

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN
Fakultät Wirtschaftswissenschaften

Dresdner Beiträge zur
Betriebswirtschaftslehre

Nr. 24/99

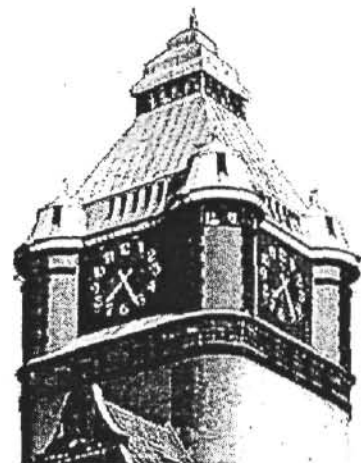
**Simultanplanung von
Fertigungslosgröße und
Transportlosgrößen in einstufigen
Fertigungssystemen**

**Zwei statisch deterministische Ansätze
bei unrestringierten Kapazitäten**

Ronald Bogaschewsky
Udo Buscher
Gerd Lindner

Herausgeber:
Die Professoren der
Fachgruppe Betriebswirtschaftslehre

ISSN 0945-4810



**Simultanplanung von Fertigungslosgröße und
Transportlosgrößen in einstufigen Fertigungssystemen**

—

**Zwei statisch deterministische Ansätze bei
unrestringierten Kapazitäten**

Prof. Dr. Ronald Bogaschewsky

Dr. Udo Buscher

Dipl.-Wirtsch.-Ing. Gerd Lindner

**Arbeitsbericht des Lehrstuhls für Betriebswirtschaftslehre,
insbesondere Produktionswirtschaft
Fakultät Wirtschaftswissenschaften
Technische Universität Dresden**

Mommsenstraße 13
01062 Dresden
Tel. 0351/463-3470
Fax. 0351/463-7714

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis	IV
Symbolverzeichnis	V
Abbildungs- und Tabellenverzeichnis	VII
1 Problemstellung	1
2 Ansätze zur Planung der Fertigungslosgröße	5
2.1 Szendrovits Ansatz zur Berücksichtigung identischer Transportlose	5
2.2 Goyals Ansatz zur Berücksichtigung unterschiedlicher Transportlose	8
3 Bestimmung optimaler Losgrößenpolitiken	13
3.1 Optimierung bei identischen Transportlosgrößen	13
3.2 Optimierung bei unterschiedlichen Transportlosgrößen	17
3.2.1 Goyals Optimierungsansatz	17
3.2.2 Modifizierte Optimierungsansätze	20
3.3 Veranschaulichung durch ein Zahlenbeispiel	26
4 Zusammenfassung	31
Anhang	33
A Bestimmung der zeitgewichteten Lagerhaltung	33
B Ableitung der modifizierten Kostenfunktion bei Berücksichtigung unterschiedlicher Transportlose	36
C Nachweis der Konvexitätseigenschaften	40
D Zulässigkeit des Startwertes im modifizierten Optimierungsalgorithmus	46
Literaturverzeichnis	48

Abkürzungsverzeichnis

Abb.	Abbildung
Aufl.	Auflage
bspw.	beispielsweise
bzw.	beziehungsweise
EPQ	Economic Production Quantity
et al.	et alii
f.	folgende
ff.	fortfolgende
GE	Geldeinheit
Hrsg.	Herausgeber
ME	Mengeneinheit
Nr.	Nummer
S.	Seite
Sp.	Spalte
vgl.	vergleiche
Vol.	Volume
WiSt	Wirtschaftswissenschaftliches Studium
z.B.	zum Beispiel
ZE	Zeiteinheit

Symbolverzeichnis

Im vorliegenden Arbeitsbericht werden (Un-)Gleichungen grundsätzlich kapitelweise fortlaufend numeriert. Der vorangestellte Buchstabe G kennzeichnet eine allgemeingültige (Un-)Gleichung, während B die Gleichung eines Beispiels und A eine notwendige Optimalitätsbedingung benennen. Diese Form der Notation führt dazu, daß G 2-19 eine allgemeingültige Gleichung, B 2-20 eine Beispielgleichung in Kapitel 2 und A 3-1 eine notwendige Optimalitätsbedingung in Kapitel 3 darstellen. Die zu einer bereits angeführten (Un-)Gleichung gehörende (Un-)Gleichung bzw. modifizierte Formulierung einer Ausgangs(un-)gleichung erhält eine weitere, durch einen Punkt abgetrennte Ziffer. Bei der Aufführung mehrerer veränderter Formulierungen einer Ausgangs(un-)gleichung erhöht sich die letzte Ziffer fortlaufend. In den Anhängen enthaltene (Un-)Gleichungen werden ebenfalls fortlaufend gekennzeichnet. Der vorangestellte doppelte Buchstabe charakterisiert dabei den relevanten Anhang. So beschreibt beispielsweise BB-1 eine Gleichung in Anhang B.

Modellunabhängige Symbole

B	Gesamtbedarf im Planungszeitraum [ME]
$c_{L,s}$	stufenbezogener Lagerhaltungskostensatz pro Zeiteinheit [GE/(ME·ZE)]
$k_{T,s}$	stufenbezogener Transportkostensatz [GE]
$k_{R,s}$	stufenbezogener Rüstkostensatz [GE]
K	Gesamtkosten des Fertigungssystems [GE]
$K(x,m)$	Gesamtkostenfunktion des Fertigungssystems in Abhängigkeit der Fertigungslosgröße und der Transporthäufigkeit [GE]
$K(m)$	kontinuierliche Kostenfunktion für die Transporthäufigkeit [GE]
L	Lagerbestand [ME]
LK_L	Lagerhaltungskosten je Fertigungslos [GE]
m	Transporthäufigkeit
m_{opt}^g	optimale ganzzahlige Transporthäufigkeit
n	Fertigungslosauflagehäufigkeit im Planungszeitraum
T	Länge des Planungszeitraumes [ZE]
t	Zeit [ZE]
$t_{p,s}$	Produktionszeit eines Fertigungsloses auf Stufe s [ZE]
$t_{p,s+1}$	Absatzzeit eines Fertigungsloses [ZE]
x	Fertigungslosgröße [ME]
$x_{p,s}$	Produktionsgeschwindigkeit der Stufe s [ME/ZE]
$x_{p,s+1}$	Absatzrate [ME/ZE]

- [...] größter ganzzahliger Wert kleiner als der eingeschlossene Ausdruck
 [...] kleinster ganzzahliger Wert größer als der eingeschlossene Ausdruck

Für die Berücksichtigung identischer Transportlose zusätzlich genutzte Symbole

- L_{\max} maximaler Lagerbestand [ME]
 L_{\min} minimaler Lagerbestand [ME]
 LK_R Rüstkosten je Fertigungslos [GE]
 LK_T Transportkosten je Fertigungslos [GE]
 $m_{\text{opt}}^{\text{SZ}}$ globales Optimum der Transporthäufigkeit
 $m_{\text{opt}}^{\text{SZ}}(x)$ optimale reellwertige Transporthäufigkeit für einen gegebenen Wert der Fertigungslosgröße
 q Transportlosgröße [ME]
 t_{DLZ} Durchlaufzeit eines Fertigungsloses [ZE]
 $t_{p,s}(q)$ Produktionszeit des Transportloses der Größe q auf Stufe s [ZE]
 $T(m)$ durch die Transporthäufigkeit m beeinflussbarer Teil der Gesamtkosten des Fertigungssystems [GE]
 TPI^{SZ} zeitgewichtete Lagerhaltung [ME·ZE] nach SZENDROVITS
 TPI^{G} zeitgewichtete Lagerhaltung [ME·ZE] nach GOYAL
 x_{opt}° globales Optimum der Fertigungslosgröße; optimale Fertigungslosgröße der rein *offenen* Fertigung [ME]
 $x_{\text{opt}}^{\text{SZ}}(m)$ kostenminimale Fertigungslosgröße für einen gegebenen Wert der Transporthäufigkeit [ME]

Für die Berücksichtigung unterschiedlicher Transportlose zusätzlich genutzte Symbole

- $H(m)$ durch die Transporthäufigkeit m beeinflussbarer Teil der Gesamtkosten des Fertigungssystems [GE]
 K_{opt} minimale Gesamtkosten des Fertigungssystems [GE]
 $LK_L(q_i)$ Lagerhaltungskosten je Transportlos der Größe q_i [GE]
 $m_{\text{opt}}^{\text{G}}(x_{\text{opt}}^{\circ})$ optimale reellwertige Transporthäufigkeit für die optimale Losgröße der rein *offenen* Fertigung
 PI Lagerhaltung [ME·ZE]
 q_i Größe des Transportloses i [ME]
 $t_{p,s}(q_i)$ Produktionszeit des Transportloses der Größe q_i auf Stufe s [ZE]
 $x_{\text{opt}}^{\text{G}_2}(m)$ kostenminimale Fertigungslosgröße für einen gegebenen Wert der Transporthäufigkeit [ME]

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1:	Schematische Darstellung des betrachteten Fertigungsprozeßtyps	1
Abbildung 2:	Zeitgewichtete Lagerhaltung für drei identische Transportlose	6
Abbildung 3:	Exemplarischer Lagerbestandsverlauf der Transportlose im Ansatz von GOYAL	9
Abbildung 4:	Bestimmung der optimalen ganzzahligen Transporthäufigkeit bei identischen Transportlosen	17
Abbildung 5:	GOYALS Optimierungsalgorithmus	20
Abbildung 6:	Startwertbestimmung des modifizierten Optimierungsansatzes ALGORITHMUS I	23
Abbildung 7:	Startwertbestimmung des ALGORITHMUS II	24
Abbildung 8:	Optimierungsprozedur des ALGORITHMUS II	25
Abbildung 9:	Beweis der Konvexität für eine gegebene Fertigungslosgröße bei Berücksichtigung unterschiedlicher Transportlose	45

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1:	Parameterwerte des Zahlenbeispielles	26
Tabelle 2	GOYALS Optimierungsrechnung für das Zahlenbeispiel	27
Tabelle 3	Transportlosgrößenentwicklung für das Zahlenbeispiel	29

1 Problemstellung

Das insbesondere in der Sorten- und Serienfertigung auftretende Problem der Bestimmung der *optimalen Fertigungslosgröße* besteht darin, die Einheiten einer Produktart k festzulegen, die ohne Unterbrechung durch andere Produktarten in einem konkreten Fertigungssystem hergestellt werden sollen. Repräsentiert eine Produktionsanlage s das betrachtete Fertigungssystem, so führt jeder Loswechsel zu einer Unterbrechung des Fertigungsprozesses, weil die Anlage auf die produktionstechnischen Erfordernisse des neu aufzulegenden Loses eingestellt werden muß.¹ Das *Lossequenzproblem*, von dem im folgenden abstrahiert wird, besteht darin, für die betrachtete Anlage einen Belegungsplan zu erstellen, der sicherstellt, daß sich bei ständiger Lieferbereitschaft für jede Sorte die jeweiligen Losauflagen nicht überschneiden.²

Betrachtungsgegenstand ist im folgenden ein mit einer endlichen Geschwindigkeit produzierendes Fertigungssystem sowie eine abnehmende Stelle. Bei der abnehmenden Stelle kann es sich entweder um den kontinuierlich zu befriedigenden Absatz oder um eine zusätzliche Fertigungsstufe handeln. Im letzteren Fall ist eine Optimallösung allerdings nur gewährleistet, wenn die Folgestufe(n) und der Absatz synchronisiert sind. Im weiteren wird jedoch vorausgesetzt, daß die abnehmende Stelle den Absatz darstellt (vgl. Abbildung 1). Aufgrund der in der Regel voneinander abweichenden Produktions- und Absatzraten entsteht zwischen den beiden Bereichen ein Absatzlager.

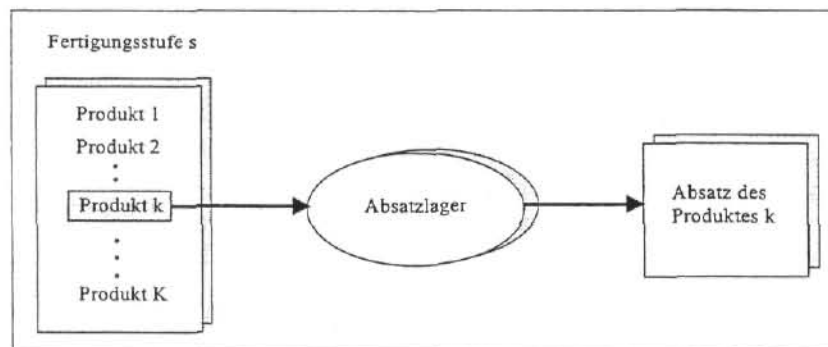


Abbildung 1: Schematische Darstellung des betrachteten Fertigungsprozeßtyps

Weiterhin ist es notwendig, eine Annahme darüber zu treffen, in welcher Weise die auf der Fertigungsstufe bearbeiteten Mengeneinheiten der betrachteten Produktart an den Absatz weitergegeben werden. Dabei charakterisiert die Bezeichnung *Trans-*

¹ Vgl. bspw. Bogaschewsky, Losgröße, 1996, Sp. 1142.

² Vgl. Adam, Produktions-Management, 1997, S. 488.

*portlos*³ die Mengeneinheiten, die gleichzeitig an den Absatz weitergeleitet werden. Modelle zur Planung der Fertigungslosgröße berücksichtigen häufig lediglich zwei Varianten der Weitergabe von bearbeiteten Mengeneinheiten. Im Rahmen eines als *offen* bezeichneten Fertigungsprozesses wird jede Produkteinheit unmittelbar nach ihrer Fertigstellung zum Absatz befördert, wobei modelltheoretisch sogar die Weitergabe infinitesimal kleiner Einheiten unterstellt wird. Im Gegensatz hierzu zeichnet sich ein *geschlossener* Fertigungsprozeß dadurch aus, daß die Weiterleitung der Produkteinheiten erst erfolgt, wenn ein Fertigungslos komplett auf der betrachteten Stufe fertiggestellt ist. In diesem Fall entsprechen Fertigungs- und Transportlos einander.

Die logistischen Möglichkeiten in Fertigungssystemen beschränken sich allerdings nicht nur auf diese beiden Transportvarianten. Vielmehr ist realistischerweise davon auszugehen, daß eine Reihe weiterer Alternativen bestehen. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, die Losgrößenmodelle dahingehend zu erweitern, daß neben der Bestimmung der Fertigungslosgröße nun zusätzlich eine Ermittlung der Transportlosgröße stattfindet.

Die Grundlage der anschließenden Ausführungen stellen statisch deterministische Einproduktlagerhaltungsmodelle dar. Soweit in den einzelnen Kapiteln keine abweichenden Aussagen getroffen werden, gelten die folgenden **Modellprämissen**:⁴

- Die Fertigungs- und Transportlosgrößen werden für eine Produktart geplant.
- Alle Planungsparameter sind bekannt und konstant über die Zeit.
- Die Länge der Planungsperiode beträgt T .⁵
- Kapazitätsbeschränkungen können vernachlässigt werden.
- Das Auftreten von Fehlmengen ist nicht erlaubt.
- Die Weitergabe von Transportlosen kann bereits vor der vollständigen Herstellung eines Fertigungsloses erfolgen, wobei sicherzustellen ist, daß das Fertigungslos ohne Unterbrechung mit nur einem Rüstvorgang produziert wird.

³ In der angelsächsischen Literatur werden die Begriffe *batch* (Szendrovits/Drezner, Multi-Stage Production, 1980), *subbatch* (Szendrovits, Manufacturing Cycle Time, 1975, Szendrovits/Wesolowsky, Variations in Optimizing, 1979, Szendrovits/Truscott, Manufacturing Cycle Time, 1989) und *sublot* (Glass/Gupta/Potts, Lot Streaming, 1994) für den Begriff Transportlos verwendet.

⁴ Vgl. hierzu insbesondere Domschke/Scholl/Voß, Produktionsplanung, 1993, S. 63ff.

⁵ Die optimalen Ausprägungen der Entscheidungsvariablen statischer Lagerhaltungsmodelle unterliegen nicht dem Einfluß des Planungshorizontes T . Bei der Modellierung wird allerdings angenommen, daß dieser hinreichend groß – genaugenommen unendlich – ist, um aussagefähige Ergebnisanalysen zu ermöglichen. Vgl. Adam, Produktionsdurchführungsplanung, 1990, S. 857.

- Die Fertigungslosgröße ist durch eine ganzzahlige Anzahl Transportvorgänge zum Absatz zu befördern. Im Hinblick auf die Gestaltung der Transportlose ist dabei das jeweils definierte Bildungsgesetz maßgebend.
- Produkteinheiten können beliebig (infinitesimal) geteilt werden.
- Die Absatzrate ist kleiner als die Produktionsrate.
- Die Lagerdauer der Erzeugnisse ist (im Rahmen sinnvoller Modellgrößen) nicht begrenzt.
- Transport- und Rüstzeiten sind vernachlässigbar.

Dem hier gewählten Planungsansatz liegt eine kurzfristig orientierte Sichtweise zugrunde. Als entscheidungsrelevant werden nur solche Kosten erachtet, die sich durch die Wahl der Fertigungs- und Transportlosgröße bzw. durch die zeitliche Verteilung der Loserstellung beeinflussen lassen. Bei den **entscheidungsrelevanten Kosten** kann danach differenziert werden, ob sie in Abhängigkeit von der Losgröße variieren oder nicht. Zu den *losfixen Kosten* zählen zum einen solche, die bei einem Fertigungswechsel von einer Produktart auf die andere für Umrüst-, Vorbereitungs- und Anlaufprozesse anfallen. Während diese im folgenden vereinfachend *Rüstkosten* genannten Kosten je Fertigungslos Relevanz besitzen, können zu den losfixen Kosten zum anderen auch solche gerechnet werden, die sich auf ein Transportlos beziehen. Hierzu zählen diejenigen Kosten, die für die Weitergabe eines Transportloses zum Absatz anzusetzen sind, weil vereinfachend angenommen wird, daß für jeden Transport ein fixer Kostensatz anfällt, der unabhängig von den zu transportierenden Mengeneinheiten der Produktart ist.⁶ Die je Fertigungslos zu verrechnenden *Transportkosten* ergeben sich damit aus der Multiplikation der Transporthäufigkeit mit dem Transportkostensatz.

Von den losfixen Kosten können die *Lagerhaltungskosten* unterschieden werden. Sie ergeben sich für ein Fertigungslos aus der monetären Bewertung des losbezogenen Lagerbestandes mit dem Lagerhaltungskostensatz. Der Lagerbestand wird wesentlich durch die Transporthäufigkeit beeinflusst. So führt bspw. eine hohe Transporthäufigkeit annahmegemäß zu einer vergleichsweise starken Überlappung der Produktion mit dem Absatz und der Folge, daß der Lagerbestand sinkt. Die Lagerhaltungskosten stellen im wesentlichen Kapitalbindungskosten dar.⁷

⁶ Der Transportkostensatz könnte alternativ auch aus einem fixen mengenunabhängigen Bestandteil und einen mit der Transportmenge variierenden Bestandteil zusammengesetzt sein. Zu einem solchen Vorschlag vgl. Goyal, *Economic Batch Quantity*, 1978, S. 270.

⁷ Entscheidungsrelevanz können auch Kosten für die Handhabung, Pflege und Versicherung der gelagerten Güter erlangen, wenn ihre Höhe mit der Fertigungslosgröße variiert. Vgl. Bogaschewsky, *Losgröße*, 1996, Sp. 1144.

In Analogie zu den traditionellen Losgrößenmodellen entwickeln sich die Rüst- und Lagerhaltungskosten in Abhängigkeit der Fertigungslosgröße gegensätzlich. Vergleichsweise große (kleine) Fertigungslose führen einerseits zu wenigen (häufigen) Sortenwechseln und damit zu geringen (hohen) Umrüstkosten im Planungszeitraum, aber andererseits resultieren hieraus automatisch hohe (niedrigere) Lagerhaltungskosten. Das Problem, die gegensätzlichen Kostenverläufe auszugleichen, wird im gewählten Planungsansatz um die logistische Fragestellung der Weitergabe von Transportlosen ergänzt. Hiermit erlangen die Transportkosten automatisch Entscheidungsrelevanz und sind bei der Planung zusätzlich zu berücksichtigen. Da eine zunehmende Transporthäufigkeit zwar mit steigenden Transportkosten verbunden ist, aber gleichzeitig über eine Verringerung des Lagerbestandes zu sinkenden Lagerkosten führt, gilt es, sämtliche entscheidungsrelevanten Kosten mit Hilfe eines *simultanen Planungsansatzes* zu minimieren. Aufgrund der Modellannahmen ergibt sich allerdings zwischen der Fertigungslosgröße, der/den Transportlosgröße(en) sowie der Transporthäufigkeit eine funktionale Abhängigkeit, so daß die Lösung des Planungsproblems auf die Ermittlung der optimalen Ausprägungen der Fertigungslosgröße sowie der Transporthäufigkeit reduziert werden kann.

Diesen Ausführungen folgend werden im *zweiten Kapitel* zwei unterschiedliche Planungsansätze dargestellt. Die erste, auf SZENDROVITS zurückzuführende Variante geht davon aus, daß ein Fertigungslos in gleich große Transportlose aufgeteilt werden kann.⁸ Der zweite, von GOYAL vorgeschlagene Ansatz sieht dagegen vor, ein Fertigungslos derart zu teilen, daß sich die Transportlose entsprechend einer *geometrischen Reihe* entwickeln.⁹ Dieser Abschnitt beschränkt sich dabei für beide Alternativen auf die Ermittlung der Funktion der entscheidungsrelevanten Kosten.

Das *dritte Kapitel* zeigt für beide Varianten der Weitergabe von Transportlosen auf, wie optimale Losgrößenpolitiken bestimmt werden können. Für die Modellformulierung mit unterschiedlichen Transportlosen erfolgen zwei Modifikationen des auf GOYAL zurückgehenden Algorithmus. Es werden zwei Prozeduren entwickelt, die insbesondere dann schnell zu der Optimallösung führen, wenn diese sich durch eine hohe Transporthäufigkeit auszeichnet. Vor der Schlußbetrachtung endet der dritte Abschnitt mit einem Zahlenbeispiel für alle vorgestellten Ansätze.

⁸ Vgl. Szendrovits, Manufacturing Cycle Time, 1975.

⁹ Vgl. Goyal, Optimum Production Quantity, 1977.

2 Ansätze zur Planung der Fertigungslosgröße

2.1 SZENDROVITS Ansatz zur Berücksichtigung identischer Transportlose

Der in diesem Abschnitt dargestellte, auf SZENDROVITS¹⁰ basierende Ansatz betrachtet eine Planungssituation, die dadurch gekennzeichnet ist, daß zwischen der Fertigungsstufe und dem Absatz nur die Weitergabe gleich großer Transportlose q zulässig ist. Zur Ermittlung der entscheidungsrelevanten Kostenfunktion $K(x,m)$, welche abhängig ist von der Fertigungslosgröße x und der Transporthäufigkeit m , soll zunächst auf die Lagerhaltungskosten eines Fertigungsloses LK_L eingegangen werden. Die Basis für die Bestimmung dieser Kosten stellt die sogenannte *zeitgewichtete Lagerhaltung* (Time [weighted] Process Inventory) TPI^{SZ} dar, mit deren Hilfe sich die Fläche unter dem Lagerbestandsverlauf eines Fertigungsloses x berechnen läßt.¹¹ Da annahmegemäß die Produktionsgeschwindigkeit $x_{p,s}$ – gemessen in Mengeneinheiten [ME] je Zeiteinheit [ZE] – größer ist als die Absatzrate $x_{p,s+1}$ [ME/ZE], handelt es sich bei dem Absatzlager um ein Staulager. Der Verdeutlichung der Ermittlung der zeitgewichteten Lagerhaltung diene ein aus drei gleich großen Transportlosen bestehendes Fertigungslos.

Der in Abbildung 2 wiedergegebene Lagerbestandsverlauf ist charakteristisch für den Staulagerfall. Die im Rahmen der zeitgewichteten Lagerhaltung zu bestimmende Fläche setzt sich damit unabhängig von der Anzahl der Transportlose aus den dick eingerahmten Flächen A_1 bis A_3 zusammen. Unter Ausnutzung der für die Produktionszeit $t_{p,s}$ bzw. Absatzzeit $t_{p,s+1}$ eines Fertigungsloses geltenden Relationen $t_{p,s} = x/x_{p,s}$ und $t_{p,s+1} = x/x_{p,s+1}$ können diese Flächen wie folgt dargestellt werden:

$$A_1 = \underbrace{\left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s+1}} \right)}_{t_{p,s}(q)} \cdot \underbrace{\left[\left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s+1}} \right) \cdot x_{p,s} \right]}_{L_{\min}=q=\frac{x}{m}} \cdot \frac{1}{2} \quad G\ 2-1$$

$$A_{21} = \underbrace{\left(\frac{x}{x_{p,s}} + \frac{x}{x_{p,s+1}} - t_{DLZ} \right)}_{t_{p,s}+t_{p,s+1}-t_{DLZ}} \cdot \underbrace{\left[\left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s+1}} \right) \cdot x_{p,s} \right]}_{L_{\min}=q=\frac{x}{m}} \quad G\ 2-2$$

¹⁰ Vgl. Szendrovits, Manufacturing Cycle Time, 1975, S. 298 ff., Szendrovits, Rejoinder, 1976, S. 334 ff., Szendrovits/Wesolowsky, Variations in Optimizing, 1979, S. 329 ff., speziell S. 329-333.

¹¹ Vgl. Szendrovits, Manufacturing Cycle Time, 1975, S. 302 f. Die nachfolgende Betrachtung basiert auf dem von SZENDROVITS unter Bedingung 2 analysierten Fall.

$$A_{22} = \underbrace{\left(\frac{x}{x_{p,s}} + \frac{x}{x_{p,s+1}} - t_{DLZ} \right)}_{t_{p,s} + t_{p,s+1} - t_{DLZ}} \cdot \underbrace{\left[\left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s}} \right) \cdot x_{p,s+1} - \left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s+1}} \right) \cdot x_{p,s} \right]}_{L_{\max} - \left(L_{\min} = q = \frac{x}{m} \right)} \cdot \frac{1}{2} \quad G\ 2-3$$

$$A_3 = \underbrace{\left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s}} \right)}_{t_{DLZ} - t_{p,s}} \cdot \underbrace{\left[\left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s}} \right) \cdot x_{p,s+1} \right]}_{L_{\max}} \cdot \frac{1}{2} \quad G\ 2-4$$

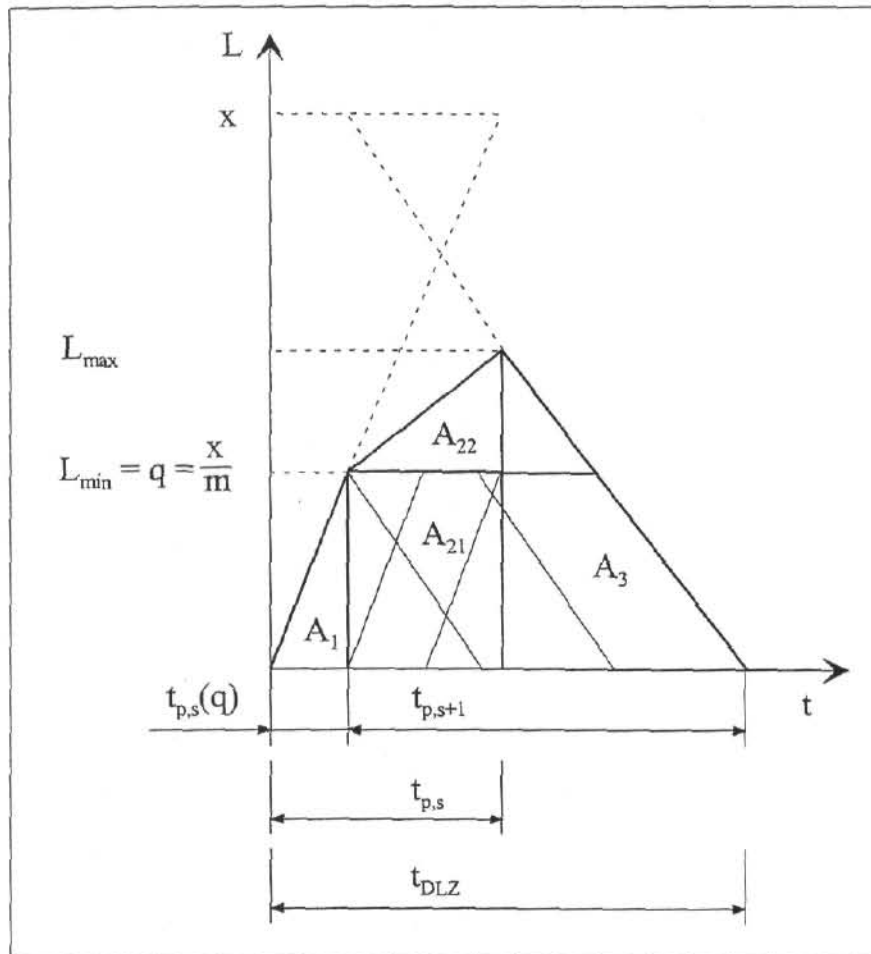


Abbildung 2: Zeitgewichtete Lagerhaltung für drei identische Transportlose

In der Abbildung 2 kennzeichnet t_{DLZ} die Durchlaufzeit eines Fertigungsloses, gemessen vom Produktionsbeginn bis zum Absatz der letzten Mengeneinheit des jeweils betrachteten Loses. Die zeitgewichtete Lagerhaltung errechnet sich aus der Summe der soeben definierten Flächen zu:

$$TPI^{SZ} = A_1 + A_{21} + A_{22} + A_3 \quad G\ 2-5$$

Einsetzen der Bestimmungsgleichungen der einzelnen Flächen (G 2-1 bis G 2-4) in Gleichung G 2-5 und anschließendes Ausmultiplizieren erbringt nach der Zusam-

menfassung gleichartiger Terme den folgenden Ausdruck für die zeitgewichtete Lagerhaltung:¹²

$$TPI^{SZ} = x \cdot t_{DLZ} - \frac{x^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s}} + \frac{1}{x_{p,s+1}} \right) \quad G 2-5.1$$

Die Durchlaufzeit des gesamten Fertigungsloses durch das in Abbildung 2 betrachtete Produktionssystem ergibt sich zu:

$$t_{DLZ} = t_{p,s}(q) + t_{p,s+1} \quad G 2-6$$

Mit $t_{p,s}(q) = \frac{t_{p,s}}{m} = \frac{x}{m} \cdot \frac{1}{x_{p,s}}$ und $t_{p,s+1} = \frac{x}{x_{p,s+1}}$ folgt daraus:

$$t_{DLZ} = \frac{x}{m} \cdot \frac{1}{x_{p,s}} + \frac{x}{x_{p,s+1}} \quad G 2-6.1$$

Ersetzen der Durchlaufzeit in Gleichung G 2-5.1 durch Gleichung G 2-6.1 führt für die zeitgewichtete Lagerhaltung zu:

$$TPI^{SZ} = x \cdot \frac{x}{m} \cdot \frac{1}{x_{p,s}} + \frac{x^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \quad G 2-5.2$$

Bewertung der zeitgewichteten Lagerhaltung in Gleichung G 2-5.2 mit dem Lagerhaltungskostensatz $c_{L,s}$ – gemessen in Geldeinheiten [GE] je [ME] und [ZE] – ergibt die Lagerhaltungskosten pro Fertigungslos:

$$LK_L = x \cdot \frac{x}{m} \cdot \frac{c_{L,s}}{x_{p,s}} + \frac{x^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \cdot c_{L,s} \quad G 2-7$$

Im Hinblick auf die entscheidungsrelevanten Kosten eines Fertigungsloses sind neben den soeben berechneten losweisen Lagerhaltungskosten weiterhin die losfixen Rüst- und Transportkosten zu berücksichtigen. Da die produzierende Stufe ein Fertigungslos ohne Unterbrechung herstellt, bedarf es je Fertigungslos nur des einmaligen Rüstens. Die *losweisen Rüstkosten*¹³ entsprechen damit dem Rüstkostensatz $k_{R,s}$ der Fertigungsstufe.

$$LK_R = k_{R,s} \quad G 2-8$$

Durch Multiplikation des fixen Kostensatzes $k_{T,s}$ je Transport mit der je Fertigungslos gewählten Transporthäufigkeit m können die *losweisen Transportkosten* bestimmt werden:

¹² Für eine ausführliche Darstellung zur Ermittlung der Bestimmungsgleichung der zeitgewichteten Lagerhaltung vgl. Anhang A.

¹³ Annahmegemäß steht die Fertigungsstufe in der durch $t_{DLZ} - t_{p,s}$ gekennzeichneten Zeitspanne für die Fertigung anderer Produkte zur Verfügung.

$$LK_T = k_{T,s} \cdot m$$

G 2-9

Die im Planungszeitraum entscheidungsrelevanten Gesamtkosten ergeben sich, indem die jeweiligen losweisen Kosten der Gleichungen G 2-7 bis G 2-9 mit der Anzahl aufzulegender Lose (n bzw., da $B = n \cdot x$, mit B/x) multipliziert und anschließend summiert werden:

$$K(x, m) = \frac{x \cdot c_{L,s} \cdot B}{x_{p,s} \cdot m} + \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \cdot c_{L,s} \cdot B + (k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m) \cdot \frac{B}{x} \quad \text{G 2-10}$$

2.2 GOYALS Ansatz zur Berücksichtigung unterschiedlicher Transportlose

Im Gegensatz zum Abschnitt 2.1 besteht nun die Möglichkeit, ein Fertigungslos mit Hilfe unterschiedlich großer Transportlose zum Absatz weiterzuleiten. In diesem Abschnitt wird eine auf GOYAL¹⁴ basierende Modellformulierung vorgestellt. Zunächst soll wiederum lediglich die Funktion der entscheidungsrelevanten Kosten aufgestellt werden. Da die Aufspaltung des Fertigungsloses in Transportlose auch in diesem Ansatz nicht willkürlich erfolgt, soll vorerst auf das diesem Modell zugrundeliegende *Bildungsgesetz* eingegangen werden.

Zur Veranschaulichung diene wiederum ein sich aus drei unterschiedlich großen Transportlosen zusammensetzendes Fertigungslos. Das noch zu definierende Bildungsgesetz der Transportlose ermöglicht, wie der Abbildung 3 entnommen werden kann, daß – im Unterschied zu Abschnitt 2.1 – kein Transportlos mehr in seiner gesamten Größe über einen bestimmten Zeitraum auf Lager liegt. Für die in Abbildung 3 enthaltenen Fertigungszeiten $t_{p,1}(q_i)$ der Stufe 1 gilt in Abhängigkeit von der Transportlosgröße q_i , $i=1(1)3$:

$$t_{p,1}(q_1) = \frac{q_1}{x_{p,1}}, \quad t_{p,1}(q_2) = \frac{q_2}{x_{p,1}}, \quad t_{p,1}(q_3) = \frac{q_3}{x_{p,1}} \quad \text{B 2-11}$$

Entsprechend gilt für die zeitlichen Absatzreichweiten $t_{p,2}(q_i)$:

$$t_{p,2}(q_1) = \frac{q_1}{x_{p,2}}, \quad t_{p,2}(q_2) = \frac{q_2}{x_{p,2}}, \quad t_{p,2}(q_3) = \frac{q_3}{x_{p,2}} \quad \text{B 2-12}$$

Setzt sich ein Fertigungslos aus m Transportlosen zusammen, so gilt für die Bearbeitungszeiten (vgl. hierzu auch Abbildung 3):¹⁵

$$t_{p,s}(q_{i+1}) = t_{p,s+1}(q_i) \quad \text{für } i = 1(1)m-1 \quad \text{G 2-13}$$

¹⁴ Vgl. Goyal, Optimum Production Quantity, 1977, S. 866 ff.

¹⁵ Die Schreibweise $i=1(1)m-1$ entspricht der ganzzahligen Erhöhung der Laufvariable i von 1 bis $m-1$. Gebräuchlich ist auch die Verwendung der Schreibweise $i=1, 2, \dots, m-1$.

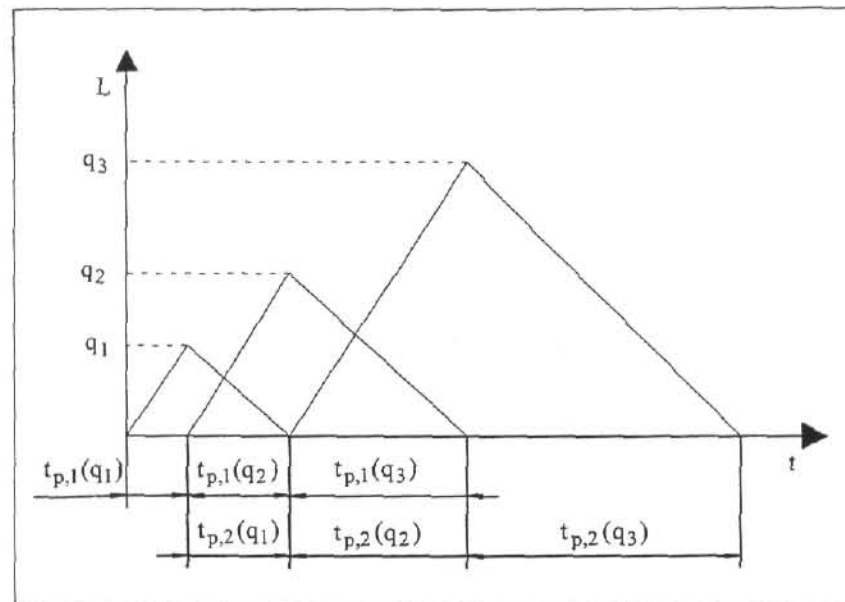


Abbildung 3: Exemplarischer Lagerbestandsverlauf der Transportlose im Ansatz von GOYAL

Unter Verwendung der Gleichungen B 2-11, B 2-12 und G 2-13 resultiert aus den Bearbeitungszeiten der Transportlose:

$$t_{p,1}(q_2) = t_{p,2}(q_1) \Leftrightarrow \frac{q_2}{x_{p,1}} = \frac{q_1}{x_{p,2}} \Leftrightarrow q_2 = q_1 \cdot \frac{x_{p,1}}{x_{p,2}} \quad \text{B 2-14}$$

$$t_{p,1}(q_3) = t_{p,2}(q_2) \Leftrightarrow \frac{q_3}{x_{p,1}} = \frac{q_2}{x_{p,2}} \Leftrightarrow \frac{q_3}{x_{p,1}} = q_1 \cdot \frac{x_{p,1}}{x_{p,2}} \cdot \frac{1}{x_{p,2}} \Leftrightarrow q_3 = q_1 \cdot \left(\frac{x_{p,1}}{x_{p,2}} \right)^2 \quad \text{B 2-15}$$

Die Produktionszeit eines Fertigungsloses auf Stufe eins ergibt sich mit den relevanten Gleichungen aus B 2-11 sowie B 2-14 und 2-15 zu:¹⁶

$$t_{p,1} = \sum_{i=1}^3 t_{p,1}(q_i) = \frac{q_1}{x_{p,1}} + \frac{q_2}{x_{p,1}} + \frac{q_3}{x_{p,1}} = \frac{q_1}{x_{p,1}} + \frac{1}{x_{p,1}} \cdot q_1 \cdot \frac{x_{p,1}}{x_{p,2}} + \frac{1}{x_{p,1}} \cdot q_1 \cdot \left(\frac{x_{p,1}}{x_{p,2}} \right)^2 \quad \text{B 2-16}$$

Einsetzen der für ein Fertigungslos geltenden Relationen $t_{p,1} \cdot x_{p,1} = x$ bzw. $t_{p,1} = x / x_{p,1}$ in Gleichung B 2-16 führt zu:

$$x = q_1 + q_1 \cdot \frac{x_{p,1}}{x_{p,2}} + q_1 \cdot \left(\frac{x_{p,1}}{x_{p,2}} \right)^2 = q_1 \cdot \sum_{i=1}^3 \left(\frac{x_{p,1}}{x_{p,2}} \right)^{i-1} \quad \text{B 2-17}$$

Anhand von Gleichung B 2-17 kann somit festgestellt werden, daß die Transportlosgrößen einer geometrischen Reihe folgen. In einer rekursiven Form läßt sich ein

¹⁶ Die Herleitung über $t_{p,2}$ führt zu identischen Ergebnissen.

Transportlos aus dem vorhergehenden Transportlos durch Multiplikation mit dem Quotienten $x_{p,1}/x_{p,2}$ ableiten. Ein Fertigungslos stellt damit die Partialsumme der eine geometrische Reihe bildenden Transportlose dar. Das Fertigungslos des Beispiels kann daher auch ausgedrückt werden durch:

$$x = q_1 \cdot \frac{\left(\frac{x_{p,1}}{x_{p,2}}\right)^3 - 1}{\left(\frac{x_{p,1}}{x_{p,2}}\right) - 1} \Leftrightarrow q_1 = x \cdot \frac{\left(\frac{x_{p,1}}{x_{p,2}}\right) - 1}{\left(\frac{x_{p,1}}{x_{p,2}}\right)^3 - 1} \quad \text{B 2-18}$$

Für den allgemeinen Fall mit $x_{p,1} = x_{p,s}$ und $x_{p,2} = x_{p,s+1}$ bei m Transportlosen kann festgehalten werden:

$$x = \sum_{i=1}^m q_i = q_1 + q_1 \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} + \dots + q_1 \cdot \left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}}\right)^{m-1} = q_1 \cdot \sum_{i=1}^m \left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}}\right)^{i-1} \quad \text{G 2-19}$$

und demzufolge gilt:

$$x = q_1 \cdot \frac{\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}}\right)^m - 1}{\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}}\right) - 1}$$

Zur vereinfachten Schreibweise sei:

$$q_1 = x \cdot A(q_1, m) \quad \text{mit: } A(q_1, m) = \frac{\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}}\right) - 1}{\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}}\right)^m - 1} \quad \text{G 2-19.1}$$

Mit dem Bildungsgesetz für die Transportlose ist die Grundlage für die Bestimmung der losweisen Lagerhaltungskosten gelegt. Unter Beibehaltung der bisherigen Vorgehensweise werden sie zunächst für das in Abbildung 3 vorgestellte Beispiel ermittelt. Die losweisen Lagerhaltungskosten ergeben sich damit durch Summation der Lagerhaltungskosten der drei Transportlose:

$$LK_L = LK_L(q_1) + LK_L(q_2) + LK_L(q_3) \quad \text{B 2-20}$$

Für die Berechnung der transportlosbezogenen Lagerhaltungskosten ist zu berücksichtigen, daß der maximale Lagerbestand die Größe des entsprechenden Transportloses besitzt. Über die gesamte Produktions- und Absatzzeit eines Transportloses liegt aber durchschnittlich nur genau die Hälfte des Maximalwertes auf Lager und ist somit in die Bestimmung der angesprochenen Kostengröße einzubeziehen. Die

Verwendung der Gleichungen B 2-11 bis B 2-15 führt zu folgenden Lagerhaltungskosten der Transportlose:

$$LK_L(q_1) = \frac{q_1}{2} \cdot (t_{p,1}(q_1) + t_{p,2}(q_1)) \cdot c_{L,1} = \frac{q_1}{2} \cdot \left(\frac{q_1}{x_{p,1}} + \frac{q_1}{x_{p,2}} \right) \cdot c_{L,1} = \frac{q_1^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,1}} + \frac{1}{x_{p,2}} \right) \cdot c_{L,1}$$

B 2-21

$$LK_L(q_2) = \frac{q_2}{2} \cdot (t_{p,1}(q_2) + t_{p,2}(q_2)) \cdot c_{L,1} = \frac{q_2}{2} \cdot \left(\frac{q_2}{x_{p,1}} + \frac{q_2}{x_{p,2}} \right) \cdot c_{L,1}$$

$$= \frac{q_1}{2} \cdot \frac{x_{p,1}}{x_{p,2}} \cdot \left(\frac{q_1}{x_{p,1}} \cdot \frac{x_{p,1}}{x_{p,2}} + \frac{q_1}{x_{p,2}} \cdot \frac{x_{p,1}}{x_{p,2}} \right) \cdot c_{L,1} = \frac{q_1^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,1}} + \frac{1}{x_{p,2}} \right) \cdot \left(\frac{x_{p,1}}{x_{p,2}} \right)^2 \cdot c_{L,1}$$

B 2-22

$$LK_L(q_3) = \frac{q_3}{2} \cdot (t_{p,1}(q_3) + t_{p,2}(q_3)) \cdot c_{L,1} = \frac{q_3}{2} \cdot \left(\frac{q_3}{x_{p,1}} + \frac{q_3}{x_{p,2}} \right) \cdot c_{L,1}$$

$$LK_L(q_3) = \frac{q_1}{2} \cdot \left(\frac{x_{p,1}}{x_{p,2}} \right)^2 \cdot \left[\frac{q_1}{x_{p,1}} \cdot \left(\frac{x_{p,1}}{x_{p,2}} \right)^2 + \frac{q_1}{x_{p,2}} \cdot \left(\frac{x_{p,1}}{x_{p,2}} \right)^2 \right] \cdot c_{L,1}$$

$$= \frac{q_1^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,1}} + \frac{1}{x_{p,2}} \right) \cdot \left(\frac{x_{p,1}}{x_{p,2}} \right)^4 \cdot c_{L,1}$$

B 2-23

Die Lagerhaltungskosten pro Los resultieren aus dem Einsetzen der Gleichungen B 2-21 bis B 2-23 in Gleichung B 2-20:

$$LK_L = \frac{q_1^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,1}} + \frac{1}{x_{p,2}} \right) \cdot \left[1 + \left(\frac{x_{p,1}}{x_{p,2}} \right)^2 + \left(\frac{x_{p,1}}{x_{p,2}} \right)^4 \right] \cdot c_{L,1}$$

$$= \frac{q_1^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,1}} + \frac{1}{x_{p,2}} \right) \cdot \sum_{i=1}^3 \left(\frac{x_{p,1}}{x_{p,2}} \right)^{2i-2} \cdot c_{L,1} = \frac{q_1^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,1}} + \frac{1}{x_{p,2}} \right) \cdot \sum_{i=1}^3 \left(\frac{x_{p,1}}{x_{p,2}} \right)^{2(i-1)} \cdot c_{L,1}$$

$$= \frac{q_1^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,1}} + \frac{1}{x_{p,2}} \right) \cdot \frac{\left(\frac{x_{p,1}}{x_{p,2}} \right)^6 - 1}{\left(\frac{x_{p,1}}{x_{p,2}} \right)^2 - 1} \cdot c_{L,1}$$

B 2-24

In allgemeiner Form gilt:

$$LK_L = \frac{q_1^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s}} + \frac{1}{x_{p,s+1}} \right) \cdot \sum_{i=1}^m \left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right)^{2(i-1)} \cdot c_{L,s}$$

G 2-25

$$LK_L = \frac{q_1^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s}} + \frac{1}{x_{p,s+1}} \right) \cdot D(q_1, m) \cdot c_{L,s} \quad \text{mit: } D(q_1, m) = \frac{\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right)^{2m} - 1}{\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right)^2 - 1} \quad G\ 2-25.1$$

Wird des weiteren q_1 in Gleichung G 2-25.1 durch Gleichung G 2-19.1 substituiert, so lassen sich die Lagerhaltungskosten für ein Fertigungslos wie folgt angeben:

$$LK_L = \frac{x^2 \cdot [A(q_1, m)]^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s}} + \frac{1}{x_{p,s+1}} \right) \cdot D(q_1, m) \cdot c_{L,s} \quad G\ 2-26$$

Unter Berücksichtigung der relevanten losweisen Rüst- und Transportkosten berechnen sich die im Planungszeitraum entscheidungsrelevanten Kosten in Analogie zum vorhergehenden Abschnitt durch die Multiplikation der losweisen Kostengrößen mit der Anzahl aufzulegender Lose ($n = B/x$). Die im Planungsansatz von GOYAL zu minimierende Kostenfunktion lautet damit:

$$K(x, m) = \frac{x \cdot [A(q_1, m)]^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s}} + \frac{1}{x_{p,s+1}} \right) \cdot c_{L,s} \cdot D(q_1, m) \cdot B + (k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m) \cdot \frac{B}{x} \quad G\ 2-27$$

In einer anderen Formulierung kann G 2-27 auch wie folgt geschrieben werden:¹⁷

$$K(x, m) = \frac{x \cdot c_{L,s} \cdot A(q_1, m) \cdot B}{x_{p,s}} + \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \cdot c_{L,s} \cdot B + (k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m) \cdot \frac{B}{x} \quad G\ 2-28$$

$$\text{mit: } A(q_1, m) = \frac{\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right) - 1}{\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right)^m - 1} \quad G\ 2-28.1^{18}$$

Diese Darstellung ermöglicht einen direkten Vergleich mit der in Abschnitt 2.1 ermittelten Kostenfunktion G 2-10. Es stellt sich heraus, daß G 2-10 und G 2-28 nur bei der Berechnung der Lagerhaltungskosten einen Unterschied aufweisen. Während im Falle ungleich großer Transportlose der Ausdruck $A(q_1, m)$ im ersten Quotienten Verwendung findet, wird dort für identische Transportlose der Ausdruck $1/m$ angesetzt. Diese Ausdrücke determinieren damit die Struktur der Transportlosbildung.

¹⁷ Vgl. Anhang B oder Bogaschewsky/Buscher/Lindner, Simultanplanung, 1999, S. 6 ff.

¹⁸ Vgl. G 2-19.1.

3 Bestimmung optimaler Losgrößenpolitiken

3.1 Optimierung bei identischen Transportlosgrößen¹⁹

In diesem Abschnitt wird die Berechnung der optimalen Fertigungslosgröße und Transporthäufigkeit für den Fall gezeigt, daß die Weitergabe eines Fertigungsloses zum Absatz durch identische Transportlose erfolgt. Den Ausgangspunkt der Überlegungen stellt die in Abschnitt 2.1 ermittelte Kostenfunktion G 2.10 dar. Zunächst werden die für die Optimierungsprozedur notwendigen Bestimmungsgleichungen hergeleitet.

Um die optimale Fertigungslosgröße für einen gegebenen Wert der Transporthäufigkeit zu erhalten, muß Gleichung G 2-10 partiell nach x differenziert und anschließend gleich null gesetzt werden:²⁰

$$K(x, m) = \frac{x \cdot c_{L,s} \cdot B}{x_{p,s} \cdot m} + \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \cdot c_{L,s} \cdot B + (k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m) \cdot \frac{B}{x} \quad \text{G 2-10}$$

$$\frac{\partial K(x, m)}{\partial x} = \frac{c_{L,s} \cdot B}{x_{p,s} \cdot m} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \cdot c_{L,s} \cdot B - (k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m) \cdot \frac{B}{x^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{A 3-1}$$

Als optimale Fertigungslosgröße für einen gegebenen Wert von m ergibt sich:

$$x_{opt}^{SZ}(m) = \sqrt{\frac{k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m}{\frac{c_{L,s}}{x_{p,s} \cdot m} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \cdot c_{L,s}}} \quad \text{G 3-2}$$

Die zugehörige optimale Transportlosgröße bestimmt sich, indem die nach Gleichung G 3-2 ermittelte optimale Fertigungslosgröße durch die gegebene Transporthäufigkeit m dividiert wird. Allgemein gilt:

$$q = \frac{x}{m} \quad \text{G 3-3}$$

Es werden somit – wie für die Fertigungslosgröße – keine Ganzzahligkeitsanforderungen an die Transportlosgröße gestellt.

¹⁹ Vgl. Szendrovits, Rejoinder, 1976, S. 337 f., Bogaschewsky, Planung, 1998, S. 296 ff., Bogaschewsky/Buscher, Transportlosgrößenplanung, 1999.

²⁰ Für die hinreichende Bedingung vgl. den Konvexitätsbeweis in Anhang C 1.

Die Ermittlung der optimalen reellwertigen Transporthäufigkeit $m_{\text{opt}}^{\text{SZ}}(x)$ für einen gegebenen Wert von x setzt voraus, daß Gleichung G 2-10 partiell nach m differenziert und anschließend gleich null gesetzt wird:²¹

$$\frac{\partial K(x, m)}{\partial m} = -\frac{x \cdot c_{L,s} \cdot B}{x_{p,s} \cdot m^2} + k_{T,s} \cdot \frac{B}{x} = 0 \quad \text{A 3-4}$$

Die optimale reellwertige Transporthäufigkeit für ein gegebenes x berechnet sich damit wie folgt:

$$m_{\text{opt}}^{\text{SZ}}(x) = x \cdot \sqrt{\frac{c_{L,s}}{x_{p,s} \cdot k_{T,s}}} \quad \text{G 3-5}$$

Für die Optimierungsprozedur ist allerdings die Kenntnis des globalen Optimums der Transporthäufigkeit erforderlich. Da es mit Hilfe von G 3-5 nur bestimmt werden kann, wenn die global optimale Fertigungslosgröße bekannt ist, konzentrieren sich die folgenden Ausführungen auf die Ermittlung dieser Größe. Um die Kostenfunktion allein in Abhängigkeit von x zu formulieren, ist m in Gleichung G 2-10 durch Gleichung G 3-5 zu ersetzen. Der Übersichtlichkeit halber werden die nachstehenden Vereinfachungen verwendet:

$$\alpha = \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \cdot c_{L,s} \cdot B + k_{R,s} \cdot \frac{B}{x} \quad \beta = \frac{c_{L,s}}{x_{p,s}}$$

Die Nutzung der Vereinfachungen führt zu folgender Kostenfunktion:

$$\begin{aligned} K(x) &= \frac{x \cdot \beta \cdot B}{x \cdot \sqrt{\frac{\beta}{k_{T,s}}}} + k_{T,s} \cdot x \cdot \sqrt{\frac{\beta}{k_{T,s}}} \cdot \frac{B}{x} + \alpha = \sqrt{\frac{\beta^2 \cdot k_{T,s}}{\beta}} \cdot B + \sqrt{\frac{k_{T,s}^2 \cdot \beta}{k_{T,s}}} \cdot B + \alpha \\ &= 2 \cdot \sqrt{\beta \cdot k_{T,s}} \cdot B + \alpha \end{aligned}$$

Nach Rücksetzung der Vereinfachungen ergibt sich:

$$K(x) = 2 \cdot \sqrt{\frac{c_{L,s} \cdot k_{T,s}}{x_{p,s}}} \cdot B + \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \cdot c_{L,s} \cdot B + k_{R,s} \cdot \frac{B}{x} \quad \text{G 3-6}$$

Die notwendige Optimalitätsbedingung resultiert aus der Differentiation der Gleichung G 3-6 nach x und anschließendem Nullsetzen:

²¹ Für die hinreichende Bedingung vgl. den relevanten Konvexitätsbeweis in Anhang C 2.

$$\frac{\partial K(x)}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \cdot c_{L,s} \cdot B - k_{R,s} \cdot \frac{B}{x^2} = 0 \quad \text{A 3-7}$$

Das globale Optimum der Fertigungslosgröße errechnet sich damit aus:

$$x_{\text{opt}}^o = \sqrt{\frac{2 \cdot k_{R,s}}{\left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \cdot c_{L,s}}} \quad \text{G 3-8}$$

Die obige Gleichung zeigt interessanterweise auf, daß die optimale Losgröße der rein *offenen* Fertigung zugleich das globale Optimum der Fertigungslosgröße unter Berücksichtigung identischer Transportlose determiniert.²² Zur Ermittlung des globalen Optimums der Transporthäufigkeit braucht G 3-8 nur noch in G 3-5 eingesetzt zu werden. Als Bestimmungsgleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned} m_{\text{opt}}^{\text{SZ}} &= \sqrt{\frac{2 \cdot k_{R,s}}{\left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \cdot c_{L,s}}} \cdot \sqrt{\frac{c_{L,s}}{x_{p,s} \cdot k_{T,s}}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot k_{R,s}}{\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} - 1 \right) \cdot k_{T,s}}} \quad \text{G 3-9} \end{aligned}$$

Die Ausprägungen der Fertigungslosgröße sowie der Transporthäufigkeit im globalen Kostenminimum bilden eine nicht zu unterschreitende untere Schranke der erreichbaren *minimalen entscheidungsrelevanten Gesamtkosten*. Dabei wird in der Regel der Fall auftreten, daß die Transporthäufigkeit im globalen Optimum einen nicht ganzzahligen Wert annimmt (vgl. auch G 3-9). Realistischerweise kann ein Fertigungslos aber nur in einer *ganzzahligen* Anzahl von Transportlosen zwischen der Fertigungsstufe und dem Absatz weitergeleitet werden. Damit ist die Transporthäufigkeit als diskrete Variable aufzufassen.²³

Zur Ermittlung der ganzzahligen optimalen Transporthäufigkeit kann auf eine ausschließlich von m abhängige Kostenfunktion – im folgenden als kontinuierliche Kostenfunktion für m bezeichnete Funktion – zurückgegriffen werden, die für einen gegebenen Wert von m die nicht zu unterschreitenden entscheidungsrelevanten

²² Vgl. zur Bestimmungsgleichung der optimalen Losgröße der rein *offenen* Fertigung z.B. Bloech et al., Produktion, 1998, S. 250 ff., Bogaschewsky, Losgröße, 1996, Sp. 1146 ff.

²³ Vgl. dazu Goyal, Note, 1976, S. 332.

Kosten abbildet.²⁴ In allgemeiner Form ergibt sich die kontinuierliche Kostenfunktion für m , wenn x in G 2-10 durch G 3-2 ersetzt wird. Zur Ableitung der Kostenfunktion werden die nachfolgenden Vereinfachungen verwendet:

$$\alpha = \frac{c_{L,s}}{x_{p,s} \cdot m} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \cdot c_{L,s} \quad \beta = k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m$$

Anwendung der Vereinfachungen in der Kostenfunktion G 2-10 sowie anschließende Substitution der Fertigungslosgrößenvariable x durch G 3-2 ergeben:

$$K(x, m) = x \cdot \alpha \cdot B + \beta \cdot \frac{B}{x}$$

$$K(m) = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot \alpha \cdot B + \beta \cdot \frac{B}{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}} = \sqrt{\frac{\beta \cdot \alpha^2}{\alpha}} \cdot B + \sqrt{\frac{\beta^2 \cdot \alpha}{\beta}} \cdot B = 2 \cdot B \cdot \sqrt{\beta \cdot \alpha}$$

Werden auch diese Vereinfachungen wieder rückgängig gemacht, so erhält man als kontinuierliche Kostenfunktion für m :

$$K(m) = 2 \cdot B \cdot \sqrt{(k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m) \cdot \left[\frac{c_{L,s}}{x_{p,s} \cdot m} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \cdot c_{L,s} \right]} \quad \text{G 3-10}$$

Da die Fertigungslosgröße per Definition keinen Ganzzahligkeitsanforderungen unterliegt, kommen aufgrund der Konvexität der Kostenfunktion bezüglich m nur die beiden ganzzahligen Ausprägungen von m als kostenminimierende Optima in Frage, die in direkter Nachbarschaft zu dem nicht ganzzahligen globalen Optimum von m liegen.²⁵ Aus diesen beiden Ausprägungen der Transporthäufigkeit ist anhand eines mit Hilfe von G 3-10 durchzuführenden Kostenvergleiches diejenige auszuwählen, die die entscheidungsrelevanten Kosten minimiert. Die optimale Fertigungslosgröße läßt sich bestimmen, indem der optimale ganzzahlige Wert von m in G 3-2 eingesetzt wird.²⁶ Der Veranschaulichung der Optimierungsprozedur dient die Abbildung 4.²⁷

²⁴ Aufgrund der Konvexität der Kostenfunktion bezüglich x existiert für diesen Wert von m keine weitere Losgröße, die für genau dieses m zu geringeren Kosten im Planungszeitraum führt.

²⁵ Falls sich für die global optimale Transporthäufigkeit ein ganzzahliger Wert ergibt, dann wird der im folgenden angesprochene Kostenvergleich hinfällig.

²⁶ Eine andere Möglichkeit der Ermittlung der kostenoptimalen Ausprägungen von x und m besteht darin, für die beiden relevanten ganzzahligen Werte der Transporthäufigkeit die

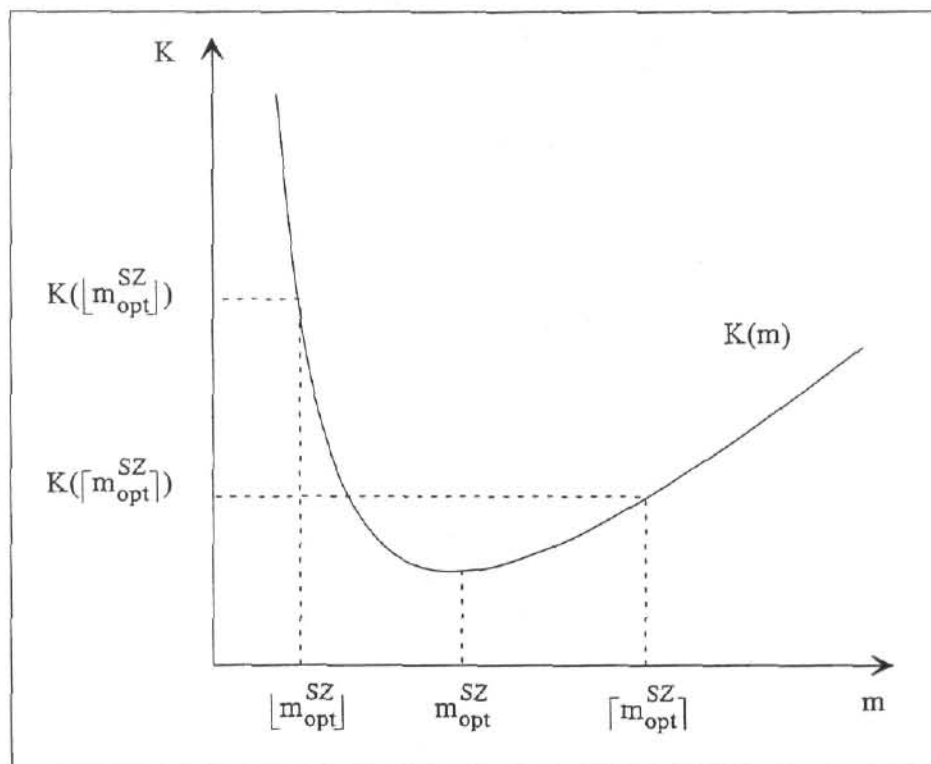


Abbildung 4: Bestimmung der optimalen ganzzahligen Transporthäufigkeit bei identischen Transportlosen

3.2 Optimierung bei unterschiedlichen Transportlosen

3.2.1 GOYALS Optimierungsansatz

Im Gegensatz zum Abschnitt 3.1 wird im folgenden eine Planungssituation betrachtet, in der die Beförderung von Transportlosen unterschiedlicher Größe zwischen der Fertigungsstufe und dem Absatz zulässig ist. Falls ein konkretes Fertigungssystem die entsprechenden Freiheitsgrade aufweist, läßt sich durch die Bildung ungleicher Transportlose eine Reduktion der entscheidungsrelevanten Kosten gegenüber der Planung identischer Transportlose erreichen.²⁸ Die Transportlosgrößen sind dabei entsprechend einer geometrischen Reihe zu gestalten (vgl. G 2-19). Die Gleichung G 2-28 repräsentiert demzufolge die zu minimierende Zielfunktion.

entsprechenden optimalen Ausprägungen der Fertigungslosgröße mit Hilfe von G 3-2 zu bestimmen und nachfolgend für die beiden zusammengehörigen Wertepaare die Kosten nach G 2-10 zu errechnen, um das kostenminimierende Wertepaar auszuwählen. Vgl. dazu Bogaschewsky/Buscher, Transportlosgrößenplanung, 1999.

27 Mit $\lfloor m_{opt}^{SZ} \rfloor$ bzw. $\lceil m_{opt}^{SZ} \rceil$ ist die direkt benachbarte kleinere bzw. größere ganzzahlige Transporthäufigkeit benannt.

28 Vgl. Goyal, Optimum Production Quantity, 1977, S. 869 f.

$$K(x, m) = \frac{x \cdot c_{L,s} \cdot A(q_1, m) \cdot B}{x_{p,s}} + \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \cdot c_{L,s} \cdot B + (k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m) \cdot \frac{B}{x} \quad \text{G 2-28}$$

$$\text{mit: } A(q_1, m) = \frac{\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right)^{-1}}{\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right)^m - 1} \quad \text{G 2-28.1}$$

Zur Bestimmung der optimalen Fertigungslosgröße für einen gegebenen Wert der Transporthäufigkeit ist es zunächst notwendig, G 2-28 partiell nach x abzuleiten und anschließend gleich null zu setzen:²⁹

$$\frac{\partial K(x, m)}{\partial x} = \frac{c_{L,s} \cdot A(q_1, m) \cdot B}{x_{p,s}} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \cdot c_{L,s} \cdot B - (k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m) \cdot \frac{B}{x^2} = 0 \quad \text{A 3-11}$$

Die optimale Fertigungslosgröße für ein gegebenes m ergibt sich damit zu:

$$x_{\text{opt}}^{G_2}(m) = \sqrt{\frac{k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m}{\frac{c_{L,s} \cdot A(q_1, m)}{x_{p,s}} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \cdot c_{L,s}}} \quad \text{G 3-12}$$

Auch der auf GOYAL basierende Algorithmus bedarf zur Lösungsfindung der kontinuierlichen Kostenfunktion für m . Die Interpretation dieser Funktion unterscheidet sich nicht von derjenigen im Abschnitt 3.1. Für die Herleitung dieser Kostenfunktion werden die folgenden Vereinfachungen definiert:

$$\alpha = \frac{c_{L,s} \cdot A(q_1, m)}{x_{p,s}} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \cdot c_{L,s} \quad \beta = k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m$$

Substitution von x in G 2-28 durch G 3-12 führt unter Rückgriff auf die Vereinfachungen zu:

$$K(m) = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot \alpha \cdot B + \beta \cdot \frac{B}{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}} = \sqrt{\frac{\beta \cdot \alpha^2}{\alpha}} \cdot B + \sqrt{\frac{\beta^2 \cdot \alpha}{\beta}} \cdot B = 2 \cdot B \cdot \sqrt{\beta \cdot \alpha}$$

²⁹ Für die hinreichende Bedingung vgl. den relevanten Konvexitätsbeweis in Anhang C 1.

Die kontinuierliche Kostenfunktion für m lautet demzufolge:

$$K(m) = 2 \cdot B \cdot \sqrt{(k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m) \cdot \left[\frac{c_{L,s} \cdot A(q_1, m)}{x_{p,s}} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \cdot c_{L,s} \right]} \quad \text{G 3-13}$$

Da sich anders als bei der Planung identischer Transportlose die globalen Optima der Fertigungslosgröße bzw. der Transporthäufigkeit nicht ohne weiteres mit Hilfe von Bestimmungsgleichungen direkt ermitteln lassen, nutzt die im folgenden vorzustellende Optimierungsprozedur eine *iterative Vorgehensweise*.³⁰

Wieder stelle die Transporthäufigkeit m eine diskrete Variable dar. Auch für diesen Lösungsansatz gilt, daß für jedes m – und damit auch für jedes ganzzahlige m – eine Fertigungslosgröße existiert, die zu minimalen Kosten im Planungszeitraum führt. Der Lösungsalgorithmus zur Ermittlung der optimalen ganzzahligen Transporthäufigkeit nutzt die Tatsache aus, daß die Kostenfunktion bezüglich m einen konvexen Verlauf aufweist.³¹ Dabei repräsentiert $m = 1$ die kleinste zulässige Transporthäufigkeit. Beginnend mit diesem Startwert werden die zugehörigen Kosten nach G 3-13 solange für jede nächsthöhere ganzzahlige Ausprägung von m ermittelt, bis erstmals festgestellt wird, daß die für eine Transporthäufigkeit errechneten Kosten größer sind, als die optimalen Kosten der nächstkleineren Transporthäufigkeit (vgl. Abbildung 5). Der konvexe Verlauf der Kostenfunktion garantiert, daß oberhalb der als letztes betrachteten Transporthäufigkeit kein weiterer Wert existiert, der zu geringeren Kosten führt. Die Planungslösung muß damit der folgenden Optimalitätsbedingung genügen:

$$K(m_{\text{opt}}^g - 1) \geq K(m_{\text{opt}}^g) \leq K(m_{\text{opt}}^g + 1) \quad \text{G 3-14}$$

Die der ermittelten Lösung entsprechende Fertigungslosgröße kann anschließend mit Hilfe von G 3-12 berechnet werden.

³⁰ Der gewählte Lösungsansatz ist im wesentlichen identisch mit der von GOYAL vorgeschlagenen Optimierungsprozedur. Vgl. Goyal, Optimum Production Quantity, 1977, S. 868.

³¹ Vgl. den relevanten Konvexitätsbeweis in Anhang C 3.

³² Vgl. Goyal, Optimum Production Quantity, 1977, S. 868.

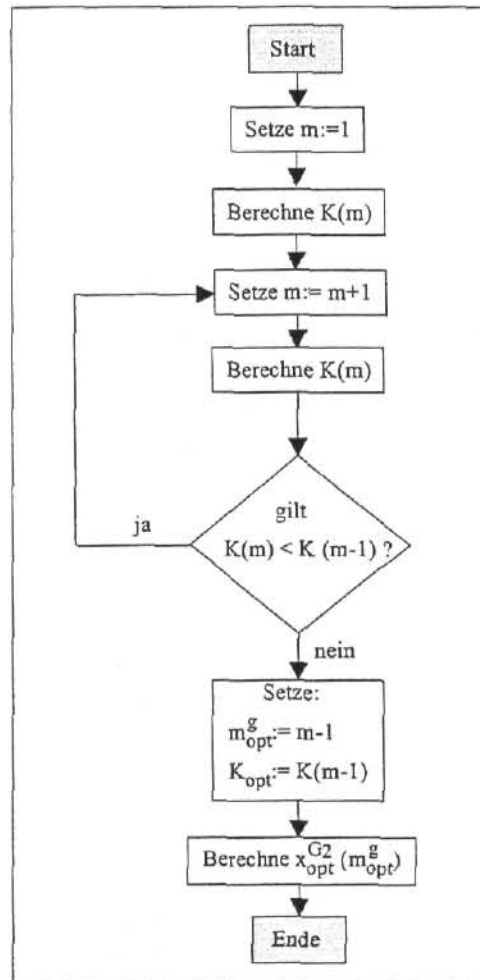


Abbildung 5: GOYALS Optimierungsalgorithmus

3.2.2 Modifizierte Optimierungsansätze

Der auf GOYAL basierende Optimierungsansatz erweist sich immer dann als aufwendig, wenn die Beförderung der Fertigungslosgröße im Optimum mit einer großen Anzahl von Transporten zum Absatz erfolgt. Aufgrund dieses Sachverhaltes sollen in diesem Abschnitt zwei Algorithmen vorgestellt werden, deren Grundgedanke darin besteht, die Überprüfung der Transporthäufigkeit nicht bei $m = 1$ zu beginnen, sondern bei einem höheren Wert. Grundsätzlich verringert sich dadurch die Anzahl der erforderlichen Iterationen zur Ermittlung der optimalen ganzzahligen Transporthäufigkeit. Ausgehend von den jeweils verfahrensspezifischen Startwerten für m ist für beide Ansätze sicherzustellen, daß auch tatsächlich die optimale ganzzahlige Transporthäufigkeit berechnet wird.

ALGORITHMUS I:

Zur Ermittlung des Startwertes für m wird auf die Fertigungslosgröße der *offenen* Fertigung x_{opt}^0 zurückgegriffen. Für diese Losgröße führt nur die optimale reellwer-

tige Transporthäufigkeit $m_{\text{opt}}^G(x_{\text{opt}}^0)$ zu minimalen Kosten. Zur Bestimmung dieser Transporthäufigkeit wird x_{opt}^0 (vgl. G 3-8) in G 2-28 eingesetzt, die Kostenfunktion nach m abgeleitet, gleich null gesetzt und schließlich nach m aufgelöst:

$$K(m, x_{\text{opt}}^0) = \frac{x_{\text{opt}}^0 \cdot c_{L,s} \cdot A(q_1, m) \cdot B}{x_{p,s}} + \frac{x_{\text{opt}}^0}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \cdot c_{L,s} \cdot B + (k_{R,s} + k_{T_f} \cdot m) \cdot \frac{B}{x_{\text{opt}}^0} \quad \text{G 2-28.2}$$

$$\text{mit: } A(q_1, m) = \frac{\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right) - 1}{\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right)^m - 1} \quad \text{G 2-28.1}$$

$$\frac{\partial K(m, x_{\text{opt}}^0)}{\partial m} = \frac{x_{\text{opt}}^0 \cdot c_{L,s} \cdot A'(q_1, m) \cdot B}{x_{p,s}} + k_{T_f} \cdot \frac{B}{x_{\text{opt}}^0} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{A 3-15}$$

$$\frac{\left(x_{\text{opt}}^0 \right)^2 \cdot c_{L,s} \cdot A'(q_1, m)}{x_{p,s}} + k_{T_f} = 0$$

Nach dem Einsetzen von G 3-8 ergibt sich:

$$\frac{2 \cdot k_{R,s} \cdot c_{L,s} \cdot A'(q_1, m)}{\left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \cdot c_{L,s} \cdot x_{p,s}} + k_{T_f} = 0$$

$$\frac{2 \cdot k_{R,s} \cdot A'(q_1, m)}{\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} - 1 \right)} + k_{T_f} = 0 \quad \text{G 3-16}$$

An dieser Stelle bietet es sich an, mit Hilfe der Quotientenregel die explizite Ableitung von $A(q_1, m)$ nach m anzugeben. Hier und im folgenden werden die nachstehenden Vereinfachungen verwendet:

$$L = \left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right) \quad \text{mit } L > 1 \quad \text{und} \quad Z = \left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right)^m \quad \text{mit } Z > 1 \quad \text{sowie } m > 0$$

$$A'(q_1, m) = - \frac{(L-1) \cdot \ln(L) \cdot Z}{(Z-1)^2} \quad \text{G 3-17}$$

33 $A'(q_1, m)$ möge die Ableitung von $A(q_1, m)$ nach m darstellen. Auf die explizite Ableitung wird aus Gründen der Übersichtlichkeit zunächst verzichtet.

Einsetzen von G 3-17 in G 3-16 ergibt:

$$\frac{2 \cdot k_{R,s} \cdot \ln(L) \cdot Z}{(Z-1)^2} = k_{T,s}$$

$$2 \cdot k_{R,s} \cdot \ln(L) \cdot Z = k_{T,s} \cdot (Z-1)^2 \quad \text{G 3-18}$$

$$Z^2 - Z \cdot \left(\frac{2 \cdot k_{R,s} \cdot \ln(L)}{k_{T,s}} + 2 \right) + 1 = 0$$

$$Z = \pm \sqrt{\left(\frac{k_{R,s} \cdot \ln(L)}{k_{T,s}} + 1 \right)^2 - 1} + \frac{k_{R,s} \cdot \ln(L)}{k_{T,s}} + 1 \quad \text{G 3-19}$$

Nur der positive Wurzel Ausdruck ist relevant, weil andernfalls die Bedingung $Z > 1$ nicht gewährleistet wäre. Die optimale reellwertige Transporthäufigkeit bezüglich x_{opt}^0 kann berechnet werden, indem die Gleichung $Z = L^m$ auf beiden Seiten logarithmiert und anschließend nach m umgeformt wird:

$$m \cdot \ln(L) = \ln(Z)$$

Demzufolge gilt:

$$m_{\text{opt}}^G(x_{\text{opt}}^0) = \frac{\ln(Z)}{\ln(L)} \quad \text{G 3-20}$$

Rücksetzung der Vereinfachungen ergibt:

$$m_{\text{opt}}^G(x_{\text{opt}}^0) = \frac{\ln \left[\sqrt{\left(\frac{k_{R,s} \cdot \ln \left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right) + 1 \right)^2 - 1} + \frac{k_{R,s} \cdot \ln \left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right) + 1} \right]}{\ln \left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right)} \quad \text{G 3-21}$$

Aus der Definition der kontinuierlichen Kostenfunktion $K(m)$ folgt, daß die optimalen Kosten für ein spezielles m exakt durch den anhand von $K(m)$ ermittelten Wert abgebildet werden. Demzufolge liegt der Punkt $\left[m_{\text{opt}}^G(x_{\text{opt}}^0), K[m_{\text{opt}}^G(x_{\text{opt}}^0)] \right]$ auf $K(m)$. Darüber hinaus gelingt der Beweis, daß die kontinuierliche Kostenfunktion

im Punkt $m_{\text{opt}}^G(x_{\text{opt}}^o)$ eine negative Steigung besitzt.³⁴ Aufgrund ihres konvexen Verlaufes hat sie daher auch bei der kleineren Transporthäufigkeit $\lfloor m_{\text{opt}}^G(x_{\text{opt}}^o) \rfloor$ einen negativen Anstieg. Dies bedeutet gleichzeitig, daß bei Verwendung von $\lfloor m_{\text{opt}}^G(x_{\text{opt}}^o) \rfloor$ als Startwert in keinem Fall zu Beginn des modifizierten iterativen Suchprozesses die optimale ganzzahlige Transporthäufigkeit überschritten wird. Nach der Bestimmung des verbesserten Startwertes nimmt die modifizierte Optimierungsprozedur die Vorgehensweise von GOYAL auf. Abbildung 6 gibt die Ermittlung des verbesserten Startwertes wieder.

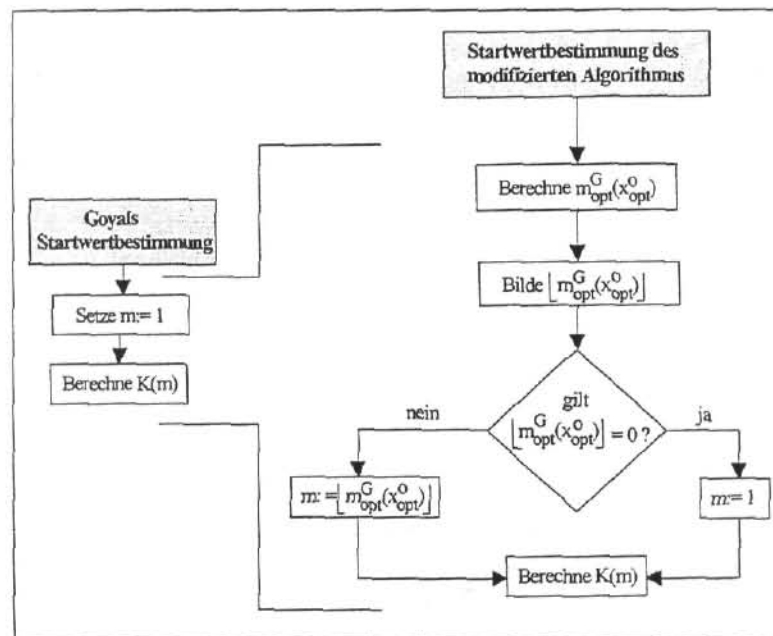


Abbildung 6: Startwertbestimmung des modifizierten Optimierungsansatzes-ALGORITHMUS I

Im Gegensatz zu dem auf GOYAL basierenden Ansatz stellt nicht $m = 1$ den Startwert des Algorithmus I dar, sondern wird durch die Transporthäufigkeit $\lfloor m_{\text{opt}}^G(x_{\text{opt}}^o) \rfloor$ determiniert. Diesem eher geringen zusätzlichen Berechnungsaufwand steht eine wesentlich verminderte Anzahl von auf Optimalität zu überprüfenden Transporthäufigkeiten gegenüber.

ALGORITHMUS II:

Im Rahmen dieses Lösungsansatzes dient das – sehr einfach zu ermittelnde – globale Optimum der Transporthäufigkeit bei Weitergabe identischer Transportlose $m_{\text{opt}}^{\text{SZ}}$

³⁴ Vergleiche hierzu Anhang D.

(vgl. G 3-9) als Ausgangspunkt zur Bestimmung des modifizierten Startwertes bezüglich m . Für die nachfolgenden Ausführungen sei vorerst angenommen, daß m_{opt}^{SZ} kein ganzzahliger Wert ist (vgl. Abbildung 7). Im Unterschied zu ALGORITHMUS I tritt jetzt der Fall auf, daß die korrespondierende Ausprägung $\lfloor m_{opt}^{SZ} \rfloor$ entweder kleiner oder größer als die zu bestimmende optimale Transporthäufigkeit sein kann. Damit ist neben der Festsetzung des noch zu spezifizierenden Startwertes für m ebenfalls zu entscheiden, ob von diesem Wert ausgehend, die Lösungssuche in Richtung kleinerer oder größerer Ausprägungen der Transporthäufigkeit fortzusetzen ist.

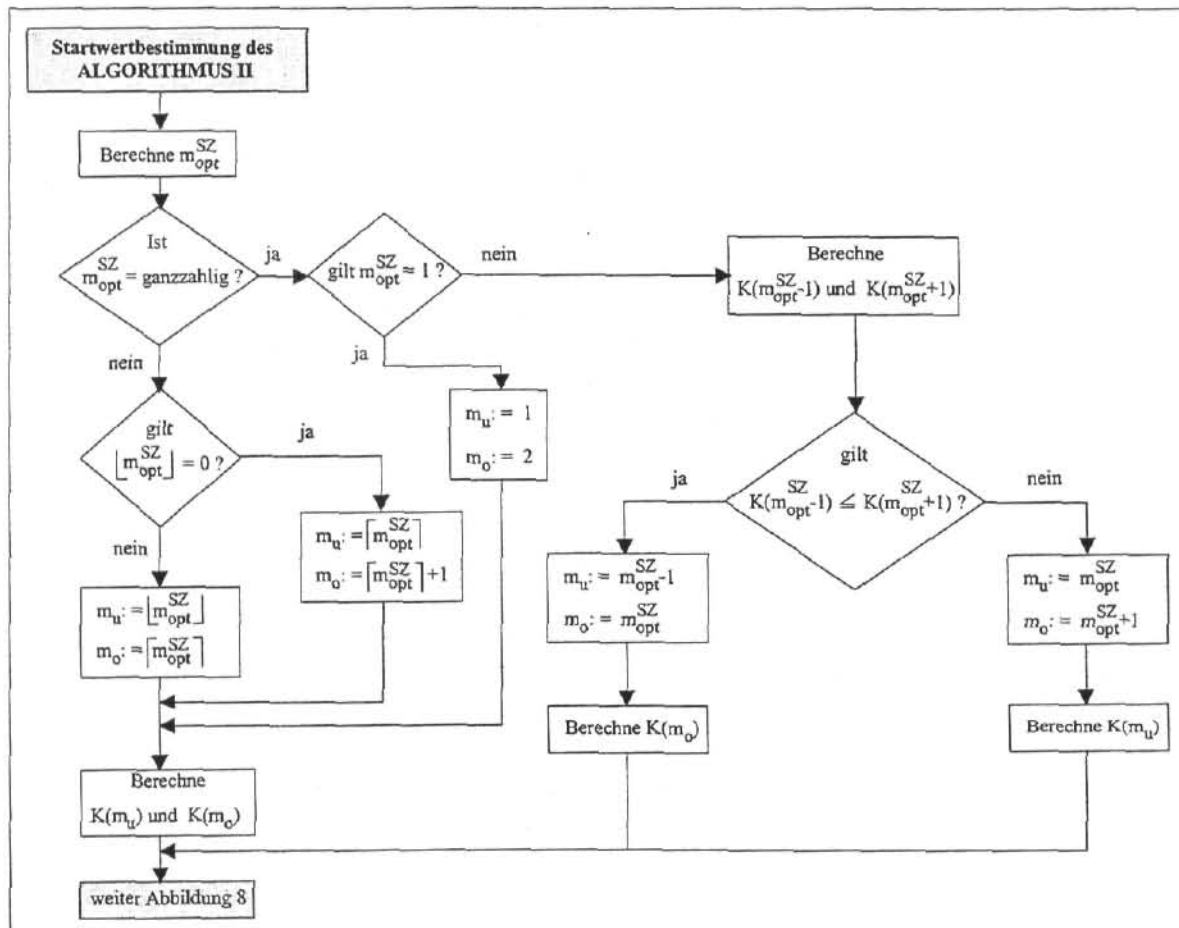


Abbildung 7: Startwertbestimmung des Algorithmus II

Um die aufgeworfenen Fragestellungen zu beantworten, sind die beiden ganzzahligen Transporthäufigkeiten $\lfloor m_{opt}^{SZ} \rfloor$ und $\lceil m_{opt}^{SZ} \rceil$ einem Kostenvergleich unter Nutzung der kontinuierlichen Kostenfunktion $K(m)$ (vgl. G 3-13) zu unterziehen. Hierbei repräsentiert die kostengünstigere Transportanzahl den gesuchten Anfangswert hinsichtlich m . Bildet $\lfloor m_{opt}^{SZ} \rfloor$ bzw. $\lceil m_{opt}^{SZ} \rceil$ den relevanten Wert ab, dann ist in Richtung kleinerer bzw. größerer Ausprägungen der Transporthäufigkeit nach möglichen kostenverbessernden Lösungen zu suchen. Der Abbildung 8 kann ent-

nommen werden, daß auch für diesen Ansatz gilt, daß nach der Berechnung des Startwertes für m unabhängig von der konkreten Suchrichtung in strukturell vergleichbarer Weise die Optimierungsprozedur von GOYAL zur Gewinnung der Optimallösung Anwendung findet. Der konvexe Verlauf der Funktion $K(m)$ bezüglich m stellt dabei wiederum die Optimalität einer auf diese Art und Weise ermittelten Planungslösung sicher.

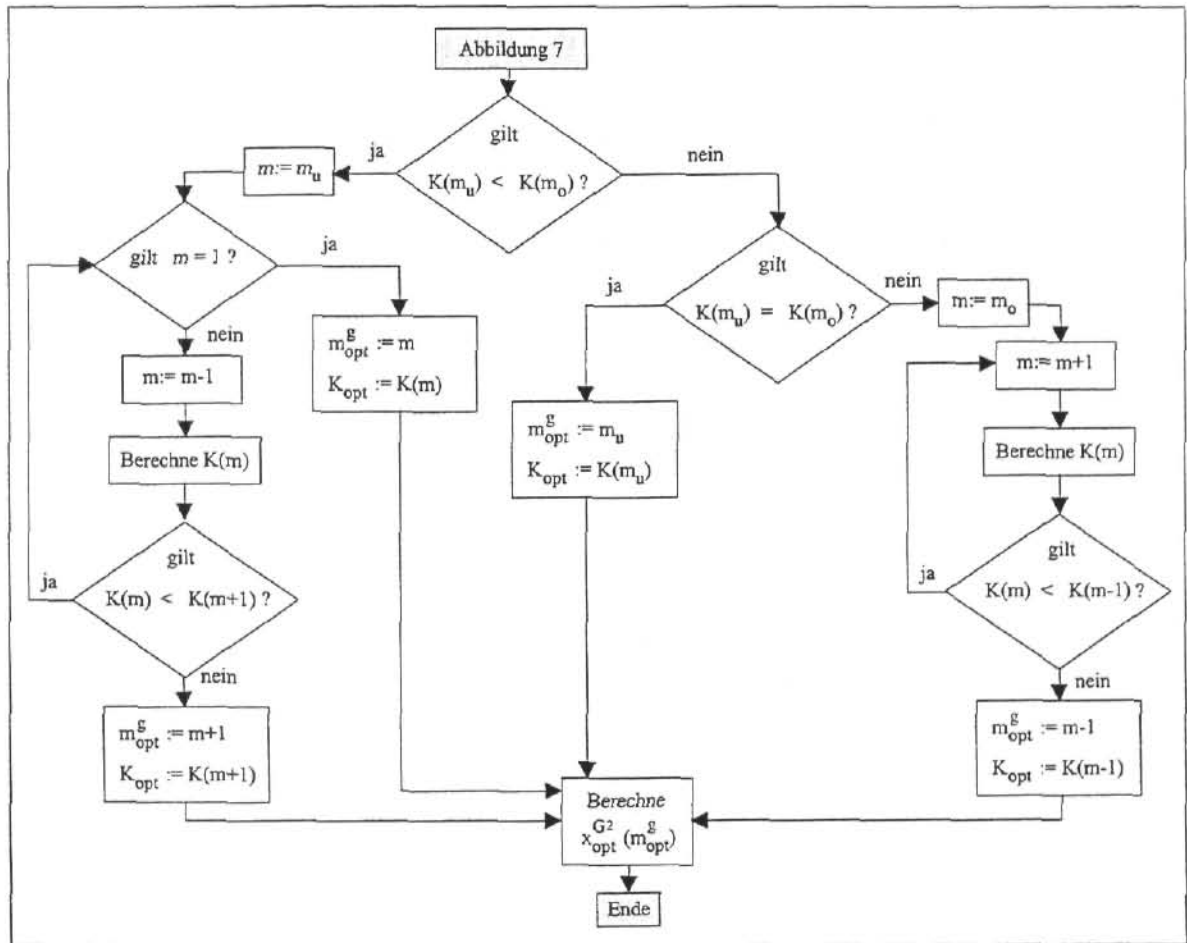


Abbildung 8: Optimierungsprozedur des Algorithmus II

Falls im Gegensatz zu den bisherigen Ausführungen bei dem Kostenvergleich von $\lfloor m_{\text{opt}}^{\text{SZ}} \rfloor$ und $\lceil m_{\text{opt}}^{\text{SZ}} \rceil$ eine Kostenidentität konstatiert wird, so ist es unter Optimierungsgesichtspunkten unerheblich, welche der beiden ganzzahligen Transporthäufigkeiten Verwendung findet. In diesem Fall können weiterführende Berechnungen entfallen, da der beschriebene Sachverhalt nur Relevanz besitzt, wenn $\lfloor m_{\text{opt}}^{\text{SZ}} \rfloor$ und $\lceil m_{\text{opt}}^{\text{SZ}} \rceil$ die beiden dem globalen Optimum der Transporthäufigkeit dieses Modellansatzes direkt benachbarten ganzzahligen Ausprägungen repräsentieren. Aufgrund der bereits angesprochenen Kovexitätseigenschaft der Funktion $K(m)$ bezüglich m ist garantiert, daß keine kostengünstigeren Lösungen existieren können.

Oft wird $m_{\text{opt}}^{\text{SZ}}$ eine nicht ganzzahlige Ausprägung sein. Tritt jedoch ein ganzzahliger Wert für $m_{\text{opt}}^{\text{SZ}}$ bei einer speziellen Parameterkonstellation auf, dann ist die Lösungsfindung um die in der Abbildung 7 angegebenen zusätzlichen Rechenschritte zu ergänzen.

Anhand einer Vielzahl von getesteten Rechenbeispielen konnte festgestellt werden, daß die Startwerte der Transporthäufigkeit m im allgemeinen bei ALGORITHMUS I und ALGORITHMUS II nur geringfügige Abweichungen aufweisen und somit der zur Lösungsfindung erforderliche Aufwand beider Verfahren annähernd gleich ist. Allerdings kann in bezug auf ALGORITHMUS II bei einer ungünstigen Parameterlage der Fall eintreten, daß zur Ermittlung der Optimallösung eine erheblich größere Anzahl von Iterationen benötigt wird, als mit GOYAL's Optimierungsansatz. Abschließend ist damit zu konstatieren, daß sich die beiden modifizierten Algorithmen insbesondere dann als besonders leistungsfähig erweisen, wenn im Optimum Fertigungslose mit einer großen Anzahl von Transporten zum Absatz befördert werden.

3.3 Veranschaulichung durch ein Zahlenbeispiel

Das Ziel dieses Abschnittes besteht darin, die im Arbeitsbericht vorgestellten Ansätze der simultanen Fertigungs- und Transportlosgrößenplanung anhand eines numerischen Beispiels zu illustrieren. Für eine im Rahmen einer Serienfertigung herzustellende Produktart gelten die folgenden Parameterwerte:

$x_{p,1}$	$x_{p,2}$	$c_{L,1}$	$k_{R,1}$	$k_{T,1}$
120	90	0,3	200	10

Tabelle 1: Parameterwerte des Zahlenbeispiels

In dem 150 ZE umfassenden Planungszeitraum ist ein Bedarf von $B = x_{p,2} \cdot T = 90 \cdot 150 = 13.500$ Mengeneinheiten der Produktart zu befriedigen.

Optimale Losgrößenpolitik im Falle identischer Transportlose:

Im Falle identischer Transportlose erfordert die Lösungsfindung zunächst die Berechnung des globalen Optimums der Transporthäufigkeit (vgl. G 3-9):

$$m_{\text{opt}}^{\text{SZ}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 200}{\left(\frac{120}{90} - 1\right) \cdot 10}} = \underline{\underline{10,95}}$$

Die Transporthäufigkeiten $m = 10$ und $m = 11$ sind die dem ermittelten reellen Wert direkt benachbarten ganzzahligen Ausprägungen. Beide Alternativen sind jetzt be-

zätzlich der entscheidungsrelevanten Kosten nach Gleichung G 3-10 zu vergleichen. Es ergibt sich:

$$K(m=10) = 2 \cdot 13.500 \cdot \sqrt{(200 + 10 \cdot 10) \cdot \left[\frac{0,3}{120 \cdot 10} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{90} - \frac{1}{120} \right) \cdot 0,3 \right]} = \underline{\underline{12.074,77}}$$

$$K(m=11) = 2 \cdot 13.500 \cdot \sqrt{(200 + 10 \cdot 11) \cdot \left[\frac{0,3}{120 \cdot 11} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{90} - \frac{1}{120} \right) \cdot 0,3 \right]} = \underline{\underline{12.063,33}}$$

Für die optimale Transporthäufigkeit von $m = 11$ kann mit Hilfe von G 3-2 die kostenminimierende Fertigungslosgröße bestimmt werden:

$$x_{\text{opt}}^{\text{SZ}}(m=11) = \sqrt{\frac{200 + 10 \cdot 11}{\frac{0,3}{120 \cdot 11} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{90} - \frac{1}{120} \right) \cdot 0,3}} = \underline{\underline{693,84}}$$

Als optimale (nicht ganzzahlige) Transportlosgröße ergibt sich (vgl. G 3-3):

$$q = \frac{693,84}{11} = \underline{\underline{63,08}}$$

Optimale Losgrößenpolitik im Falle unterschiedlicher Transportlose:

Erfolgt die Weitergabe eines Fertigungsloses durch Transportlosgrößen, die sich entsprechend einer geometrischen Reihe entwickeln, so sieht der auf GOYAL basierende iterative Lösungsansatz vor, die entscheidungsrelevanten Kosten beginnend mit $m = 1$ zu bestimmen. Die Kostenentwicklung in Abhängigkeit der Transporthäufigkeit gibt Tabelle 2 wieder:

m	K(m)
1	21.130,84
2	15.448,65
3	13.108,16
4	11.848,40
5	11.099,18
6	10.638,29
7	10.357,61
8	10.196,75
9	10.118,76
10	10.099,53
11	10.122,61

Tabelle 2: GOYALS Optimierungsrechnung für das Zahlenbeispiel

Da für $m = 11$ erstmals ein Kostenanstieg gegenüber dem nächstkleineren Wert konstatiert werden kann, erfüllt die Transporthäufigkeit $m = 10$ die definierte Optimali-

tätsbedingung G 3-14. Exemplarisch werden für die optimale Transporthäufigkeit von $m = 10$ die entscheidungsrelevanten Kosten gemäß Gleichung G 3-13 berechnet:

$$K(m=10) = 2 \cdot 13500 \cdot (200 + 10 \cdot 10) \cdot \left[0,3 \cdot \frac{\left(\frac{120}{90} - 1 \right)}{\left(\left(\frac{120}{90} \right)^{10} - 1 \right)} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{90} - \frac{1}{120} \right) \cdot 0,3 \right] = \underline{\underline{10.099,53}}$$

Für $m = 10$ resultiert aus Gleichung G 3-12 eine kostenminimierende Fertigungslosgröße von:

$$x_{\text{opt}}^{G_2}(m=10) = \frac{200 + 10 \cdot 10}{\left[0,3 \cdot \frac{\left(\frac{120}{90} - 1 \right)}{\left(\left(\frac{120}{90} \right)^{10} - 1 \right)} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{90} - \frac{1}{120} \right) \cdot 0,3 \right]} = \underline{\underline{802,02}}$$

Zur Ermittlung der einzelnen Transportlosgrößen ist es notwendig, die Ausprägung des ersten Transportloses aus Gleichung G 2-19.1 abzuleiten.

$$q_1 = 802,02 \cdot \frac{\frac{120}{90} - 1}{\left(\frac{120}{90} \right)^{10} - 1} = \underline{\underline{15,95}}$$

Aufbauend auf diesen Wert können die weiteren neun Transportlose unter Nutzung der Gleichung G 2-19 bestimmt werden, indem bis zum zehnten Transportlos die Ausprägung des jeweils nächstkleineren Transportloses mit dem Quotienten $x_{p,1}/x_{p,2} = 120/90$ multipliziert wird. Tabelle 3 verdeutlicht die konkrete Aufteilung des gesamten Fertigungsloses auf die zehn Transportvorgänge.

Ein Kostenvergleich beider vorgestellter Ansätze zeigt für das Zahlenbeispiel, daß durch die Weiterleitung unterschiedlicher Transportlose eine Kostenersparnis in Höhe von

$$\frac{12.063,33 - 10.099,53}{12.063,33} \cdot 100 = 16,28\%$$

gegenüber der Weitergabe gleich großer Transportlose realisiert werden kann. In einer rein mathematischen Sichtweise ist festzustellen, daß die Berücksichtigung sich unterscheidender Transportlose in der Regel geringere entscheidungsrelevante Kosten verursacht, als dies für identische Transportlose der Fall ist. Die Ausnahme bildet eine Situation, in der die Parameterwerte nicht mehr als einen Transport zwischen den Stufen zulassen.³⁵ Es ist allerdings darauf hinzuweisen, daß das im Rahmen einer konkreten Planungssituation tatsächlich erreichbare Kostensenkungspotential parameterabhängig ist und somit nur unter Kenntnis der spezifischen Daten des analysierten Fertigungssystems beurteilt werden kann.

i	q _i
1	15,95
2	21,27
3	28,36
4	37,82
5	50,42
6	67,23
7	89,64
8	119,51
9	159,35
10	212,47

Tabelle 3: Transportlosgrößenentwicklung für das Zahlenbeispiel

Abschließend soll jetzt geprüft werden, wieviel Iterationsschritte die *modifizierten Lösungsansätze* benötigen, um die ganzzahlige Optimallösung unter Berücksichtigung ungleicher Transportlose zu bestimmen.

ALGORITHMUS I:

Zur Ermittlung des Startwertes ist die optimale reellwertige Transporthäufigkeit für x_{opt}^0 heranzuziehen (vgl. G 3-21):

$$m_{\text{opt}}^G(x_{\text{opt}}^0) = \frac{\ln \left[\sqrt{\left(\frac{200 \cdot \ln\left(\frac{120}{90}\right)}{10} + 1 \right)^2} - 1 + \frac{200 \cdot \ln\left(\frac{120}{90}\right)}{10} + 1 \right]}{\ln\left(\frac{120}{90}\right)} = \underline{\underline{9,03}}$$

³⁵ Vgl. Goyal, Optimum Production Quantity, 1977, S. 869 f.

Als Startwert der Lösungssuche ergibt sich:

$$m = \lfloor 9,03 \rfloor = \underline{\underline{9}}$$

Das Ergebnis zeigt für das gewählte Zahlenbeispiel, daß der ALGORITHMUS I nach der Startwertberechnung in der Lage ist, die optimale Planungslösung mit nur drei Iterationen zu gewinnen. Im Gegensatz zu der von GOYAL vorgeschlagenen Optimierungsprozedur können somit acht Iterationen eingespart werden.

ALGORITHMUS II:

Für dieses Verfahren bildet das globale Optimum der Transporthäufigkeit bei Weitergabe identischer Transportlose die Basis zur Bestimmung des Startwertes. Der entsprechende Wert lautete: $m_{\text{opt}}^{\text{SZ}} = \underline{\underline{10,95}}$.

Damit sind die beiden ganzzahligen Transporthäufigkeiten $m = 10$ und $m = 11$ einem Kostenvergleich anhand der Funktion $K(m)$ nach Gleichung G 3-13 zu unterziehen. Der Tabelle 2 kann entnommen werden, daß gilt: $K(10) < K(11)$. Demzufolge repräsentiert $m = 10$ den Startwert und die Lösungssuche ist in Richtung kleinerer Ausprägungen der Transporthäufigkeit fortzusetzen.

4 Zusammenfassung

Die explizite Einbeziehung von Transportvorgängen bei der Planung der Fertigungslosgröße ermöglicht logistische Problemstellungen mit solchen der Produktionsplanung zu verbinden. Für ein einstufiges Fertigungssystem wurden zwei Gestaltungsvarianten für die Transportlosgrößenbildung vorgestellt. Während die erste Alternative die Weitergabe von identischen Transportlosen vorsieht, werden im Rahmen der zweiten Alternative unterschiedliche Transportlose weitergeleitet. Es kann gezeigt werden, daß sich die jeweiligen Funktionen der entscheidungsrelevanten Kosten – trotz der verschiedenartigen Losbildung beider Ansätze – weitgehend ähneln.

Optimale Losgrößenpolitiken lassen sich im Falle identischer Losbildung vergleichsweise einfach ermitteln, weil explizite Bestimmungsgleichungen des globalen Optimums existieren. Da letztere im Falle unterschiedlicher Transportlose nicht ohne weiteres bestimmt werden können, erweist sich die Suche nach der Optimallösung als aufwendiger. Für ein aus der Literatur entlehntes iteratives Optimierungsverfahren wurden zwei zusätzliche Module entwickelt, die in der überwiegenden Zahl der Fälle die Lösungsfindung wesentlich beschleunigen. Der Veranschaulichung dient eine bestimmte Planungssituation, für die unter Rückgriff sämtlicher vorgestellter Ansätze eine optimale Losgrößenpolitik ermittelt wird.

Die präsentierten Modelle zur Bestimmung der optimalen Fertigungslosgröße können bei der Bewältigung realer Planungsprobleme hilfreich sein. Jedoch darf nicht übersehen werden, daß durch die Modellannahmen die tatsächliche Komplexität reduziert wurde. Einerseits bieten sämtliche Modellprämissen Anlaß zu Kritik, weil sie die reale Planungssituation vereinfachen. Andererseits kann die Diskussion der Modellprämissen auch Anstöße liefern, letztere in modifizierten Modellierungen weniger eng zu formulieren. Folgende nur stichpunktartig aufgelisteten Erweiterungsmöglichkeiten bieten sich an:

- Berücksichtigung der zeitlichen Dynamik der Planungsparameter
- Einbeziehung von Kapazitätsbeschränkungen hinsichtlich der Fertigungs- und Transportkapazität³⁶

³⁶ Zur Berücksichtigung beschränkter Transportkapazitäten vgl. Szendrovits, Comment, 1978, Goyal, Alternative Approach, 1978, Goyal/Szendrovits, Lot Size Model, 1986.

- Explizite Betrachtung weiterer Produktarten sowie der daraus resultierenden Interdependenzen zwischen den Produkten bspw. hinsichtlich des Lossequenzproblems³⁷
- Berücksichtigung von Rüst- und Transportzeiten³⁸
- Zulässigkeit mehrstufiger und vernetzter Fertigungssysteme³⁹

Trotz dieser Vielzahl von Erweiterungsmöglichkeiten läßt sich festhalten, daß durch die explizite Berücksichtigung von Transportvorgängen die deterministischen Lagerhaltungsmodelle ein wenig an Realitätsnähe gewinnen. Mit Hilfe der vorgestellten Modelle gelingt es, die Interdependenzen zwischen logistischen und produktionsplanungsbezogenen Problemstellungen zu erfassen.

37 Vgl. zu dieser Problematik Szendrovits/Truscott, *Manufacturing Cycle Time*, 1989.

38 Vgl. hierzu Truscott, *Scheduling Production*, 1985 und Truscott, *Capacity-Constrained Transportation Activities*, 1986.

39 Vgl. Szendrovits, *Manufacturing Cycle Time*, 1975, Szendrovits, *Rejoinder*, 1976, Szendrovits/Wesolowsky, *Variations in Optimizing*, 1979, Szendrovits/Drezner, *Multi-Stage Production*, 1980, Bogaschewsky, *Planung*, 1998, Bogaschewsky/Buscher, *Transportlosgrößenplanung*, 1999.

Anhang A

Bestimmung der zeitgewichteten Lagerhaltung

Im Rahmen dieses Abschnittes erfolgt die explizite Herleitung der Bestimmungsgleichung für die zeitgewichtete Lagerhaltung. Dabei werden zunächst die in Abschnitt 2.1 ermittelten Flächen ausmultipliziert und anschließend unter Zusammenfassung gleichartiger Ausdrücke zur Bestimmung der angesprochenen Gleichung herangezogen.

$$A_1 = \left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s+1}} \right) \cdot \left[\left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s+1}} \right) \cdot x_{p,s} \right] \cdot \frac{1}{2} \quad G 2-1$$

$$\begin{aligned} &= \left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s+1}} \right) \cdot \left(t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{2} - \frac{x}{2} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right) \\ &= t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s}}{2} - \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} - \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s}}{(x_{p,s+1})^2} \end{aligned}$$

$$A_1 = t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s}}{2} - x \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s}}{(x_{p,s+1})^2} \quad AA-1$$

$$A_{21} = \left(\frac{x}{x_{p,s}} + \frac{x}{x_{p,s+1}} - t_{DLZ} \right) \cdot \left[\left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s+1}} \right) \cdot x_{p,s} \right] \quad G 2-2$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{x}{x_{p,s}} + \frac{x}{x_{p,s+1}} - t_{DLZ} \right) \cdot \left(t_{DLZ} \cdot x_{p,s} - x \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right) \\ &= x \cdot t_{DLZ} + x \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} - t_{DLZ}^2 \cdot x_{p,s} - \frac{x^2}{x_{p,s+1}} - x^2 \cdot \frac{x_{p,s}}{(x_{p,s+1})^2} + x \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \end{aligned}$$

$$A_{21} = x \cdot t_{DLZ} + 2 \cdot x \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} - t_{DLZ}^2 \cdot x_{p,s} - \frac{x^2}{x_{p,s+1}} - x^2 \cdot \frac{x_{p,s}}{(x_{p,s+1})^2} \quad AA-2$$

$$A_{22} = \left(\frac{x}{x_{p,s}} + \frac{x}{x_{p,s+1}} - t_{DLZ} \right) \cdot \left[\left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s}} \right) \cdot x_{p,s+1} - \left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s+1}} \right) \cdot x_{p,s} \right] \cdot \frac{1}{2} \quad G 2-3$$

$$\begin{aligned}
A_{22} &= \left(\frac{x}{x_{p,s}} + \frac{x}{x_{p,s+1}} - t_{DLZ} \right) \cdot \left[\left(t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{2} - \frac{x}{2} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} \right) - \left(t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{2} - \frac{x}{2} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right) \right] \\
&= \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} + \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} - t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s+1}}{2} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{(x_{p,s})^2} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x_{p,s}} + \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} - \\
&\quad - \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} - \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} + t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s}}{2} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x_{p,s+1}} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s}}{(x_{p,s+1})^2} - \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \\
A_{22} &= x \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} - t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s+1}}{2} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{(x_{p,s})^2} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x_{p,s}} - x \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} + \\
&\quad + t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s}}{2} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x_{p,s+1}} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s}}{(x_{p,s+1})^2} \tag{AA-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= \left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s}} \right) \cdot \left[\left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s}} \right) \cdot x_{p,s+1} \right] \cdot \frac{1}{2} \tag{G 2-4} \\
&= \left(t_{DLZ} - \frac{x}{x_{p,s}} \right) \cdot \left(t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{2} - \frac{x}{2} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} \right) \\
&= t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s+1}}{2} - \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} - \frac{x}{2} \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{(x_{p,s})^2}
\end{aligned}$$

$$A_3 = t_{DLZ}^2 \cdot \frac{x_{p,s+1}}{2} - x \cdot t_{DLZ} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{(x_{p,s})^2} \tag{AA-4}$$

Die zeitgewichtete Lagerhaltung erhält man durch Addition der vier angegebenen Flächen. Folglich gilt:

$$TPI^{SZ} = A_1 + A_{21} + A_{22} + A_3 \tag{G 2-5}$$

Werden jetzt die errechneten Werte der Flächen (AA-1 bis AA-4) in G 2-5 eingesetzt und die einzelnen Ausdrücke derart geordnet, daß alle in runden Klammern zusammengefaßten Terme sich zu null ergeben, so resultiert daraus:

$$\begin{aligned}
\text{TPI}^{\text{SZ}} = & \left(t_{\text{DLZ}}^2 \cdot \frac{x_{p,s}}{2} - t_{\text{DLZ}}^2 \cdot x_{p,s} + t_{\text{DLZ}}^2 \cdot \frac{x_{p,s}}{2} \right) + \\
& + \left(-x \cdot t_{\text{DLZ}} \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} + 2 \cdot x \cdot t_{\text{DLZ}} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} - x \cdot t_{\text{DLZ}} \cdot \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right) + \\
& + \left(\frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s}}{(x_{p,s+1})^2} - x^2 \cdot \frac{x_{p,s}}{(x_{p,s+1})^2} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s}}{(x_{p,s+1})^2} \right) + \\
& + \left(-t_{\text{DLZ}}^2 \cdot \frac{x_{p,s+1}}{2} + t_{\text{DLZ}}^2 \cdot \frac{x_{p,s+1}}{2} \right) + \left(x \cdot t_{\text{DLZ}} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} - x \cdot t_{\text{DLZ}} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{x_{p,s}} \right) + \\
& + \left(-\frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{(x_{p,s})^2} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x_{p,s+1}}{(x_{p,s})^2} \right) + x \cdot t_{\text{DLZ}} - x^2 \cdot \frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x_{p,s}} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x_{p,s+1}}
\end{aligned}$$

Aus den verbleibenden Termen folgt als Gleichung der zeitgewichteten Lagerhaltung:

$$\text{TPI}^{\text{SZ}} = x \cdot t_{\text{DLZ}} - \frac{x^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s}} + \frac{1}{x_{p,s+1}} \right) \quad \text{G 2-5.1}$$

Anhang B

Ableitung der modifizierten Kostenfunktion bei Berücksichtigung unterschiedlicher Transportlose

Das Ziel dieses Anhanges besteht darin, die Identität der Gleichungen G 2-27 und G 2-28 zu zeigen.¹ Beide Kostenfunktionen berücksichtigen in identischer Art und Weise die im Planungszeitraum relevanten Rüst- und Transportkosten. Somit ist es ausreichend, im folgenden die Lagerhaltungskosten zu betrachten. Bei diesen wiederum kann sich die Ableitung auf die Analyse der Lagerhaltung pro Fertigungslos beschränken:²

$$TPI^G = \frac{q_1^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s}} + \frac{1}{x_{p,s+1}} \right) \cdot \frac{\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right)^{2m} - 1}{\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right)^2 - 1} \quad \text{BB-1}$$

Das erste Transportlos errechnet sich aus:

$$q_1 = x \cdot \frac{\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right)^{-1}}{\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right)^m - 1} \quad \text{G 2-19.1}$$

Für das weitere Vorgehen ist diese Gleichung zunächst, wie nachfolgend angegeben, umzuformen. Nach Erweiterung der rechten Seite von G 2-19.1 mit $(1/x_{p,s})^m$ ergibt sich:

$$q_1 = x \cdot \frac{\frac{1}{x_{p,s+1}} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s}} \right)^{m-1} - \left(\frac{1}{x_{p,s}} \right)^m}{\left(\frac{1}{x_{p,s+1}} \right)^m - \left(\frac{1}{x_{p,s}} \right)^m}$$

¹ Die folgenden Berechnungen basieren auf einer Herleitung von GOYAL. Vgl. hierzu Goyal, Optimum Production Quantity, 1977, S. 866 ff.

² Im Vergleich zu den in G 2-25.1 angegebenen losweisen Lagerhaltungskosten erfolgt bei der losweisen Lagerhaltung TPI^G keine Multiplikation mit $c_{L,s}$.

$$q_1 = x \cdot \frac{\left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}}\right) \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s}}\right)^{m-1}}{\left(\frac{1}{x_{p,s+1}}\right)^m - \left(\frac{1}{x_{p,s}}\right)^m} \quad \text{BB-2}$$

Für die sich anschließenden Rechenschritte ist jetzt q_1 in Gleichung BB-1 durch obigen Ausdruck zu ersetzen. Um die Nachvollziehbarkeit der folgenden Umformungen zu erhöhen, sind Nebenrechnungen explizit angegeben. Dabei werden die für Nebenrechnungen verwendeten Ausdrücke vor der entsprechenden Berechnung in geschweifte Klammern gefaßt. Sich nach dem Wiedereinsetzen der veränderten Terme herauskürzende Glieder sind mit zwei Querbalken über den konkreten Ausdrücken gekennzeichnet. Um die Herleitung weiter übersichtlicher zu gestalten, werden nachstehende Vereinfachungen verwendet:

$$\alpha = \frac{1}{x_{p,s+1}} \quad \beta = \frac{1}{x_{p,s}}$$

Setzt man BB-2 in BB-1 unter Nutzung der Vereinfachungen ein, so ergibt sich:

$$\text{TPI}^G = x^2 \cdot \frac{(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta)^2 \cdot (\beta)^{2m-2}}{2 \cdot [(\alpha)^m - (\beta)^m]^2} \cdot \frac{\left\{ \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2m} - 1 \right\}}{\left\{ \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 1 \right\}}$$

Nebenrechnung:

$$\frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2m} - 1}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 1} = \frac{(\beta)^{2m} \cdot \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2m} - 1\right]}{(\beta)^{2m} \cdot \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 1\right]} = \frac{(\alpha)^{2m} - (\beta)^{2m}}{(\alpha)^2 \cdot (\beta)^{2m-2} - (\beta)^{2m}} = \frac{(\alpha)^{2m} - (\beta)^{2m}}{(\beta)^{2m-2} \cdot [(\alpha)^2 - (\beta)^2]}$$

$$\text{TPI}^G = x^2 \cdot \frac{(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta)^2 \cdot (\beta)^{2m-2}}{2 \cdot [(\alpha)^m - (\beta)^m]^2} \cdot \frac{(\alpha)^{2m} - (\beta)^{2m}}{(\beta)^{2m-2} \cdot [(\alpha)^2 - (\beta)^2]}$$

$$\text{TPI}^G = x^2 \cdot \frac{\left\{ (\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta)^2 \right\}}{2 \cdot [(\alpha)^m - (\beta)^m]^2} \cdot \frac{(\alpha)^{2m} - (\beta)^{2m}}{[(\alpha)^2 - (\beta)^2]}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta)^2 &= \beta \cdot (\alpha)^2 - 2 \cdot \beta \cdot (\alpha)^2 + (\beta)^2 \cdot \alpha - 2 \cdot (\beta)^2 \cdot \alpha + (\alpha)^3 + (\beta)^3 \\ &= (\alpha)^3 + (\beta)^3 - \beta \cdot (\alpha)^2 - (\beta)^2 \cdot \alpha = (\alpha - \beta) \cdot [(\alpha)^2 - (\beta)^2]\end{aligned}$$

$$\text{TPI}^G = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{(\alpha - \beta) \cdot [(\alpha)^2 - (\beta)^2]}{[(\alpha)^m - (\beta)^m]^2} \cdot \frac{(\alpha)^{2m} - (\beta)^{2m}}{[(\alpha)^2 - (\beta)^2]} = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{(\alpha - \beta) \cdot \{[(\alpha)^{2m} - (\beta)^{2m}]\}}{[(\alpha)^m - (\beta)^m]^2}$$

Nebenrechnung:

$$(\alpha)^{2m} - (\beta)^{2m} = [(\alpha)^m + (\beta)^m] \cdot [(\alpha)^m - (\beta)^m]$$

$$\text{TPI}^G = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{(\alpha - \beta) \cdot [(\alpha)^m - (\beta)^m]}{[(\alpha)^m - (\beta)^m]} \cdot \frac{[(\alpha)^m + (\beta)^m]}{[(\alpha)^m - (\beta)^m]} = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{(\alpha - \beta) \cdot \{[(\alpha)^m + (\beta)^m]\}}{[(\alpha)^m - (\beta)^m]}$$

Nebenrechnung:

$$[(\alpha)^m + (\beta)^m] = [(\alpha)^m - (\beta)^m + 2 \cdot (\beta)^m]$$

$$\text{TPI}^G = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{(\alpha - \beta) \cdot \left[\frac{\text{Ausdruck 1}}{(\alpha)^m - (\beta)^m} + \frac{\text{Ausdruck 2}}{2 \cdot (\beta)^m} \right]}{[(\alpha)^m - (\beta)^m]}$$

Durch die separate Multiplikation von Ausdruck 1 und Ausdruck 2 mit dem verbleibenden Rest des Bruches kann diese Gleichung in die folgenden zwei Brüche aufgeteilt werden.

$$\text{TPI}^G = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{(\alpha - \beta) \cdot [(\alpha)^m - (\beta)^m]}{[(\alpha)^m - (\beta)^m]} + \frac{x^2 \cdot 2 \cdot (\beta)^m \cdot (\alpha - \beta)}{2 \cdot [(\alpha)^m - (\beta)^m]} = x \cdot \beta \cdot \frac{\overbrace{x \cdot (\beta)^{m-1} \cdot (\alpha - \beta)}^{\text{BB-2}}}{[(\alpha)^m - (\beta)^m]} + \frac{x^2}{2} \cdot (\alpha - \beta)$$

Wird BB-2 durch G 2-19.1 ersetzt und die Vereinfachungen zurückgeführt, so resultiert:

$$\text{TPI}^G = \frac{x^2}{x_{p,s}} \cdot \frac{\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}}\right)^m - 1}{\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}}\right)^m - 1} + \frac{x^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}}\right) \quad \text{BB-3}$$

Die Kostenfunktion G 2-28 ergibt sich, indem zum einen BB-3 mit $c_{L,s}$ und B/x multipliziert wird und zum anderen die im Planungszeitraum entscheidungs-relevanten Rüst- und Transportkosten berücksichtigt werden.

Anhang C

Nachweis der Konvexitätseigenschaften

In diesem Anhang erfolgen die Konvexitätsbeweise für die betrachteten Kostenfunktionen. In allgemeiner Form wird eine Funktion $f(y)$ als konvex bezeichnet, wenn für zwei beliebige Punkte y_1 und y_2 sowie für alle λ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ die nachstehende Voraussetzung erfüllt ist:³

$$f(\lambda \cdot y_1 + (1 - \lambda) \cdot y_2) \leq \lambda \cdot f(y_1) + (1 - \lambda) \cdot f(y_2) \quad \text{CC-1}$$

Im Mittelpunkt der Betrachtung stehen zwei verschiedene Gesamtkostenfunktionen. Diese Funktionen weichen jedoch nur im ersten Term der Lagerhaltungskosten voneinander ab, so daß sie zunächst wie folgt zusammengefaßt werden können:⁴

$$K(x, m) = \frac{x \cdot c_{L,s} \cdot LF(m) \cdot B}{x_{p,s}} + \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \cdot c_{L,s} \cdot B + (k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m) \cdot \frac{B}{x} \quad \text{CC-2}$$

mit:

$$LF(m) = \frac{1}{m} \quad \text{bei Berücksichtigung identischer Transportlose}$$

$$LF(m) = \frac{\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right) - 1}{\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right)^m - 1} \quad \text{bei Berücksichtigung unterschiedlicher Transportlose}$$

C 1 Beweis der Konvexität für eine gegebene Transporthäufigkeit

Für den zu erbringenden Nachweis stellt die Transporthäufigkeit einen konstanten Planungsparameter dar. Eine Differenzierung in gleich große bzw. unterschiedliche Transportlosgrößen kann damit entfallen.

Die Konvexitätsbedingung CC-1 erhält für die Kostenfunktion CC-2 die Struktur:

$$K[\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2] \leq \lambda \cdot K(x_1) + (1 - \lambda) \cdot K(x_2) \quad \text{CC-3}$$

Für die Beweisführung sind somit die notwendigen Funktionen zu definieren.

³ Vgl. Hadley, Programmierung, 1969, S. 112.

⁴ Vgl. G 2-10 bzw. G 2-28.

$$K[\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2] = (\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2) \cdot \left[\frac{c_{L,s} \cdot LF(m) \cdot B}{x_{p,s}} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \cdot c_{L,s} \cdot B \right] +$$

$$+ \frac{1}{(\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2)} \cdot (k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m) \cdot B \quad \text{CC-4}$$

$$\lambda \cdot K(x_1) = (\lambda \cdot x_1) \cdot \left[\frac{c_{L,s} \cdot LF(m) \cdot B}{x_{p,s}} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \cdot c_{L,s} \cdot B \right] + \lambda \cdot \frac{1}{x_1} \cdot (k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m) \cdot B$$

CC-5

$$(1-\lambda) \cdot K(x_2) = ((1-\lambda) \cdot x_2) \cdot \left[\frac{c_{L,s} \cdot LF(m) \cdot B}{x_{p,s}} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \cdot c_{L,s} \cdot B \right] +$$

$$+ (1-\lambda) \cdot \frac{1}{x_2} \cdot (k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m) \cdot B \quad \text{CC-6}$$

Einsetzen der Gleichungen CC-4 bis CC-6 in CC-3 und Subtraktion des folgenden Ausdrucks auf beiden Seiten der Ungleichung

$$(\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2) \cdot \left[\frac{c_{L,s} \cdot LF(m) \cdot B}{x_{p,s}} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \cdot c_{L,s} \cdot B \right]$$

führt zu:

$$\frac{1}{(\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2)} \cdot (k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m) \cdot B \leq \left(\lambda \cdot \frac{1}{x_1} + (1-\lambda) \cdot \frac{1}{x_2} \right) \cdot (k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m) \cdot B \quad \text{CC-3.1}$$

Die Division beider Seiten der Ungleichung durch $(k_{R,s} + k_{T,s} \cdot m) \cdot B$ erbringt den nachstehenden Ausdruck, der noch wie aufgezeigt, umzuformen ist:

$$\frac{1}{(\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2)} \leq \lambda \cdot \frac{1}{x_1} + (1-\lambda) \cdot \frac{1}{x_2} \quad | \cdot x_1$$

$$\frac{x_1}{(\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2)} \leq \lambda + (1-\lambda) \cdot \frac{x_1}{x_2} \quad | \cdot x_2$$

$$\frac{x_1 \cdot x_2}{(\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2)} \leq \lambda \cdot x_2 + (1-\lambda) \cdot x_1 \quad | \cdot (\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2)$$

$$x_1 \cdot x_2 \leq \lambda^2 \cdot x_1 \cdot x_2 + \lambda \cdot (1-\lambda) \cdot x_2^2 + \lambda \cdot (1-\lambda) \cdot x_1^2 + (1-\lambda)^2 \cdot x_1 \cdot x_2$$

$$x_1 \cdot x_2 \leq \lambda^2 \cdot x_1 \cdot x_2 + \lambda \cdot (1-\lambda) \cdot x_2^2 + \lambda \cdot (1-\lambda) \cdot x_1^2$$

$$\begin{aligned}
 & + x_1 \cdot x_2 + \lambda^2 \cdot x_1 \cdot x_2 - 2 \cdot \lambda \cdot x_1 \cdot x_2 && \quad | -x_1 \cdot x_2 \\
 0 & \leq \lambda \cdot (1 - \lambda) \cdot (x_1^2 + x_2^2) + 2 \cdot \lambda^2 \cdot x_1 \cdot x_2 - 2 \cdot \lambda \cdot x_1 \cdot x_2 \\
 0 & \leq \lambda \cdot (1 - \lambda) \cdot (x_1^2 + x_2^2) + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (\lambda^2 - \lambda) \\
 0 & \leq \lambda \cdot (1 - \lambda) \cdot (x_1^2 + x_2^2) - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (\lambda - \lambda^2) \\
 0 & \leq \lambda \cdot (1 - \lambda) \cdot (x_1^2 + x_2^2) - \lambda \cdot (1 - \lambda) \cdot 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \\
 0 & \leq \lambda \cdot (1 - \lambda) \cdot (x_1 - x_2)^2 && \quad \text{CC-3.2}
 \end{aligned}$$

Die Ungleichung CC-3.2 ist für $0 \leq \lambda \leq 1$ stets erfüllt. Die analysierte Kostenfunktion CC-2 weist damit für einen gegebenen Wert der Transporthäufigkeit einen konvexen Verlauf bezüglich x auf.

C 2 Beweis der Konvexität für eine gegebene Fertigungslosgröße bei Berücksichtigung identischer Transportlose

Für den Beweis ist aus der Gesamtkostenfunktion CC-2 die Teilfunktion

$$T(m) = \frac{x \cdot c_{L,s} \cdot B}{x_{p,s} \cdot m} + k_{T,s} \cdot m \cdot \frac{B}{x} \quad \text{CC-7}$$

zu untersuchen.⁵ Für Sie bekommt Konvexitätsbedingung CC-1 die Struktur:

$$T[\lambda \cdot m_1 + (1 - \lambda) \cdot m_2] \leq \lambda \cdot T(m_1) + (1 - \lambda) \cdot T(m_2) \quad \text{CC-8}$$

Es sind wiederum die relevanten Funktionen zu entwickeln.

$$T[\lambda \cdot m_1 + (1 - \lambda) \cdot m_2] = \frac{1}{(\lambda \cdot m_1 + (1 - \lambda) \cdot m_2)} \cdot \frac{x \cdot c_{L,s} \cdot B}{x_{p,s}} + (\lambda \cdot m_1 + (1 - \lambda) \cdot m_2) \cdot k_{T,s} \cdot \frac{B}{x} \quad \text{CC-9}$$

$$\lambda \cdot T(m_1) = \lambda \cdot \frac{1}{m_1} \cdot \frac{x \cdot c_{L,s} \cdot B}{x_{p,s}} + \lambda \cdot m_1 \cdot k_{T,s} \cdot \frac{B}{x} \quad \text{CC-10}$$

$$(1 - \lambda) \cdot T(m_2) = (1 - \lambda) \cdot \frac{1}{m_2} \cdot \frac{x \cdot c_{L,s} \cdot B}{x_{p,s}} + (1 - \lambda) \cdot m_2 \cdot k_{T,s} \cdot \frac{B}{x} \quad \text{CC-11}$$

⁵ Für einen gegebenen Wert der Fertigungslosgröße sind in der Ausgangsfunktion CC-2 die weiteren Terme unabhängig von der Transporthäufigkeit. Diese Terme können vernachlässigt werden, weil sie aufgrund der additiven Zusammensetzung der Kostenfunktion keinen Einfluß auf die zu betrachtende Konvexitätseigenschaft besitzen.

Werden nun die Gleichungen CC-9 bis CC-11 in die Ungleichung CC-8 eingesetzt und zusätzlich auf beiden Seiten der Term

$$(\lambda \cdot m_1 + (1 - \lambda) \cdot m_2) \cdot k_{T,s} \cdot \frac{B}{x}$$

subtrahiert, dann verbleibt:

$$\frac{1}{(\lambda \cdot m_1 + (1 - \lambda) \cdot m_2)} \cdot \frac{x \cdot c_{L,s} \cdot B}{x_{p,s}} \leq \left(\lambda \cdot \frac{1}{m_1} + (1 - \lambda) \cdot \frac{1}{m_2} \right) \cdot \frac{x \cdot c_{L,s} \cdot B}{x_{p,s}} \quad \text{CC-8.1}$$

Division beider Seiten von CC-8.1 durch $x \cdot c_{L,s} \cdot B / x_{p,s}$ und Durchführung der im Anschluß an Ungleichung CC-3.1 des vorherigen Beweises ausgewiesenen Umformungsschritte auf den sich ergebenden Ausdruck, führen zu:

$$0 \leq \lambda \cdot (1 - \lambda) \cdot (m_1 - m_2)^2 \quad \text{CC-8.2}$$

Die Beziehung CC-8.2 besitzt für $0 \leq \lambda \leq 1$ Gültigkeit. Somit gilt, daß die betrachtete Funktion für eine gegebene Fertigungslosgröße bezüglich m konvex ist.

C 3 Beweis der Konvexität für eine gegebene Fertigungslosgröße bei Berücksichtigung unterschiedlicher Transportlose

Zum Nachweis der relevanten Konvexitätseigenschaft ist aus der Kostenfunktion CC-2 die Teilfunktion

$$H(m) = \frac{x \cdot c_{L,s} \cdot \left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} - 1 \right) \cdot B}{x_{p,s} \cdot \left(\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right)^m - 1 \right)} + k_{T,s} \cdot m \cdot \frac{B}{x} \quad \text{CC-12}$$

einer Analyse zu unterziehen.⁶ Für CC-12 besitzt die Konvexitätsbedingung CC-1 die Struktur:

$$H[\lambda \cdot m_1 + (1 - \lambda) \cdot m_2] \leq \lambda \cdot H(m_1) + (1 - \lambda) \cdot H(m_2) \quad \text{CC-13}$$

In Analogie zur bisherigen Vorgehensweise sind zunächst die erforderlichen Funktionen abzuleiten.

⁶ Die weiteren in der Gesamtkostenfunktion CC-2 enthaltenen Terme können wiederum vernachlässigt werden.

$$H[\lambda \cdot m_1 + (1-\lambda) \cdot m_2] = \frac{1}{\left(\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right)^{(\lambda \cdot m_1 + (1-\lambda) \cdot m_2)} - 1 \right)} \cdot \frac{x \cdot c_{L,s} \cdot \left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} - 1 \right) \cdot B}{x_{p,s}} + (\lambda \cdot m_1 + (1-\lambda) \cdot m_2) \cdot k_{T,s} \cdot \frac{B}{x} \quad \text{CC-14}$$

$$\lambda \cdot H(m_1) = \lambda \cdot \frac{1}{\left(\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right)^{m_1} - 1 \right)} \cdot \frac{x \cdot c_{L,s} \cdot \left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} - 1 \right) \cdot B}{x_{p,s}} + \lambda \cdot m_1 \cdot k_{T,s} \cdot \frac{B}{x} \quad \text{CC-15}$$

$$(1-\lambda) \cdot H(m_2) = (1-\lambda) \cdot \frac{1}{\left(\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right)^{m_2} - 1 \right)} \cdot \frac{x \cdot c_{L,s} \cdot \left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} - 1 \right) \cdot B}{x_{p,s}} + (1-\lambda) \cdot m_2 \cdot k_{T,s} \cdot \frac{B}{x} \quad \text{CC-16}$$

Einsetzen von CC-14 bis CC-16 in CC-13 sowie die anschließende Subtraktion von

$$(\lambda \cdot m_1 + (1-\lambda) \cdot m_2) \cdot k_{T,s} \cdot \frac{B}{x}$$

führt zu:

$$\frac{1}{\left(\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right)^{(\lambda \cdot m_1 + (1-\lambda) \cdot m_2)} - 1 \right)} \cdot \frac{x \cdot c_{L,s} \cdot \left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} - 1 \right) \cdot B}{x_{p,s}} \leq \left[\lambda \cdot \frac{1}{\left(\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right)^{m_1} - 1 \right)} + (1-\lambda) \cdot \frac{1}{\left(\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} \right)^{m_2} - 1 \right)} \right] \cdot \frac{x \cdot c_{L,s} \cdot \left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} - 1 \right) \cdot B}{x_{p,s}}$$

CC-13.1

Erfolgt weiterhin die Division beider Seiten von CC-13.1 durch den auf jeder Seite zweiten Term, dann ergibt sich:

$$\frac{1}{\left(\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}}\right)^{(\lambda \cdot m_1 + (1-\lambda) \cdot m_2)} - 1\right)} \leq \frac{\lambda}{\left(\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}}\right)^{m_1} - 1\right)} + \frac{(1-\lambda)}{\left(\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}}\right)^{m_2} - 1\right)} \quad \text{CC-13.2}$$

Die Gültigkeit von CC-13.2 wird im folgenden mit Hilfe einer graphischen Analyse nachgewiesen.

Die einzelnen Terme von CC-13.2 basieren auf der Funktion:

$$f(m) = \frac{1}{\left(\left(\frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}}\right)^m - 1\right)} \quad \text{mit } m > 0 \text{ und } \frac{x_{p,s}}{x_{p,s+1}} > 1.$$

Allgemeingültig kann das Bild dieser Funktion durch Abbildung 9 veranschaulicht werden.

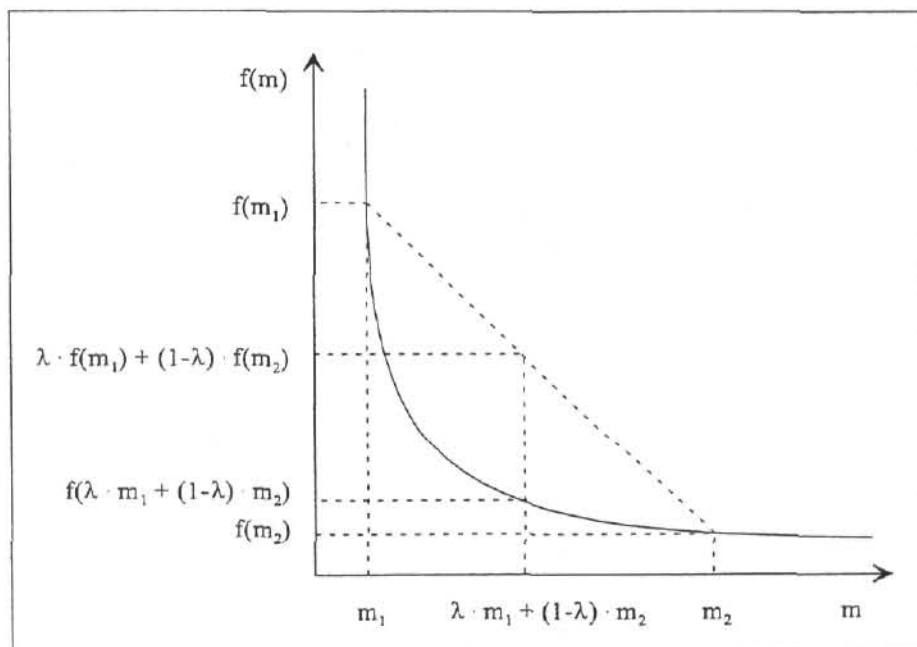


Abbildung 9: Beweis der Konvexität für eine gegebene Fertigungslosgröße bei Berücksichtigung unterschiedlicher Transportlose

Die Ungleichung CC-13.2 kann mittels $f(m)$ ausgedrückt werden durch:

$$f[\lambda \cdot m_1 + (1-\lambda) \cdot m_2] \leq \lambda \cdot f(m_1) + (1-\lambda) \cdot f(m_2) \quad \text{CC-13.3}$$

Aus der Abbildung 9 kann entnommen werden, daß CC-13.3 für $0 \leq \lambda \leq 1$ immer gilt. Folglich ist auch die in diesem Abschnitt untersuchte Funktion für einen gegebenen Wert der Fertigungslosgröße konvex bezüglich m .

Anhang D

Zulässigkeit des Startwertes im modifizierten Optimierungsalgorithmus

Es gilt zu beweisen, daß die kontinuierliche Kostenfunktion $K(m)$ im Punkt $m_{\text{opt}}^G(x_{\text{opt}}^o)$ eine negative Steigung besitzt. Hierzu wird $K(m)$ nach m abgeleitet:

$$K(m) = 2 \cdot B \cdot \sqrt{(k_{R,s} + k_T \cdot m) \cdot \left\{ \frac{c_{L,s} \cdot A(q_1, m)}{x_{p,s}} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \cdot c_{L,s} \right\}} \quad \text{G 3-13}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K(m)}{\partial m} &= B \cdot \frac{1}{\sqrt{(k_{R,s} + k_T \cdot m) \cdot \left\{ \frac{c_{L,s} \cdot A(q_1, m)}{x_{p,s}} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \cdot c_{L,s} \right\}}} \cdot \\ &\quad \left[\frac{k_{R,s} \cdot c_{L,s} \cdot A'(q_1, m)}{x_{p,s}} + \frac{k_{T,s} \cdot m \cdot c_{L,s} \cdot A'(q_1, m)}{x_{p,s}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_{T,s} \cdot c_{L,s} \cdot A(q_1, m)}{x_{p,s}} + \frac{1}{2} \cdot k_{T,s} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \cdot c_{L,s} \right] < 0 \quad \text{DD-1} \end{aligned}$$

Um zu zeigen, daß $K(m)$ im Punkt $m_{\text{opt}}^G(x_{\text{opt}}^o)$ eine negative Steigung besitzt, reicht es aus nachzuweisen, daß der Ausdruck in eckigen Klammern negativ ist, weil sowohl der Bedarf B als auch der Wurzelausdruck in DD-1 in jedem Fall positive Werte aufweisen. Division des relevanten Ausdrucks durch $A'(q_1, m)$ führt zu einer Umkehrung des Ungleichheitszeichens, weil $A'(q_1, m) < 0$ (vgl. G 3-17) gilt.

$$\frac{k_{R,s} \cdot c_{L,s}}{x_{p,s}} + \frac{k_{T,s} \cdot m \cdot c_{L,s}}{x_{p,s}} + \frac{k_{T,s} \cdot c_{L,s} \cdot A(q_1, m)}{x_{p,s} \cdot A'(q_1, m)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{k_{T,s}}{A'(q_1, m)} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s+1}} - \frac{1}{x_{p,s}} \right) \cdot c_{L,s} > 0$$

Verwendung der eingeführten Vereinfachungen L und Z sowie Substitution der Ausdrücke A (vgl. G 2-28.1) und A' (vgl. G 3-17) führt zu:

$$\begin{aligned} &\frac{k_{R,s} \cdot c_{L,s}}{x_{p,s}} + \frac{k_{T,s} \cdot m \cdot c_{L,s}}{x_{p,s}} - \frac{k_{T,s} \cdot c_{L,s}}{x_{p,s}} \cdot \frac{(L-1)}{(Z-1)} \cdot \frac{(Z-1)^2}{(L-1) \cdot \ln(L) \cdot Z} \\ &- \frac{1}{2} \cdot \frac{k_{T,s} \cdot \left(\frac{1}{x_{p,s}} - \frac{1}{x_{p,s+1}} \right) \cdot c_{L,s} \cdot (Z-1)^2}{(L-1) \cdot \ln(L) \cdot Z} > 0 \end{aligned}$$

$$k_{R,s} \cdot c_{L,s} + k_{T,s} \cdot \frac{\ln(Z)}{\ln(L)} \cdot c_{L,s} - \frac{k_{T,s} \cdot c_{L,s} \cdot (Z-1)}{\ln(L) \cdot Z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{k_{T,s} \cdot c_{L,s} \cdot (Z-1)^2}{\ln(L) \cdot Z} > 0$$

$$k_{R,s} \cdot c_{L,s} \cdot \ln(L) \cdot Z + k_{T,s} \cdot \ln(Z) \cdot Z \cdot c_{L,s} - k_{T,s} \cdot c_{L,s} \cdot (Z-1) - \frac{1}{2} \cdot k_{T,s} \cdot c_{L,s} \cdot (Z-1)^2 > 0$$

DD-2

Die für die Fertigungslosgröße x_{opt}^0 optimale Transporthäufigkeit $m_{\text{opt}}^G(x_{\text{opt}}^0)$ muß der folgenden Bedingung genügen (vgl. G 3-18):

$$k_{R,s} = \frac{k_{T,s} \cdot (Z-1)^2}{2 \cdot \ln(L) \cdot Z} \quad \text{G 3-18.1}$$

Einsetzen von G 3-18.1 in DD-2 führt zu:

$$\frac{1}{2} \cdot k_{T,s} \cdot c_{L,s} \cdot (Z-1)^2 + k_{T,s} \cdot \ln(Z) \cdot Z \cdot c_{L,s} - k_{T,s} \cdot c_{L,s} \cdot (Z-1) - \frac{1}{2} \cdot k_{T,s} \cdot c_{L,s} \cdot (Z-1)^2 > 0$$

$$k_{T,s} \cdot \ln(Z) \cdot Z \cdot c_{L,s} - k_{T,s} \cdot c_{L,s} \cdot (Z-1) > 0$$

$$\ln(Z) > \frac{(Z-1)}{Z}$$

Da $Z > 1$ gilt, kann $\ln(Z)$ durch folgende Potenzreihe ausgedrückt werden:

$$\ln(Z) = \left[\frac{(Z-1)}{Z} + \frac{(Z-1)^2}{2Z^2} + \frac{(Z-1)^3}{3Z^3} + \dots + \frac{(Z-1)^n}{nZ^n} + \dots \right] > \frac{(Z-1)}{Z}$$

Damit ist gezeigt, daß die kontinuierliche Kostenfunktion $K(m)$ im Punkt $m_{\text{opt}}^G(x_{\text{opt}}^0)$ eine negative Steigung besitzt.

Literaturverzeichnis

- Adam, D. (Produktionsdurchführungsplanung, 1990): Produktionsdurchführungsplanung, in: Jacob, H. (Hrsg.), *Industriebetriebslehre*, 4. Aufl., Wiesbaden 1990, S. 673-918.
- Adam, D. (Produktions-Management, 1997): *Produktions-Management*, 8. Aufl., Wiesbaden 1997.
- Bloech, J./Bogaschewsky, R./Götze, U./Roland, F. (Produktion, 1998): *Einführung in die Produktion*, 3. Aufl., Heidelberg 1998.
- Bogaschewsky, R. (Losgröße, 1996): Losgröße, in: Kern, W./Schröder, H.-H./Weber, J. (Hrsg.), *Handwörterbuch der Produktionswirtschaft*, 2. Aufl., Stuttgart 1996, Sp. 1141-1158.
- Bogaschewsky, R. (Planung, 1998): Zentrale versus dezentrale Planung der Fertigungs- und Transportlosgröße, in: Bogaschewsky, R./Götze, U. (Hrsg.), *Unternehmensplanung und Controlling – Festschrift zum 60. Geburtstag von Jürgen Bloech*, Heidelberg 1998, S. 287-307.
- Bogaschewsky, R./Buscher, U. (Transportlosgrößenplanung, 1999): *Simultane Fertigungs- und Transportlosgrößenplanung – ein statischer Ansatz für die Sortenfertigung*, erscheint demnächst in *WiSt*.
- Bogaschewsky, R./Buscher, U./Lindner, G. (Simultanplanung, 1999): *Simultanplanung von Fertigungslosgröße und Transportlosgrößen in mehrstufigen Fertigungssystemen – Zwei statisch deterministische Ansätze bei unrestringierten Kapazitäten*, Arbeitsbericht des Lehrstuhls für Betriebswirtschaftslehre, insbesondere Produktionswirtschaft, *Dresdner Beiträge zur Betriebswirtschaftslehre*, Nr. 30, Dresden 1999.
- Domschke, W./Scholl, A./Voß, S. (Produktionsplanung, 1993): *Produktionsplanung, Ablauforganisatorische Aspekte*; Berlin et al. 1993.
- Glass, C. A./Gupta, J. N. D./Potts, C. N. (Lot Streaming, 1994): Lot Streaming in Three-Stage Production Processes, in: *European Journal of Operational Research*, Vol. 75 (1994), Nr. 2, S. 378-394.
- Goyal, S. K. (Note, 1976): Note On „Manufacturing Cycle Time Determination for a Multi-Stage Economic Production Quantity Model“, in: *Management Science*, Vol. 23 (1976), Nr. 3, S. 332-333.
- Goyal, S. K. (Optimum Production Quantity, 1977): Determination of Optimum Production Quantity for a Two-Stage Production System, in: *Operational Research Quaterly*, Vol. 28 (1977), Nr. 4, S. 865-870.
- Goyal, S. K. (Alternative Approach, 1978): An Alternative Approach for Determining Economic Production Quantity in a Two-Stage Production System - A Rejoinder, in: *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 30 (1978), Nr. 2, S. 177-179.

- Goyal, S. K. (Economic batch quantity, 1978): Economic Batch Quantity in a Multi-Stage Production System, in: International Journal of Production Research, Vol. 16 (1978), Nr. 4, S. 267-273.
- Goyal, S. K./Szendrovits, A. Z. (Lot Size Model, 1986): A Constant Lot Size Model with Equal and Unequal Sized Batch Shipments between Production Stages, in: Engineering Costs and Production Economics, Vol. 10 (1986), S. 203-210.
- Hadley, G. (Programmierung, 1969): Nichtlineare und dynamische Programmierung, Berlin 1969.
- Szendrovits, A. Z. (Manufacturing Cycle Time, 1975): Manufacturing Cycle Time Determination for a Multi-Stage Economic Production Quantity Model, in: Management Science, Vol. 22 (1975), Nr. 3, S. 298-308.
- Szendrovits, A. Z. (Rejoinder, 1976): On The Optimality Of Sub-Batch Sizes for a Multi-Stage EPQ Modell - A Rejoinder, in: Management Science, Vol. 23 (1976), Nr. 3, S. 334-338.
- Szendrovits, A. Z. (Comment, 1978): A Comment on Determination of Optimum Production Quantity for a Two-Stage Production System, in: Journal of the Operational Research Society, Vol. 29 (1978), Nr. 10, S. 1017-1020.
- Szendrovits, A. Z./Drezner, Z. (Multi-Stage Production, 1980): Optimizing Multi-Stage Production with Constant Lot Size and Varying Numbers of Batches, in: Omega, Vol. 8 (1980), Nr. 6, S. 623-629.
- Szendrovits, A. Z./Truscott, W. G. (Manufacturing Cycle Time, 1989): Fundamentals of Scheduling: The Manufacturing Cycle Time, in: Wild, R. (Hrsg.), International Handbook of Production and Operations Management, London 1989, S. 324-347.
- Szendrovits, A. Z./Wesolowsky, G. O. (Variations in Optimizing, 1979): Variations in Optimizing Serial Multi-Stage Production/Inventory Systems, in: Ritzman, L. P. et al. (Hrsg.), Disaggregation Problems in Manufacturing and Service Organizations, Boston et al. 1979, S. 329-352.
- Truscott, W. G. (Scheduling Production, 1985): Scheduling Production Activities in Multi-Stage Batch Manufacturing Systems, in: International Journal of Production Research, Vol. 23 (1985), Nr. 2, S. 315-328.
- Truscott, W. G. (Capacity-Constrained Transportation Activities, 1986): Production Scheduling with Capacity-Constrained Transportation Activities, in: Journal of Operations Management, Vol. 6 (1986), Nr. 3, S. 333-348.