

Beschreibung des dynamischen Verhaltens eines linearen Systems im Frequenzbereich

- **Frequenzgang:** Übertragung **sinusförmiger Signale** unterschiedlicher Frequenzen.
 - **Amplitude** und **Phasenverschiebung** des Ausgangssignals ist **frequenzabhängig**.
 - Darstellung als komplexe Funktion: **Frequenzgang $G(j\omega)$**
 - **Amplitudengang** (frequenzabhängige Systemverstärkung).
 - **Phasengang** (Phasenverschiebung zwischen Ausgangs- und Eingangssignal).
 - **$G(j\omega)$ als Randfunktion von $G(s)$ ($G(j\omega) = G(s=j\omega)$).**
- **Ortskurvendarstellung (Nyquist-Ortskurve).**
- **Bode-Diagramm.**



➤ Ortskurve und Bodediagramm des PT_1 -Systems.

- Amplitudengang kann durch zwei Asymptoten angenähert werden. **Schnittpunkt bei $\omega_E = 1/T$.**
- ω_E : Knick-, Eck- bzw. Grenzfrequenz.
- **3 dB**: Differenz Amplitudengang und horizontale Asymptote bei ω_E .
- Nach ω_E fällt Amplitudengang mit **20 dB / Dekade** ab.
- Phasenverschiebung von **0 \rightarrow -90°**
- Phasenverschiebung bei ω_E : **-45°**



- **Ortskurve und Bodediagramm des PT_2 -Systems.**
 - **Reelle Pole:** Reihenschaltung zweier PT_1 -Systeme.
 - **Komplexe Pole:** Charakterisierung durch Dämpfungsgrad D und Eigenfrequenz ω_0 .
 - Amplitudengang kann durch zwei Asymptoten angenähert werden. Schnittpunkt bei ω_0 .
 - Nach ω_0 fällt Amplitudengang mit **40 dB / Dekade** ab.
 - Phasenverschiebung von **0** \Rightarrow **-180°**.
 - Phasenverschiebung bei ω_0 : **-90°**
 - Maximum der Resonanzüberhöhung bei $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1-2D^2}$.

Differentialgleichung:

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_2 \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = K_I u(t)$$

$$a_0 = 0$$

Sprungantwort:

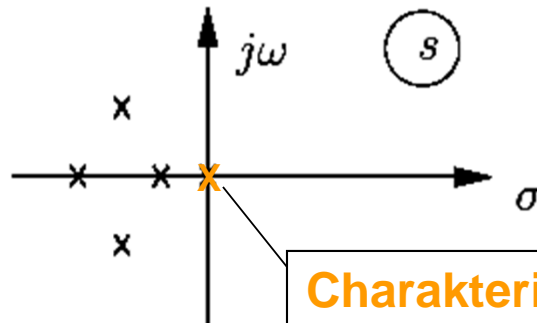


Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{K_I}{s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n}$$

$$= \frac{K_I}{s} \cdot \frac{1}{(1 + \bar{a}_1 s + \dots + \bar{a}_{n-1} s^{n-1})}$$

Pole:

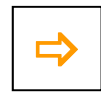


Charakteristisch: Pol im Ursprung



Frequenzgang:

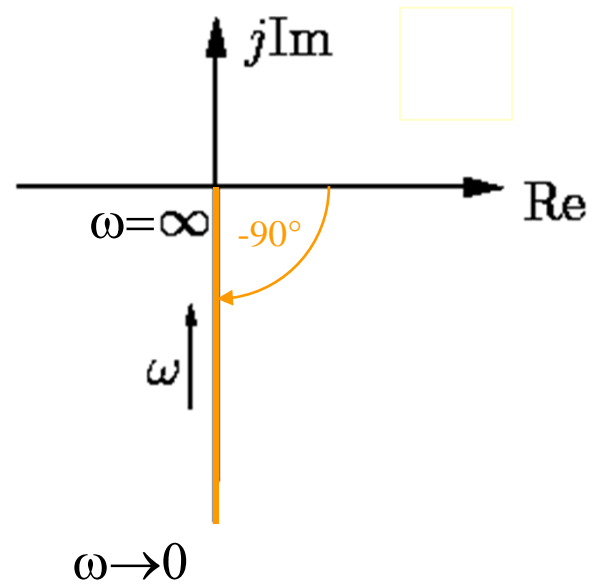
$$G(j\omega) = \frac{K_I}{j\omega}$$



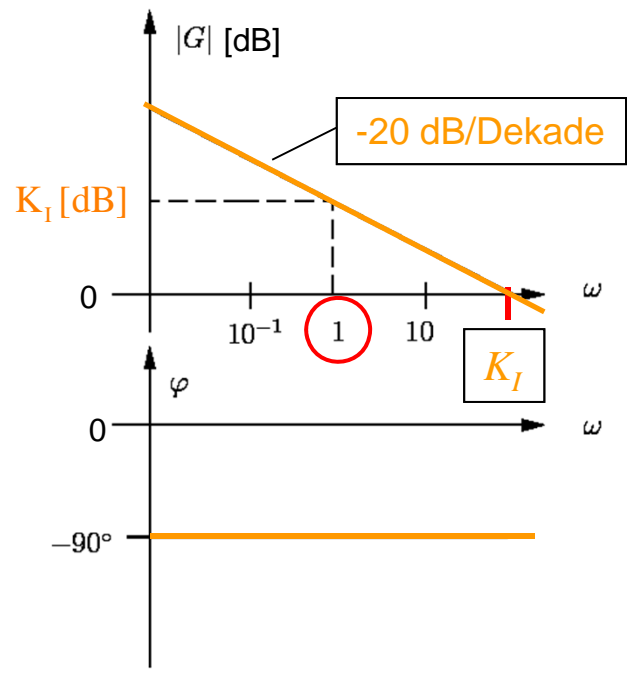
$$G(j\omega) = -j \cdot K_I/\omega$$

$$|G(j\omega)| = K_I/\omega$$

Ortskurve:



Bodediagramm:



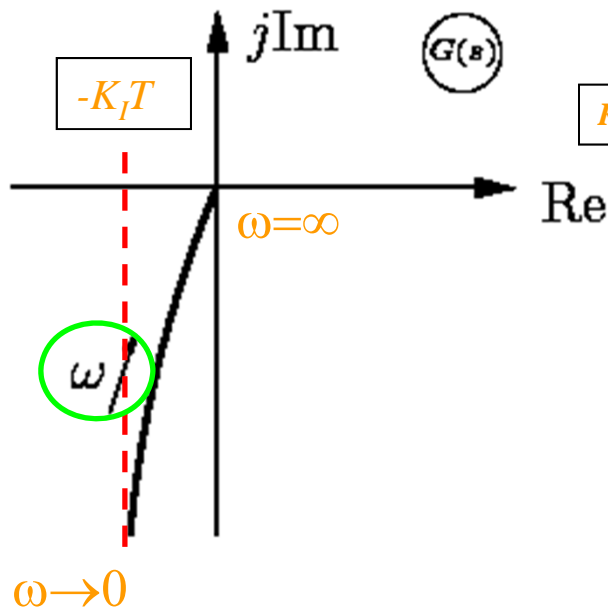
Frequenzgang: IT₁-System

Reihenschaltung von I- und PT₁-Glied

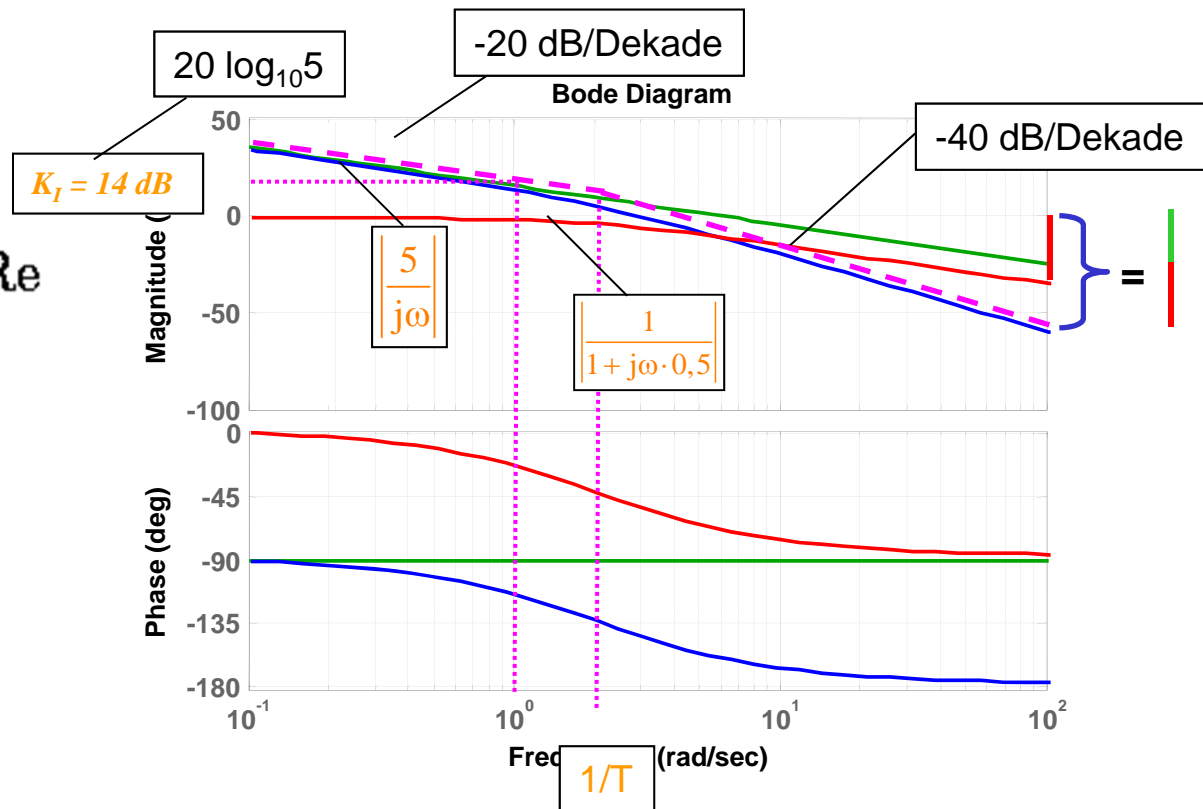
Frequenzgang:

$$G(j\omega) = \frac{K_I}{j\omega(1 + j\omega T)} = \frac{-K_I T}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{K_I}{\omega(1 + \omega^2 T^2)}$$

Ortskurve:

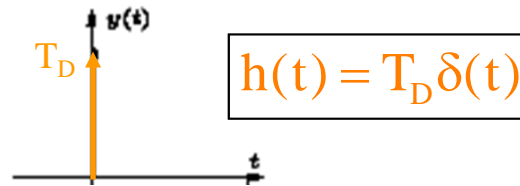


Bodediagramm: (K_I = 5, T=0,5)



Differentialgleichung: $y(t) = T_D \dot{u}(t)$

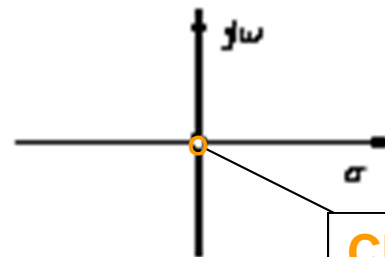
Sprungantwort:



Übertragungsfunktion: $G(s) = T_D s$

Pole: - - - - -

Nullstellen:



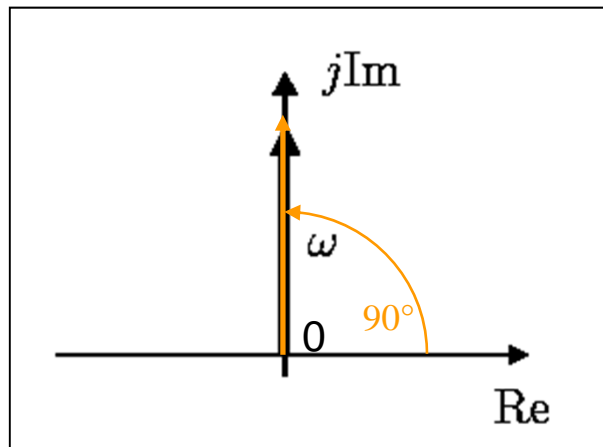
Charakteristisch: Nullstelle im Ursprung



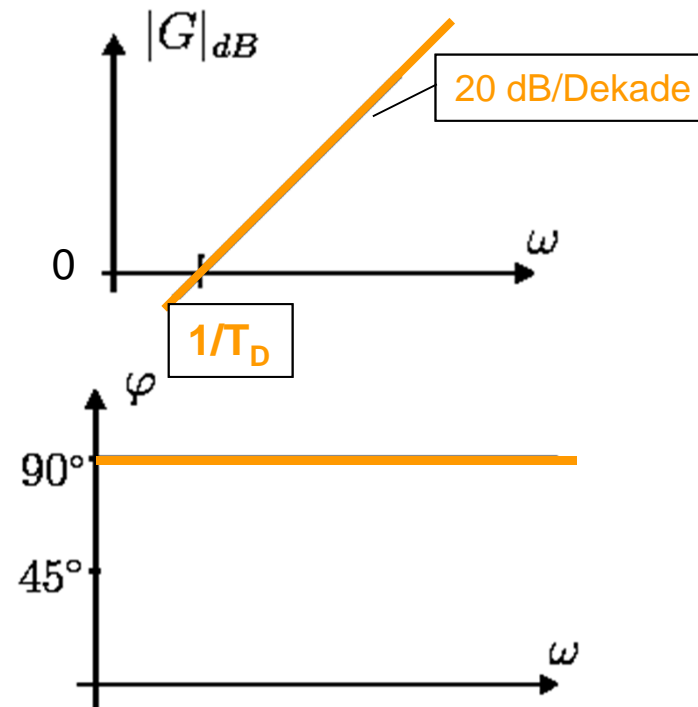
Frequenzgang:

$$G(j\omega) = jT_D\omega \Rightarrow |G(j\omega)| = T_D\omega$$

Ortskurve:



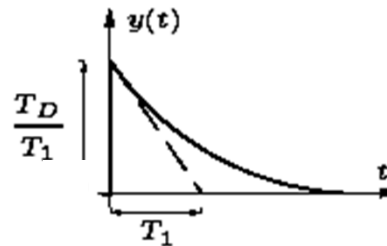
Bodediagramm:



Differentialgleichung:

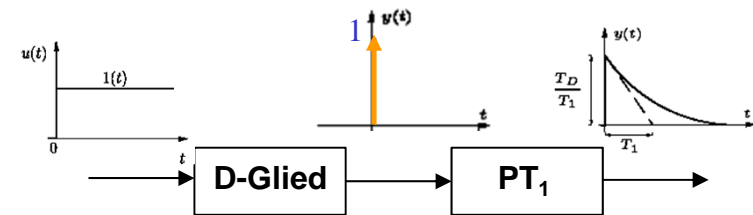
$$T_D \dot{y}(t) + y(t) = T_D \dot{u}(t)$$

Sprungantwort:

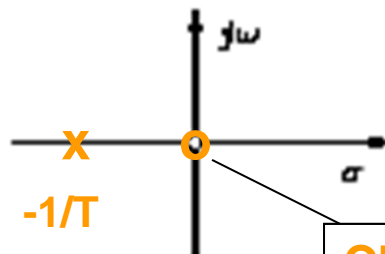


Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{T_D s}{T s + 1}$$



Pole:



Reihenschaltung PT₁- und D-Glied

Nullstellen:

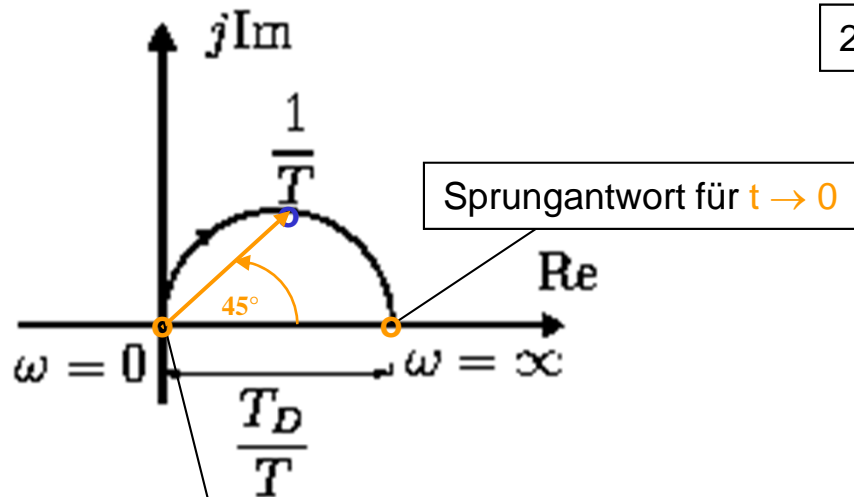
Charakteristisch: Nullstelle im Ursprung



Frequenzgang:

$$G(j\omega) = \frac{T_D j\omega}{(1 + j\omega T)} = \frac{\omega^2 T T_D}{\omega^2 T^2 + 1} + j \frac{\omega T_D}{\omega^2 T^2 + 1}$$

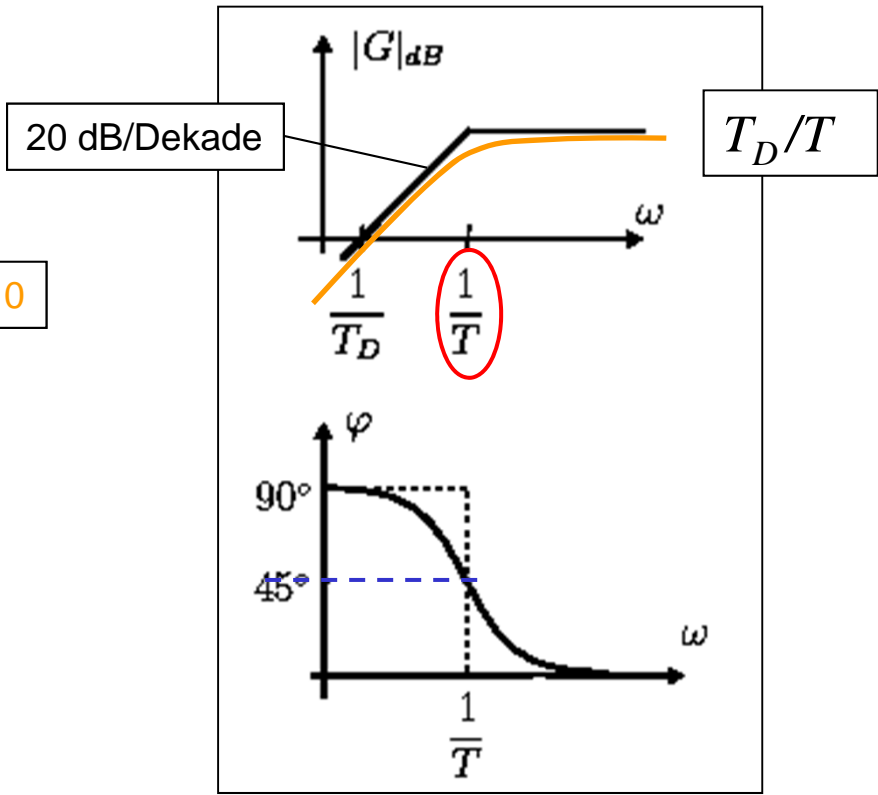
Ortskurve:



Sprungantwort für $t \rightarrow 0$

Sprungantwort für $t \rightarrow \infty$

Bodediagramm:

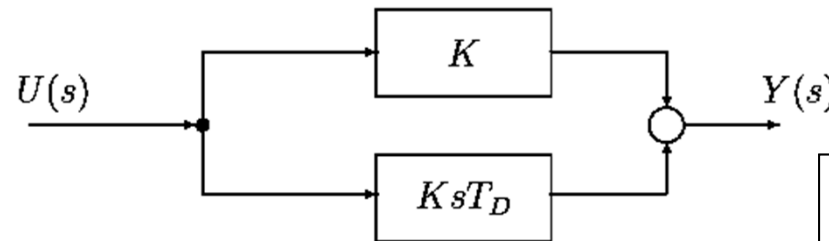


20 dB/Dekade

T_D/T



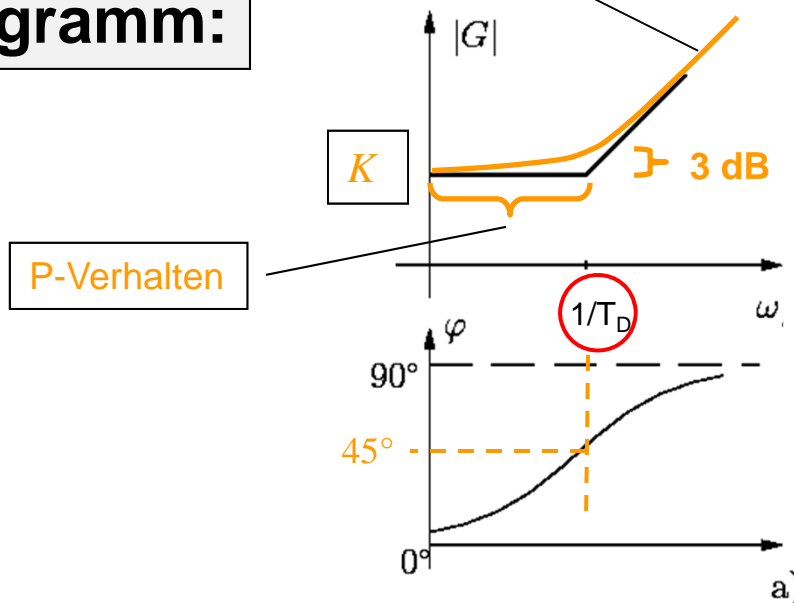
PD-System: **Parallelschaltung** eines P- und eines D-Gliedes



$$G(j\omega) = K + j\omega K T_D$$

20 dB/Dekade (D-Verhalten)

Bodediagramm:



$$|G(j\omega)| = \sqrt{K^2 + (\omega K T_D)^2}$$

$$= K \sqrt{1 + (\omega T_D)^2}$$

Für $\omega = 1/T_D$ ergibt sich:

$$|G| = K\sqrt{1+1} = K\sqrt{2}$$

$$|G|_{dB} = K_{dB} + 3,03 \text{ dB}$$



Definition 2.1:

Phasenminimumsysteme sind Systeme **ohne** Totzeit, deren rationale Übertragungsfunktionen $G(s)$ nur Pole und Nullstellen in der **linken** s-Halbebene haben.



Zwischen der Betragskennlinie (**Amplitudengang**) und der Phasenkennlinie (**Phasengang**) besteht ein eindeutiger Zusammenhang.

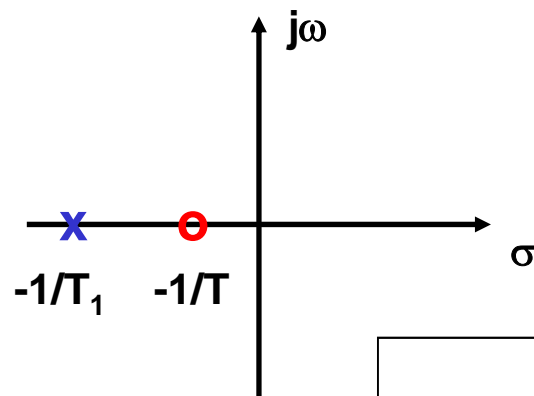
Gesetz von Bode:

$$\varphi(\omega_v) = \frac{2\omega_v}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln |G(j\omega)| - \ln |G(j\omega_v)|}{\omega^2 - \omega_v^2} d\omega$$



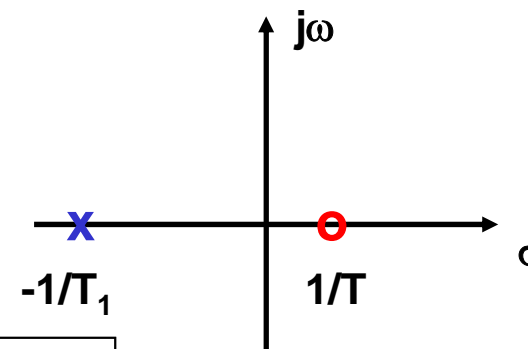
Minimalphasensystem

$$G_1(s) = \frac{1 + sT}{1 + sT_1}$$



Nichtminimalphasensystem

$$G_2(s) = \frac{1 - sT}{1 + sT_1}$$



$$|G_1(j\omega)| = |G_2(j\omega)| = \sqrt{\frac{1 + (\omega T)^2}{1 + (\omega T_1)^2}}$$

Amplitudengänge identisch

$$\varphi_1(\omega) = -\arctan \frac{\omega(T_1 - T)}{1 + \omega^2 T_1 T}$$

$$\varphi_2(\omega) = -\arctan \frac{\omega(T_1 + T)}{1 - \omega^2 T_1 T}$$

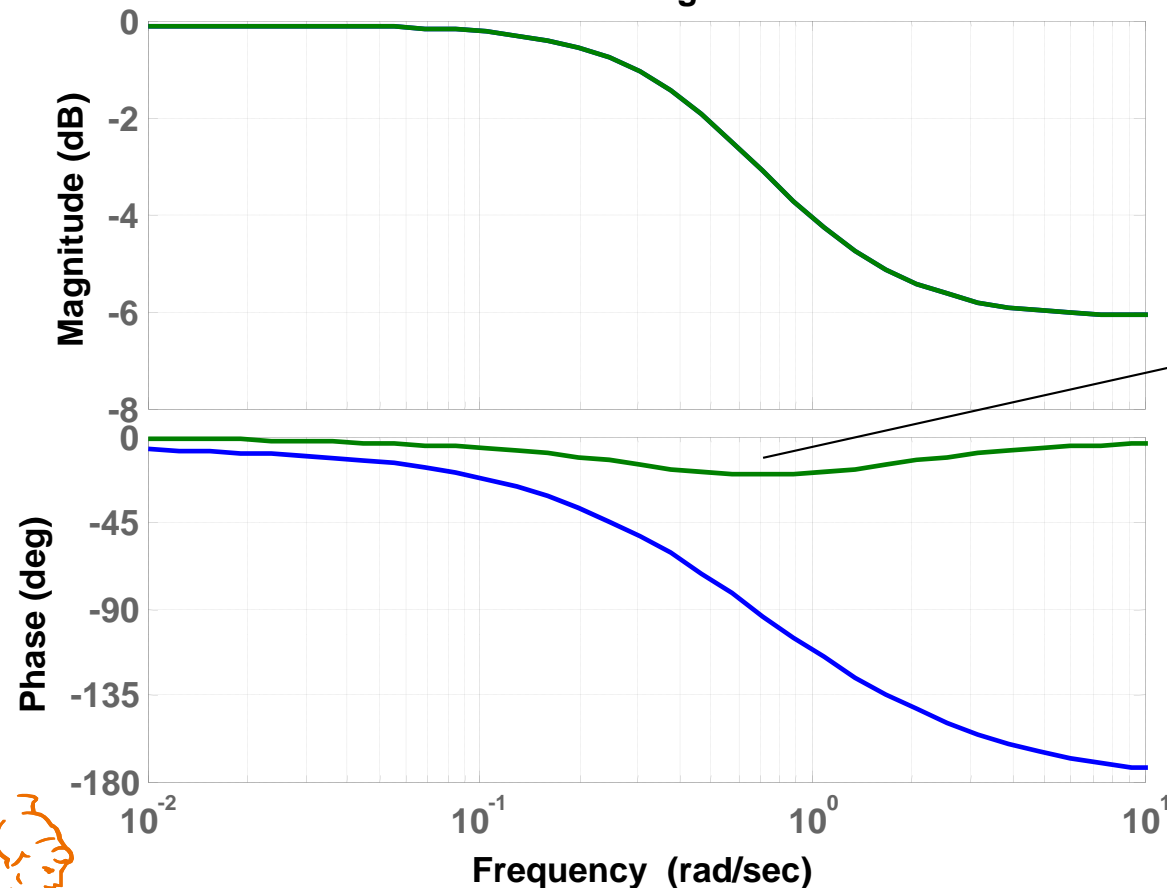
Phasengänge verschieden



Minimalphasensystem

$$G_1(s) = \frac{1 + sT}{1 + sT_1}$$

Bode Diagram



Nichtminimalphasensystem

$$G_2(s) = \frac{1 - sT}{1 + sT_1}$$

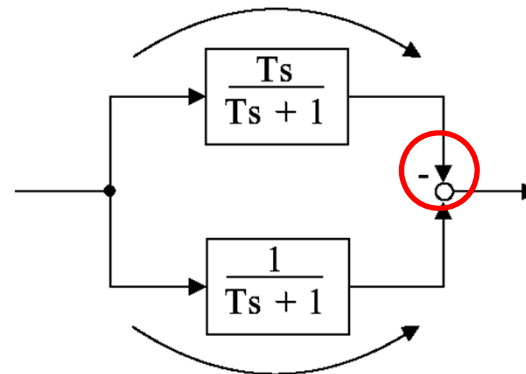
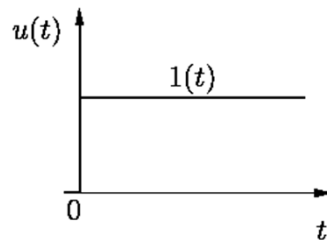
Ein **Phasenminimumsystem** hat bei gegebenen Amplitudengang eine **minimale** Phasenverschiebung.



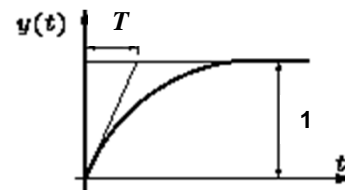
$$G(s) = \frac{1 - sT}{1 + sT}$$

$$= \frac{1}{1 + sT} \frac{Ts}{1 + sT}$$

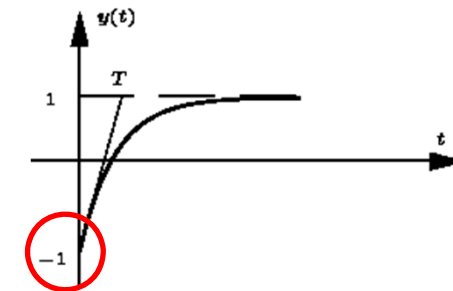
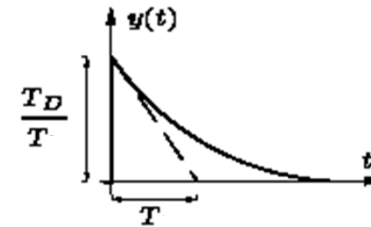
$\underbrace{\hspace{2cm}}_{PT_1}$
 $\underbrace{\hspace{2cm}}_{DT_1}$



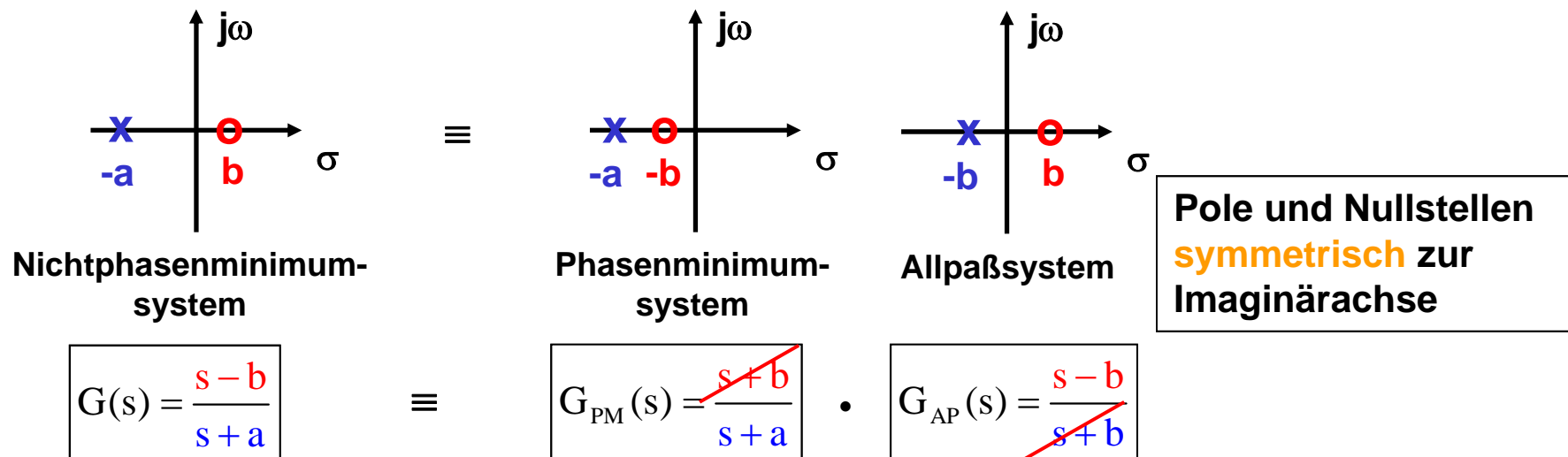
langsamer Wirkungsweg



schneller Wirkungsweg



Jedes **Nichtphasenminimumsystem** kann als Reihenschaltung eines Phasenminimumsystems und eines reinen phasendrehenden Gliedes (**Allpaßglied**) dargestellt werden.



Definition 2.2

Allpaßsysteme sind Systeme, die für alle Frequenzen den **konstanten** Amplitudengang $|G(j\omega)| = 1$ haben. □



Totzeitsystem

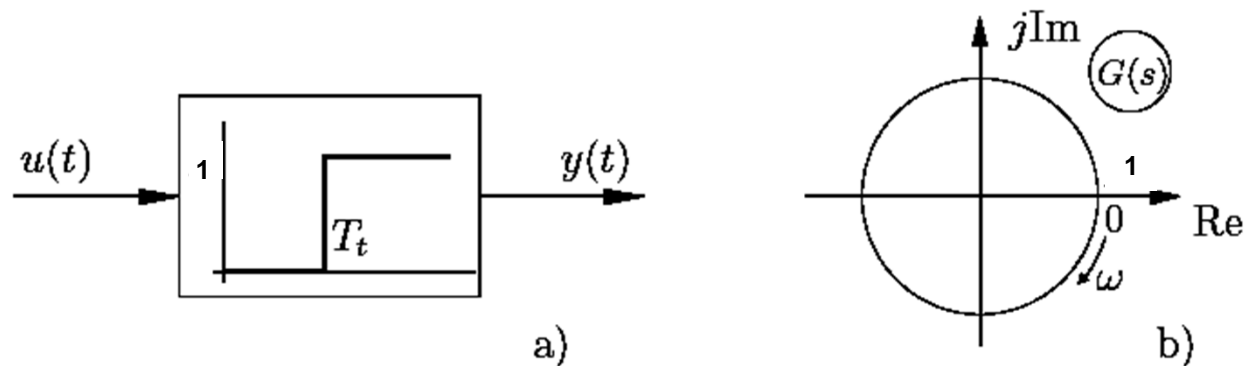
Das Totzeitsystem

$$y(t) = u(t - T_t)$$

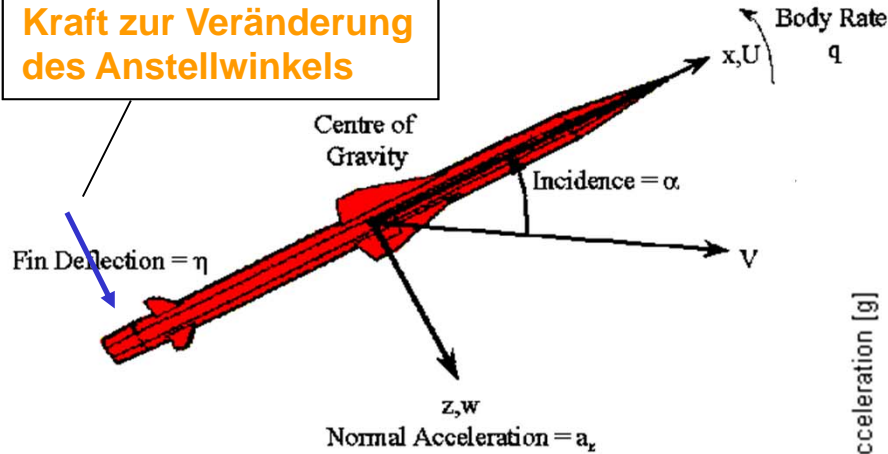
ist ein idealer **Allpaß**, da aus dem Frequenzgang

$$G(j\omega) = e^{-j\omega T_t}$$

folgt, dass es alle harmonischen Signale ohne Amplitudendämpfung mit einer Phasenverschiebung $\varphi(\omega) = -\omega T_t$ überträgt.



Kraft zur Veränderung des Anstellwinkels



Matlab-Demo: Guided Missile Simulation

Allpaßverhalten

