeige:

(a) Gibt es ein $y \in X$ mit $\|y\| = 1$ und $\varphi(y) = \|\varphi\|$, so gibt es zu jedem $x \in X$ ein $u \in U$ mit $\|x - u\| = \operatorname{dist}(x, U) = \inf_{v \in U} \|x - v\|$. (2)

Lösung: Der Fall $x \in U$ ist trivial, da man dann $u = x$ wählen kann. Insbesondere ist für $\varphi = 0$ nichts zu zeigen, da dann $U = X$ ist. Sei also $\varphi \neq 0$ und $x \notin U$. Ist $v \in U$, so gilt

$$|\varphi(x)| = |\varphi(x - v)| \leq \|\varphi\| \, \|x - v\| \, .$$

Weil dies für jedes $v \in U$ richtig ist, folgt $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \operatorname{dist}(x, U)$. Der natürliche Kandidat für u ist eine Verschiebung von x entlang y nach U, also $u := x - \frac{\varphi(x)}{\|\varphi\|} y$. Dann ist $\varphi(u) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\|\varphi\|} \varphi(y) = 0$, also $u \in U$. Außerdem ist

$$\|x - u\| = \frac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|} \|y\| \leq \operatorname{dist}(x, U)$$

nach obiger Überlegung. Die Abschätzung $\|x - u\| \geq \operatorname{dist}(x, U)$ folgt aus $u \in U$.

(b) Gibt es ein $x \notin U$ und ein $u \in U$ mit $\|x - u\| = \operatorname{dist}(x, U)$, so existiert ein $y \in X$ mit $\|y\| = 1$ und $\varphi(y) = \|\varphi\|$. (2)

Lösung: Nach Voraussetzung ist $\varphi \neq 0$. Zuerst zeigen wir $|\varphi(x)| \geq \|\varphi\| \operatorname{dist}(x, U)$. Sei dazu $v \in X$, $\|x - v\| < R := \frac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|}$. Dann ist

$$|\varphi(v)| \geq |\varphi(x)| - |\varphi(x - v)| > |\varphi(x)| - \|\varphi\| R = 0,$$

also $B(x, R) \cap U = \emptyset$, was $\operatorname{dist}(x, U) \geq R$ zeigt.
Der Beweis der ersten Teilaufgabe legt die Definition $y := \frac{z}{\|z\|}$ mit $z := \frac{x-u}{\varphi(x)}$ nahe. Dann ist $\|y\| = 1$ und mit der ersten Überlegung

$$\varphi(y) = \frac{\varphi(z)}{\|z\|} = \frac{1}{\|z\|} = \frac{|\varphi(x)|}{\operatorname{dist}(x, U)} \geq \|\varphi\|,$$

also $\varphi(y) = \|\varphi\|$.

(c) Sei $X = c_0$ und $\varphi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}$. Es gibt kein $y \in c_0$ mit $\|y\|_\infty = 1$ und $\varphi(y) = \|\varphi\|$. (2)

Lösung: Für $x = (x_n)$ mit $x_n := \sum_{k=1}^{n} e_k$ ist $\|x\|_\infty = 1$ und $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} = 1 - 2^{-n} \to 1$, also $\|\varphi\| \geq 1$.
Sei nun $y \in c_0$ und $\|y\|_\infty \leq 1$. Nach Definition gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|y_n| \leq \frac{1}{2}$ für $n \geq n_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\varphi(y)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|y_k|}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{n_0-1} 2^{-k} + \sum_{k=n_0}^{\infty} 2^{-k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} - 2^{-n_0} = 1 - 2^{-n_0} < 1 \leq \|\varphi\|. \end{aligned}$$

Also kann es kein $y \in c_0$ mit $\|y\|_\infty = 1$ und $\varphi(y) = \|\varphi\|$ geben.

(d) Sei $X = L^1(0,1)$ und $\varphi(f) := \int_0^1 t f(t)\, \mathrm{d}t$. Es gibt kein $g \in L^1(0,1)$ mit $\|g\|_1 = 1$ und $\varphi(g) = \|\varphi\|$. (2)

Lösung: Wähle $f_n := \mathbb{1}_{(1-\frac{1}{n},1)}$. Dann ist $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n}$ und daher

$$\frac{1}{n}\|\varphi\| \geq |\varphi(f_n)| = \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(1 - (1 - \frac{1}{n})^2) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}.$$

Also ist $\|\varphi\| \geq 1 - \frac{1}{2n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, was $\|\varphi\| \geq 1$ zeigt.
Sei nun $g \in L^1(0,1)$, $\|g\|_1 \leq 1$ und $g \neq 0$. Es gibt $t_0 < 1$ mit $\int_0^{t_0} |g(t)| \mathrm{d}t > 0$, da nach dem Satz von Lebesgue die Folge $(\mathbb{1}_{(0,1-\frac{1}{n})}\, g)$ in $L^1(0,1)$ gegen $g \neq 0$ konvergiert. Daraus folgt

$$\begin{aligned} |\varphi(g)| &\leq \int_0^{t_0} t|g(t)| \,\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{1} t|g(t)| \,\mathrm{d}t \leq t_0 \int_0^{t_0} |g(t)| \,\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{1} |g(t)| \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 |g(t)| \,\mathrm{d}t - (1 - t_0) \int_0^{t_0} |g(t)| \,\mathrm{d}t < \|g\|_1 \leq 1 \leq \|\varphi\|. \end{aligned}$$

Also kann es kein $g \in L^1(0,1)$ mit $\|g\|_1 = 1$ und $\varphi(g) = \|\varphi\|$ geben.