

➤ Ortskurve und Bodediagramm des I-Systems.

- Pol im Ursprung der s-Ebene.
- Amplitudengang ist eine Gerade mit einer Neigung von **20dB/Dekade**, die die 0-dB-Linie bei $\omega=K_I=1/T_I$ schneidet.
- Konstante Phasenverschiebung von **-90°**.

➤ Ortskurve und Bodediagramm des IT_1 -Systems.

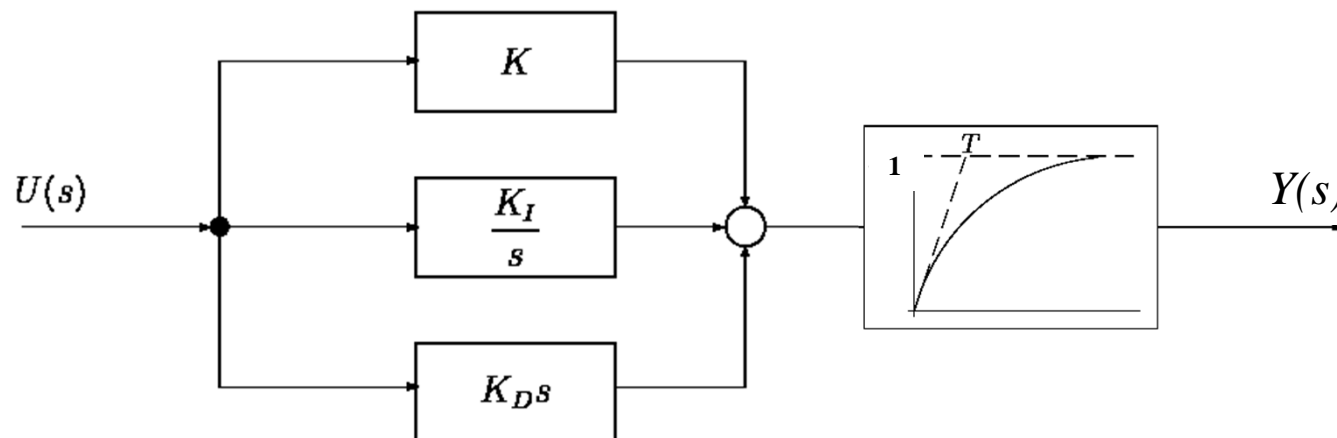
- **Reihenschaltung** eines I- und eines PT_1 -Systems.
- Amplitudengang kann durch zwei Asymptoten angenähert werden. Schnittpunkt bei $\omega_E = 1/T_1$.
- Phasenverschiebung von **-90°** \Rightarrow **-180°**.



- **Ortskurve und Bodediagramm des D-Systems.**
 - **Nullstelle** im Ursprung der s-Ebene.
 - Amplitudengang ist eine Gerade mit einer Steigung von **20dB/Dekade**, die die 0-dB-Linie bei $\omega=1/T_D$ schneidet.
 - Konstante Phasenverschiebung von **+90°**.
- **Ortskurve und Bodediagramm des DT₁-Systems.**
 - **Reihenschaltung** eines D- und eines PT₁-Systems.
 - Amplitudengang kann durch zwei Asymptoten angenähert werden. Schnittpunkt bei $\omega_E = 1/T_1$.
 - Phasenverschiebung von **+90° ⇒ 0°**.



- **PD-, PI- und PID-Systeme.**
 - Parallelschaltung von P-, I- und D-Gliedern.
- **PID-System mit Verzögerung 1. Ordnung (PIDT₁).**
 - Reihenschaltung von PID- und PT₁-System.



➤ Phasenminimumsysteme

- Systeme **ohne** Totzeit, deren rationale Übertragungsfunktionen $G(s)$ nur Pole und Nullstellen in der **linken** s -Halbebene haben.
- Systeme, die bei gegebenem Amplitudengang eine **minimale Phasenverschiebung** aufweisen.

➤ Nichtphasenminimumsysteme

- Die Sprungantwort von Systemen mit einer Nullstelle in der **rechten** s -Halbebene zeigt zunächst eine Reaktion in die falsche Richtung.

- Das Nyquist-Verfahren setzt kein mathematisches Modell der Regelstrecke voraus.
- Das Nyquist-Verfahren erlaubt Aussagen über die **Anzahl** der instabilen Pole des **geschlossenen** Kreises anhand des Frequenzganges $G_0(j\omega)$ des offenen Kreises.



Eine Frequenzgangfunktion kann gewonnen werden

- a) experimentell durch Messungen an einem System und insbesondere Auswertung mittels Bode-Diagramm (Bestimmung der Eckfrequenzen aus den Schnittpunkten der Asymptoten).
- b) analytisch, z. B. aus Übertragungsfunktionen

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i \cdot s^i}{\sum_{l=0}^n a_l \cdot s^l} \cdot e^{-sT_t} ,$$

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i \cdot (j\omega)^i}{\sum_{l=0}^n a_l \cdot (j\omega)^l} \cdot e^{-j\omega T_t} .$$



Vorteile:

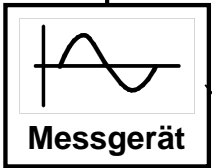
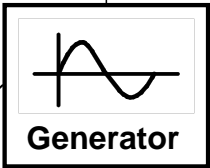
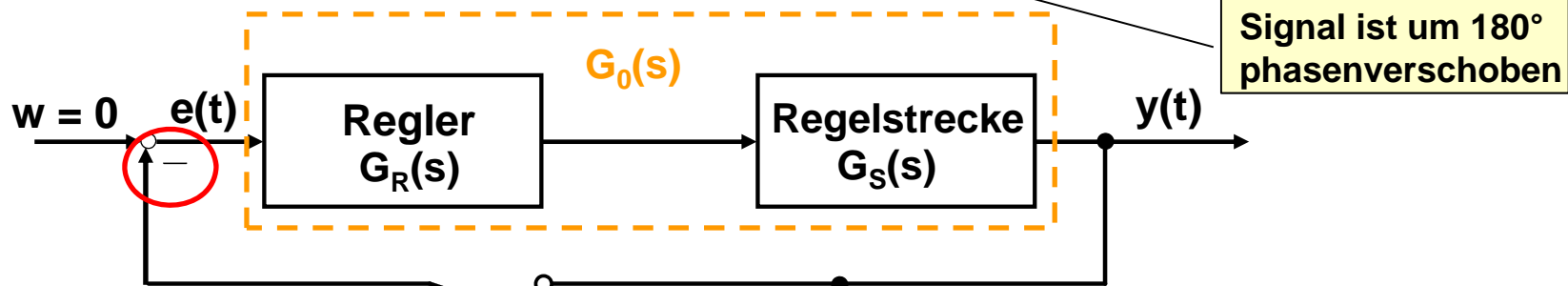
- Die Ortskurve läßt sich aus einer Reihenschaltung der einzelnen Regelkreisglieder ermitteln, wenn deren Kennwerte bekannt sind.
- Experimentell durch **Messungen** ermittelte Frequenzgänge der Regelkreisglieder können direkt berücksichtigt werden.
- Das Verfahren ermöglicht nicht nur die Untersuchung von Systemen mit **konzentrierten** Parametern, sondern auch von solchen mit **verteilten** Parametern (z.B. Totzeit-Systeme (vgl. SRT – Skript, Abschnitt 2.5.3)).
- Mit Hilfe der Frequenzkennlinien-Darstellung von $G_0(j\omega)$ läßt sich nicht nur die **Stabilitätsanalyse** (**Amplituden- und Phasenrand**), sondern auch der **Entwurf** (Synthese) stabiler Regelsysteme durchführen.



Experimentelle Stabilitätsuntersuchung

$$e(t) = -\hat{y}' \cdot \sin(\omega \cdot t) = \hat{y}' \cdot \sin(-\omega \cdot t) = \hat{y}' \cdot \sin(\omega \cdot t - \pi)$$

Bronstein 2003, S. 56 + 57



$$y'(t) = \hat{y}' \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

→

$$y(t) = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi - \pi)$$

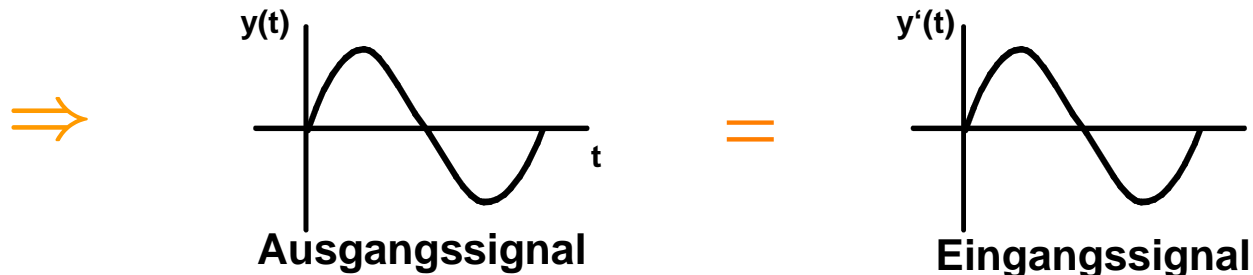
Phasenverschiebung durch Regler und Strecke



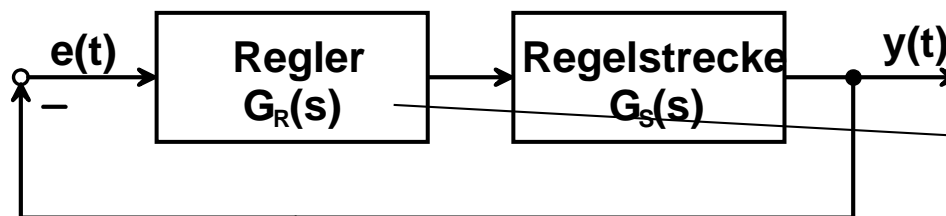
Verstärkung und Frequenz so einstellen, daß die Kreisverstärkung

$$K_0 = \frac{\hat{y}}{\hat{y}'} = 1$$

und die Phasenverschiebung $\varphi = -180^\circ$ wird



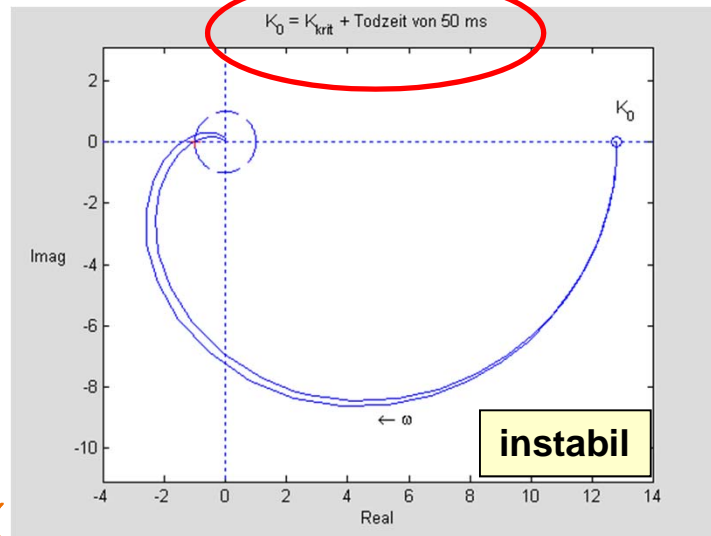
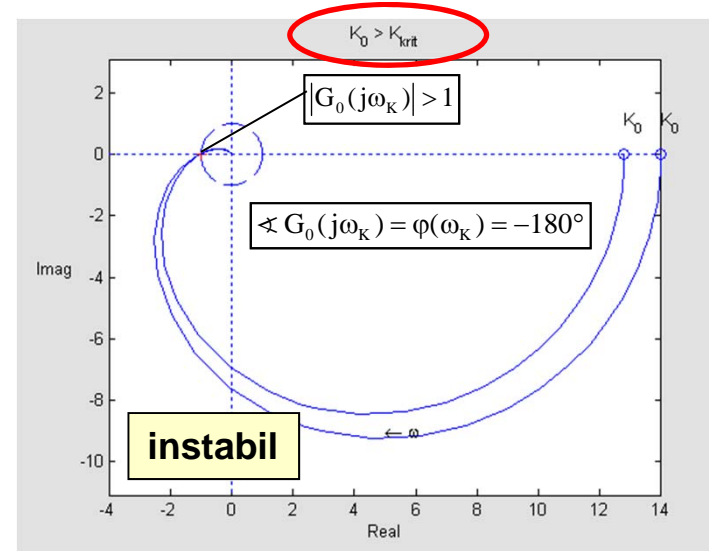
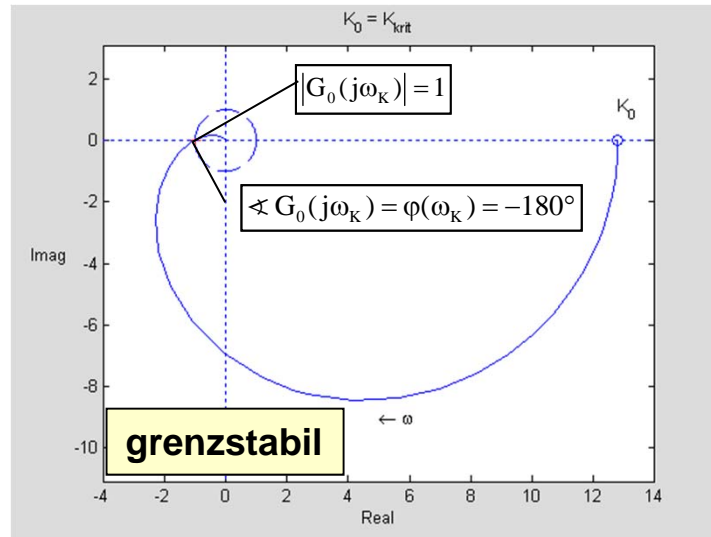
Der Signalgenerator kann entfallen und der Regelkreis kann geschlossen werden.



Frage: Was passiert, wenn K_R erhöht wird?

Im Regelkreis liegt eine selbsterhaltende Schwingung vor.





Totzeitglied erzeugt eine zusätzliche Phasenverschiebung von

$$\varphi(\omega) = -\omega T_t \text{ [rad]}$$



$$\varphi(\omega_K)_{T_t} \approx -14^\circ$$



$$|G_0(j\omega)| > 1$$

bei

$$\angle G_0(j\omega) = -180^\circ$$

Forderung zur Wahrung der asymptotischen Stabilität:

Der offene Regelkreis darf gleichzeitig zwischen Eingangssignal des Reglers und Ausgangssignal der Strecke keine Phasenverschiebung $\varphi = -180^\circ$ und eine Kreisverstärkung $K_0(\varphi) \geq 1$ aufweisen!

Amplitudenbedingung:

$$|G_0(j\omega)| < 1$$



Phasenbedingung:

$$\nexists G_0(j\omega) = \varphi(\omega) = -180^\circ$$

Diese Forderung kann leicht anhand der Nyquist-Ortskurve überprüft werden.



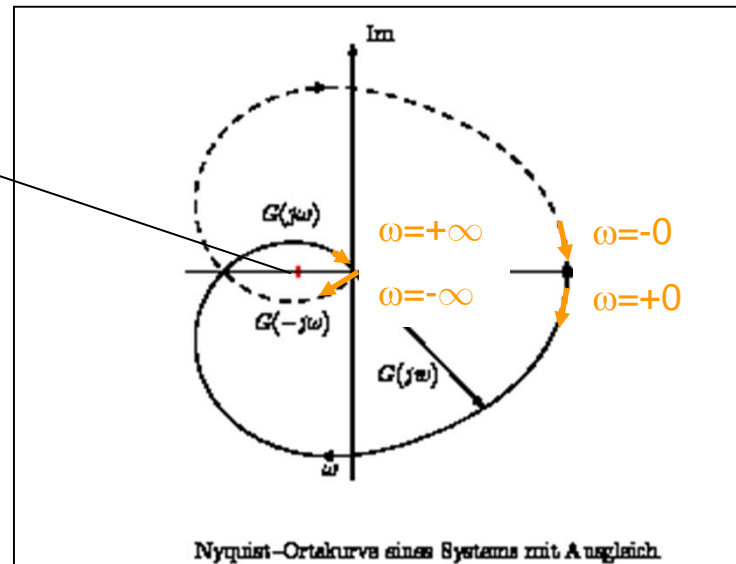
Definition: Kritischer Punkt P_{krit}

Der Punkt $P_{krit} = (-1, j \cdot 0)$ im Nyquist-Diagramm wird als **kritischer Punkt** bezeichnet.

Satz 2.3 : Vereinfachtes Nyquistkriterium

Für die Stabilität des geschlossenen Regelkreises ist bei **stabilem $G_0(s)$** notwendig und hinreichend, daß die Ortskurve $G_0(j\omega)$ bei Änderung der Frequenz ω von $-\infty$ bis $+\infty$ den kritischen Punkt $(-1; j0)$ weder umschließt noch durchdringt. \square

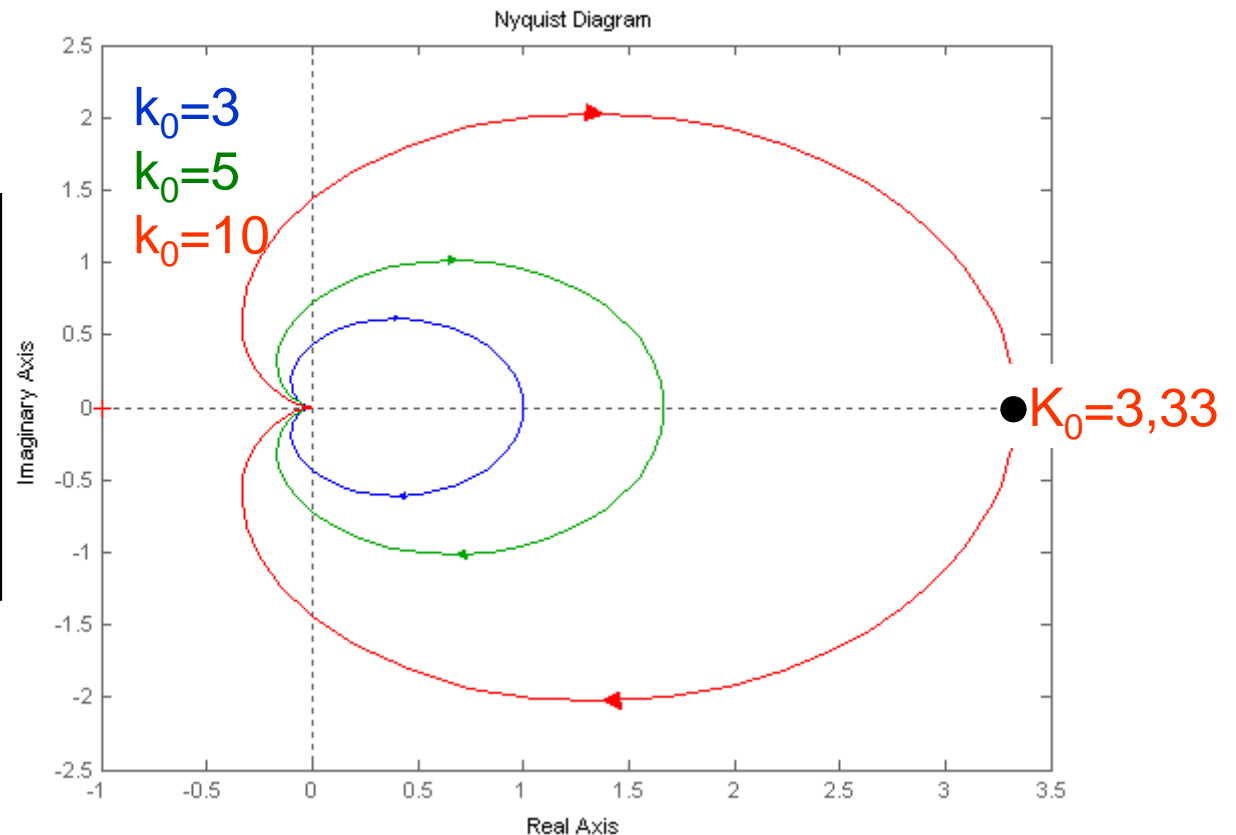
kritischer Punkt $(-1; j0)$



$$G_0(s) = \frac{k_0}{(s+1)(s+3)}$$

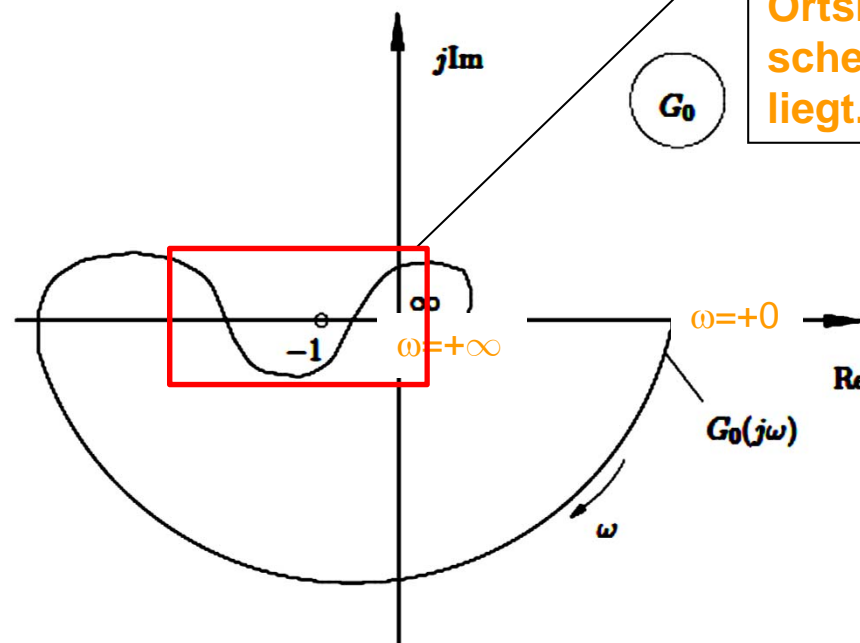
Der Punkt $(-1,0)$ wird für beliebige Verstärkung $k_0 > 0$ **nicht** umschlungen.

Das gilt allgemein für PT_2 -Systeme.



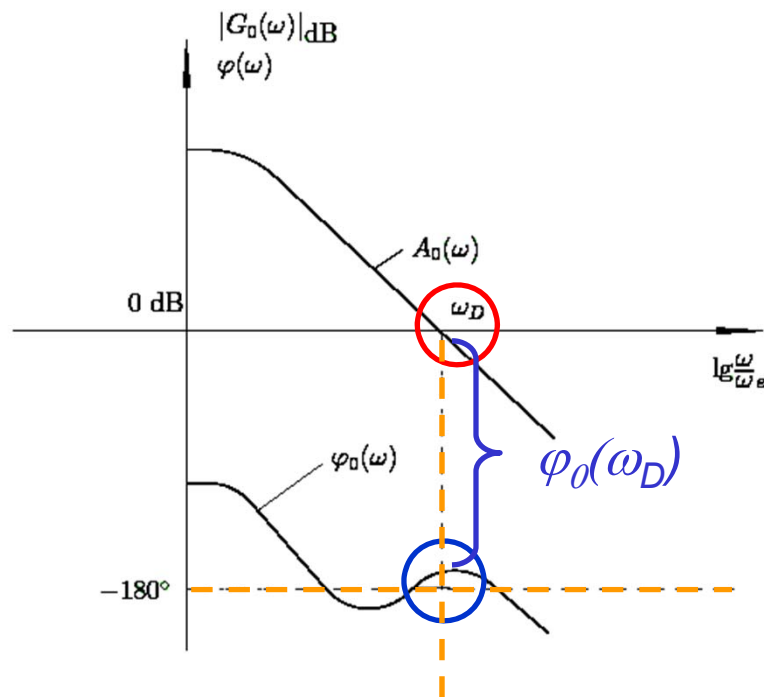
Linke-Hand-Regel. Wenn die Übertragungsfunktion $G_0(s)$ des offenen Regelkreises nur Pole in der linken s -Halbebene hat, ausgenommen einem 1- oder 2-fachen Pol bei $s = 0$, ist der geschlossene Kreis genau dann asymptotisch stabil, wenn bei Änderung der Frequenz ω von $+0$ bis $+\infty$ der kritische Punkt $(-1; j0)$ immer *links* von der Ortskurve $G_0(j\omega)$ liegt (Bild 2.33).

Maßgebend ist der Teil der Ortskurve, der dem kritischen Punkt am nächsten liegt.

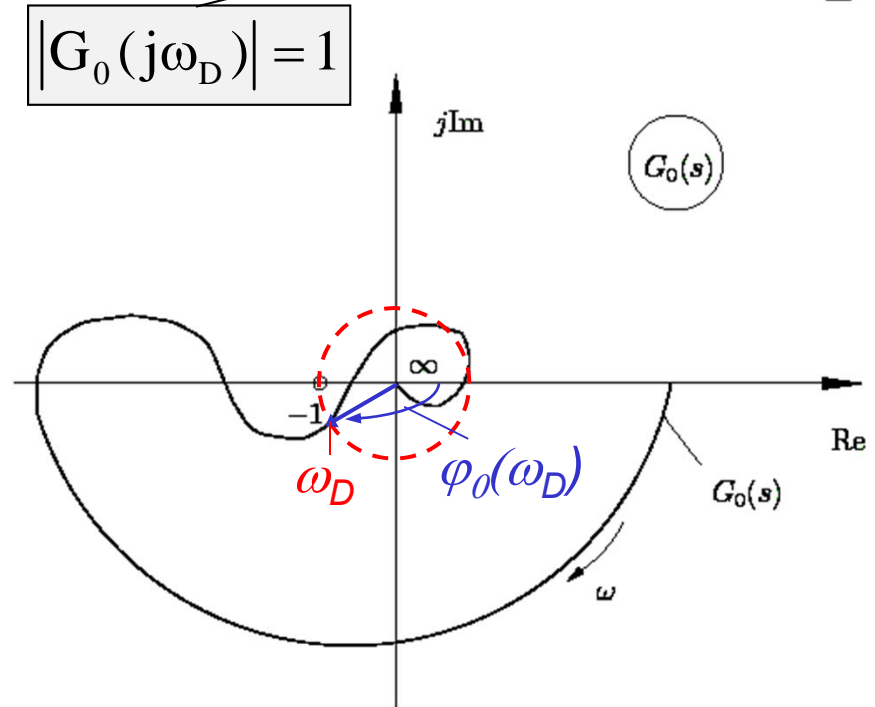


Satz 2.4 : Vereinfachtes Nyquistkriterium im Bode-Diagramm

Wenn die Übertragungsfunktion $G_0(s)$ des offenen Regelkreises nur Pole in der linken s -Halbebene hat, ausgenommen einem 1- oder 2-fachen Pol bei $s = 0$, ist der geschlossene Kreis genau dann asymptotisch stabil, wenn $G_0(j\omega)$ für die Durchtrittsfrequenz ω_D einen Phasenwinkel $\varphi_0(\omega_D) > -180^\circ$ hat □



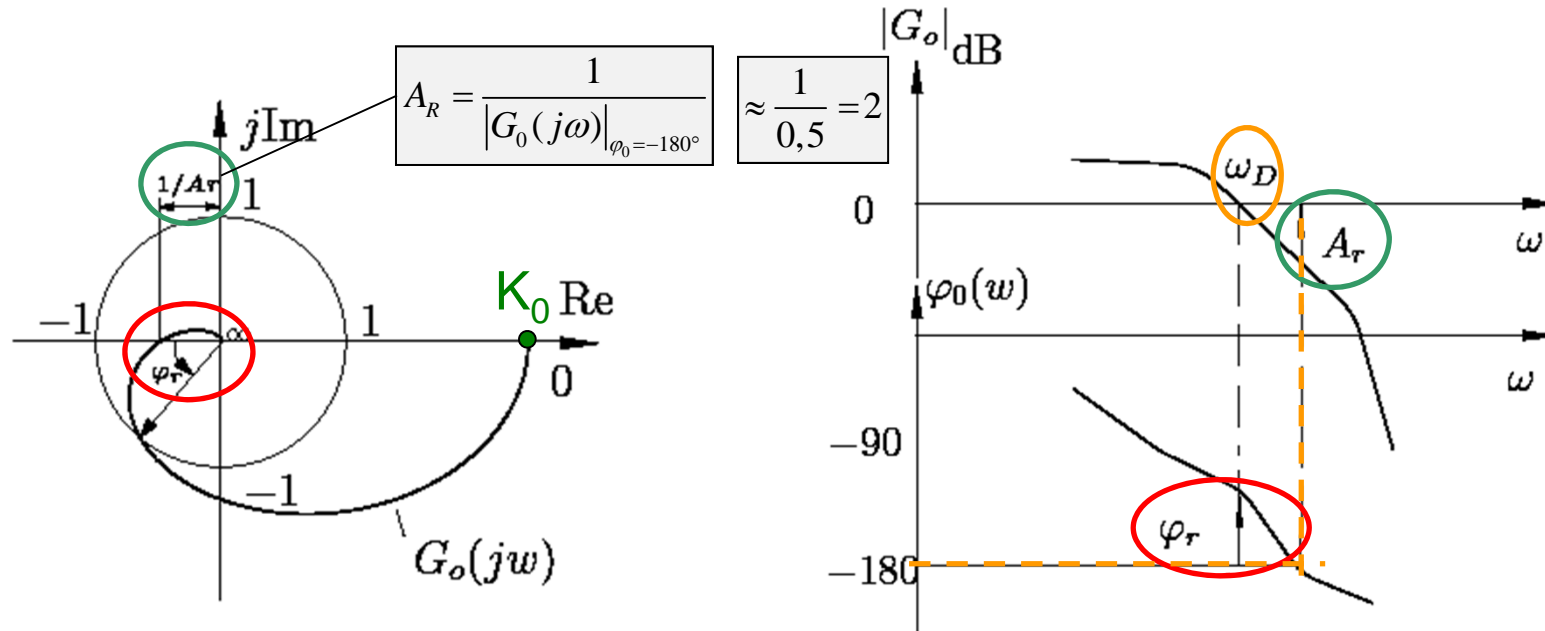
Vereinfachtes Nyquistkriterium im Bode-Diagramm



Beispiel zum vereinfachten Nyquistkriterium

- Eine Stabilitätsreserve ist notwendig, um **Modellunsicherheiten** und **Parameteränderungen** zu berücksichtigen.
- Die Nyquist-Ortskurve zeigt an, wie weit die Ortskurve vom kritischen Punkt (**Stabilitätsrand**) entfernt ist.
- Ein Maß für die Stabilitätsreserve (**robuste Stabilität**) ist der **Amplituden-** bzw. der **Phasenrand**.
- Der **Amplitudenrand** gibt an, wieweit die Verstärkung des **offenen** Kreises erhöht werden kann, bevor der **geschlossene** Kreis **instabil** wird.
- Der **Phasenrand** gibt an, wie groß eine zusätzliche **Phasenverschiebung** im **offenen** Kreis sein darf, bevor der **geschlossene** Kreis **instabil** wird.





Amplituden- und **Phasenrand** in der Ortskurvendarstellung

Amplituden- und **Phasenrand** im Bode-Diagramm

Durchtrittsfrequenz ω_D : Frequenz, bei der die Amplitudenkennlinie die 0-dB-Linie schneidet.



Definition 2.3 : Amplituden- und Phasenrand

1. Der Phasenrand

$$\varphi_R = 180^\circ + \varphi(\omega_D)$$

ist der Abstand der Phasenkenlinie von der -180° -Geraden bei der Durchtrittsfrequenz ω_D , d. h. beim Durchgang der Amplitudenkenlinie durch die 0-dB-Linie ($|G_0| = 1$).

2. Als Amplitudenrand

$$A_R = \frac{1}{|G_0|} \Big|_{\varphi_0 = -180^\circ} ; A_{R_{dB}} = -|G_0|_{dB} \Big|_{\varphi_0 = -180^\circ}$$

$$20 \log_{10} 1 - 20 \log_{10} |G_0|$$

wird der Abstand der Amplitudenkenlinie von der 0-dB-Linie beim Winkel $\varphi_0 = -180^\circ$ bezeichnet. □



Für eine gut gedämpfte Regelung sollten etwa folgende Werte eingehalten werden:

$$A_{R_{dB}} = \begin{cases} 12 \text{ dB} & \text{bis} & 20 \text{ dB} & \text{bei Führungsverhalten} \\ 3,5 \text{ dB} & \text{bis} & 9,5 \text{ dB} & \text{bei Störverhalten} \end{cases}$$

4

10

1,5

3

$$\varphi_R = \begin{cases} 40^\circ & \text{bis} & 60^\circ & \text{bei Führungsverhalten} \\ 20^\circ & \text{bis} & 50^\circ & \text{bei Störverhalten} \end{cases}$$



```
% Vorlesung RT
% Beispiel: Stabilitätsanalyse eines Systems 3-ter Ordnung
```

```
%
%
s=tf('s') % Definition der Üfkt. G(s) = s (Laplace-Variabl
```

```
%
% Definition der Übertragungsfunktion des offenen Kr
```

```
%
k_0 = 1
```

```
%
G_0 = k_0/((s+1)*(s+3)*(s+5))
```

```
%
% Darstellung der Nyquist-Ortskurve in Bild 1
```

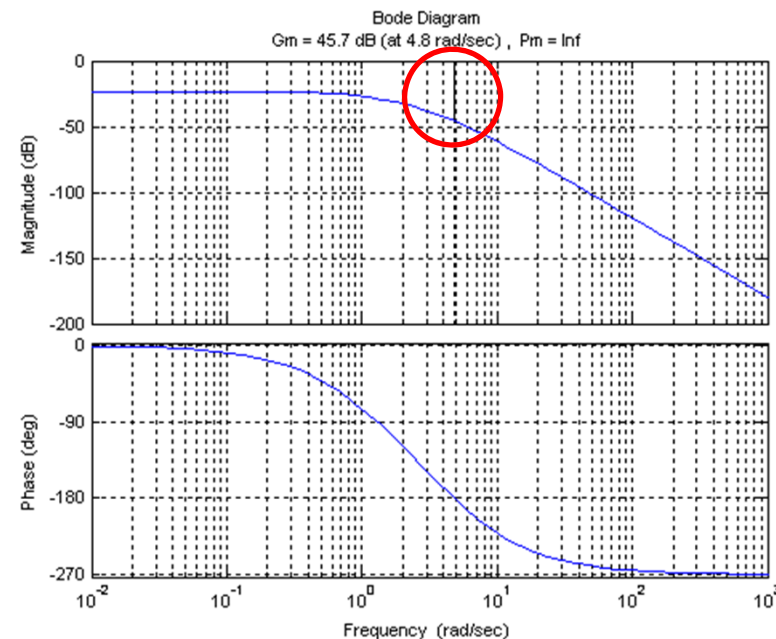
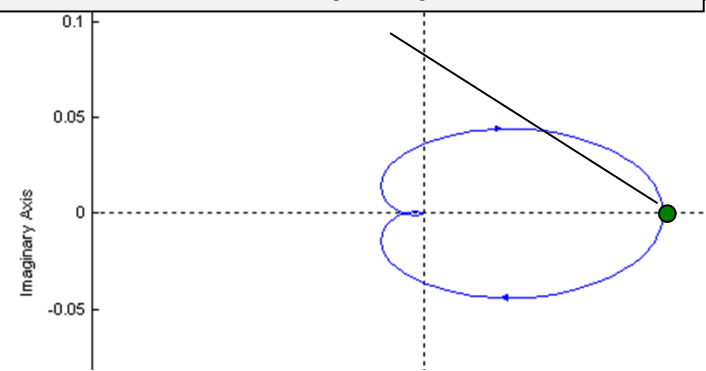
```
%
figure(1)
nyquist(G_0)
hold on
```

```
%
% Bodediagramm mit Stabilitätsrand in Bild 2
```

```
%
figure(2)
margin(G_0)
hold on
```



Systemverstärkung $K_0 = k_0/15 = 0,0667$



Unter der Annahme, dass der offene Regelkreis $G_0(s)$ asymptotisch stabil ist, ist der geschlossene Kreis asymptotisch stabil, wenn

$$|G_0(j\omega)| < 1 \quad \forall \omega$$

gilt.

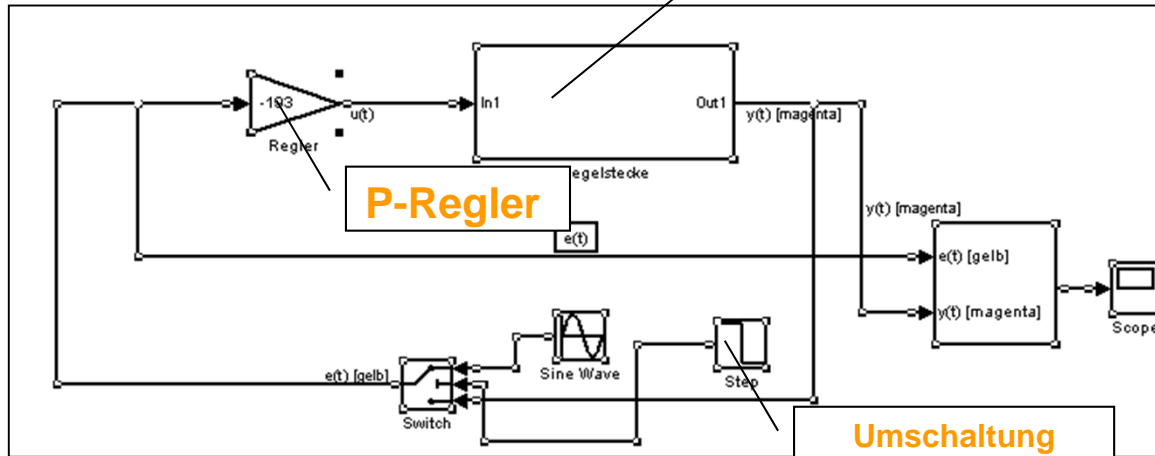
Anmerkungen:

- Small-Gain-Theorem ist nur ein **hinreichendes**, nicht aber notwendiges Stabilitätskriterium.
- Small-Gain-Theorem kann auf **nichtlineare** Systeme erweitert werden.



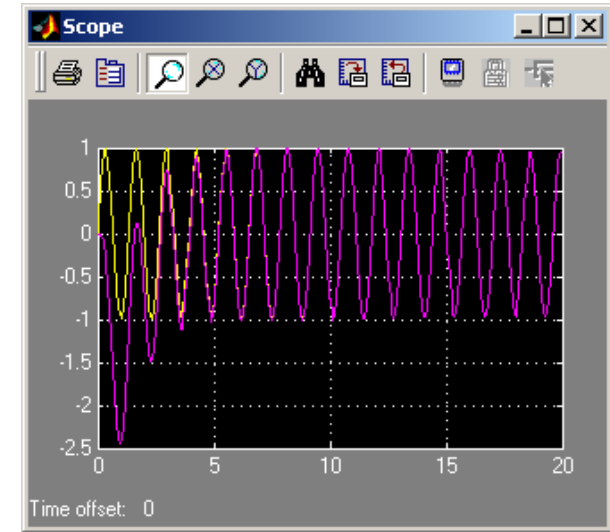
Simulink-Experiment

PT₃-System

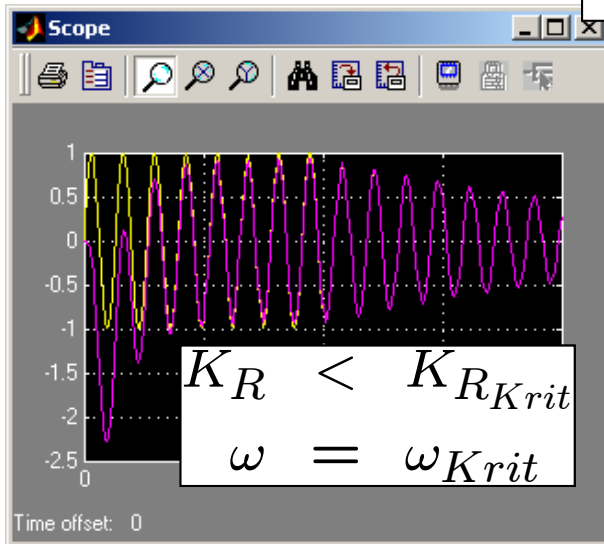


P-Regler

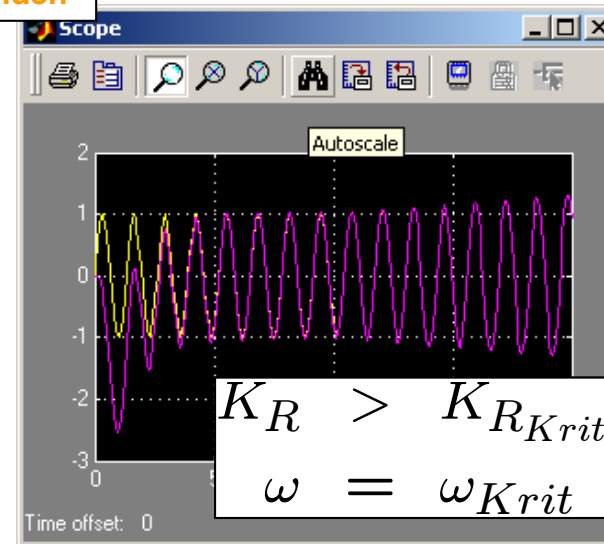
Umschaltung
nach 5 Sekunden



$$K_R = K_{R_{Krit}}, \quad \omega = \omega_{Krit}$$



$$K_R < K_{R_{Krit}} \\ \omega = \omega_{Krit}$$



$$K_R > K_{R_{Krit}} \\ \omega = \omega_{Krit}$$

